# Lógica Proposicional

Márcio Lopes Cornélio
DSC-Poli-UPE
mlc@dsc.upe.br

### Linguagem

- Especificação de uma linguagem
  - Sintaxe
  - Semântica
- Métodos de produção ou verificação de fórmulas
  - Prova e conseqüência lógica
- Definição de um sistema de dedução formal
  - Derivação de argumentos

2

## Sintaxe da Lógica Proposicional 3

### Alfabeto

- Constituição do alfabeto:
  - Símbolos de pontuação: (, )
  - Símbolos de verdade: *true*, *false*
  - Símbolos proposicionais: $P$, $Q$, $R$, $S$, $P_1$, $Q_1$, $R_1$, $S_1$, $P_2$, $Q_2$, ...
  - Conectivos proposicionais: $\neg$ , $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

4

### Fórmulas

- Regras de formação (construção)
  - Todo símbolo de verdade é uma fórmula
  - Todo símbolo proposicional é uma fórmula
  - Se $H$ é uma fórmula, então $(\neg H)$, a negação de $H$ é uma fórmula
  - Se $H$ e $G$ são fórmulas, então $(H \vee G)$ é uma fórmula. Disjunção.
  - Se $H$ e $G$ são fórmulas, então $(H \wedge G)$ é uma fórmula. Conjunção.
  - Se $H$ e $G$ são fórmulas, então $(H \rightarrow G)$ é uma fórmula. $H$ é o antecedente; $G$, o conseqüente.
  - Se $H$ e $G$ são fórmulas, então $(H \leftrightarrow G)$ é uma fórmula. $H$ é o lado esquerdo; $G$, o lado direito.

5

### Boa formação de fórmulas

- Qualquer símbolo proposicional é uma fórmula bem-formada (*well-formed formula - wff*)
- Se $\phi$ é uma fórmula bem-formada, $\neg\, \phi$ também o é
- Se $\phi$ e $\psi$ são fórmulas bem-formadas, também o são $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ e $(\phi \leftrightarrow \psi)$

6

### Precedência

- A ordem de precedência dos conectivos proposicionais é a seguinte:
  - maior precedência: $\neg$
  - precedência intermediária: $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - menor precedência: $\vee$, $\wedge$

7

### Subfórmula

- Seja $H$ uma fórmula da Lógica Proposicional. Uma subfórmula de $H$ é definida da seguinte maneira:
  - $H$ é uma subfórmula de $H$
  - Se $H = (\neg\, G)$, então $G$ é uma subfórmula de $H$
  - Se $H$ é do tipo $(G \vee E)$, $(G \wedge E)$, $(G \rightarrow E)$ ou $(G \leftrightarrow E)$, então $G$ e $E$ são subfórmulas de $H$
  - Se $G$ é subfórmula de $H$, então toda subfórmula de $G$ é subfórmula de $H$

8

### Subfórmula imediata

- Definimos as subfórmulas imediatas de uma fórmula da seguinte maneira:
  1. fórmulas atômicas não têm subfórmulas imediatas
  2. a subfórmula imediata de $\neg\, \phi$ é $\phi$
  3. as subfórmulas imediatas de $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ e $(\phi \leftrightarrow \psi)$ são $\phi$ e $\psi$

9

## Semântica da Lógica Proposicional 10

### Interpretação

- Função de verdade toma como argumentos valores de verdade e associa a este um outro valor de verdade
  - Função binária
- Uma interpretação $I$ é uma função binária com as seguintes características:
  - o domínio de $I$ é constituído pelo conjunto das fórmulas da Lógica Proposicional
  - o contradomínio é o conjunto $\{T, F\}$
  - o valor da interpretação $I$, tendo como argumentos os símbolos de verdade é dado por $I[\mathit{true}] = T$ e $I[\mathit{false}] = F$
  - dado um símbolo proposicional $P$ , $I[P] \in \{T, F\}$

11

## Interpretação de Fórmulas

- Proposições atômicas são declarações sem conectivos lógicos
- A verdade de uma proposição composta é determinada unicamente pela verdade das partes constituintes.
- Fórmulas formadas pela concatenação de símbolos do alfabeto
- Definição de interpretação das fórmulas feita a partir da interpretação dos símbolos
- Regras para interpretação de fórmulas

12

## Regras para interpretação de fórmulas (1/2)

- Dadas uma fórmula $E$ e uma interpretação $I$, então o significado de $E$, indicado por $I[E]$, é assim determinado:
  - Se $E = P$, onde $P$ é um símbolo proposicional, então $I[E] = I[P]$ e $I[P] \in \{T, F\}$
  - Se $E = true$, então $I[E] = I[true] = T$. Se $E = false$, então $I[E] = I[false] = F$
  - Seja $H$ uma fórmula. Se $E = \neg H$, então

    $I[E] = I[\neg H] = T$, se $I[H] = F$
    $I[E] = I[\neg H] = F$, se $I[H] = T$

  - Sejam $H$ e $G$ duas fórmulas. Se $E = (H \lor G)$, então

    $I[E] = I[H \lor G] = T$, se $I[H] = T$ e/ou $I[G] = T$
    $I[E] = I[H \lor G] = F$, se $I[H] = F$ e $I[G] = F$

13

## Regras para interpretação de fórmulas (2/2)

- Sejam $H$ e $G$ duas fórmulas. Se $E = (H \land G)$, então

  $I[E] = I[H \land G] = T$, se $I[H] = T$ e $I[G] = T$
  $I[E] = I[H \land G] = F$, se $I[H] = F$ e/ou $I[G] = F$

- Sejam $H$ e $G$ duas fórmulas. Se $E = (H \rightarrow G)$, então

  $I[E] = I[H \rightarrow G] = T$, se $I[H] = F$ e/ou $I[G] = T$
  $I[E] = I[H \rightarrow G] = F$, se $I[H] = T$ e $I[G] = F$

- Sejam $H$ e $G$ duas fórmulas. Se $E = (H \rightarrow G)$, então

  $I[E] = I[H \leftrightarrow G] = T$, se $I[H] = I[G]$
  $I[E] = I[H \leftrightarrow G] = F$, se $I[H] \neq I[G]$

14

## Tabelas verdade

- Construídas para fórmulas bem-formadas
- Todas as combinações possíveis de valores de verdade para todas as fórmulas atômicas
- Número de linhas da tabela é igual a $2^n$, onde $n$ é o número de fórmulas atômicas

15

## Negação

- Tabelas verdade descrevem precisamente o significado dos conectivos lógicos
- A negação $\neg P$ é verdadeira se, e somente se, $P$ é falsa.

| P | ¬ P |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

16

## Disjunção

- A disjunção $P \vee Q$ é verdadeira se, e somente se, $P$ é verdadeiro ou Q é verdadeiro (*ou inclusivo*).

| P | Q | P ∨ Q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

17

## Conjunção

- A conjunção $P \wedge Q$ é verdadeira apenas quando as proposições $P$ e $Q$ são verdadeiras.

| P | Q | P ∧ Q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

18

## Implicação

- A implicação estabelece que o antecedente $p$ é mais forte (ou igual) ao consequente $q$. Falso é mais forte que verdadeiro. Implicação material.

| P | Q | P → Q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | F |
| F | F | V |

19

## Equivalência

- A equivalência $P \leftrightarrow Q$ significa que $P$ e $Q$ têm a mesma força. Também chamada de bi-implicação.

| P | Q | P $\leftrightarrow$ Q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

20