THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur une définition des ensembles mesurables* B *sans nombres transfinis*. Note de M. **M. Souslin**, présentée par M. J. Hadamard.

Je me propose ici d'obtenir une propriété caractéristique pour les ensembles mesurables B et indépendante des nombres transfinis. C'est M. N. Lusin qui m'a guidé dans mes recherches et c'est à lui tout d'abord que je dois des résultats l'idée ci-dessous.

1. *Théorie générale*. — Considérons un système S d'intervalles fermés désignés par la notation générale $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, les entiers k, n_1, n_2, …, n_k

---

(1) Il est aussi facile de fixer des limites d'allongement lorsque les points caractéristiques restent constamment sur une courbe, surface, etc. fixe.

prenant toutes les valeurs entières positives :

$$S = \{ \delta_{n_1 n_2 \ldots n_k} \}.$$

Les intervalles du système S forment évidemment une infinité énumérable.

Nous posons maintenant les définitions suivantes. Nous dirons qu'*un point x appartient au système* S s'il existe une suite d'entiers positifs α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots$ telle que le point x est contenu dans tous les intervalles δ_{α_1}, $\delta_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, \delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}, \ldots$. La réunion de *tous* les points x appartenant au système S constitue l'ensemble E qui est parfaitement déterminé par le système S. Nous dirons que E *appartient au système* S; le système S sera appelé *système déterminant* de l'ensemble E.

Nous appellerons *ensemble* (A) tout ensemble de points qui admet un système déterminant.

Tout système déterminant S est déterminé par une infinité énumérable de conditions; par conséquent, l'ensemble de tous les ensembles (A) a la puissance *du continu*.

2. On trouve immédiatement, pour les ensembles (A), les trois lemmes suivants :

Lemme 1. — *Tout intervalle* (a, b) *est un ensemble* (A).

Lemme 2. — *Soit* $E_1, E_2, \ldots$ *une infinité énumérable d'ensembles* (A), *leur ensemble-somme* $E = E_1 + E_2 + \ldots$ *est un ensemble* (A).

Lemme 3. — *Soit* $E_1, E_2, \ldots$ *une infinité énumérable d'ensembles* (A), *leur partie commune* $E = E_1\text{-}E_2\text{-}\ldots$ *est un ensemble* (A).

De là, le théorème fondamental suivant :

Théorème I. — *Tout ensemble mesurable* B *est un ensemble* (A).

Nous avons donc une méthode régulière et uniforme permettant de définir, sans nombres transfinis, tout ensemble de points mesurable B.

3. Une première question se pose avant toutes autres :

Tout ensemble (A) *est-il un ensemble mesurable* B?

On s'assure immédiatement que la question est délicate : s'il existe un exemple d'ensemble (A) qui n'est pas un ensemble mesurable B, il doit être trouvé sans l'axiome de M. Zermelo (le *Principe du Choix arbitraire*), car toute application de cet axiome à la recherche d'un exemple quelconque amène toujours à une classe d'exemples dont la puissance ($= c^c$) est supérieure à celle du continu; or la classe de tous les ensembles (A) a la puissance ($= c$) du continu.

La question posée admet une solution précise et *négative :* nous avons trouvé, sans utiliser l'axiome de M. Zermelo et les nombres transfinis, un ensemble (A) tel que son complémentaire relativement à l'intervalle (o, 1) n'est pas un ensemble (A). Cet ensemble ne peut pas être mesurable B, car l'ensemble complémentaire le serait aussi, ce qui conduirait à une contradiction au théorème I. D'où le théorème suivant :

Théorème II. — *Il existe un ensemble bien défini* (au sens logique et précis du mot *défini*) *qui n'est pas un ensemble mesurable* B.

Enfin, on peut démontrer le théorème suivant qui caractérise les ensembles mesurables B :

Théorème III. — *Si l'ensemble* E *et son complémentaire* CE *sont tous deux des ensembles* (A), *ils sont mesurables* B.

4. *Applications géométriques.* — Soit E un ensemble (A) situé sur l'axe des x dont un système déterminant est $S = \{\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$. Prenons sur l'axe des y les intervalles $d_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ définis par les inégalités

$$d_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \left[\sum_{i=1}^{i=k} \frac{1}{3^{n_1+n_2+\ldots+n_i}} \leqq y \leqq \frac{1}{3^{n_1+n_2+\ldots+n_k}} + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{1}{3^{n_1+n_2+\ldots+n_i}}\right].$$

Soit $D_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ le rectangle ayant ses côtés parallèles aux axes des coordonnées et dont les projections sur les axes des x et des y sont respectivement $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ et $d_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Nous appellerons le rectangle $D_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ à k indices *rectangle de rang k.* Tous les rectangles de rang k forment une infinité énumérable et sont deux à deux sans points communs; le rectangle $D_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}}$ est contenu dans le rectangle $D_{n_1 n_2 \ldots n_k}$.

Désignons par Q_k l'ensemble de points formé par la réunion de tous les rectangles de rang k; l'ensemble Q_{k+1} est contenu dans Q_k, donc

$$Q_1 > Q_2 > \ldots > Q_k > \ldots.$$

Désignons par Q la partie commune à tous les ensembles Q_k,

$$Q = Q_1 Q_2 \ldots Q_k \ldots.$$

Il est bien évident que Q est un ensemble mesurable B de classe $\leqq 1$. L'ensemble donné E est évidemment la projection orthogonale de Q sur l'axe des x. Donc :

Théorème IV. — *Tout ensemble* (A) *est la projection orthogonale d'un ensemble mesurable* B *de classe* $\leqq 1$.

En vertu du théorème I, nous avons :

Théorème IV'. — *Tout ensemble linéaire mesurable* B *est une projection orthogonale d'un ensemble mesurable* B *de classe* $\leqq 1$.

De même, d'après le théorème II, nous avons :

Théorème V. — *Il existe, dans le plan, un ensemble mesurable* B *de classe* 1, *tel que sa projection orthogonale sur l'axe des* x *est un ensemble non mesurable* B.

La projection d'un ensemble mesurable B n'est donc pas toujours mesurable B, contrairement à ce que suppose M. Lebesgue [1] dans la démonstration de son théorème sur les fonctions implicites; cette démonstration doit, par suite, être modifiée.

Toutes les définitions de cette Note sont valables pour les ensembles dans l'espace à n dimensions, ce qui revient au

Théorème. — *Si* E *est un ensemble* (A), *sa projection l'est aussi.*

---

(1) *Sur les fonctions représentables analytiquement* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. 10, 1905, p. 191-192, 195-196).