数字图像分析第一次实验报告

院　　系：信息科学技术学院
学　　号：SA19023005
姓　　名：景军元
授课教师：李厚强、周文罡
课程助教：欧阳剑波、刘一衡

一、二维 DFT

1、基本原理

（1）二维离散傅里叶变换式

对于$N \times N$的二维矩阵（方阵），二维离散傅里叶变换对为：

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)exp\left\{\frac{-2\pi j(ux+vy)}{N}\right\}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)exp\left\{\frac{2\pi j(ux+vy)}{N}\right\}$$

（2）变换矩阵

由二维离散傅里叶变换式，变换核函数为：

$$h(x,y,u,v)=exp\left\{\frac{-2\pi j(ux+vy)}{N}\right\}=exp\left\{\frac{-2\pi jux}{N}\right\}\cdot exp\left\{\frac{-2\pi jvy}{N}\right\}=h_1(x,u)h_2(y,v)$$

且有函数$h_1=h_2$

故二维 DFT 为对称可分离变换，可记为$T=AFA$，其中 F 为图像矩阵，A 为变换矩阵，F 为变换结果。对于二维 DFT，可以得到$A=(a_{mn})=\left(\frac{1}{\sqrt{N}}e^{-2\pi jmn/N}\right)$。

（3）二维 DFT 的性质

图像$f(x,y)$，$f_1(x,y)$，$f_2(x,y)$的二维离散傅里叶变换分别记为$F(u,v)$，$F_1(u,v)$，$F_2(u,v)$，则有如下性质：

①线性

$$DFT\{f_1(x,y)+f_2(x,y)\}=F_1(u,v)+F_2(u,v)$$

证明：

$$DFT\{f_1(x,y)+f_2(x,y)\}=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}[f_1(x,y)+f_2(x,y)]exp\left\{\frac{-2\pi j(ux+vy)}{N}\right\}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f_1(x,y)exp\left\{\frac{-2\pi j(ux+vy)}{N}\right\}$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f_2(x,y)exp\left\{\frac{-2\pi j(ux+vy)}{N}\right\}=F_1(u,v)+F_2(u,v)$$

②比例

$$DFT\{f(ax,by)\}=\frac{1}{ab}F\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right)$$

证明：

$$DFT\{f(ax,by)\} = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(ax,by)exp\left\{\frac{-2\pi j(ux+vy)}{N}\right\}$$

$$= \frac{1}{ab}\frac{ab}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(ax,by)exp\left\{\frac{-2\pi j\left(\frac{u}{a}\cdot ax+\frac{v}{b}\cdot by\right)}{N}\right\} = \frac{1}{ab}F\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right)$$

③平移

$$DFT\{f(x-a,y-b)\} = e^{-2\pi j(au+bv)}F(u,v)$$
$$DFT\{e^{2\pi j(cx+dy)}f(x,y)\} = F(u-c,v-d)$$

证明：

$$DFT\{f(x-a,y-b)\} = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x-a,y-b)exp\left\{\frac{-2\pi j(ux+vy)}{N}\right\}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x-a,y-b)exp\left\{\frac{-2\pi j[u(x-a+a)+v(y-b+b)]}{N}\right\}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x-a,y$$

$$-b)exp\left\{\frac{-2\pi j[u(x-a)+v(y-b)]}{N}\right\}exp\left\{\frac{-2\pi j(au+bv)}{N}\right\}$$
$$= e^{-2\pi j(au+bv)/N}F(u,v)$$

$$DFT\{e^{2\pi j(cx+dy)/N}f(x,y)\} = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} e^{2\pi j(cx+dy)/N}f(x,y)exp\left\{\frac{-2\pi j(ux+vy)}{N}\right\}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)exp\left\{\frac{-2\pi j[(u-c)x+(v-d)y]}{N}\right\} = F(u-c,v-d)$$

④旋转

$$DFT\{f(x\cos\theta+y\sin\theta,-x\sin\theta+y\cos\theta)\} = F(u\cos\theta+v\sin\theta,-u\sin\theta+v\cos\theta)$$

证明：

$$DFT\{f(x\cos\theta+y\sin\theta,-x\sin\theta+y\cos\theta)\}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x\cos\theta+y\sin\theta,-x\sin\theta+y\cos\theta)exp\left\{\frac{-2\pi j(ux+vy)}{N}\right\}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x\cos\theta+y\sin\theta,-x\sin\theta$$

$$+y\cos\theta)exp\left\{\frac{-2\pi j[(u\cos\theta+v\sin\theta)(x\cos\theta+y\sin\theta)+(-u\sin\theta+v\cos\theta)(-x\sin\theta+y\cos\theta)]}{N}\right\}$$

$$= F(u\cos\theta+v\sin\theta,-u\sin\theta+v\cos\theta)$$

2、实验内容

（1）问题重述

完成 fft_implementation.m 函数，输入为待分析的数据，维度为 NxN，输出为数据的 DFT 变换结果。

（2）函数实现

```
function F_result = fft_implementation(image,N)
A = 1/sqrt(N)*exp(-2*pi*j*[0:N-1]'*[0:N-1]/N);    %根据定义，得到变换矩阵 A
F = A*image*A;                                    %图像变换
P = [zeros(N/2),eye(N/2);eye(N/2),zeros(N/2)];    %行交换矩阵，要求 N 为偶数
Q = P;                                            %列交换矩阵
F_result = abs(P*F*Q);                            %行列变换，将低频成分移至中心
End
```

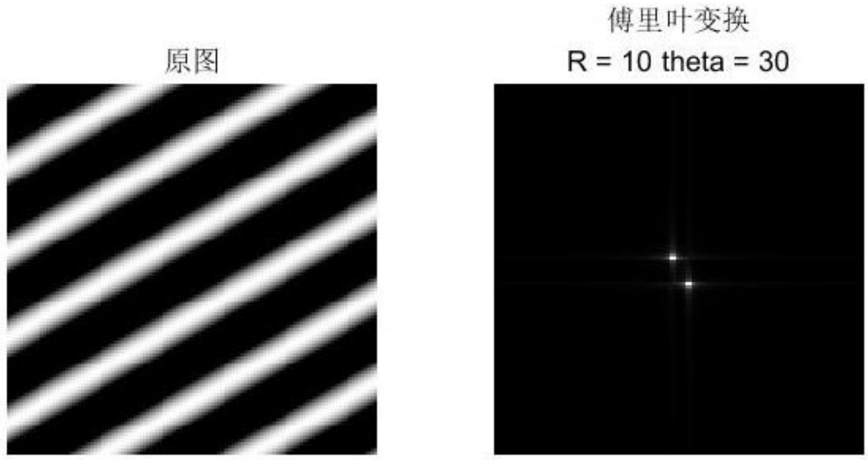
（3）简要说明

根据二维离散傅里叶变换的定义，二维 DFT 可以写成 T=AFA 的对称变换的形式，由定义得到变换矩阵后，对原图像进行变换即得到傅里叶频谱，之后再构造行交换和列交换矩阵，将低频成分移到图像的中心。

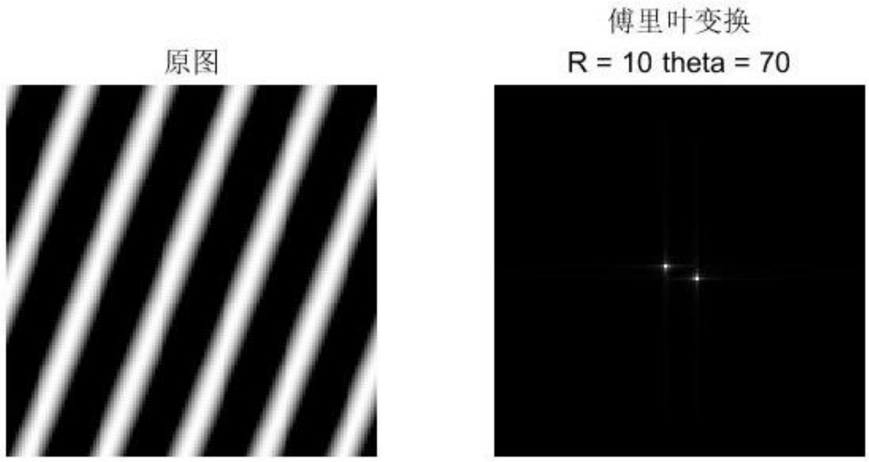
3、实验结果及分析

（1）变换不同的 R 和θ，作傅里叶变换

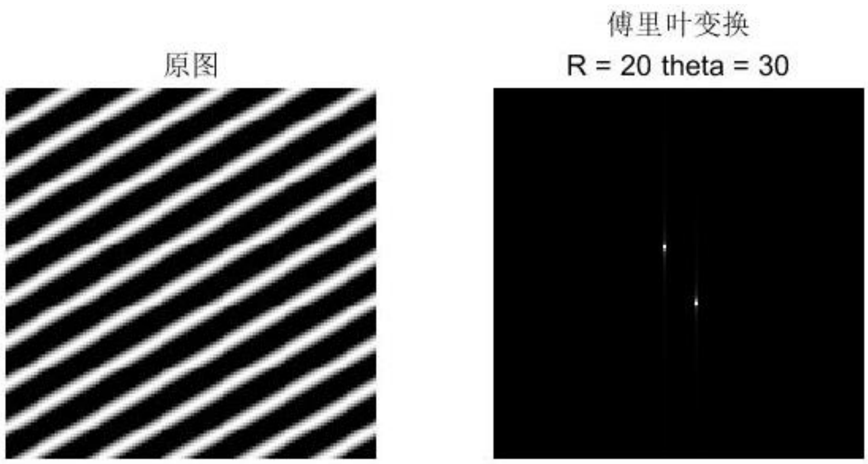
如图所示，左图为原始数据，右图为二维 DFT 变换的结果：



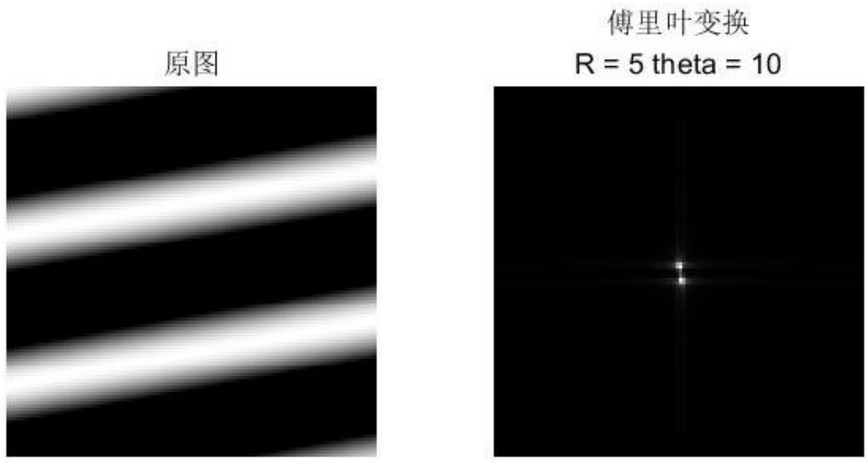
F1: R=10,θ=30°



F2: R=10,θ=70°



F3: R=20,θ=30°



F4: R=5,θ=10°

（2）简要分析

对比 F1 和 F2，可以看出二维 DFT 的旋转性质，即时域旋转某个角度，频域以同方向旋转同样的角度。

对比 F1 和 F3，可以看出二维 DFT 的比例性质，对于时域的图片进行一定程度的压缩，则频域扩张，向高频方向移动，并且频域亮点的亮度有一定程度的变暗。

4、实验收获

（1）对二维 DFT 的性质有了更直观的认识。

（2）二维频谱中的表现为在原图中频率变化较快的方向分布，与原图中的线条相垂直。

（3）采用矩阵直接相乘的实现较为低效率，实际中可以采用一些快速算法来提高效率。

二、特征脸

1、基本原理

（1）主成分分析（PCA）

找到一组正交变换基进行变换，使得变换后完全去相关：

①我们希望原始数据在新的基上的坐标尽量分散，这样可以使得数据便于区分。即：数据在每个基上的坐标分布的方差尽可能的大。

②我们希望原始数据的新的表达在每个维度上不存在线性相关性，因为相关性意味着数据的不同维度间不完全独立，就必然存在重复表示的信息。即：数据的不同维度的协方差为0。

即：我们希望由新的基所得到的数据表达的协方差矩阵中，除对角线上的方差元素外，其余所有的协方差元素全部为0（矩阵对角化）。

设原始数据为 M 个 N 维向量，首先将数据每个维度减去各自维度的均值，使每个维度的均值都变成0，记为矩阵 X。

基变换矩阵记为矩阵 P，则基变换后的数据可记为：

$$Y = PX$$

显然，Y 的每个维度的均值也为0。因此，Y 的协方差矩阵为：

$$D_Y = \frac{1}{M}YY^T = \frac{1}{M}(PX)(PX)^T = \frac{1}{M}PXX^TP^T = P\left(\frac{1}{M}XX^T\right)P^T = PD_XP^T$$

可以看出，在基变换下协方差矩阵相合，并且由于协方差矩阵为实对称矩阵，故协方差矩阵还相似，因此只需将原协方差矩阵相似对角化即可。

（2）算法步骤

原始数据为 M 个样本，每个样本为 N 为向量：

①将原始数据按列组成 N 行 M 列的矩阵 X；

②将 X 的每一行（每个维度）进行零均值化；

③求出协方差矩阵；

④求出协方差矩阵的特征值及对应的特征向量；

⑤将特征向量按对应特征值大小从上到下按行排列成矩阵，取前 *k* 行组成矩阵 *P*；

⑥*Y=PX* 即为降维到 *k* 维后的数据。

2、实验内容

（1）问题重述

完成 pca_face.m 函数，输入人脸数据，维度为 img_dim x img_num，输出前八个特征脸图像。

（2）函数实现

```
function eigenface = pca_face(data, img_dim, img_num, eigenface)
data = data-mean(data,2);                                          %数据零均值化
Dx = data*data'/img_num;                                            %求协方差矩阵
[P,Lambda] = eig(Dx);                                              %求特征值及特征向
量
Lambda = diag(Lambda);
[~, index] = sort(Lambda,'descend');                           %将特征值降序排列
dim = size(eigenface);
for i = 1:dim(3)
    eigenface(:,:,i) = reshape(P(:,index(i)),dim([1,2]));     %求出对应最大的几个特征值的
特征向量并 reshape
end
end
```

（3）简要说明

根据 PCA 算法的步骤，依次实现零均值化，求出协方差矩阵，求出协方差矩阵的特征值及特征向量，之后将求出对应特征值最大的几个特征向量重新排列成矩阵即为特征人脸。

3、实验结果及分析

（1）得到特征值最大的八个特征脸

（2）简要分析

这八幅图像表示了样本图片方差最大的方向，也就是说，这八幅图像代表了已有人脸数据的典型特征。

4、实验收获

理解了主成分分析（PCA）的算法步骤。