Conseqüência na Lógica Proposicional

Márcio Lopes Cornélio
DSC-Poli-UPE
mlc@dsc.upe.br

Implicação e equivalências tautológicas

Implicação e equivalências tautológicas

- Determinar quando uma fórmula é conseqüência de algum conjunto de fórmulas
  - Definição 1: Uma fórmula H **implica tautologicamente** uma fórmula G (G é uma conseqüência tautológica de H) se, para toda interpretação I tal que $I[H] = T$, então $I[G] = T$
  - Definição 2:Uma fórmula H é **tautologicamente equivalente** a uma fórmula G se, qualquer que seja a interpretação I, $I[H] = I[G]$

Conseqüência Tautológica - Exemplo 1

- Considere as fórmulas (premissas) $(A \vee B) \rightarrow C$ e $\neg B$. Vamos determinar se a fórmula $A \rightarrow C$ (conclusão) é uma conseqüência tautológica das premissas.
- Tabela verdade

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \rightarrow C$	$\neg B$	$A \rightarrow C$
V	V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	F	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
F	F	F	F	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$

- Em todas as situações em que as premissas são verdadeiras, a conclusão também é verdadeira. Logo, a fórmula é válida.

Conseqüência Tautológica - Exemplo 2

- $B \rightarrow A, \neg B \vdash \neg A$

A	B	$B \rightarrow A$	$\neg B$	$\neg A$
V	V	V	F	F
V	F	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$	$\boxed{F}$ *
F	V	F	F	V
F	F	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$

Tablôs Semânticos

Tablôs Semânticos

- Procedimentos ou sistema de provas
  - Correto: prova apenas as fórmulas válidas
  - Completo: prova todas as fórmulas válidas
- Método de refutação
  - Para mostrar que uma fórmula não é válida, começa-se supondo que ela não o é
  - Chegar a um absurdo indica que a suposição inicial estava errada
  - Também conhecido com "árvore de refutação"

Exemplo 1

- Determinar se a fórmula $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$ é válida (tautologia). *Há inconsistências neste tablô (e.g. A e $\neg A$), o que é um absurdo. A suposição de que $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$ não era válida leva a uma inconsitência. Logo, a fórmula é válida.*

a

$$\neg((A \wedge B) \rightarrow (A \vee B))$$

b

$$\begin{array}{c} \checkmark\neg((A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)) \\ A \wedge B \\ \neg(A \vee B) \end{array}$$

c

$$\begin{array}{c} \checkmark\neg((A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)) \\ \checkmark A \wedge B \\ \neg(A \vee B) \\ A \\ B \end{array}$$

d

$$\begin{array}{c} \checkmark\neg((A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)) \\ \checkmark A \wedge B \\ \checkmark\neg(A \vee B) \\ A \\ B \\ \neg A \\ \neg B \\ \text{X} \end{array}$$

Exemplo 2

- Verificar se a fórmula $(A \wedge B) \rightarrow C$ é válida. *Não chegamos a uma inconsistência. A hipótese de que a fórmula não fosse válida estava correta, i.e., ela não é válida mesmo.*

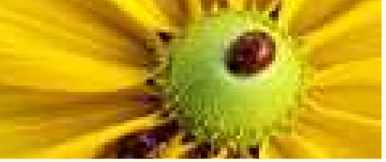
a $\quad \neg((A \wedge B) \rightarrow C)$

b $\quad \checkmark \neg((A \wedge B) \rightarrow C)$

$$A \wedge B$$
$$\neg C$$

c $\quad \checkmark \neg((A \wedge B) \rightarrow C)$

$$\checkmark A \wedge B$$
$$\neg C$$
$$A$$
$$B$$
$$?$$



Exemplo 3

- Demonstrar que a fórmula $(A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)$ é válida (tautologia). *Há ramos abertos que não podem ser fechados, pois não há fórmulas moleculares a serem reduzidas. Logo, a fórmula não é válida.*

a

$$\neg((A \vee B) \rightarrow (A \wedge B))$$

b

$$\checkmark \neg((A \vee B) \rightarrow (A \wedge B))$$
$$A \vee B$$
$$\neg(A \wedge B)$$

c

$$\checkmark \neg((A \vee B) \rightarrow (A \wedge B))$$
$$\checkmark A \vee B$$
$$\neg(A \wedge B)$$
$$A \quad B$$

d

$$\checkmark \neg((A \vee B) \rightarrow (A \wedge B))$$
$$\checkmark A \vee B$$
$$\checkmark \neg(A \wedge B)$$
$$A \qquad\qquad B$$
$$\neg A \quad \neg B \quad \neg A \quad \neg B$$
$$X \quad ? \quad ? \quad X$$

Tablôs

- Um tablô para uma fórmula α, começa com $\neg\,\alpha$
- Um ramo é **fechado** se contém, para alguma fórmula α, tanto α quanto $\neg\,\alpha$
- Um ramo é dito **completo** ou **finalizado** se é fechado ou todas as fórmulas moleculares encontradas nele foram reduzidas (possuem $\checkmark$)
- Um tablô é **completo** se cada um dos ramos é completo
- Um tablô é **fechado** se cada um dos seus ramos é fechado
- Um tablô fechado para uma fórmula α é uma *prova por tablôs* de α

Regras de Construção

Negação Se um ramo aberto contém uma fórmula e sua negação, escreva X no final do ramo

Negação Negada Se um ramo aberto contém uma fórmula não-reduzida da forma $\neg\neg\alpha$, marque-a como reduzida e escreva α no final de todo ramo que contém a nova fórmula reduzida

Conjunção Se um ramo aberto contém uma fórmula não-reduzida da forma $\alpha \wedge \beta$, marque-a como reduzida e escreva α e β no final de cada ramo que contém a nova fórmula reduzida

Conjunção Negada Se um ramo aberto contém uma fórmula não-reduzida da forma $\neg(\alpha \wedge \beta)$, marque-a como reduzida e bifurque cada ramo que contém a nova fórmula em dois novos ramos, no final do primeiro escreva $\neg\alpha$ e, no final do segundo, escreva $\neg\beta$

Disjunção Se um ramo aberto contém uma fórmula não-reduzida da forma $\alpha \vee \beta$, marque-a como reduzida e bifurque o final de cada ramo que contém a nova fórmula reduzida em dois novos ramos, no final do primeiro escreva α e, no final do segundo, escreva β

Disjunção Negada Se um ramo aberto contém uma fórmula não-reduzida da forma $\neg(\alpha \vee \beta)$, marque-a como reduzida e escreva tanto $\neg\alpha$ quanto $\neg\beta$ no final de todo ramo aberto que contém esta nova fórmula reduzida.

Implicação Se um ramo aberto contém uma fórmula não-reduzida da forma $\alpha \rightarrow \beta$, marque-a como reduzida e bifurque cada ramo que contém a nova fórmula e dois novos ramos, no final do primeiro escreva $\neg\, \alpha$ e, no final do segundo, escreva β

Implicação Negada Se um ramo aberto contém uma fórmula não-reduzida da forma $\neg\, (\alpha \rightarrow \beta)$, marque-a como reduzida e escreva tanto α quanto $\neg\, \beta$ no final de todo ramo aberto que contém esta nova fórmula reduzida.

Exemplo 4

- $\neg\,(Q \rightarrow (P \wedge \neg\, P))$ não é válida, pois há um ramo aberto e não podemos continuar com reduções. Logo, a fórmula não é válida.

a

$$\begin{array}{c} \checkmark \neg\,\neg\,(Q \rightarrow (P \wedge \neg\, P)) \\ Q \rightarrow (P \wedge \neg\, P) \end{array}$$

b

$$\begin{array}{c} \checkmark \neg\,\neg\,(Q \rightarrow (P \wedge \neg\, P)) \\ \checkmark Q \rightarrow (P \wedge \neg\, P) \\ \begin{array}{cc} \neg\, Q & P \wedge \neg\, P \end{array} \end{array}$$

c

$$\begin{array}{c} \checkmark \neg\,\neg\,(Q \rightarrow (P \wedge \neg\, P)) \\ \checkmark Q \rightarrow (P \wedge \neg\, P) \\ \begin{array}{cc} \neg\, Q & \checkmark P \wedge \neg\, P \\ & P \\ & \neg\, P \\ & \mathrm{X} \end{array} \end{array}$$

Bi-implicação Se um ramo aberto contém uma fórmula não-reduzida da forma $\alpha \leftrightarrow \beta$, marque-a como reduzida e bifurque o final de cada ramo que contém a nova fórmula em dois novos ramos, no final do primeiro escreva α e β e, no final do segundo, escreva $\neg\, \alpha$ e $\neg\, \beta$

Bi-implicação Negada Se um ramo aberto contém uma fórmula não-reduzida da forma $\neg\, (\alpha \leftrightarrow \beta)$, marque-a como reduzida e bifurque o final de cada ramo que contém a nova fórmula em dois novos ramos, no final do primeiro escreva α e $\neg\, \beta$ e, no final do segundo, escreva $\neg\, \alpha$ e β

Regras de Construção

1

$$\neg\neg\alpha$$
$$\alpha$$

2

$$\alpha \wedge \beta$$
$$\alpha$$
$$\beta$$

3

$$\alpha \vee \beta$$
$$\alpha \qquad \beta$$

4

$$\alpha \rightarrow \beta$$
$$\neg\alpha \qquad \beta$$

5

$$\alpha \leftrightarrow \beta$$
$$\begin{array}{cc} \alpha & \neg\alpha \\ \beta & \neg\beta \end{array}$$

6

$$\neg(\alpha \wedge \beta)$$
$$\neg\alpha \qquad \neg\beta$$

7

$$\neg(\alpha \vee \beta)$$
$$\neg\alpha$$
$$\neg\beta$$

8

$$\neg(\alpha \rightarrow \beta)$$
$$\alpha$$
$$\neg\beta$$

9

$$\neg(\alpha \leftrightarrow \beta)$$
$$\begin{array}{cc} \alpha & \neg\alpha \\ \neg\beta & \beta \end{array}$$

Provando a Validade de Argumentos

- Construímos uma lista que consiste das premissas e da negação da conclusão
  - Qualquer atribuição de verdade ou falsidade às fórmulas atômicas que torna as premissas verdadeiras, então temos premissas verdadeiras e conclusão falsa. Conseqüentemente, o argumento não é válido

Exemplo 5

- Determine se a forma $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \vdash R$ é válida

a

$P \rightarrow Q$
$Q \rightarrow R$
P
$\neg R$

b

$\checkmark P \rightarrow Q$
$Q \rightarrow R$
P
$\neg R$
$\neg P \quad\quad Q$

c

$\checkmark P \rightarrow Q$
$\checkmark Q \rightarrow R$
P
$\neg R$
$\neg P \quad\quad Q$
$X \quad\quad \neg Q \quad R$
$X \quad X$

Princípios

1. As regras para construir árvores devem ser aplicadas apenas a fórmulas como um todo e não a sub-formulas
2. A ordem em que regras são aplicadas não faz diferença para a respostas final, porém é mais eficiente aplicar primeiramente as que não levam a bifurcações
3. Os ramos abertos de uma árvore finalizada para uma forma de argumento exibe todos os contra-exemplos para tal forma