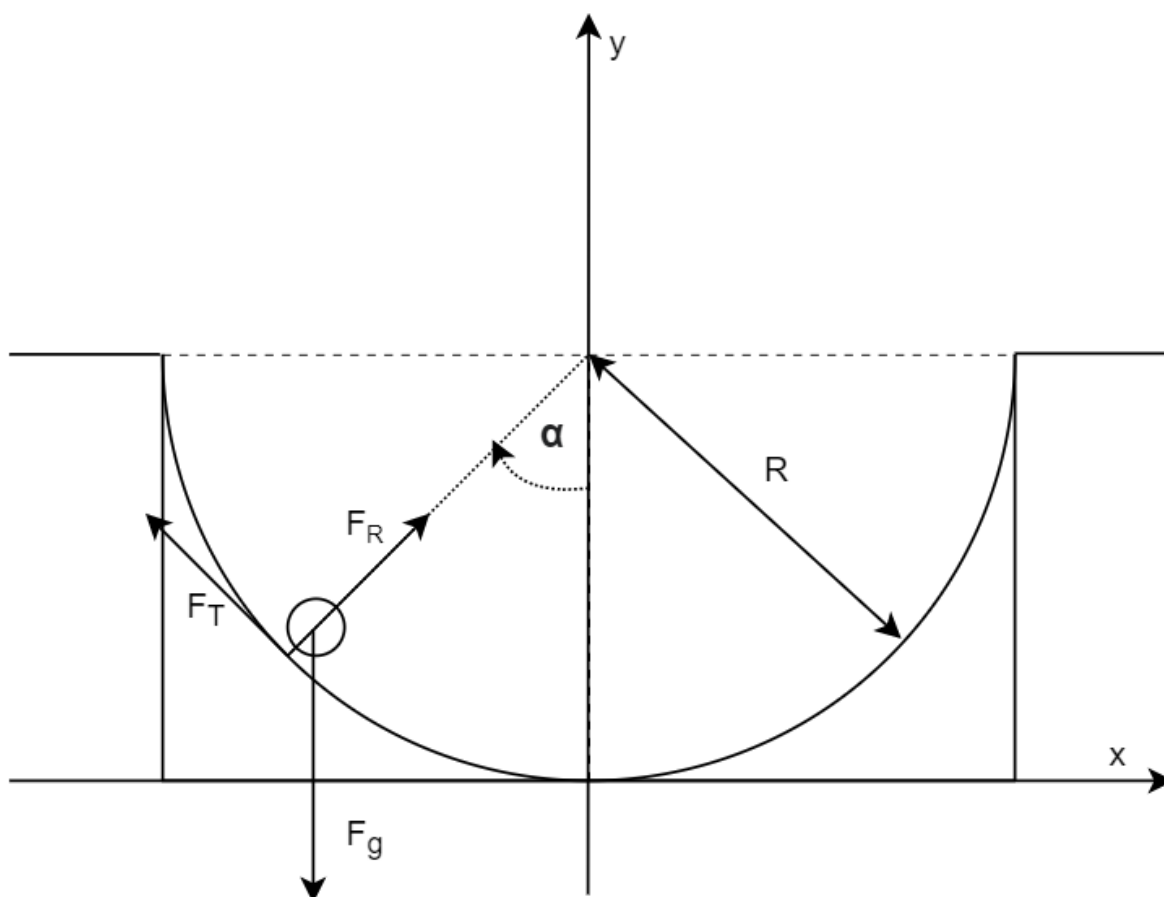


Układ kuli toczącej się bez poślizgu w rampie

1. Opis zagadnienia

Rozważany jest układ przedstawiony na rysunku:

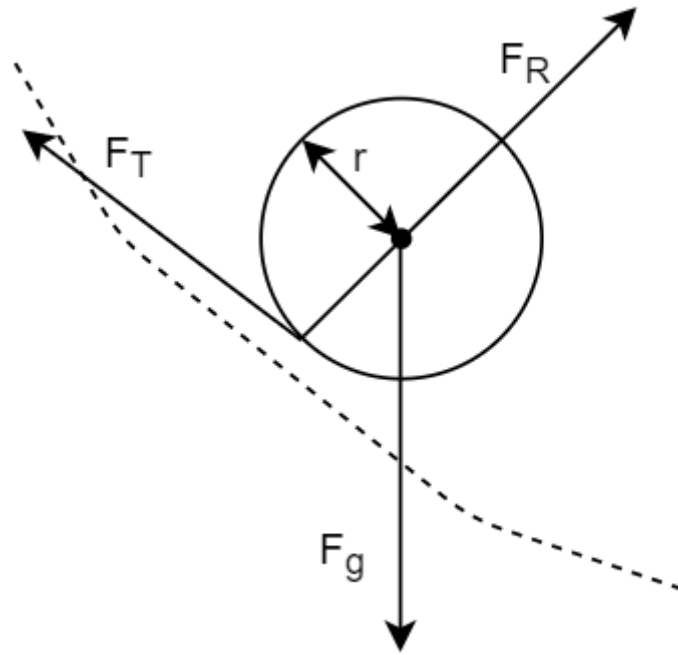


Gdzie:

- R – promień rampy;
- α – kąt wychylenia względem położenia równowagi;
- F_R – siła reakcji podłoża;
- F_T – siła tarcia statycznego
- F_g – siła grawitacji

W przedstawionym układzie kula o masie m toczy się bez poślizgu.

Poniższy rysunek obrazuje powyższą sytuację z perspektywy kuli:



Gdzie r jest promieniem kuli.

2. Równania ruchu

Rozważamy następujący układ równań różniczkowych ruchu:

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = F_1(\dots) \\ \frac{d\alpha}{dt} = F_2(\dots) \\ \omega(t_0) = \omega_0 \\ \alpha(t_0) = \alpha_0 \end{cases}$$

Kula toczy się bez poślizgu, co oznacza, że uwzględniamy jedynie tarcie statyczne. Siły równoważą się następująco:

- Równoległe do powierzchni:

$$F_T = F_g \sin \alpha$$

$$F_T = mg \sin \alpha$$

- Prostopadłe do powierzchni:

$$F_R = F_g \cos \alpha$$

$$F_R = mg \cos \alpha$$

Obrót kuli powodowany jest przez niezrównoważone momenty. Momenty sił w układzie względem środka masy kuli są następujące:

$$M_{F_T} = -F_T \cdot r = -mg \sin \alpha \cdot r$$

$$M_{F_g} = F_g \cdot 0 = 0$$

$$M_{F_R} = F_R \cdot 0 = 0$$

Oznacza to, że o ruchu kuli decyduje jedynie moment siły tarcia. Do obliczenia pochodnej prędkości kątowej po czasie należy obliczyć moment bezwładności kuli.

$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2 = \frac{2}{5} m r^2$$

Przyspieszenie kątowe obracającej się kuli wynosi:

$$\varepsilon_M = \frac{M}{I} = \frac{-m g \sin \alpha \cdot r}{\frac{2}{5} m r^2} = \frac{-5 g \sin \alpha}{2 r}$$

Stosunek przyspieszenia kątowego kuli względem środka krzywizny rampy do przyspieszenia kątowego kuli względem własnej osi wynosi:

$$\begin{aligned} \varepsilon_M \cdot r &= \varepsilon_D \cdot R \\ \frac{\varepsilon_D}{\varepsilon_M} &= \frac{r}{R} \end{aligned}$$

Stąd przyspieszenie kątowe względem środka kuli, czyli F_1 :

$$F_1 = \frac{-5 g \sin \alpha}{2 r} \cdot \frac{r}{R} = \frac{-5 g \sin \alpha}{2 R}$$

Funkcję F_2 można przedstawić jako:

$$F_2 = \omega$$

Otrzymujemy następujący układ równań:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{-5 g \sin \alpha}{2 R} \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \omega \\ \omega(t_0) &= \omega_0 \\ \alpha(t_0) &= \alpha_0 \end{aligned} \right.$$

Na energię mechaniczną układu składają się energia kinetyczna kuli i energia potencjalna grawitacji. Uzyskujemy więc równanie:

$$E_{mech} = \frac{1}{2} I \omega_M^2 + m g h = \frac{1}{5} m r^2 \cdot \left(\omega_D \cdot \frac{R}{r} \right)^2 + m g R \cdot (1 - \cos \alpha)$$

3. Metoda obliczeniowa

Układ równań scałkowano metodą RK4. Krok całkowania to 0.001, zaś przyjęty czas to 5000. Przyjęty krok całkowania pozwala na bardzo dużą dokładność wyników, a przyjęty czas dla kroku całkowania umożliwia przeprowadzenie symulacji dla kilku okresów.

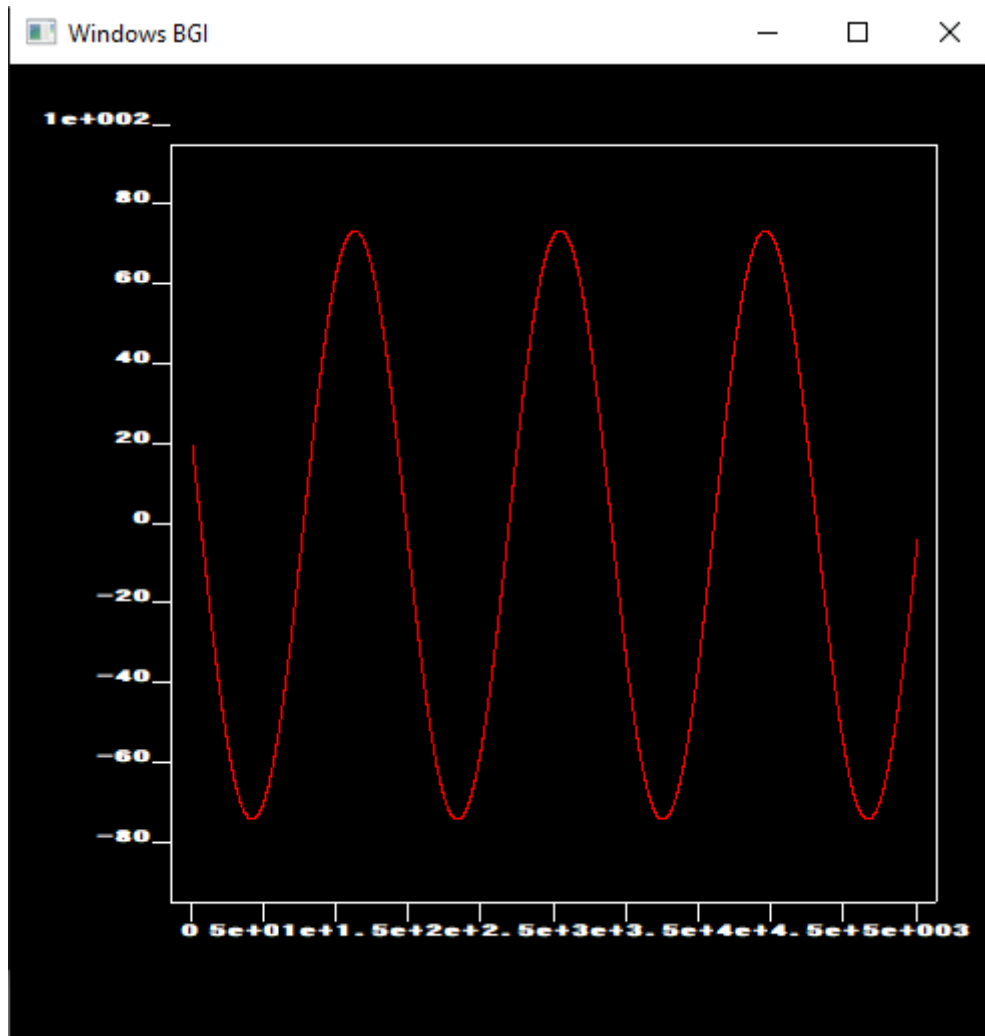
4. Wyniki i ich analiza

Symulację przeprowadzono dla następujących danych:

- Masa kuli – 1 kg
- Promień krzywizny rampy – 1 m

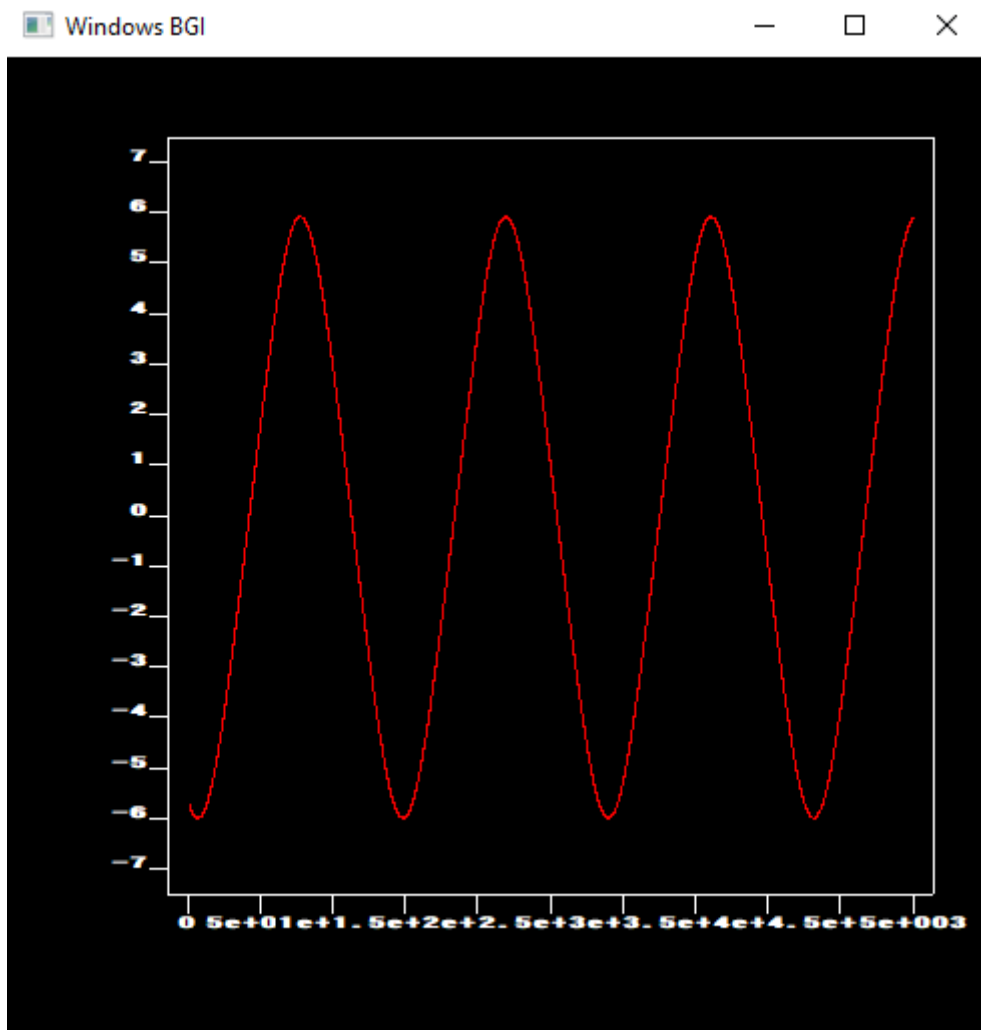
- Promień kuli – 5 cm = 0.05 m
- Wychylenie początkowe względem punktu równowagi – 20°
- Początkowa prędkość kątowa – -5.7 rad/s

Wyniki prezentują się następująco:



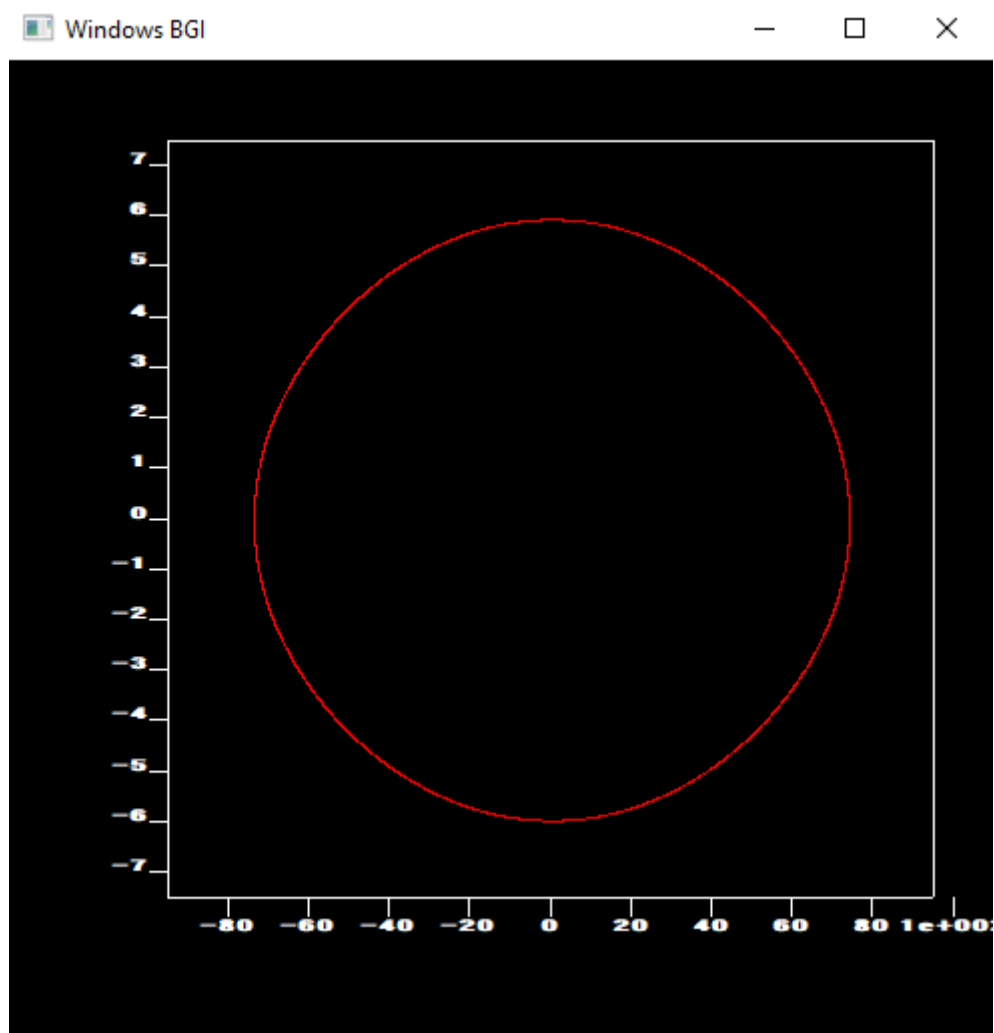
Wykres 1 – wychylenie względem punktu równowagi w czasie.

Powyższy wykres ukazuje okresowość rozważanego ruchu. Zgodnie z oczekiwaniami symulacja rozpoczyna się malejącym wychyleniem, gdyż prędkość kątowa jest przeciwnego znaku względem wychylenia. Brak widocznych zmian w amplitudzie wychylenia powiązany jest z brakiem traconej energii mechanicznej.



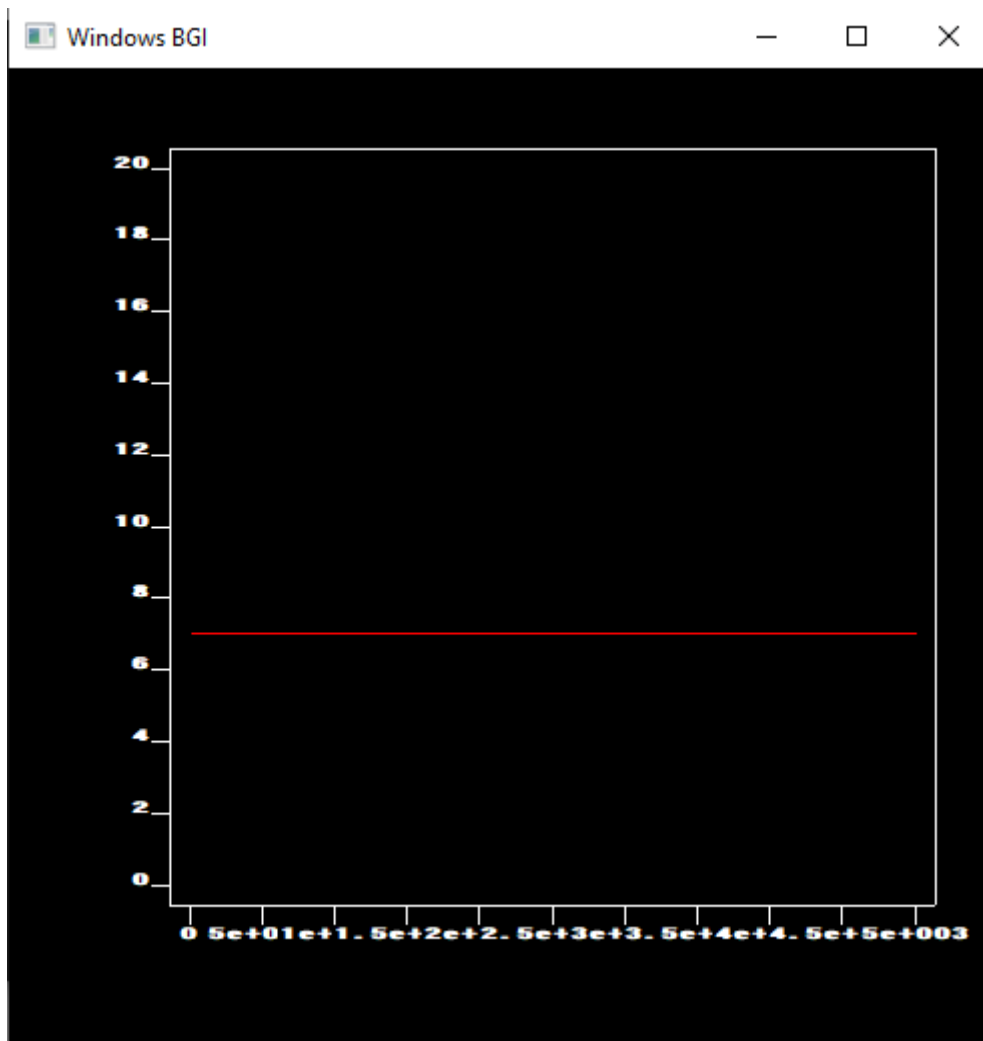
Wykres 2 – prędkość kątowna ruchu kuli względem rampy w czasie.

Powyższy wykres pokazuje okresowe zmiany prędkości kątowej $\left[\frac{rad}{s}\right]$ w czasie $[s]$. Zgodnie z oczekiwaniami kula na początku rozpędza się aż do momentu osiągnięcia punktu równowagi. Brak zmiany amplitud w kolejnych wychyleniach spowodowany jest brakiem strat energii mechanicznej.



Wykres 3 – zależność prędkości kątowej od wychylenia.

Wykres prędkości kątowej $\left[\frac{rad}{s}\right]$ od wychylenia $[^\circ]$ względem punktu równowagi jest niezmienny, w każdym kolejnym okresie zależności są identyczne ze względu na stałą energię mechaniczną.



Wykres 4 – energia mechaniczna w czasie.

Zgodnie z oczekiwaniami, wykres energii jest stały. Spowodowane jest to pominięciem wszelkich oporów, poza oporem statycznym, który skutkuje toczeniem się kuli bez poślizgu.

5. Podsumowanie

Wyniki pokrywają się z oczekiwaniami, a energia mechaniczna pozostaje stała, co pozwala na uznanie symulacji za poprawną. Dzięki zaimplementowaniu metody RK4 wyniki cechują się bardzo dużą dokładnością.