2020-2021 学年第一学期期末考试试卷

一、填空题(每小题 3 分，共 24 分)

1. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，若$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，则$\boldsymbol{A}^*=$________.

2. $\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{2021}=$________.

3. 设$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda+1&1&1&1\\1&\lambda+2&3&4\\1&4&\lambda+9&16\\1&8&27&\lambda+64\end{vmatrix}$. 则$f(0)=$________.

4. 已知向量组$\boldsymbol{T}$: $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^{\boldsymbol{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,5,1,0)^{\boldsymbol{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,6,8)^{\boldsymbol{T}}$, 则$\boldsymbol{T}$的一个极大无关组为________.

5. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-5&a\\3&-1&3\end{pmatrix}$的一个列向量组线性相关，则$a=$________.

6. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为 n 阶方阵，且$|\boldsymbol{AB}|=1$，则方程组$\boldsymbol{AX}=0$与$\boldsymbol{BX}=0$的非零散的个数之和是________.

7. 设 4 阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，$\lambda_4=2$，且方阵$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}$相似，则$|2\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}|=$________.

8. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$的符号差为________.

二、计算题(每小题 12 分，共 60 分)

9. $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{B}^{-1}$，其中$\boldsymbol{E}$是 4 阶单位矩阵，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

求矩阵$\boldsymbol{X}$.

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{P}$ 均为 n 阶方阵，满足 $AP=PB$，若 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 均

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}.$$

（1）计算 $|\boldsymbol{B}|$。

（2）求 $|\boldsymbol{A}^{2020}|$

11. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 5 & -1\\ a & 1 & 3 & b\end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}, \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$.

（1）若 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=2$，求 a,b 的值.

（2）在（1）的情况下，求方程组的通解.

12. 知矩阵$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$.

（1）若$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，求$x,y$的值；

（2）在（1）的情况下，求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

13. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，在正交变换$X=QY$下的标准形为$y_1^2+y_2^2$，且Q的第3列为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$，求矩阵$A^{2020}$.

三、综合题(12 分)

14. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 为线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的一个基础解系，

$\boldsymbol{\beta}_1=t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=t_1\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_3$，…，

$\boldsymbol{\beta}_n=t_1\boldsymbol{\alpha}_n+t_2\boldsymbol{\alpha}_1$，其中 t_1,t_2 为实常数，试问 t_1,t_2 满足什么关系时 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n$ 也为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的

基础解系。

四、开放题(4 分)

15.设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，请写出齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 有非零解的四个等价命题.

2020-2021 学年第一学期期末考试试卷参考答案

一、填空题(每小题 3 分，共 24 分)

1、【正解】$A^*=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

【解析】二阶方阵求伴随矩阵，主对调，负相反

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5——矩阵的逆　　题型 4 伴随矩阵的计算

2、【正解】$\begin{pmatrix}a_1 & a_3 & a_2\\ b_1 & b_3 & b_2\\ c_1 & c_3 & c_2\end{pmatrix}$

【解析】 列变换矩阵P的逆矩阵还是P，所以$P^{2021}=P$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 8——初等矩阵

3、【正解】12

【解析】

$$f(0)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 9 & 16\\ 1 & 8 & 27 & 64\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1^0 & 2^0 & 3^0 & 4^0\\ 1^1 & 2^1 & 3^1 & 4^1\\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2\\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3\end{vmatrix}$$

$$=(4-3)\times(4-2)\times(4-1)\times(3-2)\times(3-2)\times(3-1)\times(2-1)=12$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 3——几种特殊的行列式

4、【正解】$\alpha_1\alpha_2$（或$\alpha_2\alpha_3$）

【解析】$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$可知$\alpha_1\alpha_2$及$\alpha_2\alpha_3$是$T$的极大无关组

【考点延伸】《考试宝典》知识点 12——极大线性无关组

5、【正解】3

【解析】 A列向量组线性相关. $|A|=0$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&3&-1\\0&-5&a\\3&-1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&-1\\0&-5&a\\0&-10&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&a\\-10&6\end{vmatrix}=-30+10a=0,\text{得}a=3$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 11——向量组的线性相关和线性表示

6、【正解】0

【解析】 A,B 均为 n 阶方阵且 $|AB|=1$，知 A,B 互为逆矩阵，说明 $|A|\neq 0$，$B\neq 0$，

满秩，此时 $Ax=0,Bx=0$ 均只有零解。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 16——齐次线性方程组

7、【正解】32

【解析】 A,A^T 特征值相同，B 与 A 相似得，A^T,B^T 相似，所以 B^T 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=$

$\lambda_4=2$。$|2B^T|=2^4|B^T|=2^4\times 2=32$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 20——矩阵相似对角化

8、【正解】1

【解析】$x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2-x_3^2$

令 $y_1=x_1+x_2+x_3$ $y_2=x_2+x_3$ $y_3=x_3$

可得 $\begin{cases}x_1=y_2-y_1\\x_2=y_2-y_3\\x_3=y_3\end{cases}$，则原式 $=y_1^2+y_2^2-y_3^2$ 　　符号差为 2-1=1

【考点延伸】《考试宝典》知识点 22——二次型

二、计算题(每小题 12 分，共 60 分)

9、【解析】$(2E-B^{-1}A)X^T=B^{-1}$ 　 $(2B-A)X^T=E$ 　 $X^T=(2B-A)^{-1}$

$$2B-A=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\times 2-\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore X^T=\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad X=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5——矩阵的逆

10、【解析】(1) $$B=\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\2&2&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\2&2&2&\cdots&n\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&0\\2&2&2&\cdots&2\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&0\\0&2&2&\cdots&2\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}$$

$$|B|=-2\times(n-2)!$$

(2) $|P|=|C||D|$ $\because C,D$ 均可逆$\therefore|P|\neq0$，得 P 可逆

$$A=PBP^{-1}\quad A^{2020}=PB^{2020}P^{-1}$$

$$|A^{2020}|=|P|\cdot|B^{2020}|\cdot|P^{-1}|=|B^{2020}|=[2(n-2)!]^{2020}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 9——矩阵的秩和矩阵等价

11. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\a&1&3&b\end{bmatrix},\beta=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$.

(1) 若 A 的秩 $R(A)=2$，求 a,b 的值.

(2) 在 (1) 的情况下，求方程组的通解.

11、【解析】(1) $$A=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\a&1&3&b\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&-5\\0&1-a&3-a&b-a\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}1&0&2&-4\\0&-1&1&-5\\0&0&4-2a&b+4a-5\end{vmatrix}$$

$$\because R(A)=2\quad\therefore\begin{cases}4-2a=0\\b+4a-5=0\end{cases}\quad 得\begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}$$

(2)方程为 $AX=\beta$，为非齐次方程组，经化简得增广矩阵为：$\begin{bmatrix}1&0&-2&-4&&2\\0&1&-1&5&\vdots&-3\\0&0&0&0&&0\end{bmatrix}$，

所以有两个自由变量，选 x3 与 x4，可得$x_1=2x_3+4x_4+2$ $x_2=x_3-5x_4-3$ ，故通解

$$x=\begin{bmatrix}2k_1+4k_2+2\\k_1-5k_2-3\\k_1\\k_2\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}4\\-5\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-3\\0\\0\end{bmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17——线性非齐次方程组

12、【解析】(1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2&0&0\\-2&\lambda-x&-2\\-3&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda-x&-2\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}$

$$=(\lambda+2)[(\lambda-x)(\lambda-1)-2]=\lambda^3-(x-1)\lambda^2-(x+4)\lambda+2x-4$$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&0\\0&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-y\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-y)=\lambda^3-(1+y)\lambda^2+(y-2)\lambda+2y$$

$\because |\lambda E-A|=|\lambda E-B|$

$\therefore \lambda^3-(x-1)\lambda^2-(x+4)\lambda+2x-4=\lambda^3-(1+y)\lambda^2+(y-2)\lambda+2y$

$$\begin{cases}x-1=1+y\\-4-x=y-2\\2x-4=2y\end{cases}\quad \text{解得}\begin{cases}x=0\\y=-2\end{cases}$$

(2) 由$\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&0&2\\3&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&-2\end{pmatrix}$，

$\lambda=-1$　由$(-E-A)X=0$得$\alpha_1=(0,-2,1)^T$

$\lambda=2$　由$(2E-A)X=0$ 得$\alpha_2=(0,1,1)^T$

$\lambda=-2$　由$(-2E-A)X=0$得$\alpha_3=(1,-0,-1)^T$

令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$　有$P^{-1}AP=B$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19——特征值和特征向量

3、【解析】由题可知，A 的特征值为 1,1,0，且 $(1,0,1)^T$ 为 A 的一个特征向量，设 $X=(x_1,x_2,x_3)^T$ 为 A 的特征向量，可知 $x_1+x_3=0$，取 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$，$(0,1,0)^T$ 为 A 的属于特征值的单位特征向量。

$$A=Q\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}Q^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

总结得 $A^{2020}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 22——二次型

三、综合题(12 分)

4、【解析】要满足向量组 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$ 线性无关

即满足向量组中向量的组合系数构成行列式 $A\neq 0$

$$A=\begin{vmatrix}t_1&t_2&0&\cdots&0\\0&t_1&t_2&\cdots&0\\0&0&t_1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\t_2&0&0&\cdots&t_1\end{vmatrix}=t_1\begin{vmatrix}t_1&t_2&\cdots&0\\0&t_1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&t_1\end{vmatrix}-t_2\begin{vmatrix}t_1&t_2&0&\cdots&0\\0&t_1&t_2&\cdots&0\\0&0&t_1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\t_2&0&0&\cdots&t_1\end{vmatrix}=t_1^n+t_2\begin{vmatrix}t_2&0&0&\cdots&0\\t_1&t_2&0&\cdots&0\\0&t_1&t_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&t_2\end{vmatrix}$$

$$=t_1^n+t_2^n$$

$\therefore t_1,t_2$ 要满足 $t_1^n+t_2^n\neq 0$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 11——向量组的线性相关和线性表示

四、开放题(4 分)

15、【解析】 ①$|A|=0$ ($m=n$时成立) ②$m<n$ ③$m>n$且$r(A)<n$ ④A的列向量组线性

【考点延伸】《考试宝典》知识点 16——齐次线性方程组