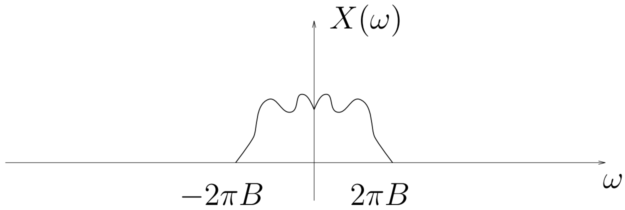
Amostragem

Um sinal, limitado em freqüência, pode ser representado com erro nulo por amostras igualmente espaçadas de intervalo $T < 1/2B$, sendo B a máxima freqüência da transformada de Fourier de $x(t)$.



Propriedade: As funções sampling são ortogonais.

$$\phi_k(t) = \mathrm{Sa}\left[\frac{\omega_0}{2}(t - kT)\right] \qquad , \ \text{com} \ \ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$I_{kl} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_k(t)\phi_l(t)dt \qquad , \qquad k \text{ e } l \text{ inteiros}$$

$$I_{kl} = \mathcal{F}\left[\phi_k(t)\phi_l(t)\right]\Big|_{\omega = 0} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\phi_k(t)] * \mathcal{F}[\phi_l(t)]\ \Big|_{\omega = 0}$$

Note que $\quad X(\omega) * Y(\omega)\ \Big|_{\omega = 0} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)Y(-\omega)d\omega$

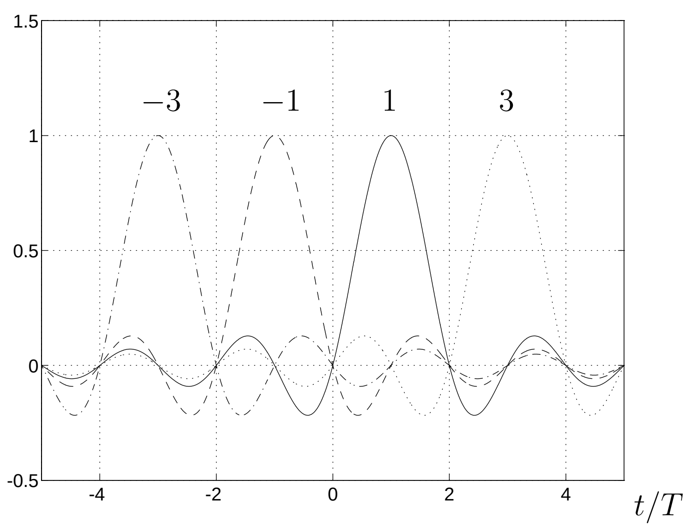
e que $\Phi_k(\omega) = \mathcal{F}\left[\phi_k(t)\right] = TG_{\omega_0}(\omega)\exp(-j\omega kT)$ pois $\mathcal{F}\left[\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_0}{2}t\right)\right] = \frac{2\pi}{\omega_0}\ G_{\omega_0}(\omega)$

Portanto,

$$I_{kl} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{TG_{\omega_0}(\omega)\exp(-j\omega kT)}_{\Phi_k(\omega)}\underbrace{TG_{\omega_0}(-\omega)\exp(j\omega lT)}_{\Phi_l(-\omega)}d\omega$$

$$I_{kl} = \frac{1}{2\pi}T^2 \int_{-\omega_0/2}^{+\omega_0/2} \exp[-j\omega(k-l)T]d\omega$$

$$I_{kl} = \begin{cases} T \ ; & k = l \quad \text{sinal de energia} \\ 0 \ ; & k \neq l \quad \text{integral de sinais trigonométricos} \end{cases}$$



Projeção de $x(t)$ na base formada pelas funções sampling

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \phi_k(t) \ ; \quad \phi_k(t) = \mathrm{Sa}\left[\frac{\omega_0}{2}(t - kT)\right] \qquad , \ \text{com} \ \ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\alpha_k = \frac{< x(t)\phi_k(t) >}{< \phi_k^2(t) >} = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\phi_k(t)dt$$

$$\alpha_k = \frac{1}{T}\frac{1}{2\pi} \ X(\omega) * \mathcal{F}\left[\phi_k(t)\right]\Big|_{\omega\,=\,0} = \frac{1}{T}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\beta)TG_{\omega_0}(-\beta)\exp(j\beta kT)d\beta$$

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0/2}^{+\omega_0/2} X(\beta)\exp(j\beta kT)d\beta$$

Trocando a variável de integração de β para ω

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0/2}^{+\omega_0/2} X(\omega)\exp(j\omega kT)d\omega$$

Note que se $X(\omega) = 0$ para $\mid \omega \mid > 2\pi B$ (limitado em freqüência) e supondo-se que o intervalo de amostras é tal que

$$2\pi B < \frac{\omega_0}{2} = \frac{\pi}{T} \qquad \Longrightarrow \qquad T < \frac{1}{2B}$$

então, os limites de integração podem ser estendidos para $-\infty$ e $+\infty$

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\exp(j\omega kT)d\omega \ = \ x(kT)$$

portanto

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\mathrm{Sa}\left[\frac{\omega_0}{2}(t - kT)\right]$$

Obs.: $\alpha_k = x(kT)$, ou seja, os coeficientes da expansão em série são os valores das amostras de $x(t)$ nos instantes kT, desde que $x(t)$ tenha transformada limitada em freqüência.

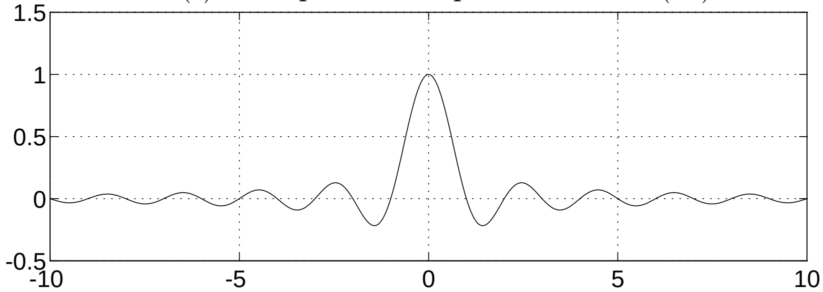
Se o intervalo de amostragem for $T = 1$, ou seja, $\omega_0 = 2\pi$.

As funções $\mathrm{Sa}\left[\pi(t - k)\right]$ formam uma base para qualquer sinal de faixa $B < \dfrac{1}{2}$.

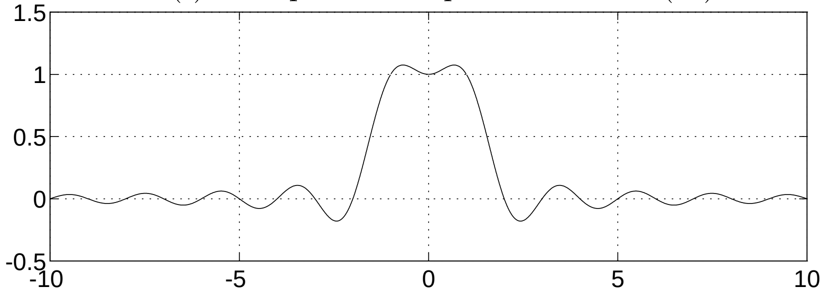
Exemplo: Considere $x(t) = 1$. Suas amostras são, obviamente, todas iguais a 1.

A figura abaixo mostra a aproximação de $x(t)$ por um número limitado de amostras.
Note que o intervalo de validade da aproximação aumenta (e que o erro dentro desse intervalo diminui) com o número de amostras.

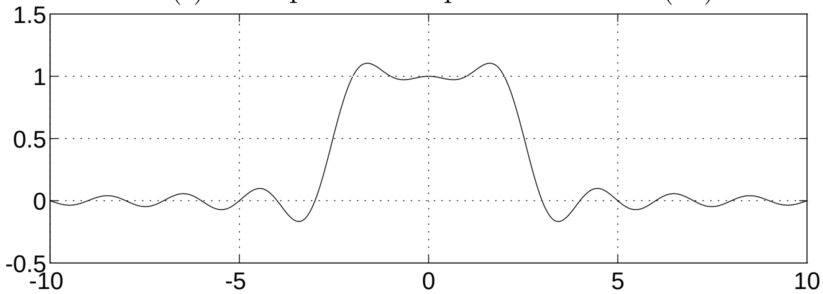
$x(t) = 1$ aproximada por 1 termo $\mathrm{Sa}(\pi t)$



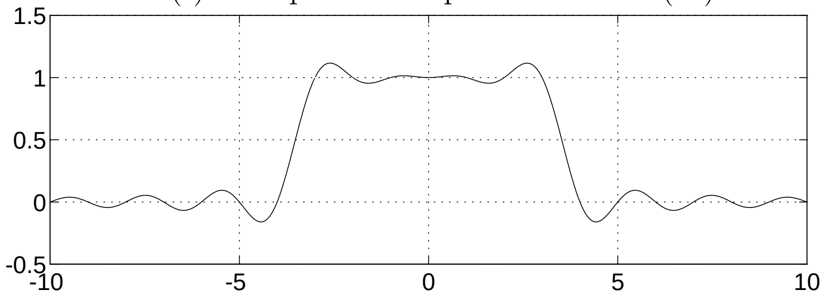
$x(t) = 1$ aproximada por 3 termos $\mathrm{Sa}(\pi t)$



$x(t) = 1$ aproximada por 5 termos $\mathrm{Sa}(\pi t)$

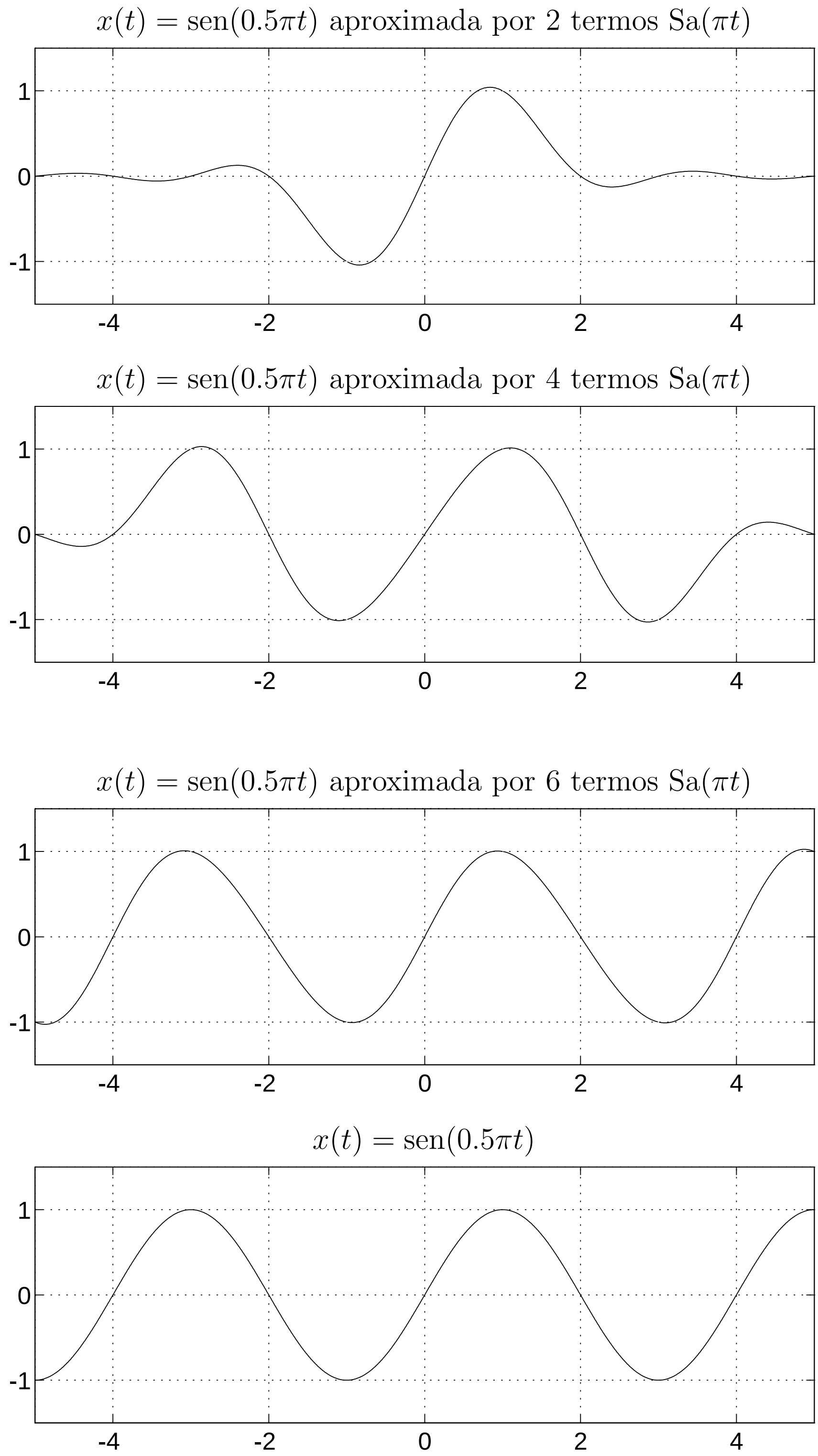


$x(t) = 1$ aproximada por 7 termos $\mathrm{Sa}(\pi t)$



Exemplo: Considere $x(t) = \text{sen}\,(0.5\pi t)$. Suas amostras ($T = 1$) são $\text{sen}\,(0.5k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

A figura abaixo mostra a aproximação de $x(t)$ por um número limitado de amostras.



Teorema da Amostragem: uma outra demonstração

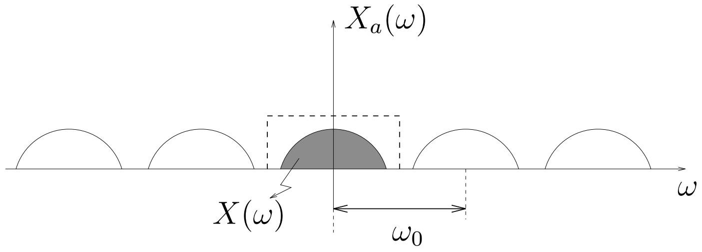
Considere $x_a(t)$ o resultado da amostragem com impulsos do sinal $x(t)$ limitado em freqüência.

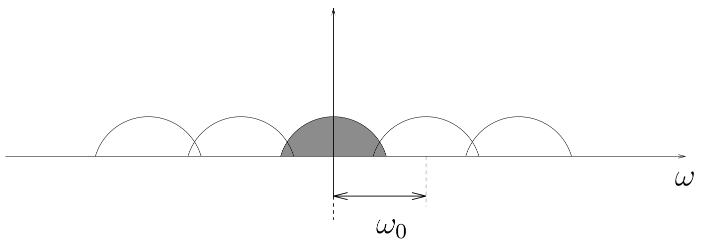
$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$

O objetivo é demonstrar que $x(t)$ pode ser recuperado a partir do sinal $x_a(t)$.

$$x_a(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

$$X_a(\omega) = \mathcal{F}[x_a(t)] = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)\right] = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega - k\omega_0)$$





Note que se $\omega_0/2$ for menor do que a máxima freqüência angular $2\pi B$ da Transformada de Fourier do sinal $x(t)$, há superposição dos espectros em $X_a(\omega)$ (sinal amostrado).

Para $X(\omega)$ limitado em freqüência e ω_0 adequado, o sinal $x(t)$ pode ser recuperado através da filtragem de $X_a(\omega)$.

$$X(\omega) = X_a(\omega) TG_{\omega_0}(\omega) \; ; \quad TG_{\omega_0}(\omega) \text{ é um filtro passa-baixas ideal.}$$

Portanto,

$$x(t) = x_a(t) * \mathcal{F}^{-1}\left[TG_{\omega_0}(\omega)\right] = \left[x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)\right] * \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_0}{2} t\right)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \mathrm{Sa}\left[\frac{\omega_0}{2}(t - kT)\right]$$

Calculando $x(t)$ nos pontos $t = mT$, m inteiro, tem-se

$$x(mT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) \mathrm{Sa}\left[\frac{\omega_0}{2}(m - k)T\right] \; ; \quad \mathrm{Sa}\left[\frac{\omega_0}{2}(m - k)T\right] \; = \; \begin{cases} 0 & , \quad m \neq k \\ 1 & , \quad m = k \end{cases}$$

portanto a contribuição das demais amostras no instante $t = mT$ é sempre nula.

Exemplo

a) Esboce o sinal $x_a(t)$ para um sinal $x(t)$ arbitrário

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta} \, G_\Delta(t - kT)x(t) \ ; \quad 0 < \Delta < T$$

$G_\Delta(t)$ é a função gate de base Δ e altura 1.

b) Considere que $x(t)$ é um sinal limitado em freqüência cuja máxima freqüência é B Hertz. Para $T < (2B)^{-1}$, determine a expressão da transformada de Fourier do filtro que recupera o sinal $x(t)$ sem distorção a partir de $x_a(t)$

$$x_a(t) = x(t) \sum_k \frac{1}{\Delta} G_\Delta(t) * \delta(t - kT)$$

$$X_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \mathcal{F}\Big[\sum_k \frac{1}{\Delta} G_\Delta(t) * \delta(t - kT) \Big]$$

$$\mathcal{F}\Big[\sum_k \frac{1}{\Delta} G_\Delta(t) * \delta(t - kT) \Big] = \mathcal{F}\Big[\frac{1}{\Delta} G_\Delta(t) * \sum_k \delta(t - kT) \Big] =$$

$$= \mathrm{Sa}(\frac{\Delta}{2}\omega) \ \omega_0 \sum_k \delta(\omega - k\omega_0) = \omega_0 \sum_k \mathrm{Sa}(\frac{\Delta}{2} k\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$X_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \omega_0 \sum_k \mathrm{Sa}(\frac{\Delta}{2} k\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{1}{T} X(\omega) + \frac{1}{T} \sum_{k \neq 0} \mathrm{Sa}(\frac{\Delta}{2} k\omega_0) X(\omega - k\omega_0)$$

$$\Longrightarrow X(\omega) = T G_{\omega_0}(\omega) X_a(\omega)$$

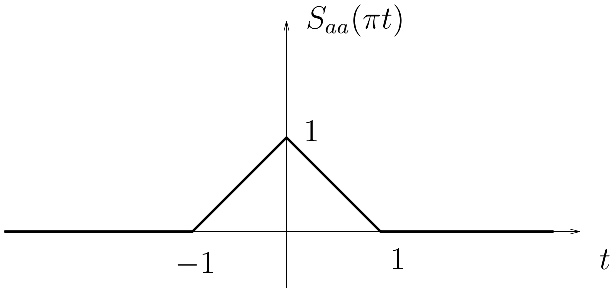
Teorema da Amostragem: Interpolação linear

Considere a função $x(t) = \text{sen}(t) + \text{sen}(\pi t) + \text{sen}(2\pi t)$.

Sua máxima freqüência B é dada por $\quad 2\pi B = 2\pi \implies B = 1$

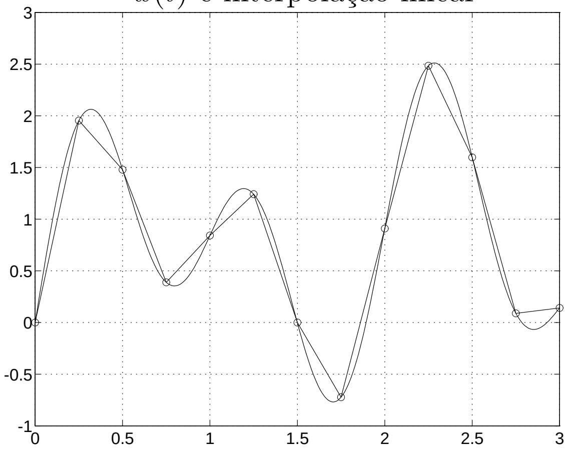
Pelo teorema da amostragem $\quad T < 1/2B \implies T < 0.5 \quad$ e portanto o intervalo entre amostras deve ser menor que 0.5 para que o sinal possa ser recuperado com boa precisão.

A recuperação do sinal pode ser interpretada como uma "interpolação" a partir dos valores das amostras.
A função "sampling aproximada" Saa(πt) produz uma interpolação linear.



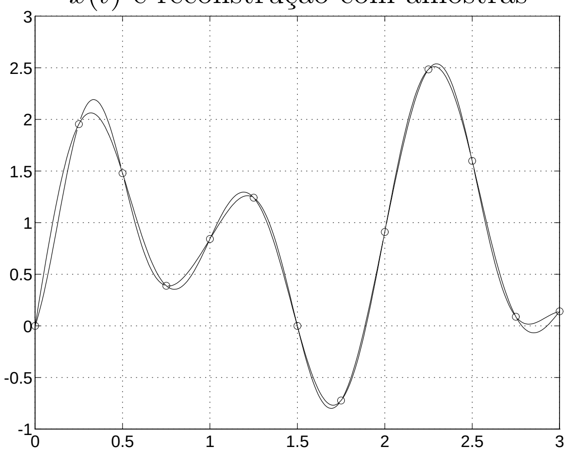
As figuras a seguir ilustram a interpolação linear e a definida pelo teorema da Amostragem. Apenas as amostras dentro do intervalo foram consideradas.

$x(t)$ e interpolação linear



$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\text{Saa}\left[\frac{\omega_0}{2}(t-kT)\right]$$

$x(t)$ e reconstrução com amostras



$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\text{Sa}\left[\frac{\omega_0}{2}(t-kT)\right]$$