Gregory Chmielewski grupa 9

Laboratorium nr 4 – Całkowanie numeryczne równań różniczkowych zwyczajnych

1. **Cel laboratorium**

Celem przeprowadzonych zajęć było przedstawienie dwóch metod numerycznych, mających zastosowanie w rozwiązywaniu równań różniczkowych pierwszego rzędu i przeanalizowanie wielkości błędów dla danego kroku całkowania.

1. **Wstęp teoretyczny**

Metoda Eulera

Metoda Eulera oparta jest na twierdzeniu Taylora, które w kontekście rozpatrywanych przez nas równań różniczkowych pierwszego rzędu, gdzie *y* jest zmienną zależną od *t*, można zapisać:

gdzie należy do przedziału . Przy dostatecznie małym kroku całkowania otrzymujemy zależność:

gdzie , i oznaczają odpowiednio przybliżenia i oraz wyrażenie pochodnej zmiennej . Podsumowując, otrzymujemy poniższy schemat iteracyjny:

gdzie h jest tak jak wyżej krokiem całkowania, jest rozwiązaniem, jest rozwiązaniem w poprzednim kroku iteracyjnym, zaś *f* jest funkcją wyrażającą pochodną . Dla odpowiedniej liczby iteracji powyższy schemat doprowadza do coraz dokładniejszych rozwiązań.

Metoda Rungego-Kutty 4-ego rzędu

Metoda ta jest znacznie bardziej precyzyjna w porównaniu do metody Eulera, jednakże jest też nieco bardziej skomplikowana. Schemat iteracyjny ma postać:

Już dla niewielkiej liczby iteracji otrzymujemy w ten sposób bardzo dokładne rozwiązania.

1. **Opis działania programu**

Program korzysta z czterech bibliotek: stdio.h, math.h, stdlib.h oraz rk4.h załączonej do instrukcji do laboratorium. Funkcja *analitycznie* zwraca dokładną wartość rozwiązania dla danego *t*, funkcja *euler* odpowiada za obliczenie przybliżonej wartości rozwiązania metodą Eulera, zaś funkcja *f* służy do zwracania wartości pochodnej *y’* dla danego t.

Po uruchomieniu program przeprowadza obliczenia metodami: analityczną, Eulera i Rungego-Kutty czwartego rzędu, w zależności od liczby kroków całkowania, a następnie oblicza błąd rozpatrywanych metod względem rozwiązania analitycznego wzorem:

Liczba kroków całkowania określona jest jako kolejne potęgi dwójki od 1 do 64. Po wykonaniu obliczeń dla danego kroku całkowania program wyświetla wyniki na ekranie. Ostatecznie program zapisuje długość kroku całkowania, błąd metody Eulera oraz błąd metody Rungego-Kutty dla danej liczby iteracji.

1. **Wyniki i ich porównanie**

Na poniższym wykresie przedstawiono błędy rozpatrywanych metod w funkcji kroku całkowania *h*:

Z uzyskanych danych wynika, że metoda RK4 cechuje się znacznie wyższą dokładnością, nawet dla dużego kroku całkowania. Metoda Eulera silnie zależy od liczby iteracji, jej dokładność wzrasta wraz ze zmniejszającym się krokiem całkowania i jest możliwym w ten sposób otrzymanie dość dokładnych wyników. Wiąże się to jednak z wyższą w porównaniu do RK4 złożonością czasową dla podobnych rezultatów, ponieważ wymagane jest wykonanie znacznie większej liczby iteracji.