

1. SINAIS E SISTEMAS

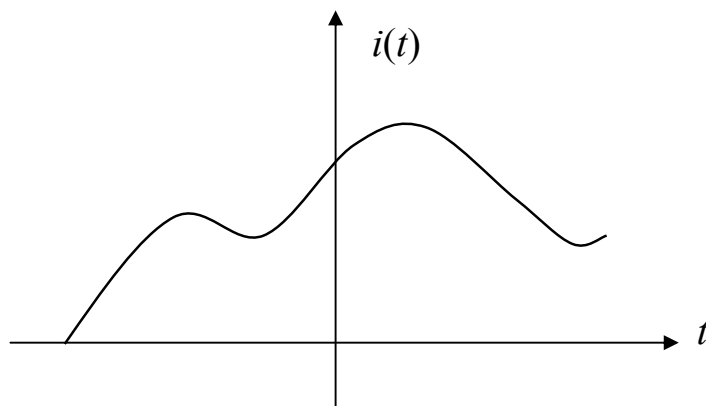
1.1. Definições

Sinal - função que fornece informação acerca do estado ou comportamento de um fenómeno físico.

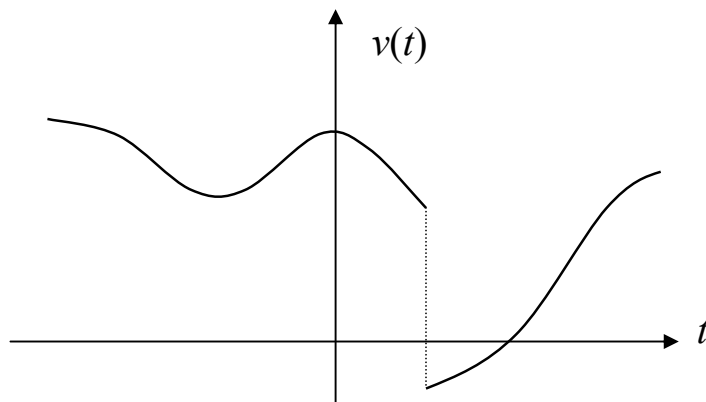
Sinal contínuo no tempo, $x(t)$ - quando a variável independente (tempo) é contínua.

Exemplos:

- corrente eléctrica num determinado ramo de um circuito, $i(t)$



- tensão eléctrica entre 2 pontos de uma determinada rede, $v(t)$

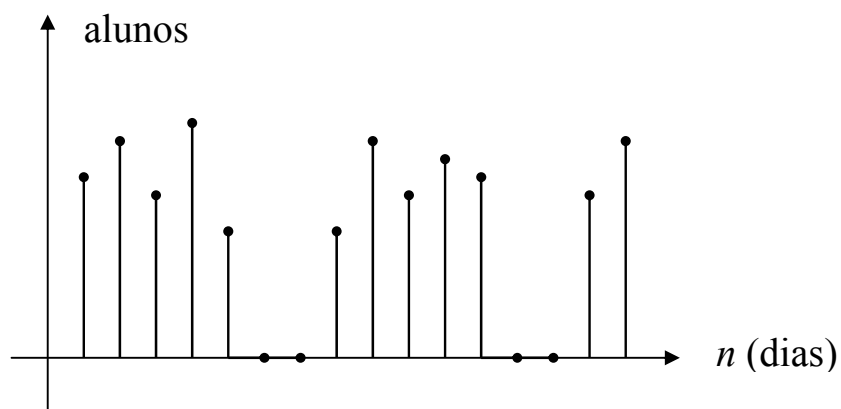


- energia absorvida por um sistema, ao longo do tempo, $w(t)$
- temperatura de um corpo ao longo do tempo, $T(t)$
- distância de um objecto a uma determinada referência espacial, $d(t)$
- quantidade de água armazenada num reservatório, $Q(t)$
- altura média da vegetação de uma zona geográfica restrita, $h(t)$
- etc ...

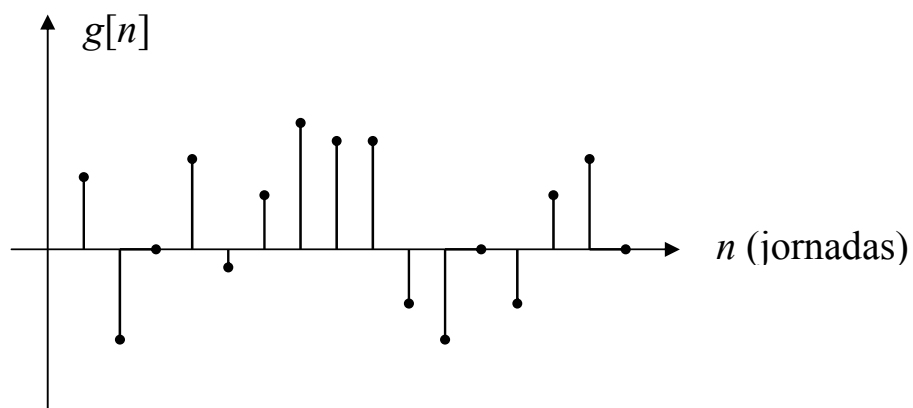
Sinal discreto no tempo ou sequência, $x[n]$ - quando a variável independente (tempo) é discreta.

Exemplos:

- total de alunos presentes no DEI, em cada dia, $x[n]$



- saldo de golos (marcados - sofridos) por jornada de uma equipa, $g[n]$



Reflexão de um sinal: $x[-n]$ é a reflexão de $x[n]$ em $n = 0$.

$x(-t)$ é a reflexão de $x(t)$ em $t = 0$.

Escala dos tempos: $x(t)$, $x(2t)$, $x(t/3)$ são sinais "idênticos", com escalas temporais diferentes.

Desvio temporal: $x[n]$ e $x[n-n_0]$ são sequências "idênticas" desfasadas no tempo. $x[n-n_0]$ é a versão atrasada
 $x[n+n_0]$ é a versão adiantada

Sinal par: $x(t)$ tem simetria par, se for igual à sua reflexão $x(-t)$.

Sinal impar: $x[n]$ tem simetria impar, se $x[n] = -x[-n]$.

Sinal periódico: quando se verifica $x[n] = x[n+N]$.

$$x(t) = x(t+T).$$

Período fundamental: é o menor dos N's.

é o menor dos T's.

Sinal determinístico: quando é completamente caracterizado por uma regra matemática (função) para todo o seu domínio.

Sinal aleatório: quando é descrito por uma forma probabilística (ex: ruído).

Energia de um sinal

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \qquad E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

Potência de um sinal

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt \qquad P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2$$

1.2. Sinais Básicos Contínuos no Tempo

▪ Sinal exponencial complexo

$$x(t) = C.e^{-at} \quad \text{com } C \text{ e } a \text{ complexos}$$

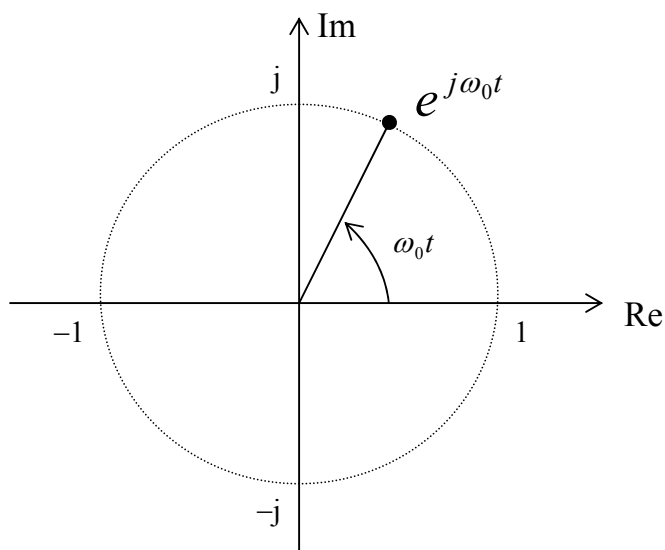
Se C e a são reais:

$x(t)$ é uma exponencial real

Se a for imaginário puro ($a=j\omega_0$):

$x(t)$ é uma exponencial complexa periódica

O período será $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$ pois $e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T_0)}$



$$\begin{aligned} e^{j\omega_0 t} &= \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t \\ &= 1 \Big|_{\omega_0 t} \end{aligned}$$

$$e^{j2\pi} = e^{jk2\pi} = 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Será importante relembrar as fórmulas de *Euler*:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

donde:

$$\cos \theta = \frac{(e^{j\theta} + e^{-j\theta})}{2} \quad \sin \theta = \frac{(e^{j\theta} - e^{-j\theta})}{2j}$$

▪ **Sinal sinusoidal**

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x(t) = \Re\{A \cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi)}\} = \Re\{A \cdot e^{j\varphi} e^{j\omega_0 t}\} = \Re\{C \cdot e^{j\omega_0 t}\}$$

ou, de outra forma

$$x(t) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 t}$$

$$x(t) \text{ tem pois o mesmo período de } e^{j\omega_0 t} : T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

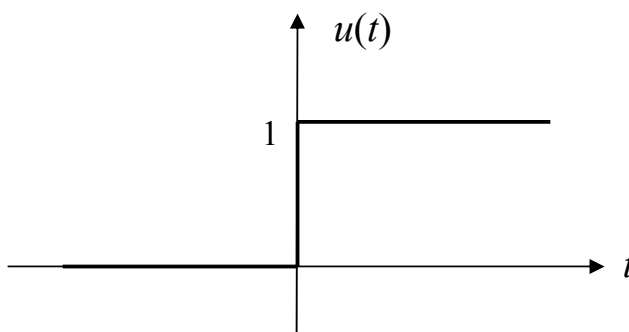
▪ **Sinais harmônicos exponenciais complexos**

$$\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Conjunto de todos os sinais exponenciais complexos periódicos que têm frequências múltiplas de uma determinada frequência de base ω_0 .

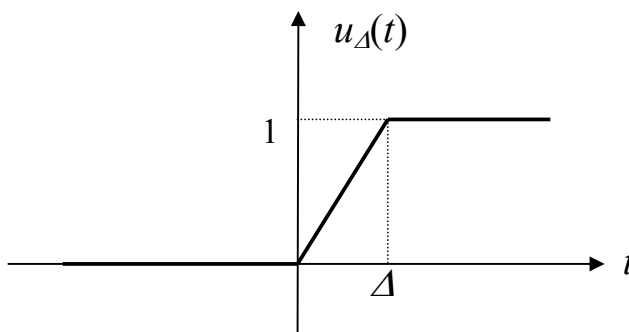
▪ Sinal "degrau unitário"

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

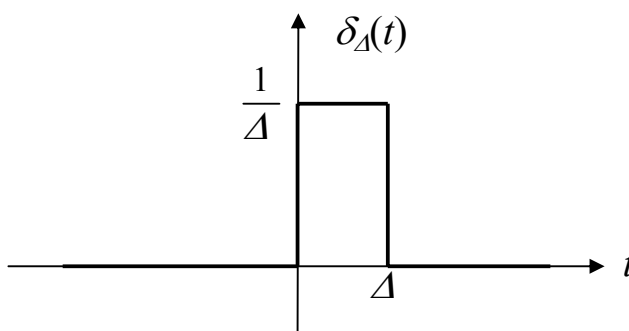


▪ Sinal "impulso unitário"

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

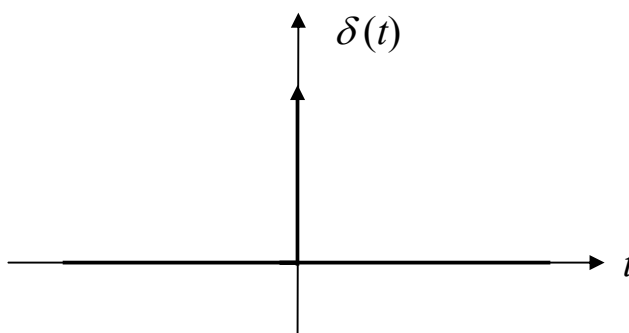


$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$



$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t)$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$



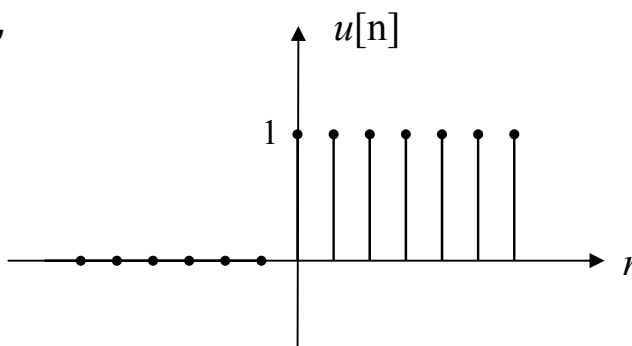
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (\text{área sob o impulso})$$

Nota: $x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t)$ $x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$

1.3. Sinais Básicos Discretos no Tempo

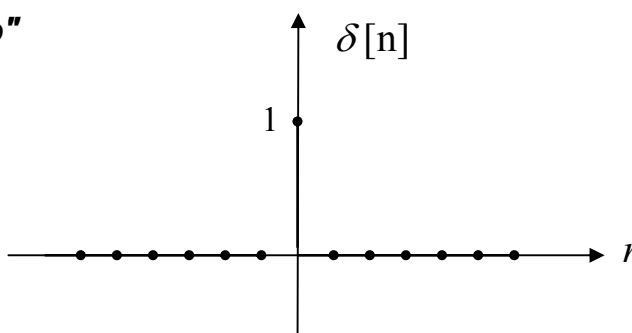
- Sequência "degrau unitário"

$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$



- Sequência "impulso unitário"

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$



$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

1ª derivada \rightarrow 1ª diferença

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$$

$$x[n] \cdot \delta[n] = x[0] \cdot \delta[n]$$

integral \rightarrow soma

$$x[n] \cdot \delta[n - n_0] = x[n_0] \cdot \delta[n - n_0]$$

- Sequência exponencial complexa

$$x[n] = C \cdot e^{a \cdot n} \quad \text{com } C \text{ e } a \text{ complexos}$$

Se C e a são reais: $x[n]$ é uma exponencial real

Se a for imaginário puro ($a = j\Omega_0$): $x[n] = C \cdot e^{j\Omega_0 n}$

▪ **Sequência sinusoidal**

$$x[n] = A \cdot \cos(\Omega_0 n + \varphi)$$

1.4. Periodicidade das sequências sinusoidais e exp. complexas

$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0(n+N)} \quad N = \text{período fundamental (nº inteiro positivo)}$$

$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0(n+N)} \Leftrightarrow e^{j\Omega_0 N} = 1 \Leftrightarrow \Omega_0 \cdot N = 2\pi \cdot m \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$N = \frac{2\pi}{\Omega_0} \cdot m = \frac{2\pi}{\Omega_0/m} \quad \frac{\Omega_0}{m} = \text{freq. fundamental}$$

Temos então: $\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$ com m e N inteiros

$\frac{\Omega_0}{2\pi}$ deve ser um número racional

Exemplos:

▪ $x_1[n] = 3 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{12} n\right)$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{12} \rightarrow \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{1}{12} \quad \text{racional} \Rightarrow \text{periódico}$$

$$N = \frac{2\pi}{\Omega_0} \cdot m = 12 \cdot m = 12 \quad (m = 1)$$

$$\blacksquare \quad x_2[n] = e^{j\frac{5\pi}{31}n}$$

$$\Omega_0 = \frac{5\pi}{31} \rightarrow \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{5}{62} \quad \text{racional} \Rightarrow \text{periódico}$$

$$N = \frac{2\pi}{\Omega_0} \cdot m = \frac{62}{5} \cdot m = 62 \quad (m = 5)$$

$$\blacksquare \quad x_3[n] = \cos\left(\frac{1}{6}n\right)$$

$$\Omega_0 = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{1}{12\pi} \quad \text{irracional} \Rightarrow \text{não periódico}$$

Em resumo:

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\Omega_0 n}$
Sempre periódico	Só nalguns casos
Freq. fundamental ω_0	Freq. fundamental Ω_0/m (às vezes)
Sinais distintos em ω_0	Sinais idênticos de Ω_0 sep. de 2π

$$e^{j(\Omega_0+2\pi)n} = e^{j\Omega_0 n} \quad !!!$$

Vejamos:

$$e^{j(\Omega_0+2\pi)n} = e^{j\Omega_0 n} \cdot e^{j2\pi n} = e^{j\Omega_0 n} \cdot 1 = e^{j\Omega_0 n}$$

A exponencial complexa de freq. $(\Omega_0 + 2\pi)$ é a mesma que a exponencial de freq. Ω_0 , situação bem distinta do caso contínuo!

Temos então que, no caso discreto, sinais com freq. Ω_0 são idênticos aos sinais com freq(s) $(\Omega_0 \pm 2\pi)$, $(\Omega_0 \pm 4\pi)$, $(\Omega_0 \pm 6\pi)$, etc.

Então, basta apenas considerar o intervalo de largura 2π no qual Ω_0 está contido. Na maior parte dos casos usam-se os intervalos básicos:

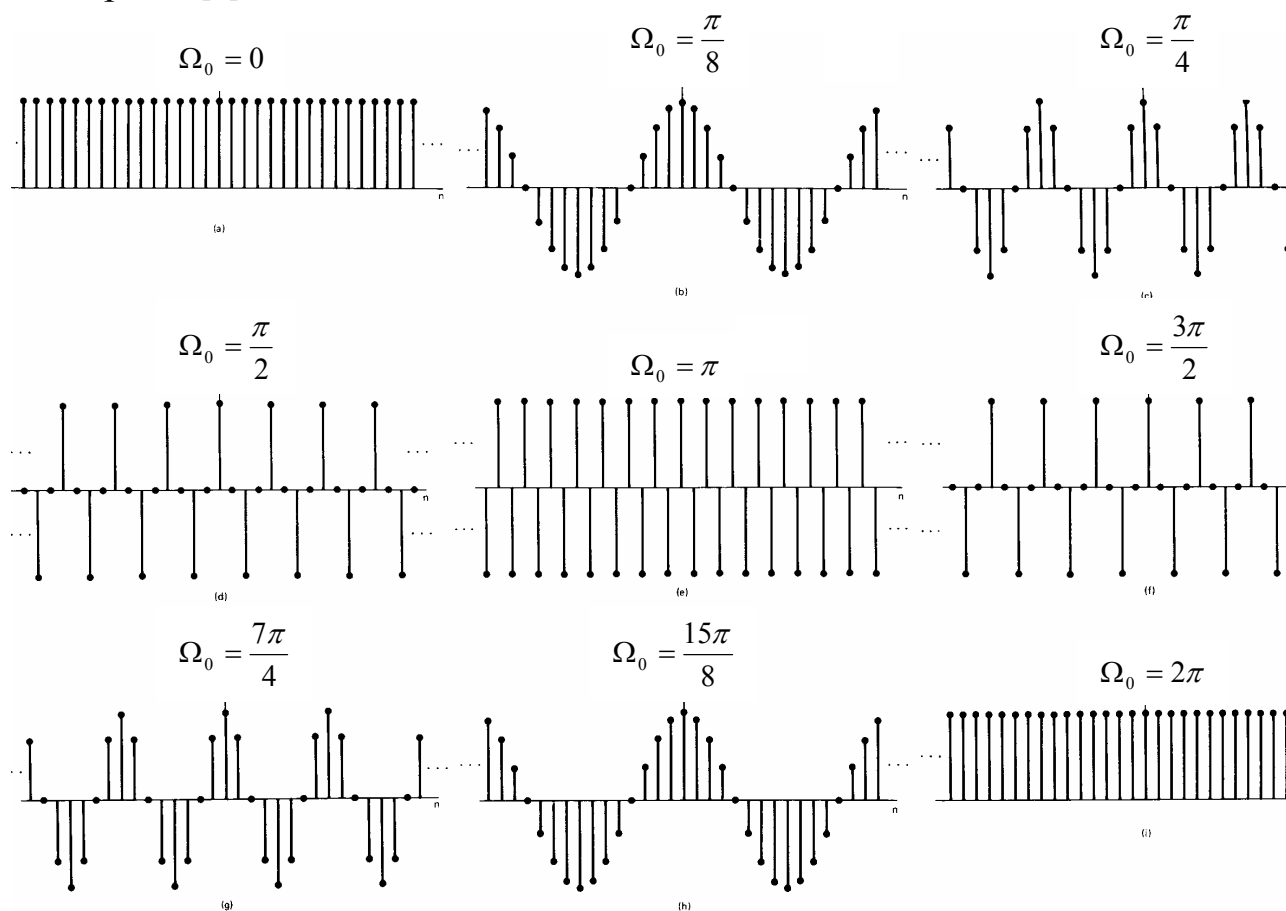
$$[0 \leq \Omega_0 < 2\pi] \quad \text{ou} \quad [-\pi \leq \Omega_0 < \pi]$$

O sinal não tem assim um aumento contínuo no índice de oscilações, à medida que se aumenta Ω_0 :

Ω_0 de 0 a $\pi \rightarrow$ índice de oscilações aumenta

Ω_0 de π a $2\pi \rightarrow$ índice de oscilações diminui

Exemplo: $x[n] = \cos(\Omega_0 n)$

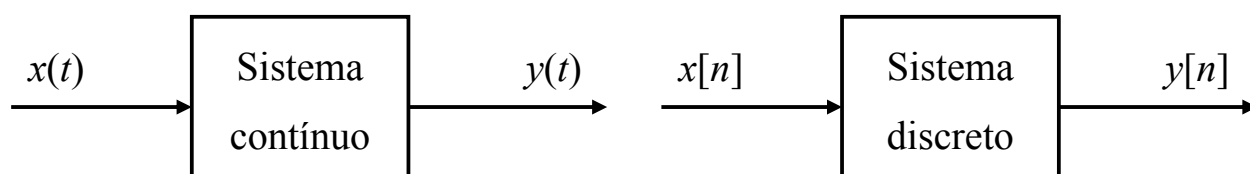


Sinais de baixa freq. \rightarrow valores de Ω_0 próximos de 0, 2π , ou qualquer múltiplo par de π .

Sinais de alta freq. \rightarrow valores de Ω_0 próximos de $-\pi$, π , ou qualquer múltiplo ímpar de π .

1.5. Sistemas: propriedades e classificação

Sistemas



x = entrada ou excitação

y = saída ou resposta

Sistema LIT (linear e invariante no tempo)

$$\text{Se } \begin{cases} x(t) = a.x_1(t) + b.x_2(t) \\ y_1(t) \text{ é a resposta a } x_1(t) \\ y_2(t) \text{ é a resposta a } x_2(t) \\ \text{O sistema é linear} \end{cases} \quad \text{Então } y(t) = a.y_1(t) + b.y_2(t)$$

Obedece simultaneamente aos princípios da homogeneidade e da sobreposição.

$$\text{Se } \begin{cases} y(t) \text{ é a resposta a } x(t) \\ \text{O sistema é invariante no tempo} \end{cases} \quad \text{Então } y(t - t_0) \text{ é a resposta a } x(t - t_0)$$

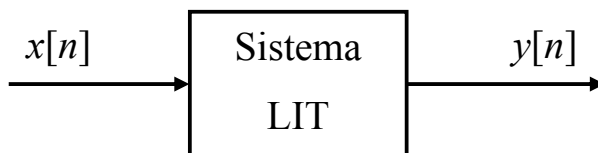
Resposta de um sistema LIT a uma entrada arbitrária

Verifica-se que qualquer sinal se pode escrever na forma:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau$$

e também

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot \delta[n - k]$$



$$y[n] = LIT\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot LIT\{\delta[n - k]\} \quad \text{pela linearidade do sistema}$$

Se a resposta impulsional (resposta a $\delta[n]$) for $h[n]$, a resposta a $\delta[n - k]$ será $h[n - k]$ em virtude da invariância no tempo.

Portanto:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[n - k]$$

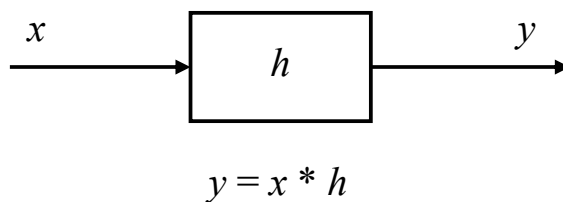
Soma de
convolução

De igual modo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

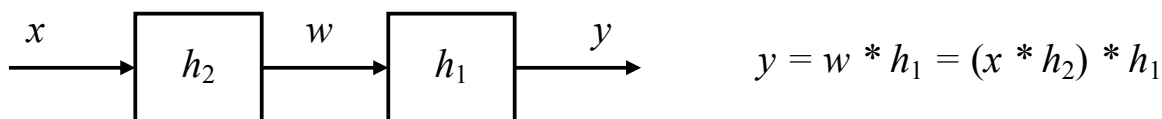
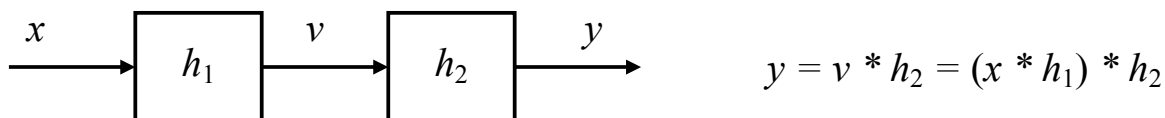
Integral de
convolução

O comportamento de um sistema LIT fica completamente caracterizado pela sua resposta ao impulso h

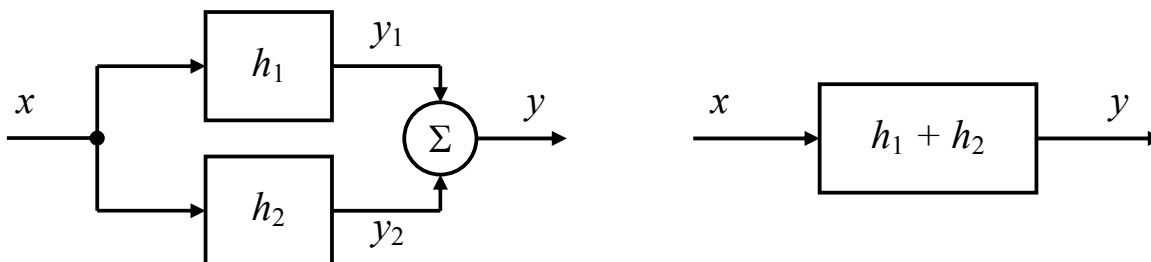


Propriedades da convolução: (soma e integral) $\left\{ \begin{array}{l} - \text{comutativa } x * h = h * x \\ - \text{associativa } x * (h_1 * h_2) = (x * h_1) * h_2 \\ - \text{distributiva } x * (h_1 + h_2) = x * h_1 + x * h_2 \end{array} \right.$

Exemplos:



Os sistemas são equivalentes devido às propriedades comutativa e associativa.



$$y = y_1 + y_2 = x * h_1 + x * h_2$$

$$y = x * (h_1 + h_2)$$

A propriedade distributiva torna os sistemas equivalentes.

Sistema sem memória

Se a saída for apenas função da entrada presente.

Exemplos (s/ memória):

$$y(t) = a.x(t)$$

$$y[n] = x[n]^2 - 3.x[n]$$

Exemplos (c/ memória):

$$y(t) = x(t - 2)$$

$$y[n] = x[n - 1] + x[n - 4]$$

LIT sem memória: $h[n] = k.\delta[n]$ $h(t) = k.\delta(t)$

Sistema causal (fisicamente realizável)

Se a saída for unicamente função das entradas presente e passada.

Exemplos:

$$y(t) = 2.x(t + 1) \rightarrow \text{não causal}$$

$$y[n] = x[n] \cdot x[n - 2] + 3 \rightarrow \text{causal}$$

LIT causal: $h[n] = 0, \quad n < 0$ $h(t) = 0, \quad t < 0$

Estabilidade

Um sistema é estável se obedecer à seguinte condição:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$