

Relações Semânticas entre Conectivos na Lógica Proposicional

Márcio Lopes Cornélio

DSC-Poli-UPE

`mlc@dsc.upe.br`



Introdução

Introdução

Conjuntos de conectivos completos

Equivalências com o conjunto $\{\neg, \vee\}$

Equivalências com os conectivos $\{\neg, \wedge\}$

Um novo alfabeto para Lógica Proposicional

Formas Normais

Formas Normais - Exemplos

Formas Normais - Obtenção

Formas Normais - Exemplo de obtenção

- Redução de toda fórmula da Lógica Proposicional utilizando um conjunto reduzido de conectivos
- Simplificação do alfabeto da Lógica Proposicional



Conjuntos de conectivos completos

Introdução

Conjuntos de
conectivos completos

Equivalências com o
conjunto $\{\neg, \vee\}$

Equivalências com os
conectivos $\{\neg, \wedge\}$

Um novo alfabeto
para Lógica

Proposicional

Formas Normais

Formas Normais -

Exemplos

Formais Normais -

Obtenção

Formais Normais -

Exemplo de obtenção

Definição Um conjunto de conectivos Ψ é dito **completo** se, dada uma fórmula H do tipo $\neg P$, $(P \vee Q)$, $P \wedge Q$, $(P \rightarrow Q)$ ou $(P \leftrightarrow Q)$, então podemos determinar uma outra fórmula G equivalente a H tal que G contém apenas conectivos do conjunto Ψ e os símbolos P e Q presentes em H .

Exemplo Conjunto com os conectivos \neg e \vee

As fórmulas descritas acima podem ser obtidas trocando os conectivos ' \wedge ', ' \rightarrow ' e ' \leftrightarrow ' por ' \neg ' e ' \vee '

Equivalências com o conjunto $\{\neg, \vee\}$

Introdução
Conjuntos de
conectivos completos

Equivalências com o
conjunto $\{\neg, \vee\}$

Equivalências com os
conectivos $\{\neg, \wedge\}$

Um novo alfabeto
para Lógica
Proposicional

Formas Normais
Formas Normais -
Exemplos

Formais Normais -
Obtenção

Formais Normais -
Exemplo de obtenção

Implicação $(P \rightarrow Q)$ pode ser expressa por $(\neg P \vee Q)$

Conjunção $(P \wedge Q)$ poder ser expressa por $\neg(\neg P \vee \neg Q)$

Bi-implicação $P \leftrightarrow Q$ pode ser expressa por
 $\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P))$

■ Conseqüência: completude do conjunto $\{\neg, \vee\}$

◆ Prova por indução

■ Exercício: leitura da prova



Equivalências com os conectivos $\{\neg, \wedge\}$

Introdução
Conjuntos de
conectivos completos
Equivalências com o
conjunto $\{\neg, \vee\}$
**Equivalências com os
conectivos $\{\neg, \wedge\}$**
Um novo alfabeto
para Lógica
Proposicional
Formas Normais
Formas Normais -
Exemplos
Formais Normais -
Obtenção
Formais Normais -
Exemplo de obtenção

- Definição: $(P \text{ nand } Q) = (\neg(P \wedge Q))$
- O conjunto $\{\text{nand}\}$ é completo: qualquer fórmula E da Lógica Proposicional pode ser expressa apenas com nand e símbolos proposicionais e de verdade presentes em E .
- Equivalências
 - ◆ $\neg P$ equivale a $(P \text{ nand } P)$
 - ◆ $(P \vee Q)$ equivale a $((P \text{ nand } P) \text{ nand } (Q \text{ nand } Q))$
- Conversão de fórmulas. Considere $H = P \wedge (R \rightarrow S)$

$$\begin{aligned}
 &P \wedge (R \rightarrow S) \\
 &\equiv (P \wedge (\neg R \vee S)) && [(P \rightarrow Q) = (\neg P \vee Q)] \\
 &\equiv \neg\neg(P \wedge \neg\neg(\neg R \vee S)) && [P = \neg\neg P] \\
 &\equiv \neg\neg(P \wedge \neg(R \wedge \neg S)) && [\neg(P \vee Q) = (\neg P \wedge \neg Q), \text{ De Morgan}] \\
 &\equiv \neg(P \text{ nand } (R \text{ nand } \neg S)) && [(P \text{ nand } Q) = (\neg(P \wedge Q))] \\
 &\equiv (P \text{ nand } (R \text{ nand } (S \text{ nand } S))) \text{ nand} \\
 &\quad (P \text{ nand } (R \text{ nand } (S \text{ nand } S))) && [\neg P = (P \text{ nand } P)]
 \end{aligned}$$



Um novo alfabeto para Lógica Proposicional

Introdução
Conjuntos de
conectivos completos

Equivalências com o
conjunto $\{\neg, \vee\}$

Equivalências com os
conectivos $\{\neg, \wedge\}$

Um novo alfabeto
para Lógica
Proposicional

Formas Normais
Formas Normais -
Exemplos

Formas Normais -
Obtenção

Formas Normais -
Exemplo de obtenção

■ Constituição do alfabeto:

- ◆ Símbolos de pontuação: $(,)$
- ◆ Símbolos de verdade: *false*
- ◆ Símbolos proposicionais: $P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2, \dots$
- ◆ Conectivos proposicionais: \neg, \vee

■ Há outras redefinições do alfabeto, pois há outros conjuntos de conectivos completos

- ◆ Equivalentes e determinam uma mesma linguagem



Formas Normais

Introdução
Conjuntos de conectivos completos
Equivalências com o conjunto $\{\neg, \vee\}$
Equivalências com os conectivos $\{\neg, \wedge\}$
Um novo alfabeto para Lógica Proposicional

Formas Normais

Formas Normais - Exemplos
Formais Normais - Obtenção
Formais Normais - Exemplo de obtenção

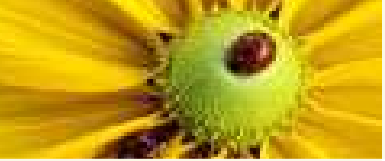
- Fórmulas podem ser expressa utilizando conjuntos distintos e completos de conectivos
- Fórmulas podem ter formas equivalentes a estruturas predefinidas
 - ◆ Formas normais

Definições

Literal. Símbolo proposicional ou sua negação.

Forma Normal Disjuntiva. Uma fórmula H está na forma normal disjuntiva (fnd), se é uma disjunção de conjunção de literais.

Forma Normal Conjuntiva. Uma fórmula H está na forma normal conjuntiva (fnc), se é uma conjunção de disjunção de literais.



Formas Normais - Exemplos

Introdução
Conjuntos de
conectivos completos
Equivalências com o
conjunto $\{\neg, \vee\}$
Equivalências com os
conectivos $\{\neg, \wedge\}$
Um novo alfabeto
para Lógica
Proposicional
Formas Normais
Formas Normais -
Exemplos
Formais Normais -
Obtenção
Formais Normais -
Exemplo de obtenção

■ Forma normal disjuntiva

$$(\neg P \wedge Q) \vee (\neg R \wedge \neg Q \wedge P) \vee (P \wedge S)$$

■ Forma normal conjuntiva

$$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q \vee P) \wedge (P \vee S)$$



Formais Normais - Obtenção

Introdução
Conjuntos de
conectivos completos
Equivalências com o
conjunto $\{\neg, \vee\}$
Equivalências com os
conectivos $\{\neg, \wedge\}$
Um novo alfabeto
para Lógica
Proposicional
Formas Normais
Formas Normais -
Exemplos

Formais Normais -
Obtenção

Formais Normais -
Exemplo de obtenção

■ Forma normal disjuntiva

1. Extrair da tabela verdade as linhas em que a interpretação de uma fórmula é T .
2. Construir conjunções de literais (fórmulas) a partir das linhas extraídas
3. Construir uma disjunção com as conjunções obtidas no passo 2

■ Forma normal conjuntiva

1. Extrair da tabela verdade as linhas em que a interpretação de uma fórmula é T .
2. Construir disjunções de literais (fórmulas) a partir das linhas extraídas
3. Construir uma conjunção com as disjunções obtidas no passo 2

Formais Normais - Exemplo de obtenção

- Introdução
- Conjuntos de conectivos completos
- Equivalências com o conjunto $\{\neg, \vee\}$
- Equivalências com os conectivos $\{\neg, \wedge\}$
- Um novo alfabeto para Lógica Proposicional
- Formas Normais
- Formas Normais - Exemplos
- Formais Normais - Obtenção
- Formais Normais - Exemplo de obtenção**

P	Q	R	$(P \rightarrow Q) \wedge R$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

$$\mathbf{FND} \quad (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$$

$$\mathbf{FNC} \quad (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$$