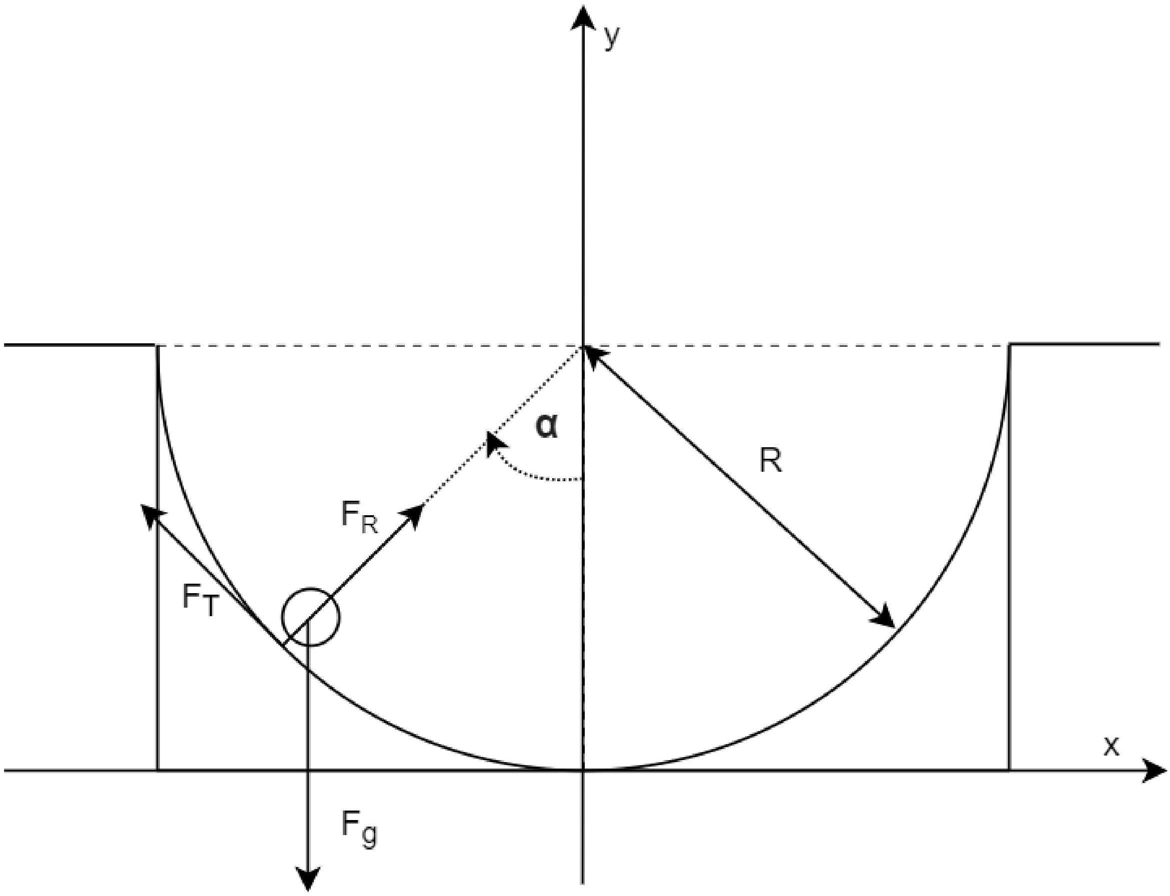
Gregory Chmielewski, nr albumu 304327

Układ kuli toczącej się bez poślizgu w rampie

1. Opis zagadnienia

Rozważany jest układ przedstawiony na rysunku:

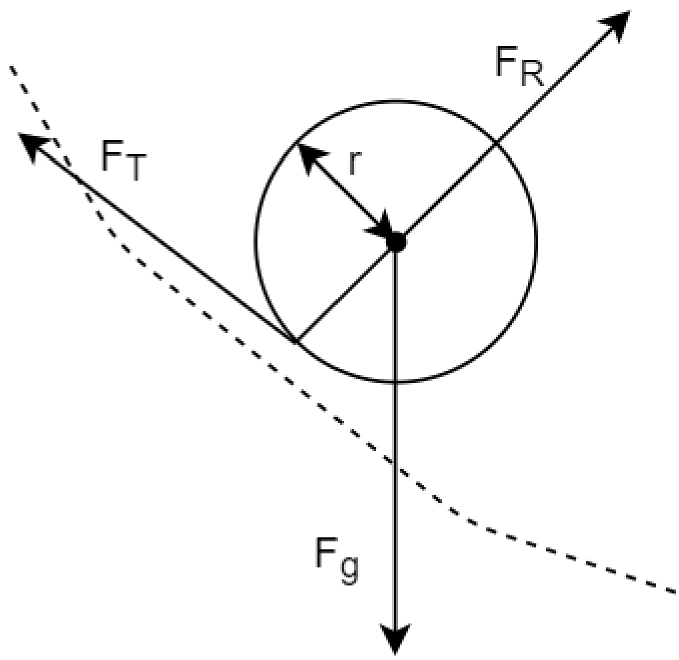


Gdzie:

- R – promień rampy;
- α – kąt wychylenia względem położenia równowagi;
- F_R – siła reakcji podłoża;
- F_T – siła tarcia statycznego
- F_g – siła grawitacji

W przedstawionym układzie kula o masie *m* toczy się bez poślizgu.

Poniższy rysunek obrazuje powyższą sytuację z perspektywy kuli:



Gdzie r jest promieniem kuli.

2. Równania ruchu

Rozważamy następujący układ równań różniczkowych ruchu:

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega}{dt} = F_1(\dots) \\ \dfrac{d\alpha}{dt} = F_2(\dots) \\ \omega(t_0) = \omega_0 \\ \alpha(t_0) = \alpha_0 \end{cases}$$

Kula toczy się bez poślizgu, co oznacza, że uwzględniamy jedynie tarcie statyczne. Siły równoważą się następująco:

- Równolegle do powierzchni:

$$F_T = F_g \sin\alpha$$

$$F_T = mg \sin\alpha$$

- Prostopadle do powierzchni:

$$F_R = F_g \cos\alpha$$

$$F_R = mg \cos\alpha$$

Obrót kuli powodowany jest przez niezrównoważone momenty. Momenty sił w układzie względem środka masy kuli są następujące:

$$M_{F_T} = -F_T \cdot r = -mg \sin\alpha \cdot r$$

$$M_{F_G} = F_g \cdot 0 = 0$$

$$M_{F_R} = F_R \cdot 0 = 0$$

Oznacza to, że o ruchu kuli decyduje jedynie moment siły tarcia. Do obliczenia pochodnej prędkości kątowej po czasie należy obliczyć moment bezwładności kuli.

$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2 = \frac{2}{5} m r^2$$

Przyspieszenie kątowe obracającej się kuli wynosi:

$$\varepsilon_M = \frac{M}{I} = \frac{-mg \sin\alpha \cdot r}{\frac{2}{5} m r^2} = \frac{-5g \sin\alpha}{2r}$$

Stosunek przyspieszenia kątowego kuli względem środka krzywizny rampy do przyspieszenia kątowego kuli względem własnej osi wynosi:

$$\varepsilon_M \cdot r = \varepsilon_D \cdot R$$

$$\frac{\varepsilon_D}{\varepsilon_M} = \frac{r}{R}$$

Stąd przyspieszenie kątowe względem środka kuli, czyli F_1:

$$F_1 = \frac{-5g \sin\alpha}{2r} \cdot \frac{r}{R} = \frac{-5g \sin\alpha}{2R}$$

Funkcję F_2 można przedstawić jako:

$$F_2 = \omega$$

Otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{-5g \sin\alpha}{2R} \\ \dfrac{d\alpha}{dt} = \omega \\ \omega(t_0) = \omega_0 \\ \alpha(t_0) = \alpha_0 \end{cases}$$

Na energię mechaniczną układu składają się energia kinetyczna kuli i energia potencjalna grawitacji. Uzyskujemy więc równanie:

$$E_{mech} = \frac{1}{2} I {\omega_M}^2 + mgh = \frac{1}{5} m r^2 \cdot \left(\omega_D \cdot \frac{R}{r}\right)^2 + mgR \cdot (1 - \cos\alpha)$$

3. Metoda obliczeniowa

Układ równań scałkowano metodą RK4. Krok całkowania to 0.001, zaś przyjęty czas to 5. Przyjęty krok całkowania pozwala na bardzo dużą dokładność wyników, a przyjęty czas dla kroku całkowania umożliwia przeprowadzenie symulacji dla kilku okresów.

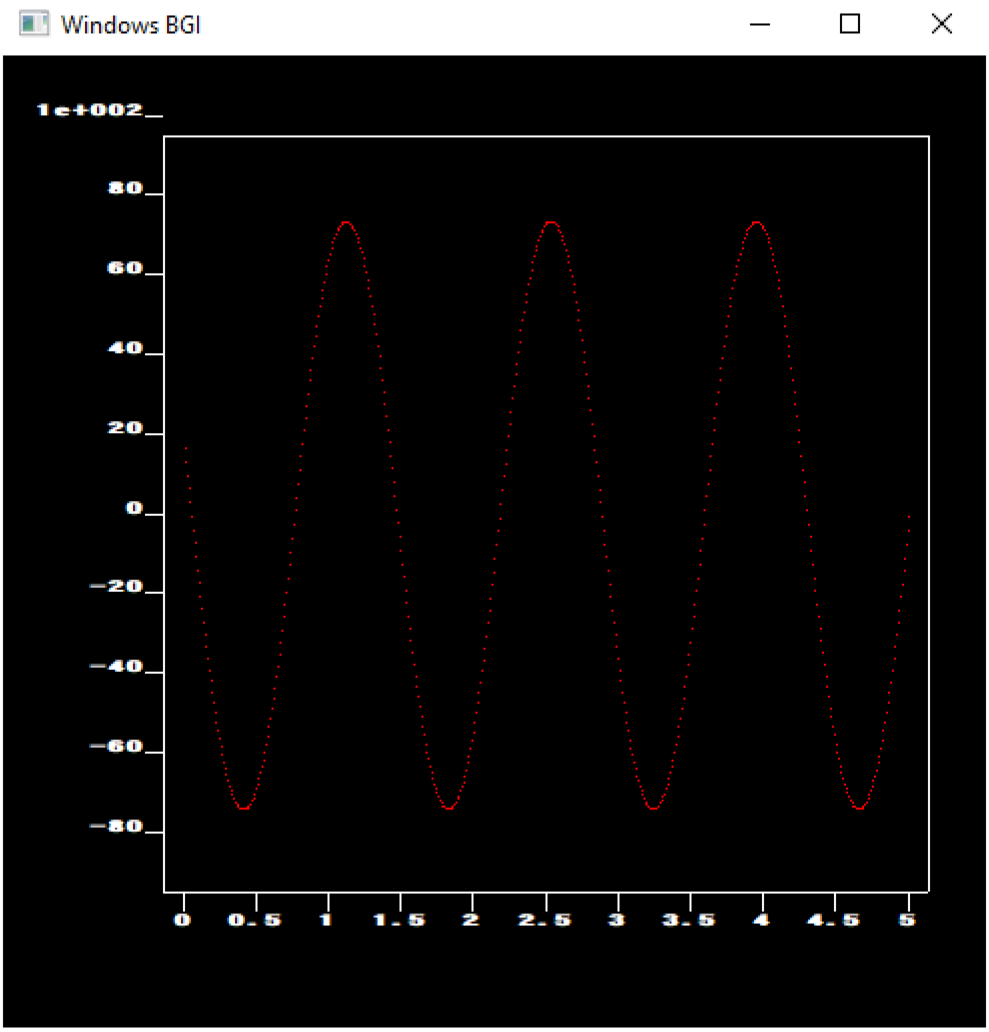
4. Wyniki i ich analiza

Symulację przeprowadzono dla następujących danych:

- Masa kuli – 1 kg
- Promień krzywizny rampy – 1 m

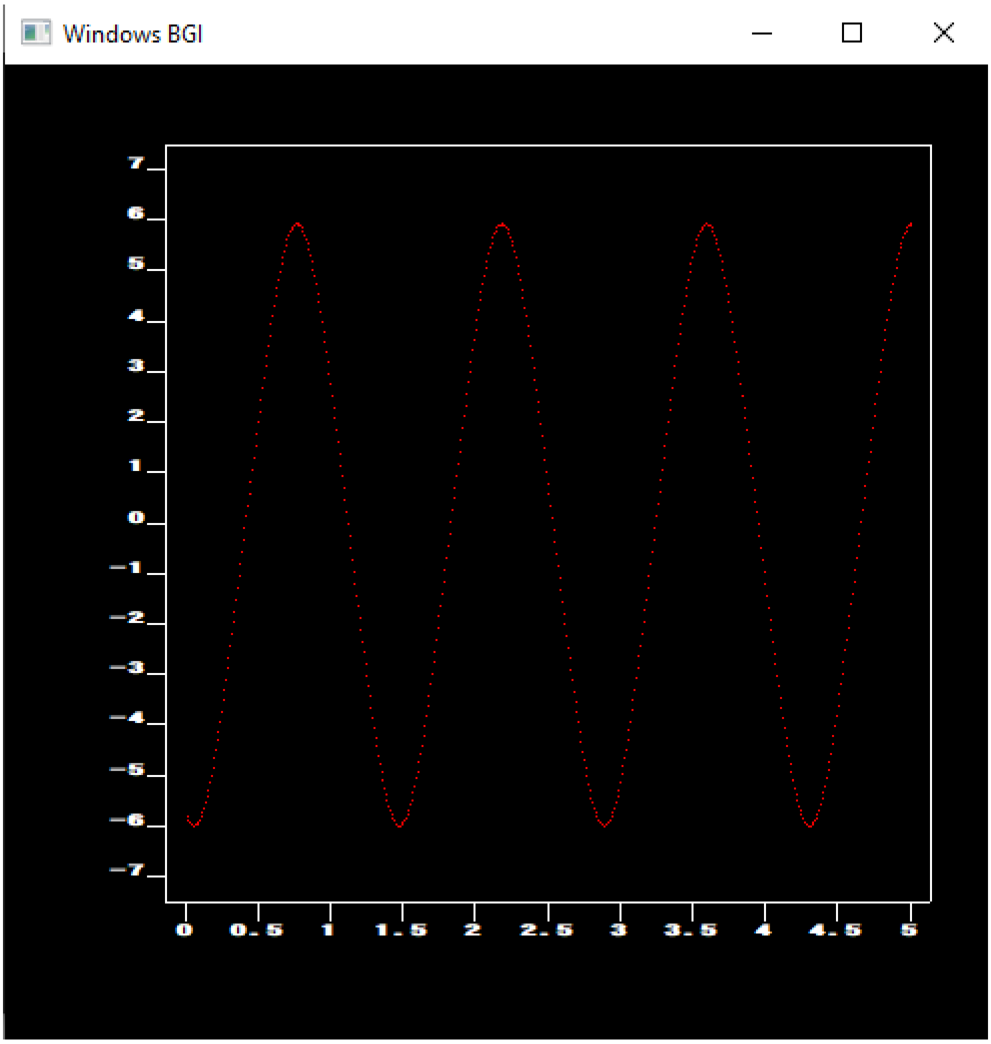
- Promień kuli – 5 cm = 0.05 m
- Wychylenie początkowe względem punktu równowagi – 20°
- Początkowa prędkość kątowa – -5.7 rad/s

Wyniki prezentują się następująco:



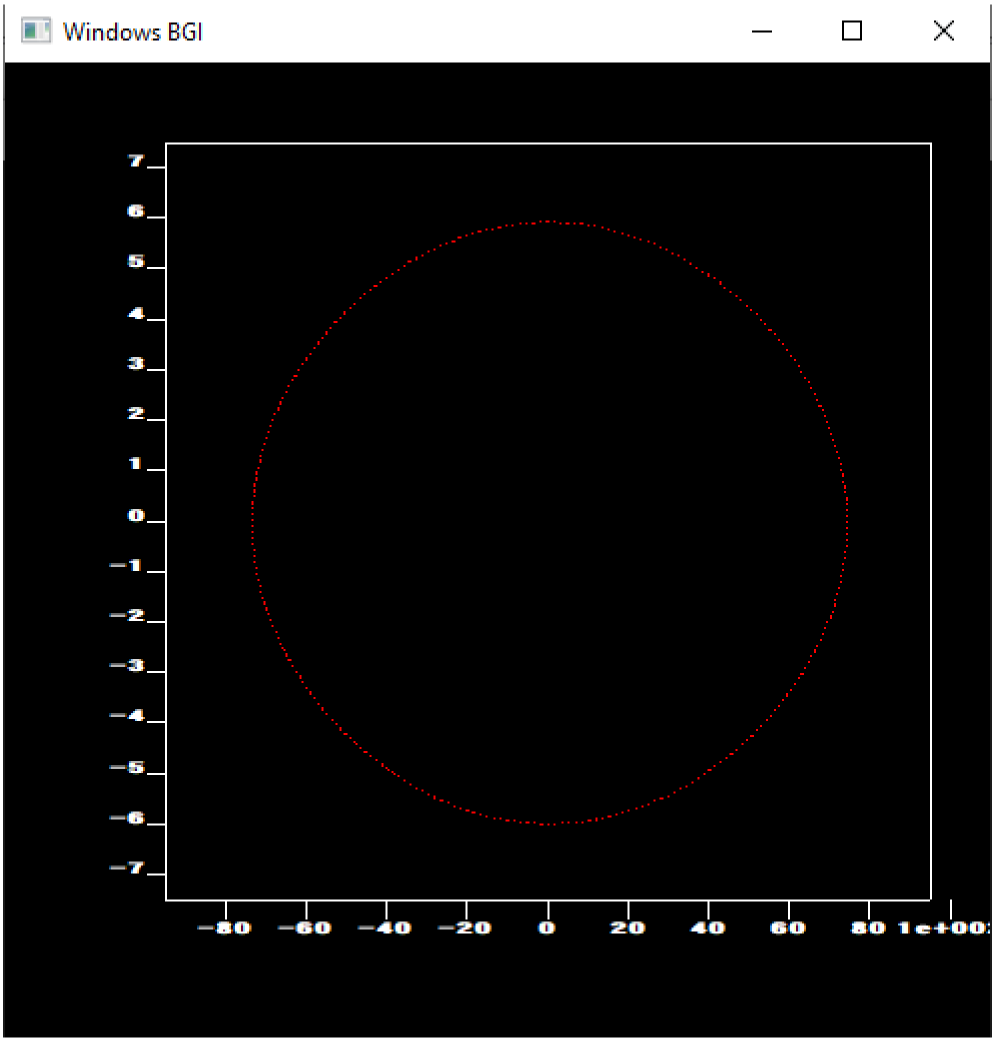
Wykres 1 – wychylenie względem punktu równowagi w czasie.

Powyższy wykres ukazuje okresowość rozważanego ruchu. Zgodnie z oczekiwaniami symulacja rozpoczyna się malejącym wychyleniem, gdyż prędkość kątowa jest przeciwnego znaku względem wychylenia. Brak widocznych zmian w amplitudzie wychylenia powiązany jest z brakiem traconej energii mechanicznej.



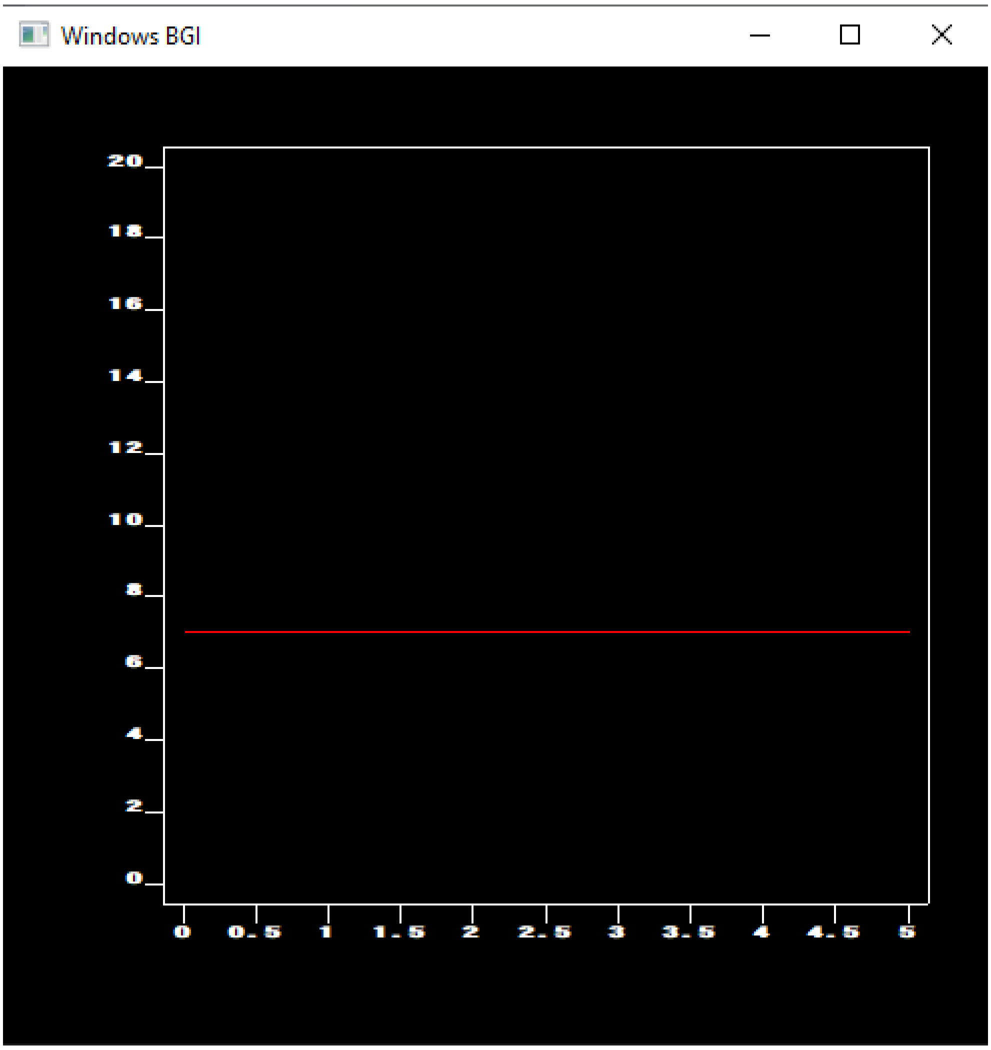
Wykres 2 – prędkość kątowa ruchu kuli względem rampy w czasie.

Powyższy wykres pokazuje okresowe zmiany prędkości kątowej $\left[\frac{rad}{s}\right]$ w czasie $[s]$. Zgodnie z oczekiwaniami kula na początku rozpędza się aż do momentu osiągnięcia punktu równowagi. Brak zmiany amplitud w kolejnych wychyleniach spowodowany jest brakiem strat energii mechanicznej.



Wykres 3 – zależność prędkości kątowej od wychylenia.

Wykres prędkości kątowej $\left[\frac{rad}{s}\right]$ od wychylenia $[°]$ względem punktu równowagi jest niezmienny, w każdym kolejnym okresie zależności są identyczne ze względu na stałą energię mechaniczną.



Wykres 4 – energia mechaniczna w czasie.

Zgodnie z oczekiwaniami, wykres energii jest stały. Spowodowane jest to pominięciem wszelkich oporów, poza oporem statycznym, który skutkuje toczeniem się kuli bez poślizgu.

5. Podsumowanie

Wyniki pokrywają się z oczekiwaniami, a energia mechaniczna pozostaje stała, co pozwala na uznanie symulacji za poprawną. Dzięki zaimplementowaniu metody RK4 wyniki cechują się bardzo dużą dokładnością.