2021-2022 学年第二学期期末考试试卷

一、 填空题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，E 为三阶单位矩阵，若三阶矩阵 B 满足关系$AB+E=A^2+B$,则 B 的第一行的行向量是________。

2. 设 A 为 3 阶正交矩阵，则$|-(A^T)^{2022}|=$________。

3. 设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C，则满足$AQ=C$的可逆矩阵$Q=$________。

4. 设$\beta_1=(1\ \ 1\ \ 3)^T,\beta_2=(-3\ \ 5\ \ 1)^T,\beta_3=(-6\ \ 10\ \ t)^T$是 3 元齐次线性方程组$AX=0$的解，且$R(A)=1$，则$t=$________。

5. 若矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$经过初等行变化为$\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 的列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大无关组为________。

6. 设$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$为三阶矩阵 A 的特征值，属于它们的特征向量依次为p_1,p_2,p_3，令$P=(2p_2,3p_3,p_1)$,则$P^{-1}AP=$________。

7. 设$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix}$且由 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=2$是 A 的二重特征值，则$x=$________。

8. 若实对称矩阵 A 与$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{pmatrix}$合同，则二次型$X^TAX$的规范型是________。

《线性代数》历年题

二、 计算题（每小题 12 分，共 60 分）

9. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$.

（1） 判断 A 的可逆性，并在可逆时，求 A 的逆。

（2） 求 A 的伴随矩阵 A^*。

10. 设 a,b,c 两两互异，用克莱姆法则解线性方程组

$$\begin{cases}x+y+z=a+b+c\\ax+by+cz=a^2+b^2+c^2\\bcx+cay+abz=3abc\end{cases}$$

11. 设向量组$\alpha_1=(a,2,10)^T,\alpha_2=(-2,1,5)^T,\alpha_3=(-1,1,4)^T,\beta=(1,b,c)^T$，试问当$a,b,c$满足什么条件时，

（1）β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表示式唯一？

（2）β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表示式不唯一？并在此时，写出表示式。

（3）β不可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示。

12. 设 A 为 3 阶实对称矩阵，其特征值分别为$\lambda_1=1,\lambda_2=-2,\lambda_3=0$，属于$\lambda_1=1,\lambda_2=-2$的特征向量分别为$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$。

（1） 求 a 的值

（2） 求 A 的属于特征值$\lambda_3=0$的一个特征向量

（3） A^{2022}

13. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$，求一个正交变换$X=QY$，将二次型$f$化

标准型。

三、　证明题（12分）

14. 已知向量组$(I)\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ $(II)\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ $(III)\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$，如果各向量组的秩分别

$R(I)=R(II)=3,R(III)=4$，试证明：

（1）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$与向量组$(III)\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$等价

（2）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$线性无关

四、开放题（4分）

15. 有人说：若$A^2=O$，则$A=O$。这种说法正确吗？如果正确，请给出证明；如果不正确，请举

出反例。

2021-2022 学年第二学期期末考试试卷参考答案

1.【正解】(2 0 1)

【解析】由$AB+E=A^2+B$得$(A-E)B=A^2-E$，$A-E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，因为$|A-E|\neq 0$，所以$A-E$可逆，

从而$B=A+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4：矩阵的概念和基本运算

2.【正解】-1

【解析】不妨认为 A 为三阶单位矩阵，则$|-(A^T)^{2022}|=|-E|=-1$（特值法）

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4：矩阵的概念和基本运算

3.【正解】$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

【解析】由题意：$B=A\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$C=B\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\therefore C=A\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=AQ$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4：矩阵的概念和基本运算 题型 2：初等变换与初等矩阵

4.【正解】2

【解析】$\because R(A)=1$，$\therefore A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，将后面两个解带入方程，易知两者为二倍关系，可得$t=2$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 16：齐次线性方程组

5.【正解】$(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)$，$(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$

【解析】由题可知，α_1,α_2线性相关，不能同时出现，所以极大无关组为$(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)$，$(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$两组。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 12：极大线性无关组

6.【正解】$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

【解析】P 的列向量仍属于 3 个特征值对应的特征向量，所以只有特征值的位置发生了改变，所以

可得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19：特征值与特征向量

7.【正解】2

【解析】把$\lambda=2$代入$|\lambda E-A|$,得$\begin{pmatrix}1&1&-1\\-x&-2&-y\\3&3&-3\end{pmatrix}$，这个矩阵的秩为$3-2=1$，所以易得$x=2,y=$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19：特征值与特征向量 题型 3：已知特征值或特征向量求未
数

8.【正解】$y_1^2+y_2^2-y_3^2$

【解析】$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda+1&-2\\0&-2&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)[(\lambda+1)(\lambda-2)-4]$，得$\lambda_1=1,\lambda_2=-2,\lambda_3=3$，正惯
指数为2，负惯性指数为1，且A与B合同，所以可得X^TAX的规范型为$y_1^2+y_2^2-y_3^2$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 23：矩阵的合同

9.【解析】(1) $|A|=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&3&3&3\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=-3$,所以A可逆.

$$\begin{pmatrix}0&1&1&1&1&0&0&0\\1&0&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3&3&3&3&1&1&1&1\\1&0&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&-1&0&0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&-1&0&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&0&-1&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&0&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}，所以A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

(2) $A^*=|A|A^{-1}$，由(1)可知$A^*=\begin{pmatrix}2&-1&-1&-1\\-1&2&-1&-1\\-1&-1&2&-1\\-1&-1&-1&2\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5：矩阵的逆 题型 4：伴随矩阵的计算

10.【解析】$D_1=\begin{vmatrix} a+b+c & 1 & 1 \\ a^2+b^2+c^2 & b & c \\ 3abc & ca & ab \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a^2 & b & c \\ abc & ca & ab \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}=aD, \therefore D_2=bD, D_3=cD,$

$\therefore x=D_1/D=a, y=D_2/D=b, z=D_3/D=c$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 6:克拉默法则

11.【解析】设方程$Ax=\beta, A=\begin{pmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{pmatrix}, |A|=-a-4$

（1）当$A\neq 0, a\neq -4$时，方程组有唯一解，此时可以线性表示且表示式唯一。

（2）当$A=0, a=-4$时，方程组有无数解或无解，此时增广矩阵为

$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -b-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 3b-c-1 \end{pmatrix}$，能线性表示且表示式不唯一，方程组有无数解，此时

$a=-4, 3b-c-1=0$，可得$x_1=c, x_2=-2c-b-1, x_3=2b+1$，其中 c 为任意常数

（3）由（2）可知，无解时，只需要$3b-c-1\neq 0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17：非齐次线性方程组

12.【解析】（1）因为特征向量是正交的，所以$\alpha_1\alpha_2=1-2+a=0 \ \therefore a=1$

（2）设$\alpha_3=(b,c,d)$，因为特征向量正交，所以$\begin{cases} b+2c+d=0 \\ b-c+d=0 \end{cases}$，令 b=1，则得$\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

（3）$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\therefore A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\cdots A^{2022}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{2022} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19：特征值与特征向量 题型 3：已知特征值或特征向量求未知参数 题型 4：求矩阵得高次幂

13.【解析】记矩阵为 A，$|\lambda E-A|=(2-\lambda)(-\lambda^2+5\lambda-4)=0$，可得$\lambda_1=2$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$.

当$\lambda_1=2$时，通过$(2E-A)k_1=0$，解出特征向量为$k_1=\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$，同理分别计算出剩下两个特

征向量分别为$k_2=\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^T,k_3=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}},\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}},\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)^T$

所以$Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}k_2=\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^T,k_3=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}},\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}},\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)^T$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 22：二次型 题型 6：二次型的标准化

14.【解析】（1）$\because R(III)=4,\therefore \alpha_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$线性表示，所以向量组$(III)$每一个向量都可

由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$线性表示，反之同样可以表示，所以两个向量组等价。

（2）$\because R(I)=R(II)=3,\therefore \alpha_4=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$①$,\because R(III)=4$，可得$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$是线性无关的，

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4(\alpha_5-\alpha_4)=0$，将①式代入，可得$\begin{cases} k_1-l_1k_4=0 \\ k_2-l_2k_4=0 \\ k_3-l_3k_4=0 \\ k_4=0 \end{cases},\therefore k_1=k_2=k_3=k_4=0$,

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$线性无关。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 11：向量组的线性相关性和线性表示

15.【解析】不正确，当$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$时，$A^2=O,A\neq O$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4：矩阵的概念和基本运算