

## **CAPÍTULO III – TRANSMISSÃO DE SINAIS**

Transmissão de sinal é processo onde uma onda é transferida de um local para outro, chegando a este outro local idealmente sem distorção. Este capítulo tem o intuito de apresentar os aspectos fundamentais relacionados ao modelamento de sistemas para transmissão de sinais. Na seção 3.1 serão apresentados os conceitos básicos envolvendo os sistemas lineares e invariantes no tempo. Nas seções seguintes serão abordados os conceitos acerca da representação sistêmica, como resposta ao impulso e função de transferência. Na seção 3.4 será apresentada a abordagem referente à análise de sistemas utilizando a representação por diagrama de blocos funcionais. Alguns conceitos são fundamentais para a correta análise e projeto de sistemas de comunicações. É imprescindível para a transmissão adequada de sinais que os critérios de transmissão sem distorção sejam obedecidos. Para isto, também é necessário esclarecer o conceito de equalização. Na seção 3.5 serão apresentados os conceitos básicos relacionados à distorção de sinais. Nas seções seguintes serão abordados os conceitos sobre equalização e formas de implementação.

### **3.1. SISTEMAS LINEARES E INVARIANTES NO TEMPO**

É importante entender um pouco sobre sistemas lineares e invariantes no tempo (LIT), não só porque a maioria dos sistemas utilizados para comunicações são LIT, mas porque quando estes sistemas são utilizados é possível prever o comportamento e o desempenho destes sistemas. Para um sistema ser LIT ele precisa apresentar as propriedades de linearidade e invariância no tempo.

A propriedade de linearidade define uma classe especial de sistemas cuja saída é a superposição, ou soma, das saídas individuais obtidas a partir de entradas individuais aplicadas separadamente ao sistema. Por exemplo, considere uma entrada  $x_1(t)$  que gera uma saída  $y_1(t)$  e uma entrada  $x_2(t)$  que gera uma saída  $y_2(t)$ . O sistema é linear se a saída do sistema for  $ay_1(t) + by_2(t)$ , quando as entradas  $ax_1(t)$  e  $bx_2(t)$  forem aplicadas

simultaneamente, onde  $a$  e  $b$  são constantes. Um sistema é invariante no tempo se um atraso na sequência do sinal na entrada causa o mesmo atraso na sequência do sinal na saída, ou seja, se  $x(t) \rightarrow y(t)$  então  $x(t - \tau) \rightarrow y(t - \tau)$ .

Além disso, sistemas LTI apresentam a propriedade da comutatividade. Considere, por exemplo, dois sistemas LIT cascadeados em série. Neste caso, alterar a ordem dos sistemas não modifica a sequência do sinal na saída do sistema cascadeado.

É importante frisar que a maioria dos sistemas de transmissão e filtros tem em comum às propriedades de linearidade e invariância no tempo. Estas propriedades permitem modelar o funcionamento do sistema de transmissão no domínio do tempo (através da resposta ao impulso) e no domínio da frequência (através da resposta em frequência).

### 3.2. RESPOSTA AO IMPULSO E INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO

Vamos considerar o sistema sem energia interna armazenada no instante em que aplicamos a entrada  $x(t)$ . A saída  $y(t)$  vai depender inteiramente da resposta forçada devido a  $x(t)$ :

$$y(t) = F[x(t)] \quad (3.1)$$

onde  $F[ \ ]$  é a relação funcional entre entrada e saída.

Como visto no capítulo anterior, pode-se representar o sinal através de uma decomposição em um conjunto completo e fechado de base (teoria de Sturm-Liouville). De forma que:

$$x(t) = \sum_k a_k x_k(t), \quad (3.2)$$

onde  $a_k$  são coeficientes constantes.

Aplicando o princípio da superposição dos sistemas lineares, tem-se:

$$y(t) = F\left[\sum_k a_k x_k(t)\right]. \quad (3.3)$$

Como  $F[\ ]$  é um operador linear, tem-se que:

$$y(t) = \sum_k a_k F[x_k(t)]. \quad (3.4)$$

Por outro lado, a propriedade da invariância no tempo mostra que as características do sistema se mantêm fixas com o passar do tempo.

$$y(t - \tau) = F[x(t - \tau)]. \quad (3.5)$$

Portanto que se o sinal na entrada do sistema for deslocado no tempo, a saída apresentará o mesmo comportamento deslocado no tempo.

Estes sistemas são governados por equações diferenciais com a seguinte forma:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0, \quad (3.6)$$

onde os coeficientes  $a_i$  e  $b_j$  são constantes. No caso de circuitos elétricos, o valor de  $n$  determina o número de fontes de energia independentes. Infelizmente, muitas vezes a equação acima não provê uma expressão direta para  $y(t)$ .

Para obter uma equação explícita que relacione entrada e saída, deve-se definir a resposta ao impulso do sistema.

$$h(t) = F[\delta(t)]. \quad (3.7)$$

Pode-se escrever que

$$x(t) = x(t) * \delta(t). \quad (3.8)$$

Então,

$$y(t) = F[x(t)]. \quad (3.9)$$

Utilizando (3.8), tem-se:

$$y(t) = F[x(t) * \delta(t)]. \quad (3.10)$$

Pela definição de convolução, tem-se:

$$y(t) = F\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right]. \quad (3.11)$$

Note que  $x(\tau)$  não depende de  $t$ , então:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) F[\delta(t - \tau)] d\tau, \quad (3.12)$$

Utilizando (3.7), tem-se:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau, \quad (3.13)$$

Pela definição de convolução, tem-se:

$$y(t) = x(t) * \delta(t). \quad (3.14)$$

**3.2.1. EXTRAÇÃO DA RESPOSTA AO IMPULSO DE UM SISTEMA**

Considere que convoluir com o *Delta de Dirac* resulta em uma operação neutra.

Então:

$$h(t) = h(t) * \delta(t). \quad (3.15)$$

mas,

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}. \quad (3.16)$$

Então,

$$h(t) = h(t) * \frac{du(t)}{dt}. \quad (3.17)$$

Mas note que,

$$h(t) * \frac{du(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \frac{du(t-\tau)}{dt} d\tau, \quad (3.18)$$

$$h(t) * \frac{du(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t-\tau) d\tau, \quad (3.19)$$

$$h(t) * \frac{du(t)}{dt} = \frac{d[h(t) * u(t)]}{dt}. \quad (3.20)$$

Então, substituindo-se (3.20) em (3.17), tem-se:

$$h(t) = \frac{d[h(t) * u(t)]}{dt}, \quad (3.21)$$

$$h(t) = \frac{d[g(t)]}{dt}. \quad (3.22)$$

onde  $g(t) = F[u(t)]$  é a resposta ao degrau unitário.

**Exemplo 3.1:** Considere o circuito RC utilizado como filtro passa-baixa governado pela seguinte equação diferencial:

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t). \quad (3.23)$$

Impondo um degrau unitário à entrada, temos:

$$g(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) u(t). \quad (3.24)$$

Por consequência,

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t). \quad (3.25)$$

Se um pulso de duração  $\tau$  e amplitude  $A$ ,  $x(t) = A[u(t) - u(t - \tau)]$ , for aplicado à entrada, tem-se:

$$y(t) = A[u(t) - u(t - \tau)] * \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t). \quad (3.26)$$

Pode-se chegar a:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), & 0 \leq t < \tau \\ A \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}}, & \tau \leq t \end{cases}. \quad (3.27)$$

### 3.3. FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA E RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Como se pode notar, a análise no tempo torna-se cada vez mais difícil para sistemas de mais alta ordem. Uma forma de contornar isso é realizando a análise no domínio da frequência. O primeiro passo é definir uma função de transferência, como sendo a transformada de Fourier da resposta ao impulso.

$$H(\omega) = \mathfrak{T}[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.28)$$

Esta definição requer que a transformada de Fourier exista. No caso de sistemas instáveis,  $h(t)$  aumenta com o tempo e  $H(\omega)$  não existe.

Considerando que  $h(t)$  seja real  $\rightarrow H(-\omega) = H(\omega)^*$ , de forma que  $|H(-\omega)| = |H(\omega)|$  e  $\arg[H(-\omega)] = -\arg[H(\omega)]$ . E que tem-se um fasor  $x(t) = A_x e^{j\phi_x} e^{j\omega_0 t}$  na entrada do sistema. Sabe-se que a saída é a convolução da entrada com a resposta ao impulso, então:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) A_x e^{j\phi_x} e^{j\omega_0(t-\tau)} d\tau, \quad (3.29)$$

$$y(t) = A_x e^{j\phi_x} e^{-j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau, \quad (3.30)$$

$$y(t) = A_x e^{j\phi_x} e^{-j\omega_0 t} H(\omega_0). \quad (3.31)$$

Definindo  $y(t) = A_y e^{j\phi_y} e^{-j\omega_0 t}$  como um fasor na saída e comparando com o resultado anterior, tem-se:

$$A_y = A_x |H(\omega_0)|, \quad (3.32)$$

onde  $|H(\omega_0)|$  é a razão entre as amplitudes de saída e entrada, chamada de resposta em amplitude ou ganho.

Por outro lado  $\arg[H(\omega_0)]$  é o deslocamento de fase:

$$\phi_y = \phi_x + \arg[H(\omega_0)] \quad (3.33)$$

Então, tendo a descrição do ganho e deslocamento de frequência, tem-se o comportamento em frequência do sistema.  $H(\omega)$  será doravante chamada de função de transferência.

Considerando  $y(t) = x(t) * h(t)$  e aplicando as propriedades da transformada de Fourier, tem-se:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \quad (3.34)$$

onde também são verdadeiras as seguintes relações:

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)| |H(\omega)| \quad (3.35)$$

e

$$\arg[Y(\omega)] = \arg[X(\omega)] + \arg[H(\omega)]. \quad (3.36)$$

**Exemplo 3.2:** Reconsiderando circuito RC do exemplo 3.1. e sabendo-se que as impedâncias são dadas por  $Z_R = R$  e  $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ , tem-se:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{Z_c}{Z_c + Z_R} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{1 + j\omega CR}, \quad (3.37)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega CR} \left( \frac{1 - j\omega CR}{1 - j\omega CR} \right) = \frac{1 - j\omega CR}{1 + (\omega CR)^2}, \quad (3.38)$$



$$|H(\omega)| = \sqrt{H(\omega)H(\omega)^*} = \sqrt{\left(\frac{1}{1+j\omega CR}\right)\left(\frac{1}{1-j\omega CR}\right)} = \sqrt{\frac{1}{1+(\omega CR)^2}}, \quad (3.39)$$

$$\arg[H(\omega)] = \arctg\left\{\frac{\text{Im}[H(\omega)]}{\text{Re}[H(\omega)]}\right\} = \arctg(\omega CR). \quad (3.40)$$

### 3.4. DIAGRAMAS DE BLOCOS FUNCIONAIS

Um diagrama de blocos representa de forma sistêmica as funções desempenhadas por cada um dos componentes descrevendo o fluxo de sinais entre eles. Cada bloco funcional descreve simbolicamente a operação matemática sobre o sinal de entrada do bloco, produzindo o sinal de saída. Setas são usadas para indicar o fluxo de sinal, mostrando assim uma propriedade de unilateralidade. Muitas vezes, a operação funcional de um sistema pode ser visualizada mais prontamente examinando-se o diagrama de blocos. É importante frisar que o diagrama de blocos contém informação sobre o comportamento dinâmico do sistema, mas não inclui nenhuma informação sobre a construção física do sistema.

Para a construção de um diagrama de blocos alguns elementos podem ser utilizados. Exemplos são os pontos de soma e os pontos de derivação. Nos pontos de soma, a saída é resultado de operações algébricas sobre os sinais provenientes de setas. Já um ponto de derivação determina um ponto a partir do qual o sinal pode ser conduzido para a entrada de blocos funcionais ou pontos de soma.

#### 3.4.1. ANÁLISE DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE BLOCOS FUNCIONAIS COMUNS

Alguns blocos funcionais são bastante utilizados em análise sistêmica de sinais e aparecem com frequência em análise de diagramas de blocos. Algumas dessas funções são:

multiplicação por escalar, diferenciação, integração e atraso temporal. Vale frisar que estas funções são essenciais para análise de sistemas de controle.

#### 3.4.1.1. Função de transferência para bloco multiplicação por escalar

Considere um bloco que executa a seguinte operação:  $y(t) = \pm kx(t)$ . Aplicando a transformada de Fourier em ambos os lados da equação, tem-se:

$$\mathfrak{T}\{y(t)\} = \mathfrak{T}\{\pm kx(t)\}. \quad (3.41)$$

Lembre-se que a transformada de Fourier é um operador linear, então:

$$\mathfrak{T}\{y(t)\} = \pm k\mathfrak{T}\{x(t)\}, \quad (3.42)$$

que corresponde a

$$Y(\omega) = \pm kX(\omega). \quad (3.43)$$

Como  $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$ , então:

$$H(\omega) = \frac{\pm kX(\omega)}{X(\omega)}, \quad (3.44)$$

Ou seja,

$$H(\omega) = \pm k. \quad (3.45)$$

**3.4.1.2. Função de transferência para bloco diferenciação**

Considere um bloco que executa a seguinte operação:  $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ . Aplicando a transformada de Fourier em ambos os lados da equação, tem-se:

$$\mathfrak{F}\{y(t)\} = \mathfrak{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}, \quad (3.46)$$

Utilizando a propriedade de derivação no tempo, tem-se:

$$Y(\omega) = j\omega X(\omega). \quad (3.47)$$

Como  $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$ , então:

$$H(\omega) = \frac{j\omega X(\omega)}{X(\omega)}, \quad (3.48)$$

$$H(\omega) = j\omega. \quad (3.49)$$

**3.4.1.3. Função de transferência para bloco integração**

Considere um bloco que executa a seguinte operação:  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(t)dt$ . Aplicando a transformada de Fourier em ambos os lados da equação, tem-se:

$$\mathfrak{F}\{y(t)\} = \mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^t x(t)dt\right\}. \quad (3.50)$$

Utilizando a propriedade de integração no tempo, tem-se:

$$Y(\omega) = \frac{X(\omega)}{j\omega}. \quad (3.51)$$

Como  $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$ , então:

$$H(\omega) = \frac{\frac{X(\omega)}{j\omega}}{X(\omega)}, \quad (3.52)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega}. \quad (3.53)$$

#### 2.4.1.4. Função de transferência para bloco de atraso temporal

Considere um bloco que executa a seguinte operação:  $y(t) = x(t - t_0)$ . Aplicando a transformada de Fourier em ambos os lados da equação, tem-se:

$$\mathfrak{F}\{y(t)\} = \mathfrak{F}\{x(t - t_0)\}, \quad (3.54)$$

Utilizando a propriedade de deslocamento no tempo, tem-se:

$$Y(\omega) = X(\omega)e^{-j\omega t_0}. \quad (3.55)$$

Como  $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$ , então:

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)e^{-j\omega t_0}}{X(\omega)}, \quad (3.56)$$

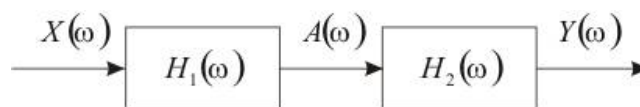
$$H(\omega) = e^{-j\omega t_0}. \quad (3.57)$$

### 3.4.2. INTERCONEXÕES MAIS COMUNS ENTRE BLOCOS FUNCIONAIS

Muitas vezes sistemas de comunicações podem ser representados como um conjunto de blocos funcionais interligados de forma conveniente para realizar uma determinada função. As formas mais comuns de interligação são: interligação em série, interligação em paralelo e interligação para realimentação negativa.

#### 3.4.2.1. Interligação série

Considere a figura 3.1 onde dois blocos funcionais são interligados em série. O objetivo é estabelecer a função de transferência entre a saída  $Y(\omega)$  e a entrada  $X(\omega)$  para o sistema composto. Note que  $H_1(\omega)$  e  $H_2(\omega)$  são as funções de transferência do primeiro e do segundo bloco funcional, respectivamente.



**Figura 3.1** – Interligação em série de dois blocos funcionais.

Como visto anteriormente, o sinal na saída de um bloco funcional representado na frequência é dada pela multiplicação do sinal na entrada de um bloco funcional representado na frequência pela função de transferência do bloco. Então,

$$A(\omega) = H_1(\omega)X(\omega) \quad (3.58)$$

e

$$Y(\omega) = H_2(\omega)A(\omega). \quad (3.59)$$

Logo, substituindo-se (3.58) em (3.59), tem-se:

$$Y(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega)X(\omega). \quad (3.60)$$

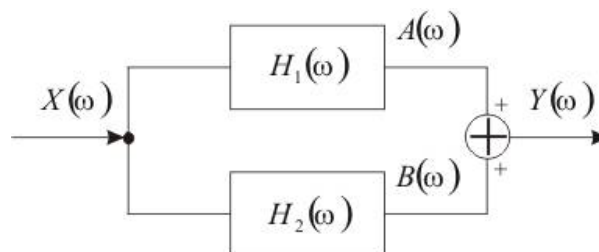
Assim, a função de transferência composta pelos blocos em série é dada por:

$$H(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega). \quad (3.61)$$

Isto equivale a afirmar que a função de transferência composta pelos blocos em série é dada pela multiplicação das funções de transferência individuais de cada bloco funcional.

### 3.4.2.2. Interligação em paralelo

Considere a figura 3.2 onde dois blocos funcionais são interligados em paralelo. O objetivo é estabelecer a função de transferência entre a saída  $Y(\omega)$  e a entrada  $X(\omega)$  para o sistema composto. Note que  $H_1(\omega)$  e  $H_2(\omega)$  são as funções de transferência do bloco superior e do bloco funcional inferior, respectivamente.



**Figura 3.2** – Interligação em paralelo de dois blocos funcionais.

Sendo assim,

$$A(\omega) = H_1(\omega)X(\omega) \quad (3.62)$$

e

$$B(\omega) = H_2(\omega)X(\omega). \quad (3.63)$$

Mas,

$$Y(\omega) = A(\omega) + B(\omega) \quad (3.64)$$

Logo,

$$Y(\omega) = [H_1(\omega) + H_2(\omega)]X(\omega). \quad (3.65)$$

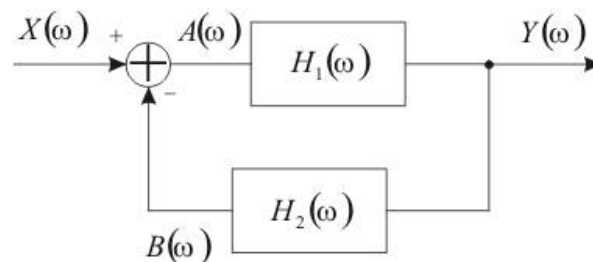
Assim, a função de transferência composta pelos blocos em paralelo é dada por:

$$H(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega). \quad (3.66)$$

Isto equivale a afirmar que a função de transferência composta pelos blocos em paralelo é dada pela soma das funções de transferência individuais de cada bloco funcional.

#### 2.4.2.3. Interligação para realimentação negativa

Considere a figura 3.3 onde os blocos funcionais são interligados de forma a propiciar um esquema de realimentação, conhecido como realimentação negativa. O objetivo é estabelecer a função de transferência entre a saída  $Y(\omega)$  e a entrada  $X(\omega)$  para o sistema composto. Note que  $H_1(\omega)$  e  $H_2(\omega)$  são as funções de transferência de ação direta e de realimentação, respectivamente.



**Figura 3.3** – Interligação em paralelo de dois blocos funcionais.

Pode-se observar que

$$Y(\omega) = H_1(\omega)A(\omega), \quad (3.67)$$

$$A(\omega) = X(\omega) - B(\omega), \quad (3.68)$$

e

$$B(\omega) = H_2(\omega)Y(\omega). \quad (3.69)$$

Substituindo (3.68) em (3.67), tem-se:

$$Y(\omega) = H_1(\omega)[X(\omega) - B(\omega)]. \quad (3.70)$$

Substituindo (3.69) em (3.70), tem-se:

$$Y(\omega) = H_1(\omega)[X(\omega) - H_2(\omega)Y(\omega)]. \quad (3.71)$$

Reorganizando os termos, tem-se:

$$Y(\omega) + H_1(\omega)H_2(\omega)Y(\omega) = H_1(\omega)X(\omega). \quad (3.72)$$

Colocando  $Y(\omega)$  em evidência, tem-se:

$$Y(\omega)[1 + H_1(\omega)H_2(\omega)] = H_1(\omega)X(\omega). \quad (3.73)$$

Isto equivale a:

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{H_1(\omega)}{1 + H_1(\omega)H_2(\omega)}. \quad (3.74)$$

Assim, a função de transferência composta pelos blocos compondo um sistema de realimentação negativa é dada por:

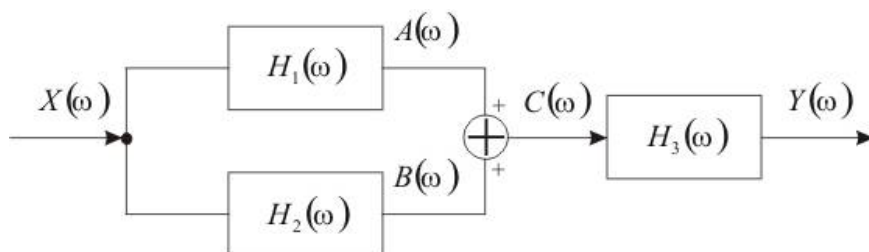
$$H(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{1 + H_1(\omega)H_2(\omega)}. \quad (3.75)$$



### 3.4.3. REDUÇÃO DE DIAGRAMA DE BLOCOS

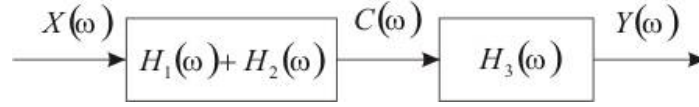
Da mesma forma que o sistema com realimentação negativa foi reduzido para apenas um bloco com função de transferência  $H(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{1 + H_1(\omega)H_2(\omega)}$ , a função de transferência de diagramas de blocos mais complexos também podem ser representados por uma equação que envolva as funções de transferência dos blocos individuais. Os conhecimentos adquiridos na seção anterior serão de grande valia para realizar este tipo de tarefa. A melhor forma para apresentar a tarefa por redução de diagramas de blocos é por meio de exemplos.

**Exemplo 3.3:** Considere o diagrama de blocos apresentado na figura 3.4. Sabendo que as funções de transferência dos blocos funcionais são dadas respectivamente por  $H_1(\omega) = 1$ ,  $H_2(\omega) = e^{-j\omega\tau}$  e  $H_3(\omega) = \frac{1}{j\omega}$ , onde  $\tau$  é um atraso associado ao bloco funcional. Calcule a função de transferência do sistema.



**Figura 3.4** – Exemplo de redução de diagramas de blocos funcionais.

Da figura pode-se notar que existe uma ligação paralela entre os blocos funcionais com funções de transferência  $H_1(\omega)$  e  $H_2(\omega)$ , respectivamente. Então a relação entre  $C(\omega)$  e  $X(\omega)$  é dada pela soma de  $H_1(\omega)$  e  $H_2(\omega)$ . Assim, tem-se o novo diagrama de blocos apresentado na figura 3.5.



**Figura 3.5** – Passo intermediário do exemplo de redução de diagramas de blocos funcionais.

Da figura pode-se notar que existe uma ligação série entre os blocos funcionais com funções de transferência  $H_1(\omega) + H_2(\omega)$  e  $H_3(\omega)$ , respectivamente. Então a relação entre  $Y(\omega)$  e  $X(\omega)$  é dada pela multiplicação de  $H_1(\omega) + H_2(\omega)$  e  $H_3(\omega)$ . Assim,

$$Y(\omega) = [H_1(\omega) + H_2(\omega)]H_3(\omega)X(\omega). \quad (3.76)$$

Logo,

$$H(\omega) = [H_1(\omega) + H_2(\omega)]H_3(\omega). \quad (3.77)$$

Substituindo os dados das funções de transferências citados no enunciado do exemplo, tem-se:

$$H(\omega) = \frac{1 + e^{-j\omega\tau}}{j\omega}, \quad (3.78)$$

$$H(\omega) = e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} \frac{e^{\frac{j\omega\tau}{2}} + e^{-\frac{j\omega\tau}{2}}}{j\omega}, \quad (3.79)$$

$$H(\omega) = \frac{2}{\omega} e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} \frac{e^{\frac{j\omega\tau}{2}} + e^{-\frac{j\omega\tau}{2}}}{2j}, \quad (3.80)$$

$$H(\omega) = \frac{2}{\omega} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-\frac{j\omega\tau}{2}}. \quad (3.81)$$

Note que a transformada inversa da função de transferência obtida acima corresponde a uma porta de largura  $\tau$  deslocada no tempo de  $\frac{\tau}{2}$ .

Isto pode ser verificado de outra forma. Também é possível realizar a análise no tempo, apesar de ser mais trabalhoso, principalmente por causa das operações de convolução. Todavia, considere a figura 3.4 no tempo, sendo:  $H_1(\omega) \xrightarrow{\mathfrak{T}^{-1}} h_1(t)$ ,  $H_2(\omega) \xrightarrow{\mathfrak{T}^{-1}} h_2(t)$ ,  $H_3(\omega) \xrightarrow{\mathfrak{T}^{-1}} h_3(t)$ ,  $A(\omega) \xrightarrow{\mathfrak{T}^{-1}} a(t)$ ,  $B(\omega) \xrightarrow{\mathfrak{T}^{-1}} b(t)$ ,  $C(\omega) \xrightarrow{\mathfrak{T}^{-1}} c(t)$ ,  $X(\omega) \xrightarrow{\mathfrak{T}^{-1}} x(t)$  e  $Y(\omega) \xrightarrow{\mathfrak{T}^{-1}} y(t)$ . Note que  $h_1(t)$ ,  $h_2(t)$  e  $h_3(t)$  são as respostas ao impulso dos blocos funcionais.

De posse destas informações e observando a figura 3.4 pode-se concluir que:

$$a(t) = x(t) * h_1(t). \quad (3.82)$$

$$b(t) = x(t) * h_2(t). \quad (3.83)$$

$$c(t) = a(t) + b(t). \quad (3.84)$$

$$y(t) = c(t) * h_3(t). \quad (3.85)$$

Então, substituindo as equações (3.82) e (3.83) em (3.84), tem-se:

$$c(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t). \quad (3.86)$$

Então, substituindo a equação (3.86) em (3.85), tem-se:

$$y(t) = h_3(t) * [x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)]. \quad (3.87)$$

Outro aspecto importante que deve ser frisado é que para obter a resposta ao impulso do sistema composto, deve-se colocar um impulso na entrada do sistema, ou seja, para  $x(t) = \delta(t)$ , tem-se  $y(t) = h(t)$ . Então,

$$h(t) = h_3(t) * [\delta(t) * h_1(t) + \delta(t) * h_2(t)]. \quad (3.88)$$

Da seção 3.4.1. tem-se que  $h_1(t) = \delta(t)$ ,  $h_2(t) = \delta(t - \tau)$  e  $h_3(t) = \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda$ . Então,

$$h(t) = h_3(t) * [\delta(t) * \delta(t) + \delta(t) * \delta(t - \tau)]. \quad (3.89)$$

Mas convoluir com *delta de Dirac* significa deslocar o sinal, então:

$$h(t) = h_3(t) * [\delta(t) + \delta(t - \tau)]. \quad (3.90)$$

Operando com o bloco funcional integrador:

$$h(t) = \int_{-\infty}^t [\delta(\lambda) + \delta(\lambda - \tau)] d\lambda. \quad (3.90)$$

A integral do *delta de Dirac* é o degrau unitário:

$$h(t) = u(t) - u(t - \tau). \quad (3.91)$$

Esta equação corresponde a uma porta  $\Pi\left(\frac{t - \frac{\tau}{2}}{\tau}\right)$ , como mostrado anteriormente.

### 3.5. DISTORÇÃO DO SINAL NA TRANSMISSÃO

Em qualquer sistema de transmissão existirão dois aspectos particulares de suma importância: Dissipação de potência, que é responsável por atenuar o sinal, e armazenamento de energia, que altera a forma de onda do sinal.

**3.5.1. CRITÉRIO PARA TRANSMISSÃO SEM DISTORÇÃO**

Sistemas de comunicação sem distorção são aqueles cuja saída tem a mesma forma que a entrada. A saída só pode ser diferenciada da entrada pela amplitude, que pode estar multiplicada por uma constante, e por um atraso constante para todas as frequências. Sabendo desta afirmação, pode-se escrever a seguinte equação:

$$y(t) = kx(t - t_0), \quad (3.92)$$

Onde  $k$  e  $t_0$  são constantes que representam, respectivamente, a alteração de amplitude e o atraso sofrido pelo sinal.

Como  $y(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} Y(\omega)$  e  $x(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} X(\omega)$ , tomando a transformada de Fourier de (3.92), tem-se:

$$\mathfrak{F}[y(t)] = \mathfrak{F}[kx(t - t_0)]. \quad (3.93)$$

Utilizando a propriedade da linearidade da transformada de Fourier,

$$\mathfrak{F}[y(t)] = k\mathfrak{F}[x(t - t_0)]. \quad (3.94)$$

Utilizando a propriedade de deslocamento no tempo da transformada de Fourier,

$$Y(\omega) = kX(\omega)e^{-j\omega t_0}. \quad (3.95)$$

Então, a função de transferência do sistema de comunicação deve ter a seguinte função de transferência:

$$H(\omega) = ke^{-j\omega t_0}, \quad (3.96)$$

### 3.5.2. CLASSIFICAÇÃO PARA TIPOS DE DISTORÇÃO

Os tipos de distorção se classificam primariamente em não-lineares e lineares. A distorção não-linear é decorrente de efeitos com dependência não linear com sinal. A mistura de quatro ondas ou o efeito Raman são exemplos de efeitos não-lineares em sistemas de comunicações ópticas.

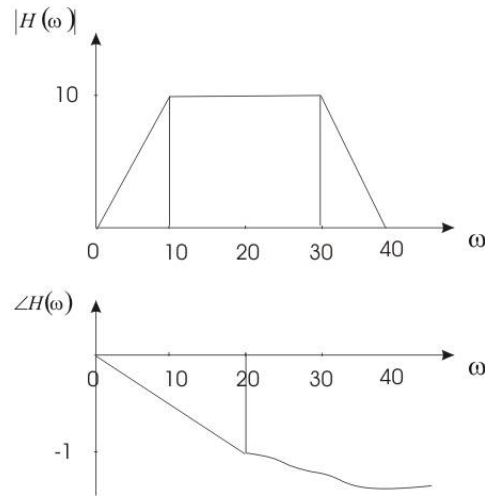
Os efeitos lineares podem ser divididos basicamente em dois grupos: distorção em amplitude, quando o módulo da função de transferência não é constante  $|H(\omega)| \neq k$ , e distorção em atraso, quando o argumento da função de transferência não é linear  $\angle[H(\omega)] \neq -\omega t_0 \pm m\pi$ .

A distorção em amplitude às vezes é referida como distorção em frequência, porque na saída, as frequências não estão na proporção que deveriam estar. O caso mais comum é o excesso de atenuação para baixas ou altas frequências.

Na distorção em atraso, as componentes de frequência vão sofrer atrasos diferentes e, na saída, a composição das componentes de frequência modificarão a forma do sinal no tempo. Este tipo de distorção é gravíssimo em sistemas que utilizam modulação de pulsos. Contudo, a correta equalização dos atrasos faz com que a informação contida no trem de pulsos seja recuperada.

**Exemplo 3.4:** Suponha um sistema de transmissão que apresente as características apresentadas na Figura 3.6. Determine a faixa de transmissão sem distorção.

Note que a resposta em amplitude do sistema é constante entre 10 rad/s e 30 rad/s e que a resposta em fase é linear entre 0 rad/s e 20 rad/s. Como deve-se obedecer os dois critérios para transmissão sem distorção, a faixa para transmissão sem distorção está compreendida entre 10 rad/s e 20 rad/s.



**Figura 3.6** – Exemplo de resposta para análise de distorção.

### 3.6. EQUALIZAÇÃO

A distorção linear não é um problema sem solução. Para evitar a distorção pode-se utilizar equalizadores, de forma que a função de transferência da combinação *sistema + equalizadores* resulte em um sistema composto que obedeça aos critérios de transmissão sem distorção, ou seja, a função de transferência resultante deve ser da forma  $H(\omega) = ke^{-j\omega t_0}$ , onde  $k$  e  $t_0$  são constantes.

Equalizadores são comumente inseridos em série a um sistema. Definindo  $H_{\text{sistema}}(\omega)$  e  $H_{\text{equalizador}}(\omega)$  como as funções de transferência do sistema e do equalizador em série, respectivamente. Deve-se ter:

$$H_{\text{sistema}}(\omega)H_{\text{equalizador}}(\omega) = ke^{-j\omega t_0}, \quad (3.97)$$

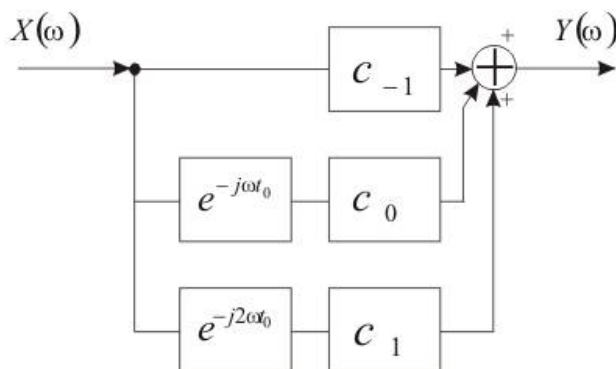
que equivale a:

$$H_{\text{equalizador}}(\omega) = \frac{ke^{-j\omega t_0}}{H_{\text{sistema}}(\omega)}. \quad (3.98)$$

A construção de um equalizador com função de transferência perfeita pode ser bastante complicada e até impossível. O procedimento adotado na prática é a construção de equalizadores que apresentem uma função de transferência aproximada com erro tolerável. Filtros transversais constituem uma forma bastante razoável para construção de equalizadores.

### 3.6.1. EQUALIZADORES UTILIZANDO FILTROS TRANSVERSAIS

Os filtros transversais são construídos a partir de linhas de atraso e atenuadores (ou amplificadores) ajustáveis. O princípio básico consiste em uma aproximação por série, onde o número de termos da série depende da quantidade de linhas de atraso. O diagrama de blocos ilustrativo de um filtro transversal com duas linhas de atraso está apresentado na Figura 3.7. Note que o bloco funcional com função de transferência  $e^{-j\omega t_0}$  descreve um atraso de  $t_0$ .  $c_{-1}$ ,  $c_0$  e  $c_1$  são constantes.



**Figura 3.7** – Diagrama de blocos de um filtro transversal.

Pode-se então escrever a saída do sistema em função da entrada da seguinte forma:

$$Y(\omega) = c_{-1}X(\omega) + c_0e^{-j\omega t_0}X(\omega) + c_1e^{-j2\omega t_0}X(\omega). \quad (3.99)$$



Pode-se então escrever a função de transferência do equalizador como sendo:

$$H_{\text{equalizador}}(\omega) = c_{-1} + c_0 e^{-j\omega t_0} + c_1 e^{-j2\omega t_0}. \quad (3.100)$$

Generalizando para o caso com  $2M+1$  linhas de atraso, têm-se a seguinte expressão:

$$H_{\text{equalizador}}(\omega) = e^{-jM\omega t_0} \sum_{m=-M}^M c_m e^{-jm\omega t_0}, \quad (3.101)$$

que corresponde a uma série exponencial de Fourier. Lembre-se que na expansão por série de Fourier quanto maior for o número de termos maior a precisão da expansão. Da mesma forma, quanto maior o número de linhas de atraso interligadas convenientemente, melhor a precisão do filtro transversal em relação ao equalizador requerido.

### 3.6.2. CANCELAMENTO DE ECO

Em alguns sistemas de comunicações, como sistemas via rádio, pode ocorrer eco. O eco também é conhecido como distorção por múltiplos caminhos (**MPI**, *Multipath Interference*). Os equalizadores construídos a partir de linhas de atrasos (seção anterior) podem ser bastante úteis para cancelar este tipo de interferência.

Considere o caso aonde o mesmo sinal chega em dois instantes de tempo distintos no receptor. A parcela do sinal que chega no instante  $t_1$  tem amplitude  $k_1$  e a parcela do sinal que chega no instante  $t_2$  tem amplitude  $k_2$ . Considerando  $t_2 > t_1$ , tem-se:

$$y(t) = k_1 x(t - t_1) + k_2 x(t - t_2). \quad (3.102)$$

Tomando a transformada de Fourier em ambos os lados da equação anterior, tem-se:

$$Y(\omega) = k_1 X(\omega) e^{-j\omega t_1} + k_2 X(\omega) e^{-j\omega t_2}. \quad (3.103)$$

Pode-se então escrever a função de transferência do sistema como sendo:

$$H_{\text{sistema}}(\omega) = k_1 e^{-j\omega t_1} + k_2 e^{-j\omega t_2}. \quad (3.104)$$

Rearrmando, tem-se:

$$H_{\text{sistema}}(\omega) = k_1 e^{-j\omega t_1} \left( 1 + \frac{k_2}{k_1} e^{-j\omega(t_2 - t_1)} \right). \quad (3.105)$$

Definindo  $k' = \frac{k_2}{k_1}$  e  $t_0' = t_2 - t_1$ , tem-se:

$$H_{\text{sistema}}(\omega) = k_1 e^{-j\omega t_1} (1 + k' e^{-j\omega t_0'}). \quad (3.106)$$

Utilizando (3.98), pode-se concluir que o equalizador deve ter função de transferência da seguinte forma:

$$H_{\text{equalizador}}(\omega) = \frac{k e^{-j\omega t_0}}{k_1 e^{-j\omega t_1} (1 + k' e^{-j\omega t_0'})}, \quad (3.107)$$

note que  $k$ ,  $k_1$ ,  $t_0$  e  $t_1$  são constantes. De acordo com o critério de transmissão sem distorção  $k$  e  $t_0$  são constantes que podem assumir qualquer valor, ou seja, pode-se fazer  $k = k_1$  e  $t_0 = t_1$ . Então,

$$H_{\text{equalizador}}(\omega) = \frac{1}{1 + k' e^{-j\omega t_0'}}. \quad (3.108)$$

Utilizando expansão binomial:

$$H_{\text{equalizador}}(\omega) = 1 - k' e^{-j\omega t_0'} + k'^2 e^{-j2\omega t_0'} - k'^3 e^{-j3\omega t_0'} + K \dots \quad (3.109)$$

Como normalmente a parcela que chega atrasada é muito menor,  $k_2 \leq k_1$ , então  $k'^2 \ll 1$ . Assumindo isto, tem-se:

$$H_{\text{equalizador}}(\omega) = 1 - k' e^{-j\omega t_0'} + k'^2 e^{-j2\omega t_0'}. \quad (3.110)$$

Tem-se uma função de transferência com a mesma forma de (3.100) com  $c_{-1} = 1$ ,  $c_0 = -k'$ ,  $c_1 = k'^2$  e  $t_0' = t_0$ . Note que o atraso da linha deve coincidir com o atraso relativo entre as parcelas do sinal.

É importante frisar que no caso de existir várias parcelas de potência chegando em instantes diferentes, pode-se resolver utilizando um equalizador construído com mais linhas de atraso.

### 3.7. FILTROS

Os filtros são comumente utilizados em sistemas de transmissão para separar componentes de informação ou corrigir distorções ocorridas durante a transmissão. Alguns dos elementos contaminadores são:

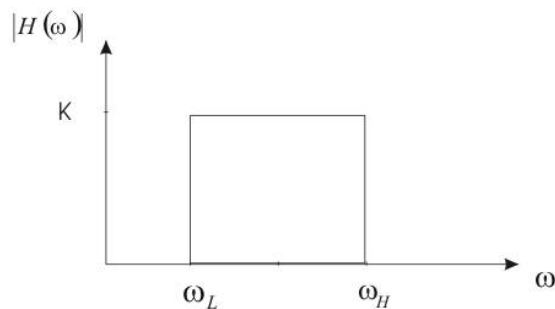
- Interferência;
- Ruído;
- Distorção.

#### 3.7.1. FILTROS IDEAIS

Por definição, um filtro ideal apresenta as características de transmissão sem distorção para uma ou mais faixas de frequência. Considere um filtro com função de transferência:

$$H(\omega) = \begin{cases} ke^{-j\omega T}, & \omega_L \leq \omega \leq \omega_H \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (3.111)$$

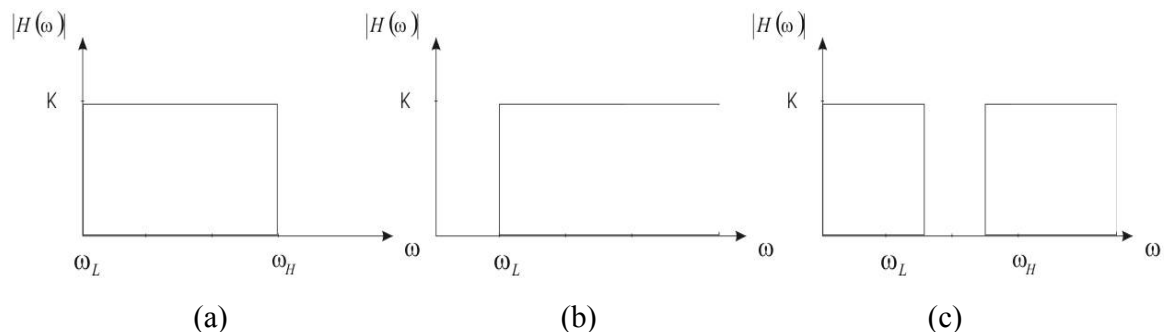
Onde  $\omega_L$  é a frequência de corte inferior e  $\omega_H$  é a frequência de corte superior. A banda do filtro é definida por  $B = \omega_H - \omega_L$ . Este filtro é conhecido como filtro passa-faixa (**BPF**, *Band Pass Filter*) (ver Fig. 3.8).



**Figura 3.8** – Módulo da função de transferência do filtro passa-faixa.

Outros tipos de filtros ideais comuns são:

- Filtro passa-baixa (**LPF**, *Low Pass Filter*)  $\rightarrow \omega_L = 0$ . A banda do filtro é definida por  $B = \omega_H$  (ver Fig. 3.9.a).
- Filtro passa-alta (**HPF**, *High Pass Filter*)  $\rightarrow$  Onde  $\omega_L > 0$  e finito,  $\omega_H$  e  $B$  são infinitos (ver Fig. 3.9.b).
- Filtro rejeita-faixa (**BRF**, *Band Reject Filter*)  $\rightarrow$  tem a função de transferência complementar ao BPF (ver Fig. 3.9.c).



**Figura 3.9** – Módulo da função de transferência dos filtros (a) passa-baixa, (b) passa-alta e (c) rejeita-faixa.

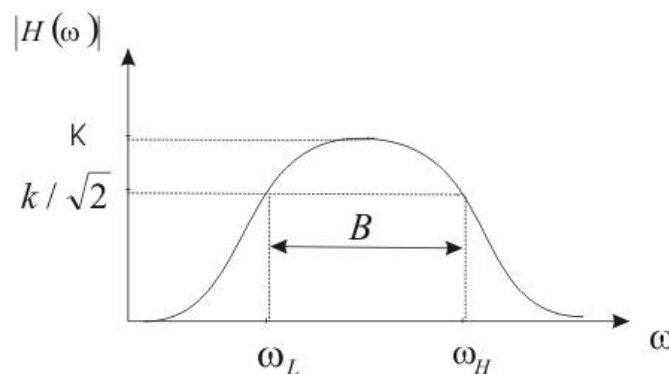
Considere agora um filtro passa-baixa que tem função de transferência  $H(\omega) = \begin{cases} ke^{-j\omega T}, & \omega_L \leq \omega \leq \omega_H \\ 0, & c.c. \end{cases}$ . Como sabido a resposta ao impulso  $h(t)$  é a transformada inversa de Fourier da função de transferência. Mas a transformada inversa de uma função porta é uma função sample.

Esta afirmativa mostra que estes tipos de filtros são não realizáveis fisicamente. Isto porque temos uma resposta ao impulso que apresenta resposta no tempo anterior à aplicação do impulso, implicando em não causalidade.

A consequência disto é que é impossível obtermos um sinal de banda limitada e tempo limitado ao mutuamente.

### 3.7.1. FILTROS REAIS

Filtros reais não apresentam transições de banda perfeitas. A transição entre a faixa de funcionamento do filtro e a faixa de corte do filtro não é abrupta. Existem vários critérios para definir a banda do filtro, entre elas o critério de 3 dB. Considere um ruído branco aplicado à entrada, a banda de 3 dB de filtro é determinada pela diferença entre a frequência superior e inferior de corte. As frequências superior e inferior de corte são determinadas pelas frequências cuja potência associada na saída do filtro apresenta potência igual à metade da potência de pico na saída.



**Figura 3.9** – Ilustração sobre a determinação da banda de 3 dB de um filtro real.

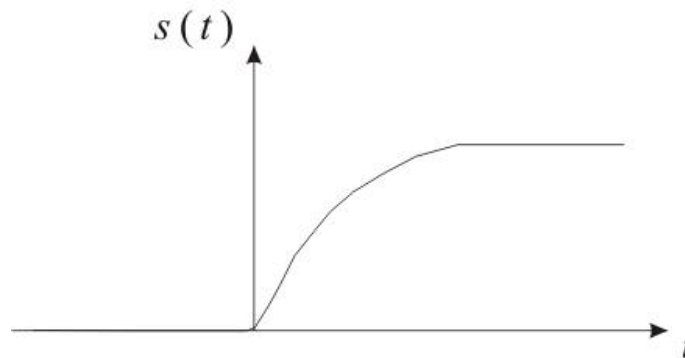
Os filtros reais mais simples são os filtros LPF de Butterworth de  $n$ -ésima ordem, cujo módulo da função de transferência é dado por:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{2\pi B}\right)^{2n}}} \quad (3.111)$$

onde  $n$  é a ordem do filtro e  $B$  é a banda em Hertz. Nestes filtros, as  $n$  primeiras derivadas avaliadas em  $\omega = 0$  tem valor igual a zero. Logo, pode-se concluir que quando maior a ordem do filtro, mais plano ele será em  $\omega = 0$ .

Estes filtros podem ser implementados em circuitos elétricos utilizando capacitores e indutores. Quanto maior for o número de capacitores e indutores conectados e dimensionados de forma conveniente, maior será a ordem do filtro.

Outro aspecto importante relacionado aos filtros reais é o tempo de subida. Considere como exemplo a aplicação de um degrau a um LPF, o filtro vai filtrar as altas frequências e o filtro apresentará um tempo de resposta, como mostrado na Fig. 3.10.



**Figura 3.10** – Ilustração sobre o tempo de subida de um sinal na saída de um LPF quando da aplicação de um degrau em sua entrada.

### 3.7. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3.7.1. Sabendo que a resposta ao degrau de um sistema é  $g(t) = \cos(\omega_c t) + j \operatorname{sen}(\omega_c t)$ , calcule a função de transferência do sistema.

Note que foi dada a resposta ao degrau do sistema:

$$g(t) = \cos(\omega_c t) + j \operatorname{sen}(\omega_c t). \quad (3.111)$$

Mas, a resposta ao impulso pode ser encontrada por:

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt}. \quad (3.112)$$

Substituindo,

$$h(t) = \frac{d[\cos(\omega_c t) + j \operatorname{sen}(\omega_c t)]}{dt} = \omega_c [-\operatorname{sen}(\omega_c t) + j \cos(\omega_c t)]. \quad (3.113)$$

A função de transferência é a transformada de Fourier da resposta ao impulso. Então,

$$H(\omega) = \mathfrak{T}[h(t)] = \mathfrak{T}\{\omega_c [-\operatorname{sen}(\omega_c t) + j \cos(\omega_c t)]\}. \quad (3.114)$$

Utilizando a propriedade da linearidade da transformada de Fourier, tem-se:

$$H(\omega) = -\omega_c \mathfrak{T}\{\operatorname{sen}(\omega_c t)\} + j \omega_c \mathfrak{T}\{\cos(\omega_c t)\}. \quad (3.115)$$

Utilizando os pares do seno e do cosseno, tem-se:

$$H(\omega) = -\omega_c \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_c) - \delta(\omega + \omega_c)] + j \pi \omega_c [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]. \quad (3.116)$$

$$H(\omega) = j\pi\omega_c [\delta(\omega - \omega_c) - \delta(\omega + \omega_c)] + j\pi\omega_c [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]. \quad (3.117)$$

Finalmente, a função de transferência é dada por:

$$H(\omega) = j2\pi\omega_c \delta(\omega - \omega_c). \quad (3.118)$$

3.7.2. Dado um sinal na entrada  $X(\omega) = \prod\left(\frac{\omega}{2B}\right)$  em um sistema caracterizado por pela resposta ao impulso  $h(t) = \delta(t) - \delta(t - T)$ . Calcule a saída  $Y(\omega)$ .

Dada a resposta ao impulso, pode-se calcula a função de transferência. Note que é a saída deve ser dada na frequência.

$$H(\omega) = \mathfrak{T}[h(t)] = \mathfrak{T}\{\delta(t) - \delta(t - T)\}, \quad (3.119)$$

Utilizando a propriedade da linearidade da transformada de Fourier, tem-se:

$$H(\omega) = \mathfrak{T}\{\delta(t)\} - \mathfrak{T}\{\delta(t - T)\}, \quad (3.120)$$

Utilizando o par que descreve a transformada de Fourier do *delta de Dirac* e a propriedade do deslocamento no tempo, tem-se:

$$H(\omega) = 1 - e^{-j\omega T}, \quad (3.121)$$

$$H(\omega) = e^{-\frac{j\omega T}{2}} \left( e^{\frac{j\omega T}{2}} - e^{-\frac{j\omega T}{2}} \right), \quad (3.122)$$

$$H(\omega) = e^{-\frac{j\omega T}{2}} 2j \operatorname{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right). \quad (3.123)$$



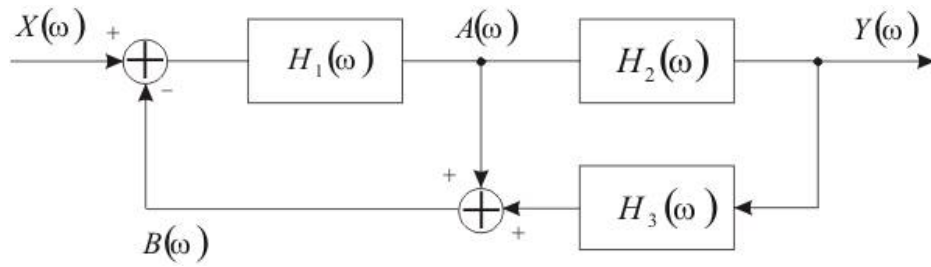
Mas,

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = X(\omega)e^{-\frac{j\omega T}{2}} 2j\text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right). \quad (3.124)$$

Então,

$$Y(\omega) = \prod \left(\frac{\omega}{2B}\right) e^{-\frac{j\omega T}{2}} 2j\text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right). \quad (3.125)$$

3.7.3. Sabendo que  $H_1(\omega) = j\omega$ ,  $H_2(\omega) = e^{-j\omega T}$  e  $H_3(\omega) = \frac{1}{j\omega}$ . Calcule a função de transferência do sistema abaixo utilizando redução de diagrama de blocos funcionais.



**Figura 3.8** – Diagrama de blocos do exercício resolvido 3.7.3.

Da figura 3.8, pode-se extrair as seguintes relações:

$$A(\omega) = H_1(\omega)[X(\omega) - B(\omega)]. \quad (3.126)$$

$$B(\omega) = A(\omega) + Y(\omega)H_3(\omega). \quad (3.127)$$

$$Y(\omega) = H_2(\omega)A(\omega). \quad (3.128)$$

Substituindo (3.127) em (3.126), tem-se:

$$A(\omega) = H_1(\omega)[X(\omega) - A(\omega) - Y(\omega)H_3(\omega)], \quad (3.129)$$

$$A(\omega) + H_1(\omega)A(\omega) = H_1(\omega)X(\omega) - H_1(\omega)H_3(\omega)Y(\omega), \quad (3.130)$$

$$A(\omega) = \frac{H_1(\omega)X(\omega) - H_1(\omega)H_3(\omega)Y(\omega)}{1 + H_1(\omega)}. \quad (3.131)$$

Substituindo (3.131) em (3.128), tem-se:

$$Y(\omega) = H_2(\omega) \frac{H_1(\omega)X(\omega) - H_1(\omega)H_3(\omega)Y(\omega)}{1 + H_1(\omega)}. \quad (3.132)$$

$$[1 + H_1(\omega)]Y(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega)X(\omega) - H_1(\omega)H_2(\omega)H_3(\omega)Y(\omega). \quad (3.133)$$

$$[1 + H_1(\omega)]Y(\omega) + H_1(\omega)H_2(\omega)H_3(\omega)Y(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega)X(\omega). \quad (3.134)$$

$$[1 + H_1(\omega) + H_1(\omega)H_2(\omega)H_3(\omega)]Y(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega)X(\omega). \quad (3.135)$$

Tomando a função de transferência do sistema completo, tem-se:

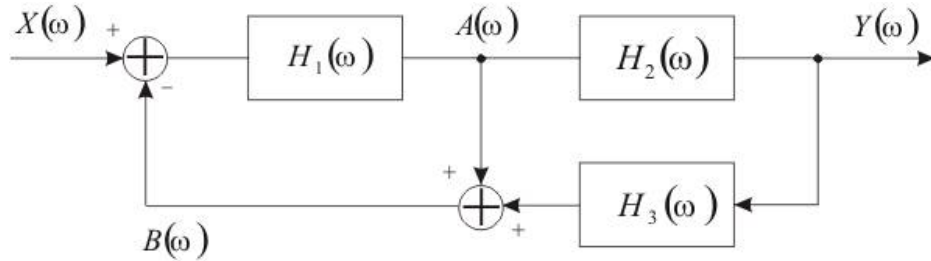
$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{H_1(\omega)H_2(\omega)}{[1 + H_1(\omega) + H_1(\omega)H_2(\omega)H_3(\omega)]}. \quad (3.136)$$

Mas  $H_1(\omega) = j\omega$ ,  $H_2(\omega) = e^{-j\omega T}$  e  $H_3(\omega) = \frac{1}{j\omega}$ .

Então,

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{j\omega e^{-j\omega T}}{\left[1 + j\omega + j\omega e^{-j\omega T} \frac{1}{j\omega}\right]} = \frac{j\omega e^{-j\omega T}}{[1 + j\omega + e^{-j\omega T}]}. \quad (3.137)$$

3.7.4. Sabendo que  $H_1(\omega)=1$ ,  $H_2(\omega)=e^{-j\omega T}$  e  $H_3(\omega)=2$ . Descreva um equalizador que torne a transmissão de um sinal por meio deste sistema sem distorção.



**Figura 3.9** – Diagrama de blocos do exercício resolvido 3.7.4.

Do exemplo 3.7.3 sabe-se que:

$$H_{\text{sistema}}(\omega) = \frac{H_1(\omega)H_2(\omega)}{[1 + H_1(\omega) + H_1(\omega)H_2(\omega)H_3(\omega)]}. \quad (3.138)$$

Mas  $H_1(\omega)=1$ ,  $H_2(\omega)=e^{-j\omega t_0}$  e  $H_3(\omega)=2$ . Então,

$$H_{\text{sistema}}(\omega) = \frac{e^{-j\omega t_0}}{[1 + 1 + 2e^{-j\omega t_0}]}, \quad (3.139)$$

$$H_{\text{sistema}}(\omega) = \frac{e^{-j\omega t_0}}{2[1 + e^{-j\omega t_0}]}. \quad (3.140)$$

Utilizando (3.98), pode-se concluir que o equalizador deve ter função de transferência da seguinte forma:

$$H_{\text{equalizador}}(\omega) = \frac{ke^{-j\omega t_0}}{\frac{e^{-j\omega t_0}}{2(1 + e^{-j\omega t_0})}}, \quad (3.141)$$

$$H_{\text{equalizador}}(\omega) = 2(1 + e^{-j\omega t_0}) \frac{ke^{-j\omega t_0}}{e^{-j\omega t_0}}, \quad (3.142)$$

$$H_{\text{equalizador}}(\omega) = 2k(1 + e^{-j\omega t_0}), \quad (3.143)$$

3.7.5. Considerando o exemplo anterior, defina um filtro transversal para utilização como equalizador.

Note que a função de transferência do equalizador é dada por

$$H_{\text{equalizador}}(\omega) = 2k(1 + e^{-j\omega t_0}), \quad (3.144)$$

Comparando com (3.100) que descreve um filtro transversal com 2 linhas de atraso. Tem-se:  $c_{-1} = 2k$ ,  $c_0 = 2k$ ,  $c_1 = 0$  e  $t_0$  é o atraso do bloco funcional.

### 3.8. LISTA DE EXERCÍCIOS

3.8.1. Dado um sinal na entrada  $X(\omega) = \prod\left(\frac{\omega}{2B}\right)$  em um sistema caracterizado por pela resposta ao impulso  $h(t) = e^{-2|t|}$ . Calcule a saída  $Y(\omega)$ .

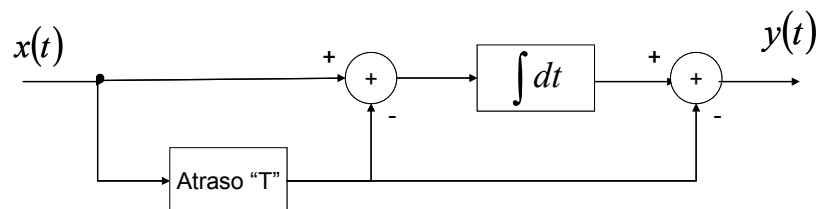
3.8.2. Sabendo que quando aplicado um sinal  $X(\omega) = \frac{(2\omega + 2)}{\text{sen}(2\omega + 2)}$  na entrada de um determinado sistema, a saída apresenta resposta temporal dada por  $y(t) = 2\delta(t)$ . Calcule a resposta ao degrau do sistema.

3.8.3. Sabendo que um sistema tem função de transferência dada por  $H(\omega) = \frac{4\text{sen}(2\omega - 2)}{(2\omega - 2)} + \frac{4\text{sen}(2\omega + 2)}{(2\omega + 2)}$ , calcule a resposta ao degrau do sistema.

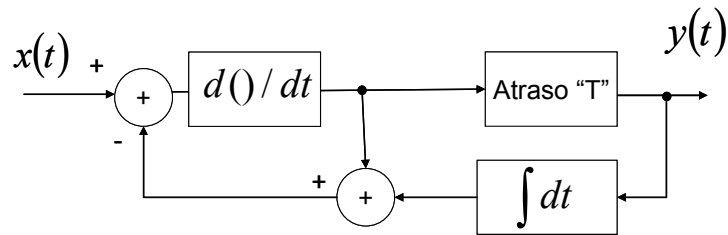
3.8.4. Sabendo que a resposta à rampa de um sistema é  $f(t) = -2\cos(\omega_c t) + j\text{sen}(\omega_c t)$ , calcule a função de transferência do sistema.

3.8.5. Dado um sinal  $x(t) = A\cos(2\pi) + \frac{A}{2}\cos(4\pi)$  passando pelo LPF (filtro passa-baixa) que tem função de transferência  $H(\omega) = \Lambda\left(\frac{\omega}{6\pi}\right)$ . Calcule o conteúdo espectral na saída.

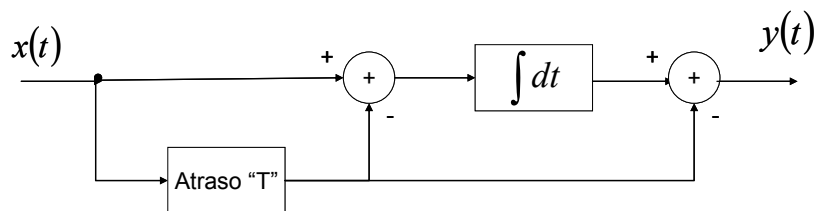
3.8.6. Calcule a resposta ao impulso do sistema abaixo.



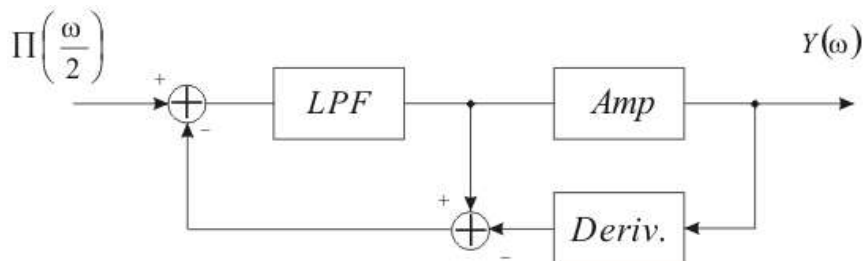
3.8.7. Calcule a resposta ao impulso do sistema abaixo.



3.8.8. Determine a função de transferência do equalizador que torna a transmissão sem distorção.



3.8.9. Sabendo que a frequência de corte do LPF é  $\omega_c = 0,5$  e o amplificador tem ganho de 2, determine a saída.



3.8.10. Sabendo que a resposta ao degrau de um sistema é  $g(t) = e^{-\omega_c t} \cos(\omega_c t)$ , determine a função de transferência do equalizador que torna a transmissão sem distorção.

3.8.11. Dada a função de transferência de um sistema  $H_{\text{sistema}}(\omega) = \frac{1}{e^{j\omega t_0} + 3e^{-j2\omega t_0} - 4e^{-j3\omega t_0}}$ , construa um equalizador com filtros transversais que torne a transmissão sem distorção.