《线性代数》

2022-2023 学年第一学期期末考试试卷

一、填空题（每小题 3 分，共 24 分）

1. 矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{2021}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{2022}$ =__________。

2. 齐次线性方程组$\begin{cases}kx_1+x_2+x_3=0,\\x_1+kx_2-x_3=0,\\2x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$有非零解，则 k=________。

3. 若方程组$\begin{cases}x_1+x_2+ax_3=0,\\-x_1+ax_2+x_3=a^2,\\x_2+x_3=-4\end{cases}$有解，则 a=________。

4. 若向量组β_1,β_2与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$等价，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性________。

5. 若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$都是四维列向量，且四阶行列式$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$，$|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n$，则四阶行列式$|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,(\beta_1+\beta_2)|$=__________。

6. 设$A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$且有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=6$是$A$的二重特征值，则 a=______。

7. 设A^*是$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&2&5\\0&0&2\end{pmatrix}$的伴随矩阵，则$A^*+3E$的一个特征值为__________。

8. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$的秩为________。

二、计算题（每小题 12 分，共 60 分）

9. 已知$AP=PB$，其中$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，求$A$及$A^{2022}$。

10. 求一个二次多项式$f(x)$，使得$f(1)=0,f(2)=3,f(-3)=28$。

11. λ为何值时，下列线性方程组有唯一解？无解？有无穷多解？在有无穷多解时，求出其通解，并给出导出组的一个基础解系。

$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2,\\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1.\end{cases}$$

12. 设$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\beta_r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r$，且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，试讨论向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$线性相关性。

13. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_1^2-2x_3^2+2bx_1x_3$，$(b>0)$，它的矩阵A的特征值之和为1，特征值之积为-12

（1）求a，b

（2）求正交变换$X=QY$，把二次型$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准形

三、证明题（每题 6 分，共 12 分）

14. （1）设 $f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ 是正定二次型.

证明：椭圆域 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2\leqslant 1$ 的面积等于 $\dfrac{x}{\sqrt{a_{11}a_{22}+a_{12}^2}}$

（2）设 α_1，α_2，α_3 是 3 维向量空间 R^3 的一组基，证明由基 $\alpha_1,\dfrac{1}{2}\alpha_2,\dfrac{1}{3}\alpha_3$ 到基

$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$

四、开放题（4 分）

15. 请写出向量组的极大无关组的定义，并举例说明一个向量组的极大无关组一般不唯一.

2022-2023 学年第一学期期末考试试卷参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 24 分）

1.【正解】$\begin{pmatrix}1 & 2\cdot k^{2022} & 3\\7 & 8\cdot k^{2022} & 9\\4 & 5\cdot k^{2022} & 6\end{pmatrix}$

【解析】$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{2021}$ 的意思是对矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ 进行 2021 次初等行变换，意思是将矩阵的第 2 和 3 行进行交换，得到 $\begin{pmatrix}1&2&3\\7&8&9\\4&5&6\end{pmatrix}$；

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{2022}$ 的意思是对矩阵进行 2022 次初等列变换，意思是将矩阵的第 2 列乘 k 倍，乘 2022 次，故原式 $=\begin{pmatrix}1 & 2\cdot k^{2022} & 3\\7 & 8\cdot k^{2022} & 9\\4 & 5\cdot k^{2022} & 6\end{pmatrix}$。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4 矩阵的概念和基本运算

2.【正解】$k=4$ 或 $k=-1$

【解析】由齐次线性方程组的定义可知，齐次线性方程组对应的矩阵行列式值为 0，即：

$$\begin{vmatrix}k&1&1\\1&k&-1\\2&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}k&1&1\\1+k&1+k&0\\2-k&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+k&1+k\\2-k&-2\end{vmatrix}=k^2-3k-4=(k-4)(k+1)=0；$$

故有 $k=4$ 或 $k=-1$。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 16 齐次线性方程组

3.【正解】-2

【解析】方程组对应的增广矩阵为：$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&a&0\\-1&a&1&a^2\\0&1&1&-4\end{pmatrix}$，并对其进行初等行变换：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&a&0\\-1&a&1&a^2\\0&1&1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&a&0\\0&a+1&a+1&a^2\\0&1&1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&a&0\\0&1&1&-4\\0&0&0&(a+2)^2\end{pmatrix}；$$

若方程组有解，则$r(A)=r(\overline{A})$，则有$(a+2)^2=0\Longrightarrow a=-2$。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17 非齐次线性方程组

4.【正解】相关

【解析】由题意可知，$r(\beta_1,\beta_2)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\beta_1,\beta_2,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$；

由于$r(\beta_1,\beta_2)\leqslant 2$，则$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\leqslant 2\Longrightarrow$ 线性方程组线性相关。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 12 极大线性无关组

5.【正解】$-m+n$

【解析】$|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,(\beta_1+\beta_2)|=|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1|+|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_2|$

$=-|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|+|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=-m+n$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4 矩阵的概念和基本运算

6.【正解】0

【解析】求特征向量：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 0\\ -8 & \lambda-2 & -a\\ 0 & 0 & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2)$，则特征向量为 6 和-2

当$\lambda=6$时，$|6E-A|=\begin{vmatrix}4 & -2 & 0\\ -8 & 4 & -a\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -a\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$；

若$\lambda=6$为 A 的二重特征向量，则$r(6E-A)=3-2=1$，则$a=0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19 特征值与特征向量

7.【正解】7

【解析】求 A 的特征值：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & -3\\ 0 & \lambda-2 & -5\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3$，所以特征值为 2；

则$A\alpha=2\alpha\Longrightarrow A^*A\alpha=2A^*\alpha$，由$A^*A=|A|E=8E$，可得$8\alpha=2A^*\alpha\Longrightarrow 4\alpha=A^*\alpha$；

$A^*\alpha+3\alpha=4\alpha+3\alpha\Longrightarrow(A^*+3E)\alpha=7\alpha$，所以$A^*+3E$的一个特征值为 7。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19 特征值与特征向量

8.【正解】2

【解析】二次型为：$2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$，对应的矩阵为：

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}2&1&1\\0&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$，故二次型的秩为2。

【考点延伸】《考试宝典》知识点9 矩阵的秩和矩阵等价

二、计算题（每小题12分，共60分）

9.【解析】$|P|=-1\neq0$，故P可逆，$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$；

$$A=PBP^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix};$$

$$A^{2022}=PB^{2022}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}^{2022}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\-2&1&1\end{pmatrix}。$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点4 矩阵的概念和基本运算

10.【解析】设$f(x)=ax^2+bx+c$，由题干可知：

$$\begin{cases}a+b+c=0\\4a+2b+c=3\\9a-3b+c=28\end{cases}\text{ 解得：}\begin{cases}a=2\\b=-3\\c=1\end{cases}；f(x)=2x^2-2x+1。$$

【考点延伸】

11.【解析】《考试宝典》知识点17 非齐次线性方程组

齐次方程组对应的矩阵A：

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&0\\2&5-\lambda&1-\lambda\\-2&-4&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&0\\4&9-\lambda&0\\-2&-4&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&2\\4&9-\lambda\end{vmatrix}$$

$=(1-\lambda)^2(10-\lambda)$，当$\lambda\neq1$或$\lambda\neq10$时，$|A|\neq0$，方程组有唯一解，

当$\lambda=1$时，$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\2&4&-4&2\\-2&-4&4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$r(A)=r(\overline{A})=1<3$，方程组有无穷多解，

通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，$t_1,t_2$为任意常数。

当$\lambda=10$时，$\overline{A}=\begin{pmatrix}-8&2&-2&1\\2&-5&-4&2\\-2&-4&-5&-11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-5&-4&2\\0&-9&-9&-9\\0&-18&-18&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-5&-4&2\\0&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，

$r(A)=2$，$r(\overline{A})=3$，方程组无解。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17 非齐次线性方程组

12.【解析】$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}_{r\times r}$，$\left|\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}_{r\times r}\right|=1$，所以向量组$\alpha$的线性相关性与向量组$\beta$相同，又由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，所以向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$线性无关。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 11 向量组的线性相关性和线性表示

13.【解析】

（1）二次型对应的矩阵为：$\begin{pmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{pmatrix}$，由矩阵特征值之和等于矩阵主对角线上值之和，可得

$a+2-2=1\Longrightarrow a=1$，

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-b\\0&\lambda-2&0\\-b&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2+\lambda-2-b^2)$，$\lambda_1=2$，$\lambda_2\cdot\lambda_3=-2-b^2$，

所以$-2-b^2=-6\Longrightarrow b=2$。

（2）矩阵的特征值$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$，

当$\lambda=2$时，$|2E-A|=\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{vmatrix}$，所以对应的两个特征向量为：$\gamma_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\0\\\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$，$\gamma_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$；

当$\lambda=-3$时，$|-3E-A|=\begin{vmatrix}-4&0&-2\\0&-5&0\\-2&0&-1\end{vmatrix}$，对应的特征向量为：$\gamma_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\\-\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$，

所以$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&0&\frac{1}{\sqrt{5}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{5}}&0&-\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 24 正定二次型和正定矩阵

三、证明题（每小题 6 分，共计 12 分）

14.（1）【解析】$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}\\-a_{12}&\lambda-a_{22}\end{vmatrix}=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}^2$，

由正定二次型：$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=a_{11}+a_{22}>0\\\lambda_1\cdot\lambda_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0\end{cases}$，

$(\lambda_1-\lambda_2)^2=(\lambda_1+\lambda_2)^2-4\lambda_1\lambda_2=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2$，

令$\lambda_1>\lambda_2$，则$\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{a_{11}+a_{22}+\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}}{2}\\\lambda_2=\dfrac{a_{11}+a_{22}-\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}}{2}\end{cases}$

二次型可化为标准型：$\lambda_1x^2+\lambda_2=1$，则椭圆面积公式：$\pi\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}=\frac{\pi}{\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}}$。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19 特征值与特征向量

（2）$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=\left(\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$，

所以由基$\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$到基$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵为$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 11 向量组的线性相关性和线性表示

15.【解析】向量组的极大无关组满足 2 个条件：1、自身线性无关。2、向量组中所有向量可由它线性表示。若再加入任意新的向量，则他们必线性相关性。

二维空间的向量组的极大无关组可以用 $\overrightarrow{\alpha_1}=(1,0);\overrightarrow{\alpha_2}=(0,1)$ 表示，也可以用 $\overrightarrow{\alpha_1}=(1,-1);\overrightarrow{\alpha_2}=(1,1)$ 来表示，所以极大线性无关组一般不唯一。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 12 极大线性无关组