# Conseqüência na Lógica Proposicional

Márcio Lopes Cornélio
DSC-Poli-UPE
mlc@dsc.upe.br

## Implicação e equivalências tautológicas

- Determinar quando uma fórmula é conseqüência de algum conjunto de fórmulas
  - Definição 1: Uma fórmula $H$ **implica tautologicamente** uma fórmula $G$ ($G$ é uma conseqüência tautológica de $H$) se, para toda interpretação $I$ tal que $I[H] = T$, então $I[G] = T$
  - Definição 2:Uma fórmula $H$ é **tautologicamente equivalente** a uma fórmula $G$ se, qualquer que seja a interpretação $I$, $I[H] = I[G]$

3

## Conseqüência Tautológica - Exemplo 1

- Considere as fórmulas (premissas) $(A \vee B) \rightarrow C$ e $\neg B$. Vamos determinar se a fórmula $A \rightarrow C$ (conclusão) é uma conseqüência tautológica das premissas.
- Tabela verdade

| $A$ | $B$ | $C$ | $A \vee B$ | $(A \vee B) \rightarrow C$ | $\neg B$ | $A \rightarrow C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | F | V |
| V | V | F | V | F | F | F |
| V | F | V | V | $\boxed{\text{V}}$ | $\boxed{\text{V}}$ | $\boxed{\text{V}}$ |
| V | F | F | V | F | V | F |
| F | V | V | V | V | F | V |
| F | V | F | V | F | F | V |
| F | F | V | F | $\boxed{\text{V}}$ | $\boxed{\text{V}}$ | $\boxed{\text{V}}$ |
| F | F | F | F | $\boxed{\text{V}}$ | $\boxed{\text{V}}$ | $\boxed{\text{V}}$ |

- Em todas as situações em que as premissas são verdadeiras, a conclusão também é verdadeira. Logo, a fórmula é válida.

4

## Conseqüência Tautológica - Exemplo 2

- $B \rightarrow A, \neg B \vdash \neg A$

| $A$ | $B$ | $B \rightarrow A$ | $\neg B$ | $\neg A$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | F |
| V | F | $\boxed{\text{V}}$ | $\boxed{\text{V}}$ | $\boxed{\text{F}}$* |
| F | V | F | F | V |
| F | F | $\boxed{\text{V}}$ | $\boxed{\text{V}}$ | $\boxed{\text{V}}$ |

5

## Tablôs Semânticos

- Procedimentos ou sistema de provas
  - Correto: prova apenas as fórmulas válidas
  - Completo: prova todas as fórmulas válidas
- Método de refutação
  - Para mostrar que uma fórmula não é válida, começa-se supondo que ela não o é
  - Chegar a um absurdo indica que a suposição inicial estava errada
  - Também conhecido com "árvore de refutação"

7

## Exemplo 1

- Determinar se a fórmula $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$ é válida (tautologia). *Há inconsistências neste tablô (e.g. $A$ e $\neg A$), o que é um absurdo. A suposição de que $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$ não era válida leva a uma inconsitência. Logo, a fórmula é válida.*

a $\neg((A \wedge B) \rightarrow (A \vee B))$

b $\checkmark\neg((A \wedge B) \rightarrow (A \vee B))$
$A \wedge B$
$\neg(A \vee B)$

c $\checkmark\neg((A \wedge B) \rightarrow (A \vee B))$
$\checkmark A \wedge B$
$\neg(A \vee B)$
$A$
$B$

d $\checkmark\neg((A \wedge B) \rightarrow (A \vee B))$
$\checkmark A \wedge B$
$\checkmark\neg(A \vee B)$
$A$
$B$
$\neg A$
$\neg B$
X

8

## Exemplo 2

- Verificar se a fórmula $(A \wedge B) \rightarrow C$ é válida. *Não chegamos a uma inconsistência. A hipótese de que a fórmula não fosse válida estava correta, i.e., ela não é válida mesmo.*

a $\neg((A \wedge B) \rightarrow C)$

b $\checkmark\neg((A \wedge B) \rightarrow C)$
$A \wedge B$
$\neg C$

c $\checkmark\neg((A \wedge B) \rightarrow C)$
$\checkmark A \wedge B$
$\neg C$
$A$
$B$
?

9

## Exemplo 3

- Demonstrar que a fórmula $(A \vee B) \to (A \wedge B)$ é válida (tautologia). *Há ramos abertos que não podem ser fechados, pois não há fórmulas moleculares a serem reduzidas. Logo, a fórmula não é válida.*

a $\neg\,((A \vee B) \to (A \wedge B))$

b $\checkmark\neg\,((A \vee B) \to (A \wedge B))$
$A \vee B$
$\neg\,(A \wedge B)$

c $\checkmark\neg\,((A \vee B) \to (A \wedge B))$
$\checkmark A \vee B$
$\neg\,(A \wedge B)$
$A \quad B$

d $\checkmark\neg\,((A \vee B) \to (A \wedge B))$
$\checkmark A \vee B$
$\checkmark\neg\,(A \wedge B)$
$A \qquad B$
$\neg A \quad \neg B \quad \neg A \quad \neg B$
X ? ? X

10

## Tablôs

- Um tablô para uma fórmula $\alpha$, começa com $\neg\,\alpha$
- Um ramo é **fechado** se contém, para alguma fórmula $\alpha$, tanto $\alpha$ quanto $\neg\,\alpha$
- Um ramo é dito **completo** ou **finalizado** se é fechado ou todas as fórmulas moleculares encontradas nele foram reduzidas (possuem $\checkmark$)
- Um tablô é **completo** se cada um dos ramos é completo
- Um tablô é **fechado** se cada um dos seus ramos é fechado
- Um tablô fechado para uma fórmula $\alpha$ é uma *prova por tablôs* de $\alpha$

11

## Regras de Construção

**Negação** Se um ramo aberto contém uma fórmula e sua negação, escreva $X$ no final do ramo

**Negação Negada** Se um ramo aberto contém uma fórmula não-reduzida da forma $\neg\,\neg\,\alpha$, marque-a como reduzida e escreva $\alpha$ no final de todo ramo que contém a nova fórmula reduzida

**Conjunção** Se um ramo aberto contém uma fórmula não-reduzida da forma $\alpha \wedge \beta$, marque-a como reduzida e escreva $\alpha$ e $\beta$ no final de cada ramo que contém a nova fórmula reduzida

**Conjunção Negada** Se um ramo aberto contém uma fórmula não-reduzida da forma $\neg\,(\alpha \wedge \beta)$, marque-a como reduzida e bifurque cada ramo que contém a nova fórmula em dois novos ramos, no final do primeiro escreva $\neg\,\alpha$ e, no final do segundo, escreva $\neg\,\beta$

12

## Regras de Construção

**Disjunção** Se um ramo aberto contém uma fórmula não-reduzida da forma $\alpha \vee \beta$, marque-a como reduzida e bifurque o final de cada ramo que contém a nova fórmula reduzida em dois novos ramos, no final do primeiro escreva $\alpha$ e, no final do segundo, escreva $\beta$

**Disjunção Negada** Se um ramo aberto contém uma fórmula não-reduzida da forma $\neg (\alpha \vee \beta)$, marque-a como reduzida e escreva tanto $\neg \alpha$ quanto $\neg \beta$ no final de todo ramo aberto que contém esta nova fórmula reduzida.

13

## Regras de Construção

**Implicação** Se um ramo aberto contém uma fórmula não-reduzida da forma $\alpha \rightarrow \beta$, marque-a como reduzida e bifurque cada ramo que contém a nova fórmula e dois novos ramos, no final do primeiro escreva $\neg \alpha$ e, no final do segundo, escreva $\beta$

**Implicação Negada** Se um ramo aberto contém uma fórmula não-reduzida da forma $\neg (\alpha \rightarrow \beta)$, marque-a como reduzida e escreva tanto $\alpha$ quanto $\neg \beta$ no final de todo ramo aberto que contém esta nova fórmula reduzida.

14

## Exemplo 4

- $\neg (Q \rightarrow (P \wedge \neg P))$ não é válida, pois há um ramo aberto e não podemos continuar com reduções. Logo, a fórmula não é válida.

a
$$\checkmark \neg \neg (Q \rightarrow (P \wedge \neg P))$$
$$Q \rightarrow (P \wedge \neg P)$$

b
$$\checkmark \neg \neg (Q \rightarrow (P \wedge \neg P))$$
$$\checkmark Q \rightarrow (P \wedge \neg P)$$
$$\neg Q \qquad P \wedge \neg P$$

c
$$\checkmark \neg \neg (Q \rightarrow (P \wedge \neg P))$$
$$\checkmark Q \rightarrow (P \wedge \neg P)$$
$$\neg Q \qquad \checkmark P \wedge \neg P$$
$$P$$
$$\neg P$$
$$\text{X}$$

15

## Regras de Construção

**Bi-implicação** Se um ramo aberto contém uma fórmula não-reduzida da forma $\alpha \leftrightarrow \beta$, marque-a como reduzida e bifurque o final de cada ramo que contém a nova fórmula em dois novos ramos, no final do primeiro escreva $\alpha$ e $\beta$ e, no final do segundo, escreva $\neg \alpha$ e $\neg \beta$

**Bi-implicação Negada** Se um ramo aberto contém uma fórmula não-reduzida da forma $\neg (\alpha \leftrightarrow \beta)$, marque-a como reduzida e bifurque o final de cada ramo que contém a nova fórmula em dois novos ramos, no final do primeiro escreva $\alpha$ e $\neg \beta$ e, no final do segundo, escreva $\neg \alpha$ e $\beta$

16

## Regras de Construção

1 $\neg\neg\alpha$

$\alpha$

2 $\alpha \wedge \beta$

$\alpha$

$\beta$

3 $\alpha \vee \beta$

$\alpha \quad \beta$

4 $\alpha \rightarrow \beta$

$\neg\alpha \quad \beta$

5 $\alpha \leftrightarrow \beta$

$\alpha \quad \neg\alpha$

$\beta \quad \neg\beta$

6 $\neg(\alpha \wedge \beta)$

$\neg\alpha \quad \neg\beta$

7 $\neg(\alpha \vee \beta)$

$\neg\alpha$

$\neg\beta$

8 $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$

$\alpha$

$\neg\beta$

9 $\neg(\alpha \leftrightarrow \beta)$

$\alpha \quad \neg\alpha$

$\neg\beta \quad \beta$



## Provando a Validade de Argumentos

- Construímos uma lista que consiste das premissas e da negação da conclusão
  - Qualquer atribuição de verdade ou falsidade às fórmulas atômicas que torna as premissas verdadeiras, então temos premissas verdadeiras e conclusão falsa. Conseqüentemente, o argumento não é válido



## Exemplo 5

- Determine se a forma $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \vdash R$ é válida

a $P \rightarrow Q$

$Q \rightarrow R$

$P$

$\neg R$

b $\checkmark P \rightarrow Q$

$Q \rightarrow R$

$P$

$\neg R$

$\neg P \quad Q$

c $\checkmark P \rightarrow Q$

$\checkmark Q \rightarrow R$

$P$

$\neg R$

$\neg P \quad Q$

X

$\neg Q \quad R$

X X

**Princípios**

1. As regras para construir árvores devem ser aplicadas apenas a fórmulas como um todo e não a sub-formulas
2. A ordem em que regras são aplicadas não faz diferença para a respostas final, porém é mais eficiente aplicar primeiramente as que não levam a bifurcações
3. Os ramos abertos de uma árvore finalizada para uma forma de argumento exibe todos os contra-exemplos para tal forma

20