Linguagens Formais e Autômatos (LFA)

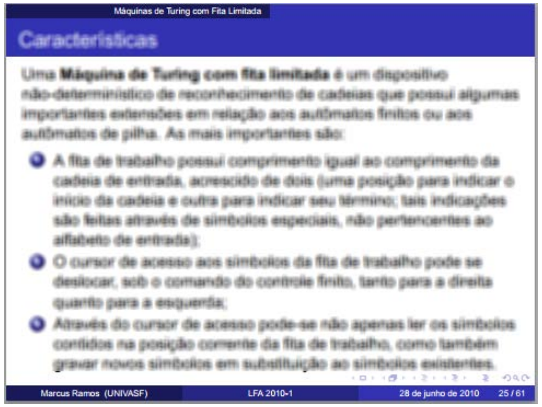
Aula de 06/11/2013

LSC's processadas por Máquinas de Turing de Fita Limitada

Créditos à fonte adicional de slides

Os slides com layout no formato são do autor do livro texto (Prof. Marcus Ramos), disponíveis online em:

http://www.univasf.edu.br/~marcus.ramos/livro-lfa/cap5.pdf



Gramáticas livres de contexto $\times$ sensíveis ao contexto

Rigorosamente, uma linguagem é dita **sensível ao contexto** se e somente se:

- $\varepsilon \notin L$ e $L = L(G)$, onde G é uma gramática sensível ao contexto, ou
- $\varepsilon \in L$ e $L - \{\varepsilon\}$ pode ser gerada por uma gramática sensível ao contexto.

Linguagens livres de contexto $\times$ sensíveis ao contexto

Caso $\varepsilon \in L(G)$, e G seja uma gramática livre de contexto, será necessário aplicar transformações em G obtendo-se G', de modo que:

- $S \rightarrow \varepsilon$ seja a única regra vazia em G';
- S não compareça no lado direito de nenhuma outra regra de G';
- $L(G) = L(G')$.

Gramáticas livres de contexto $\times$ sensíveis ao contexto

- Portanto, com exceção da produção $S \rightarrow \varepsilon$, as gramáticas do tipo 2 podem ser sempre convertidas para um formato que as torne um caso particular das gramáticas do tipo 1;
- Em outras palavras, tem-se que qualquer gramática do tipo 2, desde que devidamente convertida para esse formato padronizado, e a menos da produção $S \rightarrow \varepsilon$, torna-se também uma gramática do tipo 1.

Formalização de linguagens sensíveis ao contexto

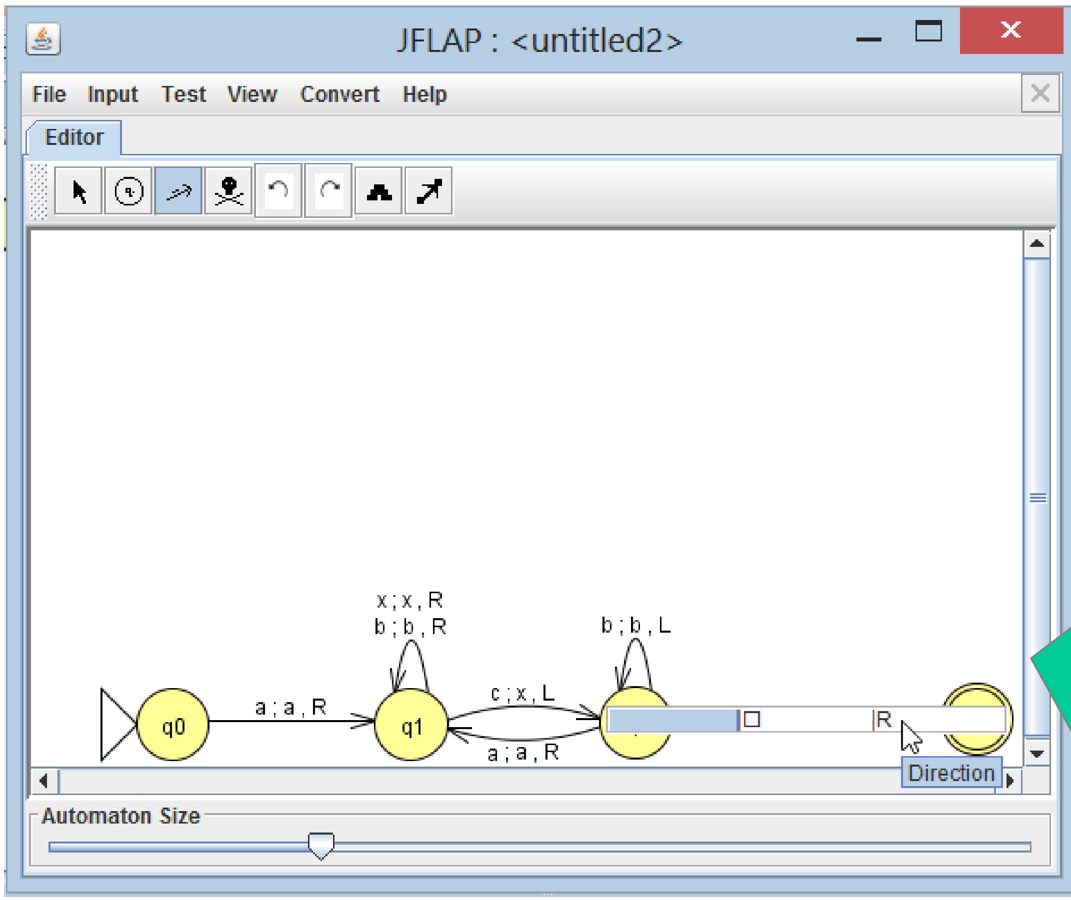
- Possível, mas trabalhosa;
- Produz especificações longas, complexas e com baixa legibilidade;
- Difícil utilização prática;
- Por isso, adota-se a representação "livre de contexto" na formalização gramatical, deixando para processamento posterior a verificação das dependências de contexto que a linguagem porventura exiba.

Características

Uma **Máquina de Turing com fita limitada** é um dispositivo não-determinístico de reconhecimento de cadeias que possui algumas importantes extensões em relação aos autômatos finitos ou aos autômatos de pilha. As mais importantes são:

1. A fita de trabalho possui comprimento igual ao comprimento da cadeia de entrada, acrescido de dois (uma posição para indicar o início da cadeia e outra para indicar seu término; tais indicações são feitas através de símbolos especiais, não pertencentes ao alfabeto de entrada);
2. O cursor de acesso aos símbolos da fita de trabalho pode se deslocar, sob o comando do controle finito, tanto para a direita quanto para a esquerda;
3. Através do cursor de acesso pode-se não apenas ler os símbolos contidos na posição corrente da fita de trabalho, como também gravar novos símbolos em substituição ao símbolos existentes.

Máquinas de Turing no JFLAP



Nas transições entre estados estão especificados:

- na primeira posição, o símbolo lido na fita de entrada na posição corrente do cursor
- na segunda posição, o símbolo a ser gravado na posição corrente Antes de o cursor se movimentar
- na terceira posição a direção em que o cursor deve se movimentar (passo = 1 símbolo a cada movimentação)

Formalização

Formalmente, uma Máquina de Turing com fita limitada M é definida como:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, <, >, F)$$

onde:

- Q é o conjunto finito de estados;
- Σ é o alfabeto de entrada, composto por um conjunto finito de símbolos;
- Γ é o conjunto, também finito, de símbolos que podem ser lidos e/ou gravados na fita de trabalho. $\Sigma \subseteq \Gamma$;

Não estão entre eles os delimitadores "<" e ">". Veja acima e a seguir.

Formalização

- δ é a função parcial de transição, compreendendo os seguintes mapeamentos:
  - $Q \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma \times \{E,D\}}$
  - $Q \times \{<\} \rightarrow 2^{Q \times \{<\} \times \{D\}}$
  - $Q \times \{>\} \rightarrow 2^{Q \times \{>\} \times \{E\}}$
- q_0 é o estado inicial, $q_0 \in Q$;
- $<, > \notin \Gamma$ são símbolos respectivamente situados imediatamente à esquerda e imediatamente à direita da cadeia de entrada na configuração inicial;
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais.

Transição

Considere-se a transição $\delta(q_i, \sigma_m) = \{(q_j, \sigma_n, E)\}$. As seguintes ações são tomadas, nesta seqüência, após a seleção dessa transição:

- O estado corrente q_i é substituído pelo novo estado q_j;
- O símbolo correntemente apontado pelo cursor de acesso, σ_m, é substituído, na fita de trabalho, pelo novo símbolo σ_n;
- O cursor de acesso é deslocado de uma posição para a esquerda (E).

Configuração

A **configuração** de uma Máquina de Turing com fita limitada é denotada através da tripla

$$(\alpha, q_k, \beta) \in \{<\}\Gamma^* \times Q \times \Gamma^*\{>\}$$

em que q_k é o estado corrente, $\alpha \in \{<\}\Gamma^*$ é a porção da cadeia de entrada que se encontra à esquerda do cursor de acesso e $\beta \in \Gamma^*\{>\}$ é a porção da cadeia de entrada que se encontra à direita do cursor de acesso, incluindo a posição por ele correntemente selecionada. Note-se que "$<$" e "$>$" podem ocorrer, cada um, no máximo uma vez em $\alpha\beta$, e sempre nos respectivos extremos.

Configuração inicial

A **configuração inicial** é $(<, q_0, \gamma >)$, onde q_0 é o estado inicial e $\gamma \in \Sigma^*$ é a cadeia de entrada a ser analisada. O cursor de acesso refere-se, portanto, ao símbolo inicial (mais à esquerda) da cadeia γ. A porção α da representação (α, q_k, β) corresponde, neste caso, apenas ao símbolo "$<$", pois não existe fita à esquerda deste delimitador. A **configuração final** é definida como (λ, q_f, μ), com $q_f \in F, \lambda \in \{<\}\Gamma^*$ e $\mu \in \Gamma^*\{>\}$.

Movimentação

O símbolo "$\vdash$" denota uma relação sobre as configurações de uma Máquina de Turing com fita limitada:

$$\vdash: \{<\}\Gamma^* \times Q \times \Gamma^*\{>\} \rightarrow \{<\}\Gamma^* \times Q \times \Gamma^*\{>\}$$

Portanto, a movimentação de uma configuração (α, q_k, β) para a configuração seguinte (α', q_m, β') é representada como:

$$(\alpha, q_k, \beta) \vdash (\alpha', q_m, \beta')$$

As transições contidas na função δ especificam possibilidades de movimentação, que conduzem o dispositivo de cada possível configuração para a correspondente configuração seguinte. Diz-se que o dispositivo **pára** quando a função δ não estiver definida para o par (estado, símbolo de entrada) corrente.

Linguagem aceita

A linguagem aceita por uma Máquina de Turing com fita limitada é o conjunto de todas as cadeias que são capazes de conduzir o dispositivo desde a sua configuração inicial (única para cada cadeia de entrada) até uma configuração final qualquer, sem possibilidade de movimentação adicional. Formalmente:

$L(M) = \{\gamma \in \Sigma^* \mid (<, q_0, \gamma >) \vdash^* (\lambda, q_f, \mu),$ com $q_f \in F, \lambda \in \{<\}\Gamma^*$ e $\mu \in \Gamma^*\{>\}\}$

Admite-se, como condição de parada, que $\mu = \sigma\pi$, com $\sigma \in (\Gamma \cup \{<, >\}), \pi \in (\Gamma^*\{>\} \cup \{\varepsilon\})$ e δ não seja definida para (q_f, σ).

Exemplo

Exemplo 3.1

A Máquina de Turing com fita limitada $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, <, >, F)$ mostrada na Figura 1 aceita a linguagem a^*b^*.

$$\begin{array}{rcl} Q & = & \{q_0, q_1, q_2\} \\ \Sigma & = & \{a, b\} \\ \Gamma & = & \{a, b\} \\ \delta & = & \{(q_0, a) \rightarrow (q_0, a, D), (q_0, b) \rightarrow (q_1, b, D), (q_0, >) \rightarrow (q_2, >, E), \\ & & (q_1, b) \rightarrow (q_1, b, D), (q_1, >) \rightarrow (q_1, >, E)\} \\ F & = & \{q_2\} \end{array}$$

Exemplo

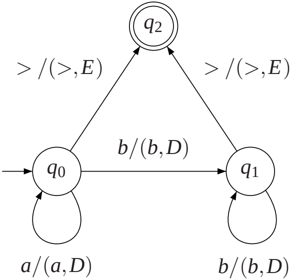


Figura 1: Máquina de Turing com fita limitada que aceita a^*b^*

Exemplo

- Exemplo de cadeia reconhecida: *aabbb*

  $(<, q_0, aabbb >) \vdash (< a, q_0, abbb >) \vdash (< aa, q_0, bbb >) \vdash (< aab, q_1, bb >) \vdash (< aabb, q_1, b >) \vdash (< aabbb, q_1, >) \vdash (< aabb, q_2, b >)$

  Como não há movimentação possível a partir da configuração $(< aabb, q_2, b >)$, que é final, a máquina pára e a cadeia *aabbb* é aceita.

- Exemplo de cadeia rejeitada: *aaba*

  $(<, q_0, aaba >) \vdash (< a, q_0, aba >) \vdash (< aa, q_0, ba >) \vdash (< aab, q_1, a >)$

  Como não há movimentação possível a partir da configuração $(< aab, q_1, a >)$, que não é final, a máquina pára e a cadeia *aaba* é rejeitada.

Exemplo

Exemplo 3.2
A Máquina de Turing com fita limitada $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, <, >, F)$ da Figura 2 aceita a linguagem $\{a^n b^n \mid n \geqslant 1\}$.

$$
\begin{array}{rcl}
Q & = & \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\} \\
\Sigma & = & \{a, b\} \\
\Gamma & = & \{a, b, X, Y\} \\
\delta & = & \{(q_0, a) \rightarrow (q_1, X, D), (q_0, b) \rightarrow (q_5, b, D), (q_0, Y) \rightarrow (q_3, Y, D), \\
 & & (q_1, a) \rightarrow (q_1, a, D), (q_1, Y) \rightarrow (q_1, Y, D), (q_1, b) \rightarrow (q_2, Y, E), \\
 & & (q_1, >) \rightarrow (q_5, >, E), (q_2, X) \rightarrow (q_0, X, D), (q_2, Y) \rightarrow (q_2, Y, E), \\
 & & (q_2, a) \rightarrow (q_2, a, E), (q_3, Y) \rightarrow (q_3, Y, D), (q_3, b) \rightarrow (q_5, b, D), \\
 & & (q_3, >) \rightarrow (q_4, >, E)\} \\
F & = & \{q_4\}
\end{array}
$$

Exemplo

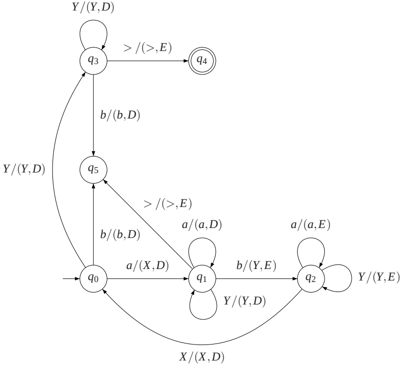


Figura 2: Máquina de Turing com fita limitada que aceita $\{a^n b^n \mid n \geqslant 1\}$

Exemplo

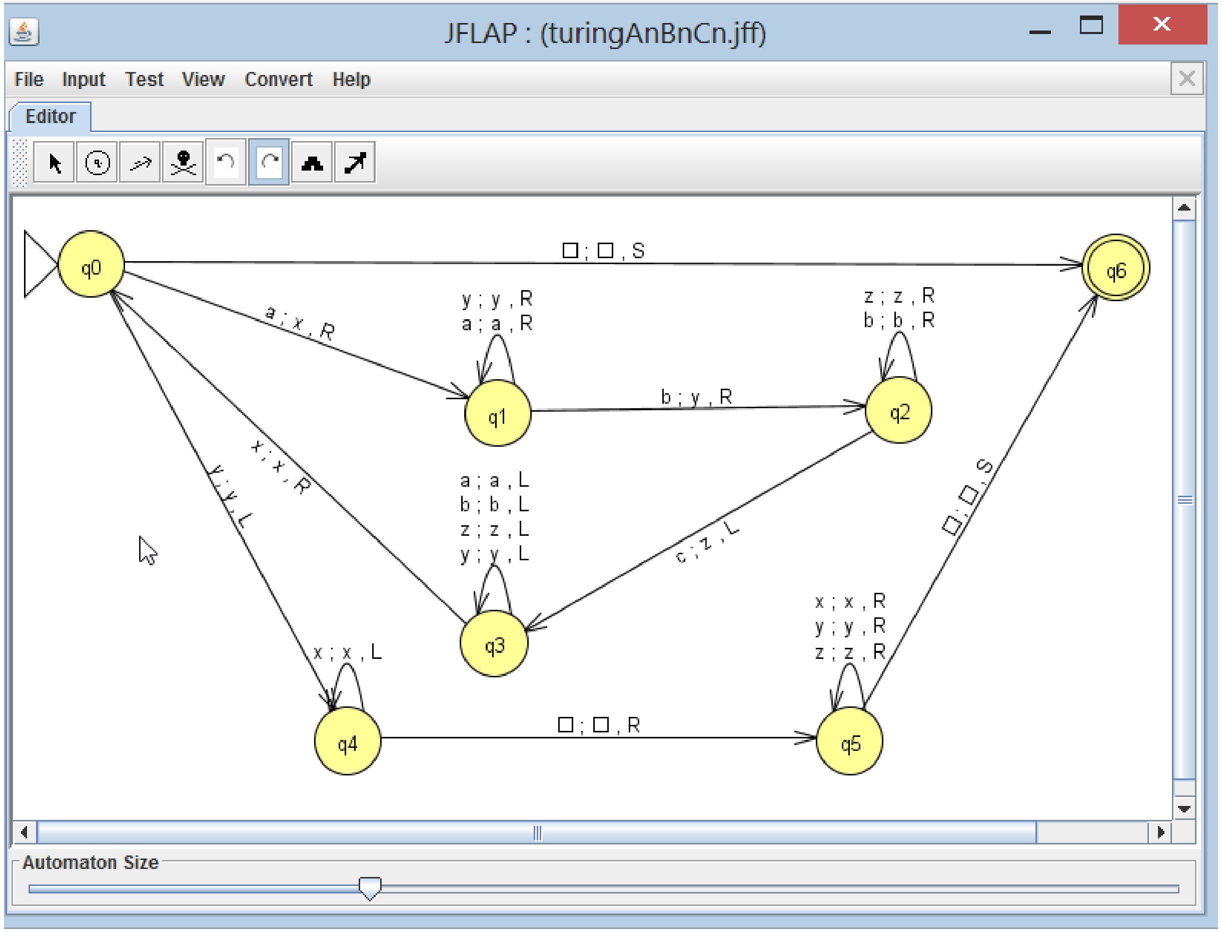
Neste exemplo, a Máquina de Turing com fita limitada está sendo utilizada para reconhecer uma linguagem livre de contexto, e tal fato sugere que esse tipo de dispositivo possa ser empregado também no reconhecimento desta categoria de linguagens, em substituição aos autômatos de pilha.

Além de necessitar da movimentação do cursor em ambos os sentidos, neste exemplo a substituição (gravação) de um símbolo do alfabeto de entrada por símbolos que não fazem parte deste alfabeto (no caso, "a" por "X" e "b" por "Y") é essencial para o seu correto funcionamento.

MT_{fl} para processar $a^nb^nc^n$

O símbolo "S" é usado para movimentação de parada (STOP) quando é lido o delimitador mais à direita que denota final da cadeia.

Seu uso não é estritamente necessário: pode-se trabalhar apenas com movimentações L (para a esquerda) e R (para a direita).



Ver máquina em funcionamento no JFLAP

Exemplo

Exemplo 3.3
A Máquina de Turing com fita limitada da Figura 3 reconhece a linguagem $\{wcw \mid w \in \{a,b\}^*\}$ sobre o alfabeto $\{a,b,c\}$.

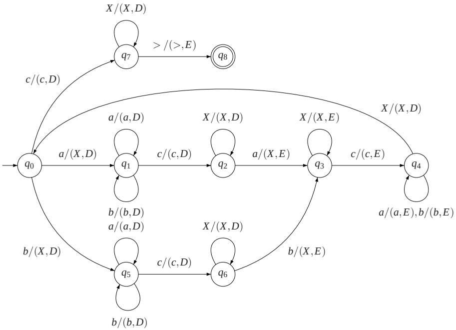


Figura 3: Máquina de Turing com fita limitada que aceita $\{wcw \mid w \in \{a,b\}^*\}$

Exemplo

Este exemplo ilustra o reconhecimento de uma linguagem tipicamente sensível ao contexto, pois a subcadeia "w" deve ser a mesma em ambos os lados do símbolo "c". Tal característica remete à relação entre a declaração e o uso de nomes, encontrada na maioria das linguagens de programação algorítmicas tradicionais — um nome só pode ser usado se a sua declaração for visível no local do uso.

Exemplo

Pode-se demonstrar, através do “Pumping Lemma” para linguagens livres de contexto, que a linguagem deste exemplo não é livre de contexto. Tal resultado sugere, como será mostrado mais adiante, que as Máquinas de Turing com fita limitada são dispositivos capazes de reconhecer uma classe de linguagens mais ampla do que as livres de contexto, reconhecidas pelos autômatos de pilha — trata-se, no caso, da classe das linguagens sensíveis ao contexto.