Linguagens Formais e Autômatos (LFA)

Aula de 19/08/2013

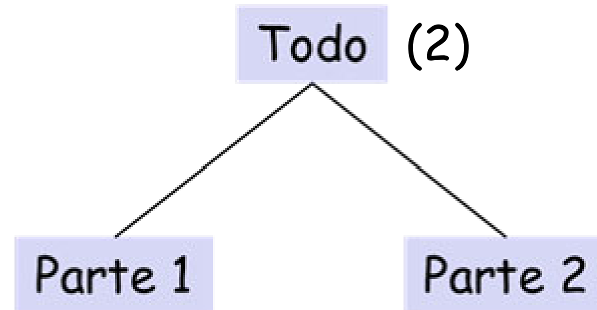
Símbolos, Cadeias, Linguagens
Propriedades e Representações Formais de Interesse

Nota preliminar

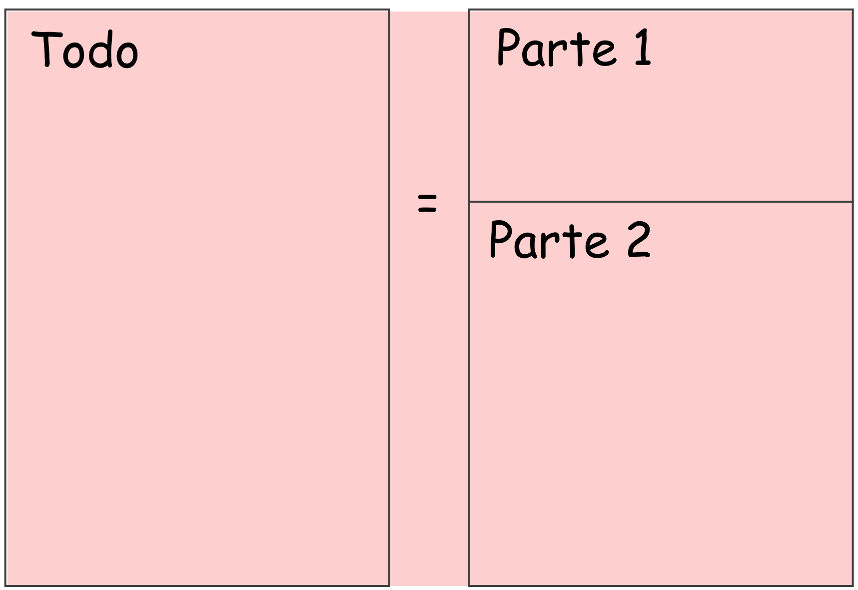
O conceito de "decomposição" e suas representações

- Estruturas e Composições
- Unidades e Átomos

(2)



(1)



(3)

Todo = Parte 1 + Parte 2

(4)

Todo $\rightarrow$ Parte 1 Parte 2
Todo $\rightarrow$ Parte 1 , Parte

Algumas (de)composições interessantes

Usando uma das notações do slide anterior (4)

- Todo → ParteA ParteB
  ParteA → a
  ParteA → a ParteA
  ParteB → b

- Todo → ParteA ParteB
  ParteA → a
  ParteA → a ParteA
  ParteB → b
  ParteB → b ParteB

Dê exemplos
de "Todos" válidos
a cada caso.

Continua no próximo slide

Algumas (de)composições interessantes

Continuação

- Todo $\rightarrow$ ParteA ParteB
  ParteA $\rightarrow$ a
  ParteA $\rightarrow$ ε (ε representa cadeia vazia)
  ParteB $\rightarrow$ b

- Todo $\rightarrow$ ParteA ParteB
  ParteA $\rightarrow$ a
  ParteA $\rightarrow$ a ParteA
  ParteB $\rightarrow$ ε
  ParteB $\rightarrow$ b
  ParteB $\rightarrow$ b ParteB

Dê exemplos
de "Todos" válidos
a cada caso.

Tradução entre notações

Tente transformar estas notações (4) em notações (2)

- Todo → ParteA ParteB
  ParteA → a
  ParteA → a ParteA
  ParteB → b

- Todo → ParteA ParteB
  ParteA → a
  ParteA → ε (ε representa cadeia vazia)
  ParteB → b

- Todo → ParteA ParteB
  ParteA → a
  ParteA → a ParteA
  ParteB → b
  ParteB → b ParteB

- Todo → ParteA ParteB
  ParteA → a
  ParteA → a ParteA
  ParteB → ε
  ParteB → b
  ParteB → b ParteB

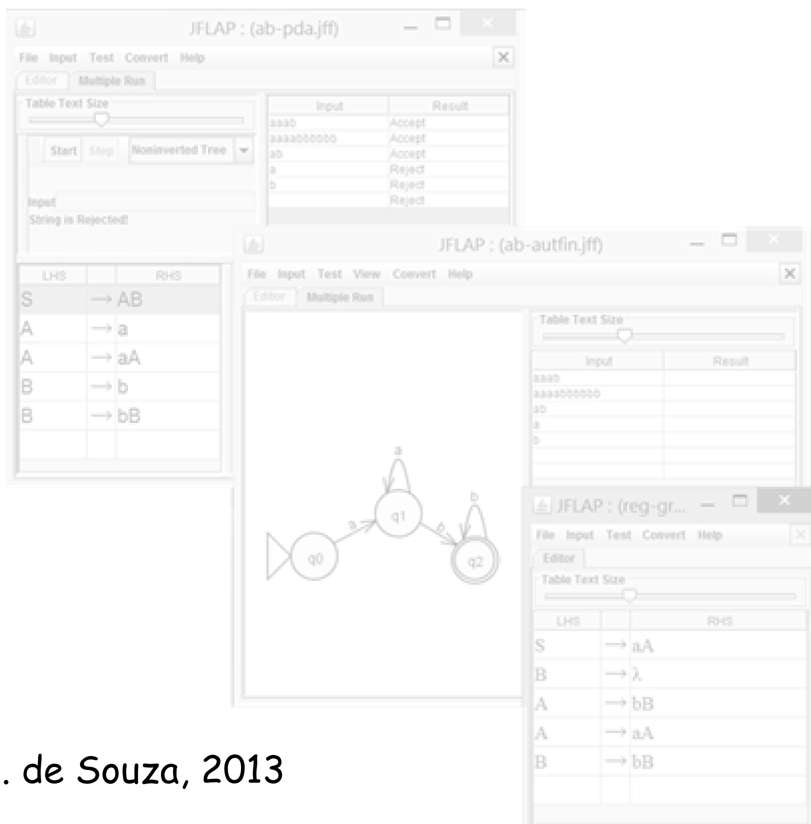
Expressividade de notações

As notações (1), (2), (3) e (4) podem expressar **conjuntos de infinitos elementos.**

Já falamos em representações de conjuntos infinitos antes?

Expressividade de notações

As notações (1), (2), (3) e (4) podem expressar **conjuntos de infinitos elementos.**



Já falamos em representações de conjuntos infinitos antes?

Símbolos e Cadeias

Símbolos são **átomos** (ou **unidades indivisíveis**).

Cadeias são **justaposições** (ou **concatenações**) de um número finito de símbolos, ou alfabeto.

Exemplo:

Alfabeto = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

Cadeias-exemplo:

101, 2013, 45690, 9

101 é uma cadeia formada pela concatenação de 3 símbolos do alfabeto {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}: 1,0,1

2013 é uma cadeia formada pela concatenação de 4 símbolos do alfabeto {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}: 2,0,1,3

45690 e 9 também são cadeias formadas com o alfabeto {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}.

Mas o mesmo não é verdade para as cadeias: **2013-1, INF1626, LFA**.

Operações básicas sobre cadeias

Comprimento, representada como |x|, significa o número de símbolos concatenados para formar x.
Exemplo: |cadeia| = 6

Concatenação, representada como x.y, significa a justaposição da cadeia x à cadeia y.
Exemplo: cadeia.s = cadeias
Note que |cadeia.s| = |cadeia|+|s| = 6 + 1 = 7

Potenciação (iteração), representada por x^y, significa a justaposição de y cópias de x.
Exemplo: $cadeia^3$ = cadeiacadeiacadeia

Indexação, representada por x_y, significa o y_ésimo símbolo de x.
Exemplo: $cadeia_3$ = d

Elemento neutro, sufixação e prefixação

Seja ε a representação de uma cadeia vazia e α uma cadeia qualquer.

Propriedades do **elemento neutro**:

- $\varepsilon.\alpha = \alpha.\varepsilon = \alpha$
- $|\varepsilon.\alpha| = |\alpha.\varepsilon| = |\alpha|$

Uma cadeia α é **prefixo** de uma cadeia β se existe γ tal que $\beta = \alpha.\gamma$.

Uma cadeia α é **sufixo** de uma cadeia β se existe γ tal que $\beta = \gamma.\alpha$.

Observação: Considerando-se que ε é o elemento neutro da concatenação, ele é prefixo e sufixo de qualquer cadeia. No entanto, os casos mais interessantes são os de **prefixo e sufixo próprios**, verificados quando a cadeia de início ou fim de β **não é vazia**.

Uma cadeia α é **subcadeia** de uma cadeia β se existem duas cadeias γ e δ tais que $\beta = \gamma.\alpha.\delta$.

Cadeias reversas

Uma cadeia α é o **reverso** de uma cadeia β ($\alpha=\beta^R$) se α contiver os mesmos símbolos de β, porém justapostos no sentido no sentido inverso ('de trás para frente'). Ou seja, se $\alpha = \beta^R$ então:

- $\alpha = \sigma 1 \,.\, \sigma 2 \,.\, \ldots \,.\, \sigma n\text{-}1 \,.\, \sigma n$
- $\beta = \sigma n \,.\, \sigma n\text{-}1 \,.\, \ldots\, \sigma 2 \,.\, \sigma 1$

Precisa de um lembrete para o alfabeto grego?

Αα...Ωω

Alfabeto grego			
Αα	Alfa	Νν	Nu
Ββ	Beta	Ξξ	Csi
Γγ	Gama	Οο	Ómicron
Δδ	Delta	Ππ	Pi
Εε	Épsilon	Ρρ	Rô
Ζζ	Zeta	Σσς	Sigma
Ηη	Eta	Ττ	Tau
Θθ	Teta	Υυ	Úpsilon
Ιι	Iota	Φφ	Fi
Κκ	Capa	Χχ	Qui
Λλ	Lambda	Ψψ	Psi
Μμ	Mu	Ωω	Ômega

Linguagens Formais (ou “Linguagens”)

Uma linguagem é um conjunto – finito ou infinito – de cadeias de comprimento finito formadas pela concatenação de símbolos de um alfabeto finito e não vazio.

Obs: Na maioria das linguagens interessantes com que trabalhamos as cadeias que a elas pertencem seguem **regras de formação** (ou seja, não são meras justaposições quaisquer de símbolos que pertençam ao alfabeto da linguagem).

Cadeia Vazia, Conjunto Vazio, Linguagem = {ε}

L1 = {ε} é uma linguagem que contém uma única cadeia de símbolos, casualmente a cadeia vazia (ε).
|L1| = 1

L2 = ∅ é uma linguagem vazia (∅) que não contém cadeia nenhuma.
|L2| = 0

Concatenação de símbolos e de linguagens

Concatenação de símbolos (já vista no slide 9).

Concatenação Z de linguagens X e Y

- $Z = X.Y = \{x.y \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}$

Exemplo-exercício: Seja Z a linguagem equivalente a X.Y para

- $X = \{\alpha\beta\gamma \mid$ Alfabeto = {a,b,c, ..., x,y,w,z}, $\alpha, \beta, \gamma \in$ Alfabeto $\}$

- $Y = \{\alpha\beta\gamma\delta \mid$ Alfabeto = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in$ Alfabeto $\}$

Concatenação de símbolos e de linguagens

Concatenação de símbolos (já vista no slide 9).

Concatenação Z de linguagens X e Y

- $Z = X.Y = \{x.y \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}$

Z lhes parece uma "linguagem" familiar? Onde a encontramos?

Exemplo-exercício: Seja Z a linguagem equivalente a X.Y para

- $X = \{\alpha\beta\gamma \mid$ Alfabeto = {a,b,c, ..., x,y,w,z}, $\alpha, \beta, \gamma \in$ Alfabeto }
- $Y = \{\alpha\beta\gamma\delta \mid$ Alfabeto = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in$ Alfabeto }

Fechamento reflexivo (ou recursivo) e transitivo

O fechamento reflexivo (ou recursivo) e transitivo de um alfabeto Σ é **o conjunto (infinito) de todas as possíveis cadeias resultantes da concatenação de seus elementos** mais a cadeia vazia ε.

Perguntа: Qual o fechamento reflexivo e transitivo do alfabeto da linguagem Z, definida no slide 14?

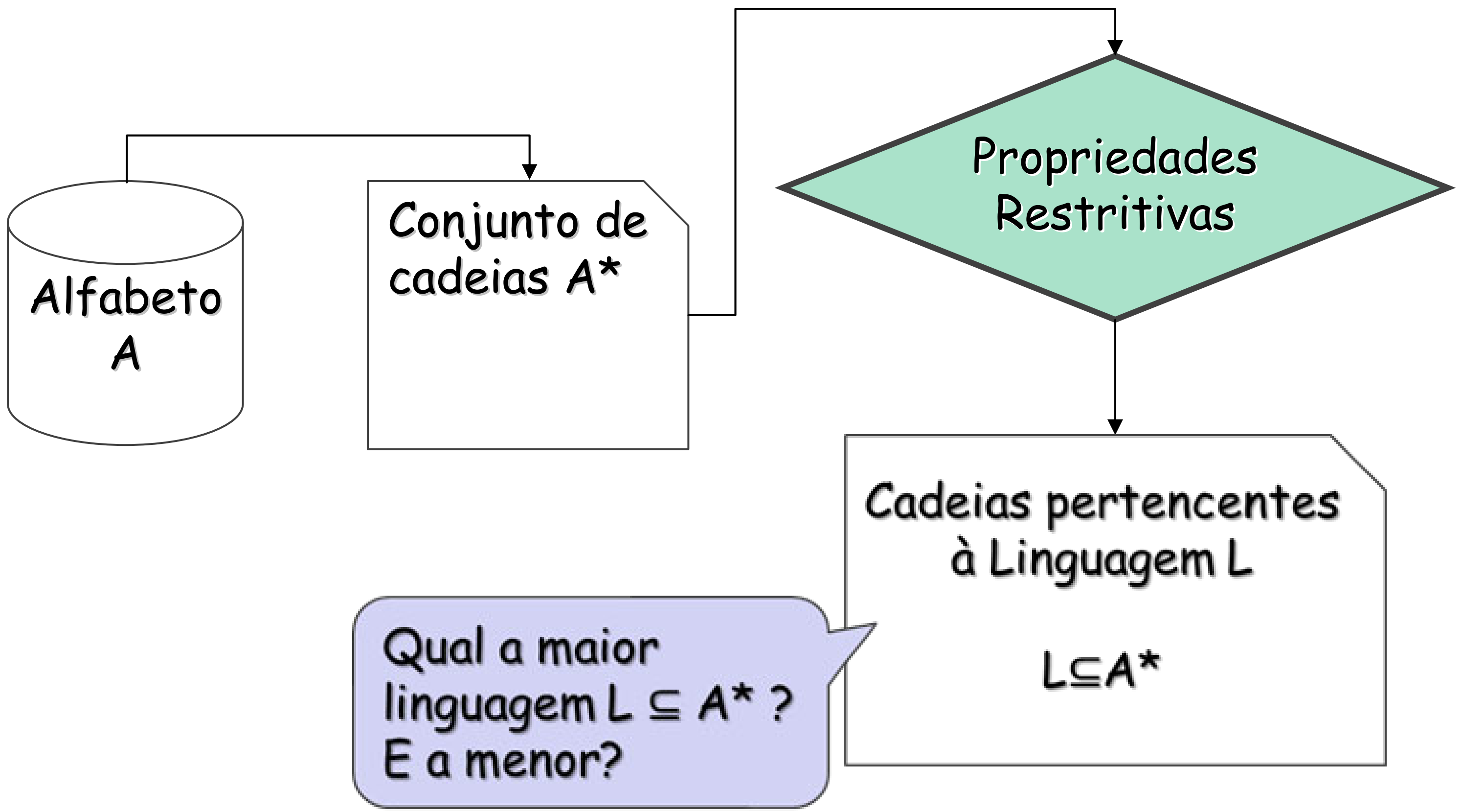
Denotamos o fechamento reflexivo e transitivo de um alfabeto Σ por Σ^*.

Fechamento transitivo

O fechamento transitivo de um alfabeto Σ é **o conjunto (infinito) de todas as possíveis cadeias resultantes da concatenação de seus elementos** sem a cadeia vazia ε.

Denotamos o fechamento transitivo de um alfabeto Σ por Σ^+.

Voltando a linguagens típicas



Substituição

Substituição é uma **função** que mapeia elementos de um alfabeto $\Sigma 1$ sobre um alfabeto $\Sigma 2$.

Voltando ao início da aula, seja Σ ={a,b} e $L \subseteq \Sigma^+$

- Seja $\Sigma 1$ = {Todo, ParteA, ParteB}
- Seja $\Sigma 2 = \Sigma 1 \cup \Sigma$ = {a,b} $\cup$ {ParteA, ParteB}
- Seja " $\rightarrow$ " notação para uma função de "substituição"

As **propriedades restritivas** de L (uma das linguagens examinadas no início da aula), podem ser (e, como se vê, foram) **definidas por funções de substituição** de símbolos de $\Sigma 1$ (à esquerda de $\rightarrow$) por símbolos de $\Sigma 2$ (à direita de $\rightarrow$).

- Todo $\rightarrow$ ParteA ParteB
  ParteA $\rightarrow$ a
  ParteA $\rightarrow$ a ParteA
  ParteB $\rightarrow$ b
  ParteB $\rightarrow$ b ParteB

Para casa da aula 3

Examine as linguagens L1, L2 e L3 a seguir e responda:

1. Elas definem o mesmo conjunto de cadeias? Como você concluiu isto?
2. Atentando para os símbolos que aparecem à esquerda e direita de "→" nas propriedades que as definem, o que distingue as três linguagens entre si?
3. Você tem algo mais a comentar?

L1:	L2:	L3:
$T \rightarrow A\ B$	$T \rightarrow a\ X$	$T \rightarrow a\ A$
$A \rightarrow a$	$X \rightarrow a\ X$	$A \rightarrow a\ A$
$A \rightarrow a\ A$	$X \rightarrow b$	$A \rightarrow b\ B$
$B \rightarrow b$	$X \rightarrow b\ Y$	$B \rightarrow b\ B$
$B \rightarrow b\ B$	$Y \rightarrow b$	$B \rightarrow \varepsilon$
	$Y \rightarrow b\ Y$	