

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

NICOLAS LUSIN

WACLAW SIERPINSKI

Sur un ensemble non mesurable B

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 2 (1923), p. 53-72.

[<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1923_9_2_53_0>](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1923_9_2_53_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Sur un ensemble non mesurable B;

PAR NICOLAS LUSIN ET WACLAW SIERPINSKI.

INTRODUCTION.

D'après un théorème connu de M. Baire ⁽¹⁾ toute fonction représentable analytiquement est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait quand on néglige les ensembles de première catégorie par rapport à cet ensemble parfait. « Maintenant une question très importante se pose (écrit M. H. Lebesgue dans son Mémoire *Sur les fonctions représentables analytiquement*), la condition nécessaire fournie par le théorème XVI est-elle suffisante? Et, si elle ne l'est pas, existe-t-il des fonctions qui n'y satisfont pas? Je n'essaierai pas de répondre à ces difficiles questions. »

En 1914, M. Lusin a démontré que la condition de Baire n'est pas suffisante si la puissance du continu est *aleph-un* ⁽²⁾. Il a démontré le même fait en 1917, à l'aide de l'axiome du choix, sans admettre l'hypothèse sur la puissance du continu ⁽³⁾. Le but du présent Mémoire est de *définir effectivement une fonction non représentable analytiquement satisfaisant à la condition de Baire*.

Nous prouverons qu'une telle fonction est fournie par la fonction caractéristique de l'ensemble E défini comme il suit :

Soit

$$(1) \quad r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad \dots$$

⁽¹⁾ H. LEBESGUE, *Journal de Mathématiques*, 6^e série, t. I, 1905, p. 188 (théorème XVI).

⁽²⁾ *Comptes rendus*, t. 158, p. 1259 (Note du 4 mai 1914).

⁽³⁾ *Fundamenta Mathem.*, t. II, 1921, p. 157.

une suite infinie formée de tous les nombres rationnels (différents) intérieurs à l'intervalle $(0, 1)$.

Soient x un nombre réel de l'intervalle $(0, 1)$,

$$(2) \quad x = (c_0, c_1 c_2 c_3 \dots)_2 = c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \frac{c_3}{2^3} + \dots$$

son développement dyadique fini ou infini. Nous désignerons par $E(x)$ l'ensemble formé de tous les nombres r_n de la suite (1), tels qu'on a dans le développement (1) (ou dans un au moins de deux développements dyadiques du nombre x , s'il y en a) $c_n = 1$. E sera l'ensemble de tous les nombres x de l'intervalle $(0, 1)$ pour lesquels l'ensemble $E(x)$ n'est pas bien ordonné (si l'on ordonne d'après la grandeur croissante de nombres rationnels qu'il contient).

Il importe de remarquer que l'ensemble E (dont nous prouverons qu'il est non mesurable B) est défini *sans utiliser les opérations d'addition et de multiplication à partir d'une infinité non dénombrable d'ensembles*, ce qui distingue essentiellement notre exemple du premier exemple d'une fonction non représentable analytiquement, trouvé par M. Lebesgue (*loc. cit.*) (1).

On pourrait encore prouver (ce que nous ne ferons pas dans ce Mémoire) que l'ensemble E est une projection orthogonale d'un ensemble plan mesurable B (F de classe 1) qu'on pourrait même définir effectivement. L'existence des ensembles mesurables B dont les projections ne sont pas mesurables B a été démontré par M. Souslin (2). Ce n'est que par une analyse approfondie de la théorie des ensembles (A) créée par M. Souslin que nous avons obtenu les résultats exposés dans ce Mémoire.

1. Désignons par R l'ensemble de tous les nombres rationnels r satisfaisant à l'inégalité $0 < r < 1$. Si à tout nombre r de R correspond un ensemble fermé (ou vide) F_r , d'un espace à m dimensions, nous dirons qu'on a un système déterminant $S = \{F_r\}$. Nous appelle-

(1) Cf. *Notice sur les travaux scientifiques de M. Henri Lebesgue*, Toulouse, 1922, p. 61.

(2) *Comptes rendus*, Note du 8 janvier 1917.

rons *noyau* du système S l'ensemble de tous les points p de l'espace considéré pour lesquels il existe au moins une suite infinie décroissante de nombres de R

$$r_1 > r_2 > r_3 > \dots,$$

telle que p appartient à chacun des ensembles

$$F_{r_1}, F_{r_2}, F_{r_3}, \dots$$

Nous appellerons *ensemble* (A) tout ensemble qui est noyau d'un système déterminant (¹).

Soit E le noyau d'un système déterminant $S = \{F_r\}$. Posons (pour tout nombre r de R)

$$(1) \quad F_r^0 = F_r;$$

$$(2) \quad F_r^x = F_r^{x-1} \sum_{\rho < r} F_\rho^{x-1},$$

si x est un nombre ordinal de première espèce, la somme $\sum_{\rho < r}$ s'étendant à tous les nombres ρ de R qui sont $< r$, et

$$(3) \quad F_r^x = \prod_{\xi < x} F_r^\xi,$$

si x est un nombre ordinal de seconde espèce, le produit $\prod_{\xi < x}$ s'étendant à tous les nombres ordinaux $\xi < x$.

Les ensembles F_r^x , définis ainsi par l'induction transfinie, sont évidemment mesurables B pour tout nombre r de R et tout nombre ordinal $x < \Omega$ (Ω désignant le plus petit nombre ordinal de la troisième classe).

D'après (2) et (3), on trouve

$$(4) \quad F_r^\alpha > F_r^\beta \quad \text{pour } \alpha < \beta.$$

Posons

$$(5) \quad S^x = \sum_r F_r^x,$$

(¹) Cette définition ne coïncide pas avec celle de M. Souslin (*Comptes rendus*, Note du 8 janvier 1917); or, on pourrait démontrer qu'elle lui est équivalente; ce ne sera pas d'ailleurs nécessaire pour notre but.

la sommation \sum_r s'étendant à tous les nombres r de R . Les ensembles S^α seront tous mesurables B pour $\alpha < \Omega$. D'après (4) on a

$$(6) \quad S^\alpha \supset S^\beta \quad \text{pour } \alpha < \beta.$$

2. Nous prouverons que

$$(7) \quad E = \prod_{\alpha < \Omega} S^\alpha.$$

Soit p un point de E . L'ensemble E étant noyau du système $\{F_r\}$, il existe une suite infinie décroissante de nombres de R ,

$$(8) \quad r_1 > r_2 > r_3 > \dots,$$

telle que

$$(9) \quad p \in F_{r_n} \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

D'après (1) nous avons donc

$$(10) \quad p \in F_{r_n}^0 \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots$$

Supposons qu'on a

$$(11) \quad p \in F_{r_n}^\xi \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

pour tous les nombres ordinaux $\xi < \alpha$, où α est un nombre ordinal donné > 1 .

Soit n un indice donné. Si α est de première espèce, on a, d'après (2),

$$(12) \quad F_{r_n}^\alpha = F_{r_n}^{\alpha-1} \sum_{\rho < r_n} F_\rho^{\alpha-1}.$$

D'après l'hypothèse, (11) est vrai pour $\xi = \alpha - 1$, donc $p \in F_{r_n}^{\alpha-1}$ et $p \in F_{r_{n+1}}^{\alpha-1}$. Or, d'après (8), on a $r_{n+1} < r_n$ et par suite $F_{r_{n+1}}^{\alpha-1}$ est un terme de la somme $\sum_{\rho < r_n} F_\rho^{\alpha-1}$ qui contient ainsi le point p . Donc p est un point de l'ensemble (12).

(1) $x \in X$ signifie que x est un élément de l'ensemble X .

Si α est un nombre de seconde espèce, nous avons, d'après (3),

$$F_{r_n}^\alpha = \prod_{\xi < \alpha} F_{r_n}^\xi;$$

donc, d'après (11),

$$p \in F_{r_n}^\alpha.$$

La formule (11) est ainsi établie par l'induction transfinie pour tout $\xi < \Omega$. Il en résulte, d'après (5), que

$$p \in S^\alpha \quad \text{pour } \alpha < \Omega;$$

donc $x \in P$, où

$$(13) \quad P = \prod_{\alpha < \Omega} S^\alpha.$$

Or, soit x un point de l'ensemble (13). Nous avons donc

$$p \in S^\alpha \quad \text{pour } \alpha < \Omega;$$

donc, d'après (5),

$$p \in \sum_r F_r^\alpha \quad \text{pour } \alpha < \Omega.$$

La somme \sum_r contenant une infinité dénombrable de termes F_r^α , nous en concluons qu'il existe au moins un nombre r_1 de R tel que la formule

$$p \in F_{r_1}^\alpha$$

subsiste pour une infinité non dénombrable de nombres ordinaux $\alpha < \Omega$; donc, d'après (4), pour tout $\alpha < \Omega$. On a donc aussi, pour tout $\alpha < \Omega$,

$$p \in F_{r_1}^{\alpha+1};$$

donc, d'après (2),

$$p \in \sum_{\rho < r_1} F_\rho^\alpha \quad \text{pour } \alpha < \Omega.$$

La somme $\sum_{\rho < r_1}$ contenant une infinité dénombrable de termes F_ρ^α ($\rho < r_1$), on en tire, comme plus haut, qu'il existe un nombre $r_2 < r_1$ de R , tel que

$$p \in F_{r_2}^\alpha$$

pour une infinité non dénombrable de nombres $\alpha < \Omega$, donc pour tous les $\alpha < \Omega$.

En raisonnant ainsi de suite, on arrive à une suite infinie décroissante de nombres de R , $r_1 > r_2 > r_3 > \dots$, telle que

$$p \in F_{r_n}^\alpha \quad \text{pour } \alpha < \Omega; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

En particulier, pour $\alpha = 0$, on trouve, d'après (1),

$$p \in F_{r_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

ce qui prouve que p est un point de l'ensemble E .

Nous avons ainsi démontré que $E = P$ et la formule (7) est établie.

5. Soient maintenant E et \dot{E} les noyaux respectifs des systèmes $\{F_r\}$ et $\{\dot{F}_r\}$ et supposons qu'on a

$$(14) \quad S^\alpha \cdot \dot{E} \neq 0 \quad \text{pour } \alpha < \Omega.$$

Nous prouverons qu'il en résulte que

$$E \cdot \dot{E} \neq 0.$$

De (14) et de la formule

$$\dot{E} = \prod_{\beta < \Omega} \dot{S}^\beta,$$

analogue à la formule (7), résulte

$$(15) \quad S^\alpha \cdot \dot{S}^\beta \neq 0 \quad \text{pour } \alpha < \Omega, \beta < \Omega.$$

Soit β un nombre ordinal $< \Omega$. D'après (5), la formule (15) donne

$$\sum_r F_r^\alpha \cdot \dot{S}^\beta \neq 0 \quad \text{pour } \alpha < \Omega.$$

La somme \sum_r contenant une infinité dénombrable de termes, on en tire qu'il existe un nombre $r(\beta)$ de R tel que l'inégalité

$$(16) \quad F_{r(\beta)}^\alpha \cdot \dot{S}^\beta \neq 0$$

subsiste pour une infinité non dénombrable de nombres ordinaux α ; donc, d'après (4), pour tout $\alpha < \Omega$.

L'ensemble R étant dénombrable, l'ensemble de tous les nombres $r(\beta)$ correspondant aux nombres ordinaux $\beta < \Omega$ est au plus dénombrable. Or, la formule (16) subsistant pour tout $\alpha < \Omega$ et tout $\beta < \Omega$, on en déduit l'existence d'un nombre r_1 de R (indépendant de β), tel qu'on a

$$(17) \quad F_{r_1}^\alpha \cdot \dot{S}^\beta \neq 0 \quad \text{pour } \alpha < \Omega, \beta < \Omega.$$

En se servant de la formule pour \dot{S}^β analogue à la formule (7) et en raisonnant comme plus haut, on déduit de (17) l'existence d'un nombre r'_1 de R tel que

$$(18) \quad F_{r_1}^\alpha \cdot \dot{F}_{r'_1}^\beta \neq 0 \quad \text{pour } \alpha < \Omega, \beta < \Omega.$$

D'après (18), nous avons donc aussi

$$F_{r_1}^{\alpha+1} \cdot \dot{F}_{r'_1}^\beta \neq 0 \quad \text{pour } \alpha < \Omega, \beta < \Omega;$$

donc, d'après (2),

$$F_{r_1}^\alpha \sum_{\beta < r_1} F_\beta^\alpha \cdot \dot{F}_{r'_1}^\beta \neq 0 \quad \text{pour } \alpha < \Omega, \beta < \Omega.$$

La somme $\sum_{\beta < r_1}$ contenant une infinité dénombrable de termes, on en déduit, comme plus haut, l'existence d'un nombre $r_2 < r_1$ de R tel que

$$F_{r_1}^\alpha \cdot F_{r_2}^\alpha \cdot \dot{F}_{r'_1}^\beta \neq 0 \quad \text{pour } \alpha < \Omega, \beta < \Omega.$$

En remplaçant, dans cette formule, β par $\beta + 1$ et en raisonnant comme plus haut, on prouve l'existence d'un nombre $r'_2 < r'_1$ de R, tel que

$$F_{r_1}^\alpha \cdot F_{r_2}^\alpha \cdot \dot{F}_{r'_1}^\beta \cdot \dot{F}_{r'_2}^\beta \neq 0 \quad \text{pour } \alpha < \Omega, \beta < \Omega.$$

En raisonnant ainsi de suite, on arrive à deux suites infinies de nombres de R,

$$r_1 > r_2 > r_3 > \dots \quad \text{et} \quad r'_1 > r'_2 > r'_3 > \dots,$$

telles qu'on a

$$F_{r_1}^\alpha \cdot F_{r_2}^\alpha \dots F_{r_n}^\alpha \cdot \check{F}_{r'_1}^\beta \cdot \check{F}_{r'_2}^\beta \dots \check{F}_{r'_n}^\beta \neq 0 \quad \text{pour } \alpha < \Omega, \beta < \Omega; n = 1, 2, \dots;$$

donc, en particulier, pour $\alpha = \beta = 0$, d'après (1),

$$(19) \quad F_{r_1} \cdot F_{r_2} \dots F_{r_n} \cdot \check{F}_{r'_1} \cdot \check{F}_{r'_2} \dots \check{F}_{r'_n} \neq 0 \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots$$

Les ensembles F_r et $\check{F}_{r'}$, étant fermés, la formule (19) prouve (d'après un théorème connu de Cantor) l'existence d'un point p commun à tous les ensembles F_{r_n} et $\check{F}_{r'_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), donc aux ensembles E et \check{E} .

C. Q. F. D.

Nous avons donc démontré que si $E\check{E} = 0$, la formule (14) ne subsiste pas pour tout $\alpha < \Omega$. Il existe donc alors un indice $\alpha < \Omega$, tel que $S^\alpha \cdot \check{E} = 0$, c'est-à-dire : $\check{E} \subset CS^\alpha$.

En particulier, si le complémentaire de E , CE , est un ensemble (A), nous pouvons poser $\check{E} = CE$ et nous obtenons, pour un $\alpha < \Omega$: $CE \subset CS^\alpha$, donc $E \supset S^\alpha$, par conséquent, d'après (7), $E = S^\alpha$. Donc :

Si E et CE sont des ensembles (A), E est mesurable B (1).

4. E étant le noyau du système $\{F_r\}$ et p un point donné (appartenant à E ou non), désignons (pour $\alpha < \Omega$) par $R^\alpha(p)$ l'ensemble de tous les nombres r de R , tels que

$$p \in F_r^\alpha.$$

D'après (4), nous aurons évidemment

$$(20) \quad R^\alpha(p) \supset R^\beta(p) \quad \text{pour } \alpha < \beta.$$

Or, les ensembles $R^\alpha(p)$ sont au plus dénombrables (comme sous-ensembles de R) : il résulte donc de (20) l'existence (pour tout point p donné) d'un plus petit indice $\mu = \mu(p) < \Omega$, tel que

$$(21) \quad R^\mu(p) = R^{\mu+1}(p).$$

(1) M. SOUSLIN, *loc. cit.* — N. LUSIN et W. SIERPINSKI, *Sur quelques propriétés des ensembles (A)* (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie*, 1918, p. 42 ; théorème de Souslin).

Soit r un nombre de $R^{\mu+1}(p)$: on a donc $p \in F_r^{\mu+1}$; donc, d'après (2) (pour $\alpha = \mu + 1$), il existe un nombre $r_1 < r$ de R , tel que $p \in F_{r_1}^\mu$; donc, d'après (21) aussi, $p \in F_{r_1}^{\mu+1}$, ce qui donne, d'après (2) (pour $\alpha = \mu + 2$), $p \in F_{r_1}^{\mu+2}$. Donc R appartient à $R^{\mu+2}(p)$. On a ainsi $R^{\mu+1}(p) \subset R^{\mu+2}(p)$; donc, d'après (20), $R^{\mu+1}(p) = R^{\mu+2}(p)$. D'après (3) et (20), on en déduit sans peine par l'induction transfinie que

$$(22) \quad R^\alpha(p) = R^\mu(p) \quad \text{pour } \alpha \leq \mu = \mu(p).$$

Posons, pour $\alpha < \Omega$,

$$(23) \quad T^\alpha = \sum_r (F_r^\alpha - F_r^{\alpha+1});$$

ce seront évidemment des ensembles mesurables B.

Si $p \in T^\alpha$, on a, pour un nombre r de R , $p \in F_r^\alpha$ et p non $\in F_r^{\alpha+1}$; donc $R^\alpha(p) \neq R^{\alpha+1}(p)$, ce qui donne, d'après (22), $\alpha < \mu(p)$.

Or, soit p un point tel que $\mu(p) > \alpha$: on a donc, d'après la définition de l'indice $\mu(p)$, $R^\alpha(p) \neq R^{\alpha+1}(p)$ et il existe, d'après (20), un nombre r de R , tel que $p \in F_r^\alpha$ et p non $\in F_r^{\alpha+1}$; donc, d'après (23), $p \in T^\alpha$.

Nous avons donc démontré que

$$(24) \quad T^\alpha = \bigcup_p [\mu(p) > \alpha] \quad \text{pour tout } \alpha < \Omega$$

$\left\{ \bigcup_p [W(p)] \right\}$ désignant l'ensemble de tous les points p de l'espace considéré satisfaisant à la condition $W(p)$.

Soit p un point de E tel que $\mu(p) \leq \alpha$. D'après (7), nous avons $E \subset S^\alpha$, donc $p \in S^\alpha$; or, d'après (24), p non $\in T^\alpha$; donc $p \in S^\alpha - T^\alpha$.

Or, soit $p \in S^\alpha - T^\alpha$: nous avons donc p non $\in T^\alpha$; donc, d'après (24), $\mu(p) \leq \alpha$; d'après (22), nous avons donc

$$(25) \quad R^\beta(p) = R^\alpha(p) \quad \text{pour } \beta \geq \alpha.$$

Or, puisque $p \in S^\alpha$, il existe, d'après (5), un nombre r de R , tel que $p \in F_r^\alpha$; donc, d'après (25), nous avons $p \in F_r^\beta$ pour $\beta \geq \alpha$; donc $p \in S^\beta$ pour $\beta \geq \alpha$; donc [d'après (6)] pour tout $\beta < \Omega$, ce qui donne,

d'après (7), $p \in E$. Nous avons ainsi

$$(26) \quad S^\alpha - T^\alpha = E \cdot \bigcup_p [\mu(p) \leq \alpha] \quad (\text{pour } \alpha < \Omega).$$

Puisque pour tout point p on a $\mu(p) < \Omega$, on déduit, de (26), tout de suite la formule

$$(27) \quad E = \sum_{\alpha < \Omega} (S^\alpha - T^\alpha).$$

Les formules (7) et (27) prouvent que *tout ensemble (A) est un produit et aussi une somme de \aleph_1 ensembles mesurables B.*

3. De la définition du noyau E du système $\{F_r\}$ résulte immédiatement que pour qu'un point p appartienne à E , il faut et il suffit que l'ensemble $R^0(p)$ ne soit pas bien ordonné (si on l'ordonne d'après la grandeur croissante des nombres rationnels qui le constituent).

Soit p un point de CE . L'ensemble $R^0(p)$ est donc bien ordonné ou vide : soit α son type ordinal. (Nous considérons l'ensemble vide comme un ensemble bien ordonné du type 0.) Si $R^0(p)$ est vide, nous avons évidemment $\mu(p) = 0$. Or, supposons que $\alpha > 0$ et soient

$$(28) \quad r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_\xi < \dots \quad (\xi < \alpha)$$

les nombres de R constituant $R^0(p)$, rangés d'après leurs grandeurs.

Soit λ un nombre ordinal donné quelconque : nous prouverons que l'ensemble $R^\lambda(p)$ coïncide avec l'ensemble H^λ de tous les nombres

$$r_\xi, \quad \text{où } \lambda \leq \xi < \alpha.$$

L'égalité

$$(29) \quad R^\lambda(p) = H^\lambda$$

est vraie pour $\lambda = 0$: supposons qu'elle est vraie pour tous les nombres ordinaux $\lambda < \beta$.

Soient β un nombre de première espèce, r un nombre de $R^\beta(p)$. D'après (20), r est donc un nombre de $R^0(p)$, donc un terme de la suite (28), soit $r = r_\xi$, où $0 \leq \xi < \alpha$. Nous avons donc $p \in F_{r_\xi}^\beta$ et,

d'après (2) : $p \in \sum_{\rho < r_\xi} F_\rho^{\beta-1}$; il existe donc dans R un nombre $\rho < r_\xi$, tel que $p \in F_\rho^{\beta-1}$, donc $\rho \in R^{\beta-1}(p)$, ce qui prouve que r_ξ n'est pas le premier élément de $R^{\beta-1}(p)$ qui est, par hypothèse, $r_{\beta-1}$ [puisque (29) est vrai pour $\lambda = \beta - 1$]. Or, d'après (20), r_ξ est un nombre de $R^{\beta-1}(p)$: nous avons donc $\xi > \beta - 1$, c'est-à-dire $\xi \geq \beta$. Donc

$$(30) \quad R^\beta(p) \subset H^\beta.$$

Or, soit r_ξ un nombre de H^β : nous avons donc $r_\xi > r_{\beta-1}$. De l'hypothèse que (29) est vrai pour $\lambda = \beta - 1$ résulte donc que $r_{\beta-1}$ et $r_\xi > r_{\beta-1}$ appartiennent à $R^{\beta-1}(p)$, donc $p \in F_{r_{\beta-1}}^{\beta-1}$ et $p \in F_{r_\xi}^{\beta-1}$, ce qui donne, d'après (2), $p \in F_{r_\xi}^\beta$, c'est-à-dire $r_\xi \in R^\beta(p)$. On a donc $H^\beta \subset R^\beta(p)$; donc, d'après (30), $R^\beta(p) = H^\beta$.

Soient maintenant β un nombre de seconde espèce, r un nombre de $R^\beta(p)$. Comme plus haut, nous trouvons $r = r_\xi$, où $0 \leq \xi < \alpha$. S'il était $\xi < \beta$, on aurait (β étant de seconde espèce) $\xi + 1 < \beta$. La formule (29) étant, par hypothèse, vraie pour $\lambda < \beta$, donc pour $\lambda = \xi + 1$, on en déduit que r_ξ n'appartient pas à $H^{\xi+1} = R^{\xi+1}(p)$; donc, d'après (20), non plus à $R^\beta(p)$, contrairement à l'hypothèse. Nous avons donc $\xi \geq \beta$, donc (d'après $\xi < \alpha$) r_ξ appartient à H^β . On a donc l'inclusion (30).

Or, soit r_ξ un nombre de H^β : on a donc $\beta \leq \xi < \alpha$ et, par suite, la formule (29) étant, par hypothèse, vraie pour $\lambda < \beta$, r_ξ appartient à tous les ensembles $R^\lambda(p)$ pour $\lambda < \beta$; donc $p \in F_{r_\xi}^\lambda$ pour $\lambda < \beta$, ce qui donne, d'après (3), $p \in F_{r_\xi}^\beta$, donc $r_\xi \in R^\beta(p)$. On a donc $H^\beta \subset R^\beta(p)$; donc, d'après (30), $R^\beta(p) = H^\beta$.

L'égalité (29) est ainsi démontrée par l'induction transfinie pour tout nombre ordinal λ . Il en résulte que les ensembles $R^\lambda(p)$ ($0 \leq \lambda \leq \alpha$) sont distincts (formant une suite décroissante d'ensembles) et que les ensembles $R^\lambda(p)$ sont vides pour $\lambda \geq \alpha$. On a donc $\mu(p) = \alpha$.

Nous avons ainsi démontré que si $p \in CE$, $R^0(p)$ est un ensemble bien ordonné du type $\mu(p)$.

Soit maintenant E un ensemble (A) dont le complémentaire CE est aussi un ensemble (A). Nous avons démontré plus haut qu'il existe dans ce cas un nombre ordinal $\alpha < \Omega$, tel que $E = S^\alpha$.

Or, soit p un point de CE. S'il était $\mu(p) > \alpha$, on aurait, d'après (24), $p \in T^\alpha$, donc, à plus forte raison $p \in S^\alpha$, puisque, d'après (23) et (5), on a $T^\alpha \subset S^\alpha$. Or, c'est impossible, puisque $S^\alpha = E$ et p est un point de CE.

Nous avons donc démontré que si E et CE sont des ensembles (A), il existe un nombre ordinal $\alpha < \Omega$, tel qu'on a $\mu(p) \leq \alpha$ pour tout point p de CE.

Ce résultat nous permettra de construire un ensemble (A) dont le complémentaire n'est pas un ensemble (A).

6. Soit

$$(31) \quad r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad \dots$$

une suite infinie, formée de tous les nombres (différents) de l'ensemble R. Soient x un nombre réel de l'intervalle (0, 1),

$$(32) \quad x = (c_0, c_1 c_2 c_3 \dots)$$

son développement dyadique fini ou infini.

Soit r un nombre donné de R : c'est donc un nombre de la suite (31) et nous avons $r = r_n$, où n est un nombre naturel donné. Désignons par F_r l'ensemble de tous les nombres réels x de l'intervalle (0, 1), tels qu'on a dans le développement (32) (ou dans un au moins de deux développements dyadiques du nombre x s'il y en a) : $c_n = 1$. Les ensembles F_r sont ainsi définis pour tout nombre r de R et l'on voit sans peine qu'ils sont tous fermés (puisque F_{r_n} est une somme de 2^n intervalles fermés). Soit E le noyau du système $\{F_r\}$ (*).

Soit α un nombre transfini $< \Omega$. Les sous-ensembles de R, ordonnés d'après la grandeur des nombres qu'ils contiennent, pouvant, comme l'on sait, représenter tous les types ordinaux dénombrables, il existe un sous-ensemble de R du type α , soit

$$(33) \quad r_{m_1}, \quad r_{m_2}, \quad r_{m_3}, \quad \dots$$

(*) On voit sans peine que E est le même ensemble qui a été défini dans l'introduction.

Posons

$$x = \frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_2}} + \frac{1}{2^{m_3}} + \dots;$$

ce sera, comme on le voit sans peine, un nombre de l'intervalle $(0, 1)$ ayant un développement dyadique unique [puisque l'ensemble (33), ordonné d'après la grandeur de nombres qu'il contient, est bien ordonné du type $\alpha \geq \omega$]. Il résulte de la définition des ensembles F_r qu'on a $x \in F_r$ pour tout nombre r de la suite (33) et réciproquement. Donc l'ensemble (33) coïncide avec l'ensemble $R^0(x)$, et l'on a

$$\mu(x) = \alpha.$$

α pouvant être un nombre transfini quelconque $< \Omega$, nous en concluons qu'il n'existe aucun nombre ordinal $\alpha < \Omega$, tel qu'on ait $\mu(x) \leq \alpha$ pour tout point x de CE, ce qui entraîne, comme nous l'avons démontré plus haut, que CE n'est pas un ensemble (A).

Nous avons ainsi un exemple effectif d'un ensemble (A) dont le complémentaire n'est pas un ensemble (A).

7. Nous prouverons maintenant que tout ensemble (A) de M. Souslin est un ensemble (A) dans notre sens.

Soit donc E_0 un ensemble (A) de M. Souslin, noyau du système déterminant $S \{ \delta_{n_1, n_2, \dots, n_k} \}$, où δ_{n_1, \dots, n_k} sont des ensembles fermés (correspondant aux systèmes finis de nombres naturels n_1, n_2, \dots, n_k) et où l'on a toujours

$$(34) \quad \delta_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}} \subset \delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}.$$

Donc p est un point de l'ensemble E_0 dans ce cas, et seulement dans ce cas, s'il existe une suite infinie de nombres naturels

$$(35) \quad n_1, \quad n_2, \quad n_3, \quad \dots$$

telle que

$$(36) \quad p \in \delta_{n_1, n_2, \dots, n_k} \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \dots$$

Soit N l'ensemble de tous les systèmes finis de nombres natu-

rels (n_1, n_2, \dots, n_k) , ordonné de sorte qu'on ait

$$(37) \quad (n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}) \prec (n_1, n_2, \dots, n_k) \prec \\ \prec (n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k + 1, n_{k+1}, \dots, n_{k+l})$$

(pour tous les nombres naturels k, l et n_1, n_2, \dots, n_{k+l}).

On voit sans peine que le type d'ordre de l'ensemble N est le même que de l'ensemble R (ordonné d'après la grandeur croissante des nombres r); il existe donc une application de l'ensemble N sur R qui conserve l'ordre relatif des éléments homologues ⁽¹⁾. Soit $\rho_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ le nombre de R qui correspond dans cette application au système

$$(n_1, n_2, \dots, n_k).$$

Nous déterminerons maintenant un système $\{F_r\}$ comme il suit.

Soit r un nombre donné de R : le nombre r détermine donc un système (n_1, n_2, \dots, n_k) de N , tel que $r = \rho_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Nous poserons

$$(38) \quad F_r = F_{\rho_{n_1, n_2, \dots, n_k}} = \delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}.$$

Soit E le noyau du système $\{F_r\}$: nous prouverons que $E = E_0$.

Soit p un point de E_0 et soit (35) une suite infinie de nombres naturels pour laquelle subsiste la formule (36). D'après (37) nous avons

$$(n_1, n_2, \dots, n_{k+1}) \prec (n_1, n_2, \dots, n_k) \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \dots;$$

donc

$$\rho_{n_1, n_2, \dots, n_{k+1}} < \rho_{n_1, n_2, \dots, n_k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

D'après (36) et (38), nous voyons donc que

$$r_k = \rho_{n_1, n_2, \dots, n_k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

est une suite infinie décroissante de nombres de R , telle que

$$p \in F_{r_k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

ce qui prouve que p est un point du noyau E du système $\{F_r\}$. Il est donc démontré que $E_0 \subset E$.

⁽¹⁾ Une telle application pourrait être sans peine définie effectivement.

Or, soit p un point de E , et soit

$$(39) \quad r_1 > r_2 > r_3 > \dots$$

une suite infinie décroissante de nombres de \mathbb{R} , telle que

$$(40) \quad p \in F_{r_i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

D'après (37), on a

$$(1) \prec (2) \prec (3) \prec \dots,$$

donc

$$\rho_1 \prec \rho_2 \prec \rho_3 \prec \dots;$$

or, (n_1, n_2, \dots, n_k) étant un système donné quelconque de \mathbb{N} , on a

$$(n_1, n_2, \dots, n_k) \prec (n_1 + 1),$$

donc

$$\rho_{n_1, n_2, \dots, n_k} < \rho_{n_1+1};$$

il existe donc des indices m tels que $\rho_m > r_1$. Soit m_1 le plus petit indice tel que ρ_{m_1} dépasse un terme de la suite (39): on voit sans peine qu'on aura, pour un indice μ_1 :

$$(41) \quad \rho_{m_1-1} < r_j < \rho_{m_1} \quad \text{pour } j \geq \mu_1$$

(ρ_{m_1-1} devant être remplacé par 0, si $m_1 = 1$).

D'après (37), nous avons

$$(m_1 - 1) \prec (m_1, 1) \prec (m_1, 2) \prec \dots \prec (m_1),$$

donc

$$\rho_{m_1-1} < \rho_{m_1, 1} < \rho_{m_1, 2} < \dots < \rho_{m_1}.$$

Il résulte sans peine de (37) que pour tout nombre $r = \rho_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ de \mathbb{R} , situé entre ρ_{m_1-1} et ρ_{m_1} , on a $n_1 = m_1$, donc $r < \rho_{m_1, n_2+1}$.

Donc, d'après (41), il existe un plus petit indice m_2 tel que ρ_{m_1, m_2} dépasse un terme de la suite (39). Nous aurons donc, pour un indice μ_2 :

$$\rho_{m_1, m_2-1} < r_j < \rho_{m_1, m_2} \quad \text{pour } j \geq \mu_2.$$

En considérant la suite

$$\rho_{m_1, m_2-1} < \rho_{m_1, m_2+1} < \rho_{m_1, m_2, 2} < \dots < \rho_{m_1, m_2},$$

on arrive de même aux indices m_3 et μ_3 tels que

$$\rho_{m_1, m_2, m_3-1} < r_j < \rho_{m_1, m_2, m_3} \quad \text{pour } j \geq \mu_3,$$

et ainsi de suite. On obtient ainsi une suite infinie de nombres naturels m_1, m_2, m_3, \dots , telle que

$$\rho_{m_1, \dots, m_{k-1}, m_k-1} < r_j < \rho_{m_1, \dots, m_k} \quad \text{pour } j \geq \mu_k,$$

en particulier,

$$(42) \quad \rho_{m_1, \dots, m_{k-1}, m_k-1} < r_{\mu_k} < \rho_{m_1, \dots, m_k};$$

r_{μ_k} , comme un nombre de \mathbb{R} , peut être écrit sous la forme

$$r_{\mu_k} = \rho_{n_1^k, n_2^k, \dots, n_{s_k}^k}$$

et, d'après (42) et (37), nous trouvons

$$n_1^k = m_1, \quad n_2^k = m_2, \quad \dots, \quad n_k^k = m_k;$$

d'après (40), (38) et (34), nous trouvons donc

$$p \in F_{\rho_{m_1, m_2, \dots, m_k}} = \delta_{m_1, m_2, \dots, m_k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

ce qui prouve que p appartient à E_0 . Nous avons ainsi $E \subset E_0$.

Les relations $E_0 \subset E$ et $E \subset E_0$ nous donnent $E_0 = E$. c. q. f. d.

Tout ensemble mesurable B est un ensemble (A) de M. Souslin : donc *tout ensemble mesurable B est un ensemble (A) dans notre sens*. Il en résulte que *si E est un ensemble mesurable B , E et CE sont des ensembles (A)*. C'est la réciproque du théorème que nous avons démontré plus haut.

Par conséquent, l'ensemble E que nous avons construit plus haut et dont le complémentaire CE n'est pas un ensemble (A), n'est pas mesurable B . On a ainsi un exemple effectif d'un ensemble non mesurable B .

8. Nous allons maintenant démontrer que *tout ensemble (A) jouit de la propriété de Baire*.

Soit P un ensemble parfait donné. Nous dirons qu'un ensemble M

est sur P de première catégorie au point p (appartenant à P ou non), s'il existe une sphère S entourant p et telle que l'ensemble PMS est de première catégorie sur P ; s'il n'existe pas une telle sphère, nous dirons que M est sur P de deuxième catégorie au point p .

Soit $M_0 = M_1 + M_2 + M_3 + \dots$ l'ensemble-somme d'une infinité dénombrable d'ensembles M_k et désignons par N_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) l'ensemble de tous les points p de P en lesquels M_k est de première catégorie sur P . On prouve sans peine que l'ensemble

$$K = (P - N_0)N_1N_2N_3\dots$$

est non dense sur P .

Soient maintenant E un ensemble (A) donné, noyau du système $S = \{F_r\}$, P un ensemble parfait donné, tel que E est de deuxième catégorie sur P en tout point de P .

ρ étant un nombre donné de R , désignons par S_ρ le système qu'on obtient de S en remplaçant tout ensemble F_r , où $r \geq \rho$, par un ensemble vide. Désignons par E_ρ le noyau du système S_ρ : on vérifie sans peine la formule

$$(43) \quad E = \sum_r F_r E_r,$$

ainsi que la formule

$$(44) \quad E_r = \sum_{\rho < r} F_\rho F_r \quad (\text{pour } r \in R).$$

r_1, r_2, \dots, r_k étant une suite finie décroissante quelconque de nombres de R , désignons par N_{r_1, r_2, \dots, r_k} l'ensemble de tous les points de P en lesquels l'ensemble $F_{r_1} F_{r_2} \dots F_{r_k} E_{r_k}$ est sur P de première catégorie et posons

$$(45) \quad H = \prod_r N_r + \sum \left[(P - N_{r_1, r_2, \dots, r_k}) \prod_{\rho < r_k} N_{r_1, r_2, \dots, r_k, \rho} \right],$$

le produit \prod_r s'étendant à tous les nombres r de R , le produit $\prod_{\rho < r_k}$ à

tous les nombres $\rho < r_k$ de R , et la sommation \sum à toutes les suites finies décroissantes r_1, r_2, \dots, r_k (k variable) de nombres de R .

L'ensemble E étant, par l'hypothèse, de deuxième catégorie sur P en tout point de P , l'ensemble N de points de P en lesquels E est sur P de première catégorie, est vide, donc $P - N = P$. Il résulte donc, comme nous savons, de (43) et de la définition des ensembles N_r , que l'ensemble $\prod_r N_r$ est non dense sur P .

Soit r_1, r_2, \dots, r_k une suite finie décroissante donnée de nombres de R . D'après (44) nous avons

$$E_{r_k} = \sum_{\rho < r_k} F_\rho E_\rho,$$

donc

$$F_{r_1} F_{r_2} \dots F_{r_k} E_{r_k} = \sum_{\rho < r_k} F_{r_1} F_{r_2} \dots F_{r_k} F_\rho E_\rho,$$

d'où il résulte, comme nous savons (d'après la définition de $N_{r_1, r_2, \dots, r_k, \rho}$), que l'ensemble

$$(P - N_{r_1, r_2, \dots, r_k}) \prod_{\rho < r_k} N_{r_1, r_2, \dots, r_k, \rho}$$

est non dense sur P . La somme \sum^* contenant une infinité dénombrable de termes, il résulte de (45) que l'ensemble H est de première catégorie sur P .

Or, nous prouverons que

$$(46) \quad P - H \subset E.$$

Soit p un point de $P - H$. Nous avons donc

$$(47) \quad p \text{ non } \in H;$$

donc, d'après (45), $p \text{ non } \in \prod_r N_r$; il existe donc un nombre r_1 de R tel que

$$(48) \quad p \text{ non } \in N_{r_1}.$$

Or, il résulte de (47) et (45), d'après la définition de la somme \sum^* ,

que

$$p \text{ non } \in (P - N_{r_1}) \prod_{\rho < r_1} N_{r_1, \rho},$$

ce qui donne, d'après (48),

$$p \text{ non } \in \prod_{\rho < r_1} N_{r_1, \rho}.$$

Il existe donc un nombre $r_2 < r_1$ de \mathbf{R} , tel que

$$(49) \quad p \text{ non } \in N_{r_1, r_2}.$$

De même, il résulte de (47) et (45) que

$$p \text{ non } \in (P - N_{r_1, r_2}) \prod_{\rho < r_2} N_{r_1, r_2, \rho},$$

d'où l'on déduit, d'après (49), l'existence d'un nombre $r_3 < r_2$ de \mathbf{R} , tel que

$$p \text{ non } \in N_{r_1, r_2, r_3}.$$

En raisonnant ainsi de suite, on arrive à une suite infinie décroissante de nombres de \mathbf{R} , $r_1 > r_2 > r_3 > \dots$, telle que

$$(50) \quad p \text{ non } \in N_{r_1, r_2, \dots, r_k} \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \dots$$

Il s'ensuit de la définition de l'ensemble N_{r_1, r_2, \dots, r_k} et de (50) que l'ensemble $F_{r_1} F_{r_2} \dots F_{r_k} E_{r_k}$ n'est pas de première catégorie sur P au point p . Il en résulte que p est un point d'accumulation de l'ensemble $F_{r_1} F_{r_2} \dots F_{r_k} E_{r_k}$, donc, à plus forte raison, de l'ensemble F_{r_k} : ce dernier étant fermé, il en résulte que $p \in F_{r_k}$. Nous avons donc prouvé l'existence d'une suite infinie décroissante $r_1 > r_2 > \dots$ de nombres de \mathbf{R} , telle que

$$p \in F_{r_k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Il en résulte que p appartient au noyau E du système $\{F_r\}$. La formule (46) est ainsi établie. Il en résulte que $P - E \subset H$; donc, H étant de première catégorie sur P , que $P - E$ est de première catégorie sur P .

Nous avons donc démontré que si E est un ensemble (A) et P un ensemble parfait en tout point duquel E est de deuxième catégorie sur P , $P - E$ est de première catégorie sur P . Cela prouve que tout ensemble (A) satisfait à la condition de Baire. Par conséquent, *la fonction caractéristique d'un ensemble (A) est continue sur tout ensemble parfait quand on néglige les ensembles de première catégorie par rapport à cet ensemble parfait, donc satisfait à la condition de Baire, fournie par le théorème XVI du Mémoire de M. Lebesgue : Sur les fonctions représentables analytiquement.*

La fonction caractéristique de l'ensemble (A) non mesurable B , défini plus haut, nous fournit donc *un exemple effectif d'une fonction non représentable analytiquement et cependant satisfaisant à la condition de Baire.*

