Gregory Chmielewski grupa 9

Laboratorium nr 5 – Całkowanie numeryczne układów równań różniczkowych zwyczajnych

1. **Cel laboratorium**

Celem przeprowadzonego laboratorium było przedstawienie sposobów rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych używając do tego metod numerycznych zaprezentowanych na laboratorium nr 4: metody Eulera i metody Rungego-Kutty 4-ego rzędu. Rozwiązywany układ równań dotyczył ruchu wahadła matematycznego.

1. **Wstęp teoretyczny**

Ruch wahadła matematycznego opisuje poniższy układ równań:

gdzie oznacza kąt wychylenia wahadła z położenia równowagi podany w radianach, jest niezależną zmienną czasową, jest przyspieszeniem ziemskim, oznacza długość wahadła, jest wychyleniem początkowym, zaś jest początkową prędkością kątową, z jaką porusza się wahadło. Wiedząc iż prędkość kątowa jest pochodną wychylenia po czasie, powyższe równanie można również zapisać jako następujące zagadnienie Cauchy’ego:

Zagadnienie to można rozwiązać dwoma znanymi już metodami:

Metoda Eulera

Schemat iteracyjny metody Eulera dla równań pierwszego rzędu określony jest następująco:

Rozważane zagadnienie zawiera równanie drugiego rzędu, co wymusza zastosowanie zmodyfikowanego schematu iteracyjnego. Dla rozważanych równań wygląda on następująco:

gdzie i oznaczają funkcje obliczające prawe strony odpowiednich równań różniczkowych.

Metoda Rungego-Kutty 4-ego rzędu

Analogicznie do metody Eulera, metoda RK4 wymaga modyfikacji umożliwiającej liczenie zadanego układu równań. Schemat iteracyjny prezentuje się następująco:

Gdzie

w powyższych równaniach oznacza odpowiednią zmienną zależną lub .

Po dokonaniu niezbędnych obliczeń możliwe staje się również policzenie energii całkowitej układu wzorem:

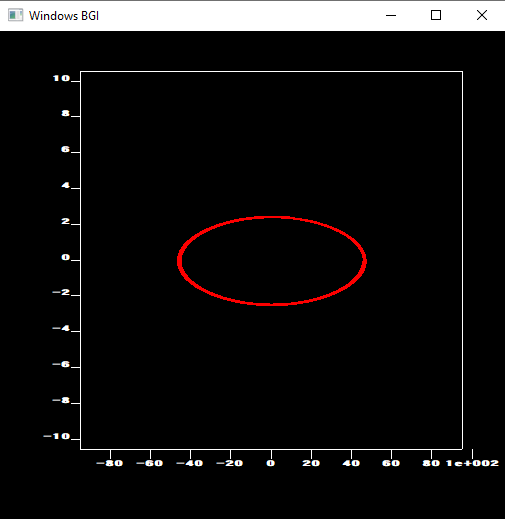
1. **Opis działania programu**

Program korzysta z czterech bibliotek: stdio.h, math.h, rk4.h oraz winbgi2.h. Funkcja *rhs\_fun* oblicza prawe strony równań różniczkowych i przekazuje je do dwuelementowej tablicy *F*. Funkcja *veuler* oblicza jeden krok całkowania metodą Eulera i przekazuje wyniki do dwuelementowej tablicy *X1*.

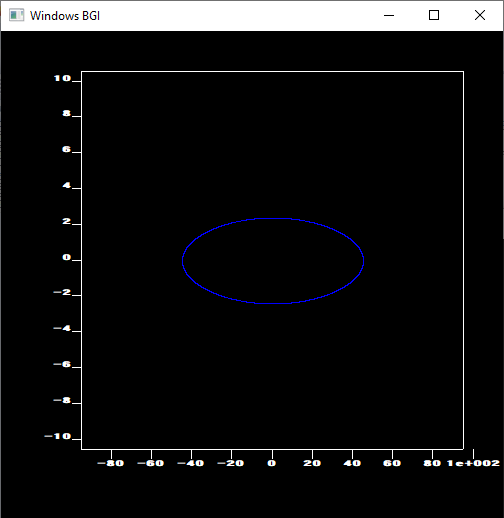
Po uruchomieniu program pozwala na wybór metody do obliczenia kolejnych stanów wahadła. W obu przypadkach program domyślnie wykonuje obliczenia dla kroku całkowania , liczby kroków czasowych , przyspieszenia grawitacyjnego , wychylenia początkowego , masy kulki na końcu wahadła , długości wahadła oraz początkowej prędkości kątowej . Dla każdego kroku czasowego program oblicza prędkość kątową , kąt wychylenia wahadła z położenia równowagi i energię całkowitą układu, po czym wyświetla obliczone dane na ekranie. Jednocześnie w oknie graficznym rysowany jest wykres trajektorii układu w przestrzeni fazowej w oparciu o otrzymane dane.

1. **Wyniki i ich porównanie**

Dla domyślnych wartości zmiennych otrzymujemy następujące wykresy:



*Wykres 1. Trajektoria układu przy zastosowaniu metody Eulera.*

**

*Wykres 2. Trajektoria układu przy zastosowaniu metody RK4.*

Z wykresów wynika, iż metoda Eulera, w przeciwieństwie do metody RK4, prowadzi do stosunkowo małego błędu. Jednakże wraz ze zwiększaniem liczby kroków czasowych błąd rośnie. Wynika to również z energii mechanicznej układu, która w przypadku zastosowania metody Eulera zwiększa się, pomimo braku pracy zewnętrznej. Wraz z użyciem metody RK4 błąd jest pomijalnie mały, a energia układu nie ulega zmianie.