Capítulo I - ANÁLISE DE FOURIER

A análise de Fourier considera a representação de sinais como uma superposição de senóides complexas, ponderando-as para descrever sinais e representar sistemas. Esta técnica constitui uma poderosa ferramenta para análise, síntese e projeto de sistemas de comunicações e transmissão de dados. Áreas correlatas, como processamento de imagens, também são beneficiadas por esta ferramenta matemática.

Na seção 1.1 é apresentado um breve histórico sobre J. Fourier. Este tipo de análise foi intitulada como análise de Fourier devido às suas contribuições científicas no estudo da representação de funções a partir de funções base senoidais.

1.1. BREVE HISTÓRICO SOBRE JOSEPH FOURIER

Joseph Fourier nasceu no dia 21 de março de 1768, em Auxerre na França, e morreu no dia 16 de maio 1830, em Paris na França. Fourier foi o nono filho entre doze do segundo casamento de seu pai. A mãe morreu quando Joseph tinha nove anos e seu pai morreu no ano seguinte. Seus primeiros ensinamentos ocorreram na escola de Pallais. Estudou Latim e francês. Prosseguiu em 1780 na escola real militar de Auxerre, onde a matemática se tornou seu verdadeiro interesse. Com 14 anos completou o estudo dos 6 volumes do curso de matemática de Bézout.

Figura 1.1 – *Retrato de Fourier.*

Em 1787, Fourier decidiu seguir o sacerdócio e entrou para o mosteiro de St Benoit-sur-Loire. Contudo, seu interesse em matemática continuou através de correspondência com o professor de matemática de Auxerre, C L Bonard.

Fourier não seguiu o sacerdócio e saiu do mosteiro em 1789. Em 1790, tornou-se professor da escola real militar de Auxerre, onde estudou. Em 1793, Fourier entrou para o comitê da revolução francesa. Em 1794, foi preso devido a um incidente em Orléans. Apesar do medo de ser mandado para a guilhotina, ocorreram mudanças no cenário político e ele foi libertado.

Ainda em 1794, Fourier conseguiu entrar para a escola normal de Paris, onde teve aulas com Lagrange, Laplace e Monge.

Fourier começou a ensinar no colégio da França e começou a pesquisar em matemática. Foi indicado para uma posição na escola politécnica, dirigida por Carnot e Monge. Em 1797, ele sucedeu Lagrange na cadeira de análise e mecânica.

Em 1798, Fourier entrou para o exército de Napoleão para a invasão do Egito como consultor científico. No Cairo, Fourier ajudou a fundar o instituto do Cairo e foi eleito secretário do instituto, posição que manteve durante toda a ocupação do Egito.

Em 1801, retornou para Paris e retomou seu posto como Professor de análise da escola politécnica. Entretanto, Napoleão o indicou para uma posição administrativa em Grenoble.

Entre 1804 e 1807, Fourier desenvolveu seus trabalhos mais importantes na teoria do calor. O trabalho *On the Propagation of Heat in Solid Bodies* foi apresentado em 1807 para um comitê formado por Lagrange, Laplace, Monge e Lacroix. Atualmente, este trabalho é bastante respeitado, apesar de ter causado controvérsias na época.

Existiram duas razões para esta controvérsia. A primeira objeção, feita por Lagrange e Laplace, em 1808, estava no entendimento da expansão de funções em séries trigonométricas (chamadas de séries de Fourier). A segunda foi feita por Biot sobre a derivação das equações de transferência de calor proposta por Fourier. Biot reclamou a autoria do trabalho, contudo o trabalho de Biot estava incorreto. Em 1811, Fourier ganhou um prêmio do instituto por seu trabalho sobre resfriamento de sólidos infinitos e radiação de calor.

Com a queda de Napoleão (1817), Fourier voltou para Paris e foi eleito para a academia de ciências. Em 1822, Fourier tornou-se secretário da academia e conseguiu finalmente publicar o ensaio completo *Théorie analytique de la chaleur*. Durante os últimos anos em Paris, Fourier se dedicou à pesquisa nos campos de matemática pura e aplicada.

1.2. REVISÃO DE CONCEITOS BÁSICOS

Para o perfeito entendimento da matemática envolvida nas séries e transformada de Fourier é importante relembrar alguns conceitos básicos. Alguns destes conceitos são apresentados a seguir.

1.2.1. FUNÇÕES PERIÓDICAS

Funções periódicas são funções regulares que apresentam um padrão de repetição a cada intervalo de tempo bem definido. A propriedade que define matematicamente um função periódica é $f(x) = f(x + nT)$, onde n é um número inteiro e T é o intervalo de repetição. Na figura 2, está apresentado um exemplo de função periódica com período 2π .

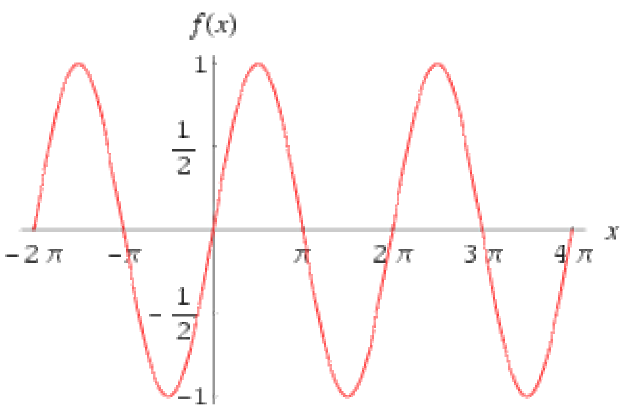


Figura 1.2 – *Exemplo de função periódica.*

1.2.2. FUNÇÕES ORTONORMAIS E CONJUNTO COMPLETO

Funções ortonormais são funções que são ao mesmo tempo ortogonais e normalizadas. Duas funções $f(t)$ e $g(t)$ são ortogonais em um intervalo $[a,b]$ se o produto interno entre as duas funções $\langle f(t)|g(t)\rangle$ for zero. O produto interno é definido como:

$$\langle f(t)|g(t)\rangle \equiv \int_a^b f(t)g(t)w(t)dx = 0 \qquad (1.1)$$

onde $w(t)$ é uma função peso.

Se além disso as funções estiverem normalizadas, ou seja, $\langle f(t)|f(t)\rangle \equiv \int_a^b [f(t)]^2 w(t)dx = 1$ e $\langle g(t)|g(t)\rangle \equiv \int_a^b [g(t)]^2 w(t)dx = 1$. Então as funções são ditas ortonormais.

Sturm e Lioville [*ref.*] definiram que podemos construir um conjunto de funções completo, com o qual pode-se decompor qualquer função periódica em função das funções base deste conjunto. Um conjunto de funções é dito completo se todas as funções forem ortogonais e se existirem coeficiente a_n de forma que:

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b \left[f(t) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x) \right]^2 w(t)dx = 0 \qquad (1.2)$$

Existem alguns conjuntos de funções ortogonais completos, como:

- Bi-ortogonal (*senos* e *cosenos*) → Compõem a conhecida Série de Fourier. As funções base são $sen(nx)$ e $\cos(nx)$, no intervalo $[-\pi,\pi]$.
- Polinômios de Legendre → Compõem a conhecida Série de Fourier- Legendre. As funções base são $P_n(x)$, no intervalo $[-1,1]$.
- Funções de primeira espécie de Bessel $J_0(x)$ → Compõem a conhecida Série de Fourier-Bessel. As funções base são as funções $\sqrt{x}J_0(\alpha_n x)$, no intervalo $[0,1]$.

1.3. SÉRIES DE FOURIER

As séries de Fourier são usadas para realizar a expansão de uma função periódica em termos de uma soma infinita de *senos* e *cosenos*. Também é chamada de análise harmônica. A condição necessária para expansão é que as funções base sejam ortogonais, para isto as propriedades abaixo devem ser verificadas.

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(mx)sen(nx)dx = \pi\delta_{n,m}, \tag{1.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \pi\delta_{n,m}, \tag{1.4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(mx)\cos(nx)dx = 0, \tag{1.5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(mx)dx = 0, \tag{1.6}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)dx = 0, \tag{1.7}$$

onde $m,n \neq 0$ e $\delta_{m,n}$ é o delta de Kronecker. O delta de kronecker é definido da seguinte forma:

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases}. \tag{1.8}$$

O objetivo é descrever uma função periódica em função de funções base *senos* e *cosenos*, como mostrado na fórmula abaixo.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(nx), \tag{1.9}$$

onde a_0, a_n e b_n são os coeficientes de decomposição nas bases.

Podemos tomar (1.9) para cálculo dos coeficientes. Considere integrá-la no intervalo $[-\pi,\pi]$. Tem-se:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(nx)\right]dx, \tag{1.10}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}\right]dx + \int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)\right]dx + \int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(nx)\right]dx, \tag{1.11}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} b_n sen(nx)dx, \tag{1.12}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)dx. \tag{1.13}$$

Mas $\int_{-\pi}^{\pi} sen(mx)dx = 0$ e $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)dx = 0$, então:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}2\pi, \tag{1.14}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{1.15}$$

Considere agora tomar (1.9), multiplicar por $\cos(mx)$ e integrá-la no intervalo $[-\pi,\pi]$. Tem-se:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)\cos(mx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(nx)\cos(mx)\right]dx, \tag{1.16}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0\cos(mx)}{2}\right]dx + \int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(mx)\cos(nx)\right]dx + \int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(mx) sen(nx)\right]dx \tag{1.17}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(mx)\cos(nx)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} b_n \cos(mx) sen(nx)dx, \tag{1.18}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)sen(nx)dx . \tag{1.19}$$

Mas $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)dx = 0$ e $\int_{-\pi}^{\pi} sen(mx)\cos(nx)dx = 0$. Então:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)dx , \tag{1.20}$$

Mas $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)dx = \pi\delta_{n,m}$. Então:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi\delta_{n,m} , \tag{1.21}$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx . \tag{1.22}$$

Considere agora tomar (1.9), multiplicar por $sen(mx)$ e integrá-la no intervalo $[-\pi,\pi]$. Tem-se:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)sen(mx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(mx)sen(nx)\right]dx , \tag{1.23}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0 sen(mx)}{2}\right]dx + \int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(mx)\cos(nx)\right]dx + \int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(mx)sen(nx)\right]dx \tag{1.24}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(mx)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} sen(mx)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} a_n sen(mx)\cos(nx)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} b_n sen(mx)sen(nx)dx , \tag{1.25}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(mx)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} sen(mx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} sen(mx)\cos(nx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} sen(mx)sen(nx)dx . \tag{1.26}$$

Mas $\int_{-\pi}^{\pi} sen(mx)dx = 0$ e $\int_{-\pi}^{\pi} sen(mx)\cos(nx)dx = 0$. Então:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(mx)dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} sen(mx)sen(nx)dx, \tag{1.27}$$

Mas $\int_{-\pi}^{\pi} sen(mx)sen(nx)dx = \pi\delta_{n,m}$. Então:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(mx)dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi\delta_{n,m}, \tag{1.28}$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(mx)dx. \tag{1.29}$$

Para que seja possível realizar a expansão para uma função periódica com período qualquer $2L$, basta realizar uma mudança de variáveis. Com $x = \frac{t\pi}{L}$ e $dx = \frac{\pi}{L}dt$, tem-se:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right), \tag{1.30}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)dt, \tag{1.31}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt, \tag{1.32}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt. \tag{1.33}$$

Exemplo 1.1: Considere a função dente de serra periódica apresentada na figura 1.3. Calcule a série de Fourier desta função.

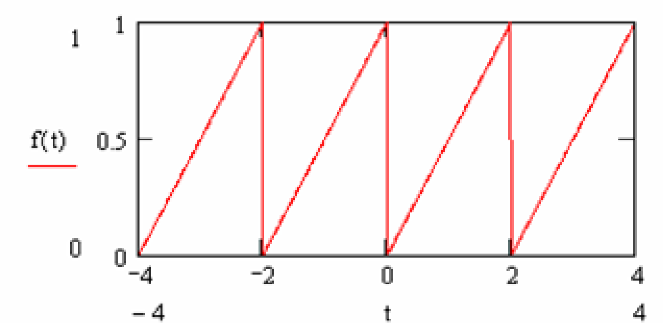


Figura 1.3 – *Exemplo de função dente de serra.*

Esta função é um onda dente de serra com período *2L*, amplitude mínima *0* e amplitude máxima *1*. Tomando o intervalo *[0,2L]* a função pode ser representada por:

$$f(t) = \frac{t}{2L}. \tag{1.34}$$

Calculando a_0:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^{2L} \frac{t}{2L} dt = \left[\frac{t^2}{4L^2}\right]_0^{2L} = 1, \tag{1.35}$$

Calculando a_n:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} \frac{t}{2L} \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt, \tag{1.36}$$

$$a_n = \frac{1}{2L^2}\int_0^{2L} t \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt. \tag{1.37}$$

Integrando por partes com $u = t$, $du = dt$, $dv = \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt$ e $v = \frac{sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)}{\frac{n\pi}{L}}$. tem-se:

$$a_n = \frac{1}{2L^2}\left\{\left[t\frac{sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)}{\frac{n\pi}{L}}\right]_0^{2L} - \int_0^{2L}\frac{sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)}{\frac{n\pi}{L}}dt\right\}, \quad (1.38)$$

$$a_n = \frac{1}{2n\pi L}\left\{tsen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\bigg|_0^{2L} - \int_0^{2L} sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt\right\}, \quad (1.39)$$

$$a_n = \frac{1}{2n\pi L}\left\{\left[2Lsen\left(\frac{2Ln\pi}{L}\right) - 0sen\left(\frac{n\pi 0}{L}\right)\right] + \frac{\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)}{\frac{n\pi}{L}}\Bigg|_0^{2L}\right\}, \quad (1.40)$$

$$a_n = \frac{1}{2n\pi L}\left\{\left[2Lsen(2n\pi)\right] + \frac{\cos(2n\pi) - \cos(0)}{\frac{n\pi}{L}}\right\}. \quad (1.41)$$

Mas $sen(2n\pi) = 0$, $\cos(2n\pi) = 1$ e $\cos(0) = 1$. Então:

$$a_n = \frac{1}{2n\pi L}\left\{0 + \frac{1-1}{\frac{n\pi}{L}}\right\} = 0. \quad (1.42)$$

Calculando b_n:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L}\frac{t}{2L}sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt, \quad (1.43)$$

$$b_n = \frac{1}{2L^2}\int_0^{2L} t.sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt. \quad (1.44)$$

Integrando por partes com $u = t$, $du = dt$, $dv = sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt$ e $v = -\frac{\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)}{\frac{n\pi}{L}}$.

tem-se:

$$b_n = \frac{1}{2L^2}\left\{\left[t\frac{-\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)}{\frac{n\pi}{L}}\right]_0^{2L} + \int_0^{2L}\frac{\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)}{\frac{n\pi}{L}}dt\right\}, \quad (1.45)$$

$$b_n = \frac{1}{2n\pi L}\left\{-t\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\Big|_0^{2L} + \int_0^{2L}\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt\right\}, \quad (1.46)$$

$$b_n = \frac{1}{2n\pi L}\left\{-2L\cos(2n\pi) + 0\cos(0)\Big|_0^{2L} + \frac{sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)}{\frac{n\pi}{L}}\Bigg|_0^{2L}\right\}, \quad (1.47)$$

$$b_n = \frac{1}{2n\pi L}\left\{-2L + \frac{sen(2n\pi) - sen(0)}{\frac{n\pi}{L}}\right\}, \quad (1.48)$$

$$b_n = \frac{-2L}{2n\pi L}, \quad (1.49)$$

$$b_n = \frac{-1}{n\pi}. \quad (1.50)$$

Então, pode-se representar a função da seguinte forma:

$$f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right). \quad (1.51)$$

1.3.1. DICAS PARA ACELERAR O CÁLCULO DA SÉRIE DE FOURIER

Se a função $f(t)$ for par, ou seja, $f(-t) = f(t)$, $f(t)sen(nt)$ é ímpar. Logo,

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t) sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt = 0\,. \qquad (1.52)$$

Se a função $f(t)$ for ímpar, ou seja, $f(-t) = -f(t)$, $f(t)\cos(nt)$ é ímpar. Logo,

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt = 0\,. \qquad (1.53)$$

a_0 representa uma medida do valor médio da função no período. Se a função tem área acima do eixo *x* igual à área abaixo do eixo *x*, então $a_0 = 0$.

1.4. TRANSFORMADA DE FOURIER

A transformada de Fourier é uma ferramenta muito utilizada em análise e processamento de sinais. Consiste de uma generalização da série complexa de Fourier quando o período tende a infinito. A transformada de Fourier $F(\omega)$ da função $f(t)$ é definida por:

$$F(\omega) \equiv \Im\{f(t)\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\,, \qquad (1.54)$$

onde $e^{-j\omega t}$ é o *Kernel* da transformada de Fourier.

A transformada inversa de Fourier é definida por:

$$f(t) \equiv \Im^{-1}\{F(\omega)\} \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega\,. \qquad (1.55)$$

A transformada de Fourier também pode aparecer na forma abaixo de forma a manter a simetria entre as representações:

$$F(\omega) \equiv \Im\{f(t)\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \,. \tag{1.56}$$

A transformada inversa de Fourier é definida por:

$$f(t) \equiv \Im^{-1}\{F(\omega)\} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \,. \tag{1.57}$$

A representação para a transformada de Fourier pode ser generalizada desde que obedeça a regra abaixo:

$$F(\omega) \equiv \Im\{f(t)\} \equiv \sqrt{\frac{|b|}{2\pi^{1-a}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jb\omega t} dt \,. \tag{1.58}$$

A transformada inversa de Fourier é definida por:

$$f(t) \equiv \Im^{-1}\{F(\omega)\} \equiv \sqrt{\frac{|b|}{2\pi^{1+a}}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{jb\omega t} d\omega \,. \tag{1.59}$$

1.4.1. PROPRIEDADE DA LINEARIDADE

Considere duas funções $f(t)$ e $g(t)$, que têm transformadas de Fourier $F(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ e $G(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$. Calculando a transformada de $af(t) + bg(t)$ pela definição:

$$\Im\{af(t)+bg(t)\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} af(t)+bg(t)e^{-j\omega t}dt \tag{1.60}$$

$$\Im\{af(t)+bg(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} af(t)e^{-j\omega t}dt + \int_{-\infty}^{\infty} bg(t)e^{-j\omega t}dt \tag{1.61}$$

$$\Im\{af(t)+bg(t)\} = a\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt + b\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt \tag{1.62}$$

$$\Im\{af(t)+bg(t)\} = aF(\omega)+bG(\omega) \tag{1.63}$$

Tem-se então a *propriedade*: $af(t)+bg(t) \xrightarrow{\Im} aF(\omega)+bG(\omega)$. A propriedade da linearidade mostra que quando uma função é multiplicada por uma constante, a transformada de Fourier da mesma é multiplicada pela mesma constante. A propriedade da linearidade também mostra que a transformada de Fourier da soma de duas funções é a soma das transformadas de Fourier das funções.

1.4.2. TRANSFORMADA DE FOURIER DA FUNÇÃO PORTA

Considere a função porta representada pela função $f(t)=\Pi\left(\frac{t}{2a}\right)$, onde $2a$ é a largura da porta. A figura 1.4 mostra uma função porta com $a=1$.

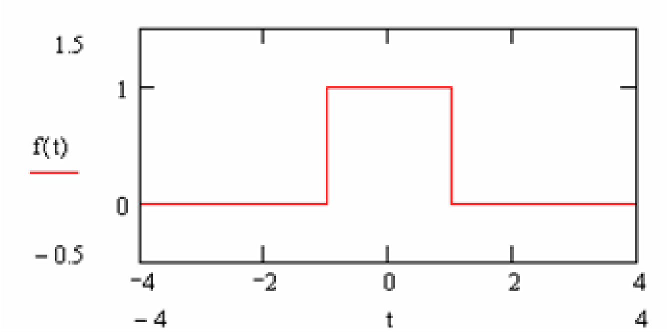


Figura 1.4 – *Exemplo de função porta.*

Pode-se calcular a transformada de Fourier a partir da definição.

$$F(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t}{2a}\right)e^{-j\omega t}dt, \tag{1.64}$$

mas,

$$\Pi\left(\frac{t}{2a}\right) = \begin{cases} 0, t < -a \\ 1, -a \le t \le a \\ 0, t > a \end{cases}, \tag{1.65}$$

Então:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{a} 0e^{-j\omega t}dt + \int_{-a}^{a} 1e^{-j\omega t}dt + \int_{a}^{\infty} 0e^{-j\omega t}dt, \tag{1.66}$$

$$F(\omega) = \int_{-a}^{a} e^{-j\omega t}dt = \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{e^{-j\omega a} - e^{j\omega a}}{-j\omega}, \tag{1.67}$$

$$F(\omega) = \frac{e^{j\omega a} - e^{-j\omega a}}{j\omega}. \tag{1.68}$$

Mas, $e^{j\omega a} - e^{-j\omega a} = 2jsen(\omega a)$, então:

$$F(\omega) = \frac{2jsen(\omega a)}{j\omega}, \tag{1.69}$$

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega}sen(\omega a). \tag{1.70}$$

Tem-se então o *par*: $\Pi\left(\frac{t}{2a}\right) \xrightarrow{\Im} \frac{2}{\omega}sen(\omega a)$.

1.4.3. PROPRIEDADE DE DESLOCAMENTO NO TEMPO

Considere que já é sabida a transformada de Fourier $F(\omega)$ de uma função $f(t)$. Esta propriedade mostra que é possível determinar a transformada da função deslocada $f(t-t_0)$ sem calcular a transformada de Fourier novamente. Tomando a transformada de Fourier de $f(t-t_0)$:

$$\Im\{f(t-t_0)\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j\omega t}dt. \tag{1.71}$$

Fazendo uma mudança de variáveis, $\tau = t - t_0$, tem-se:

$$\Im\{f(t-t_0)\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega(\tau+t_0)}d\tau, \tag{1.72}$$

$$\Im\{f(t-t_0)\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}e^{-j\omega t_0}d\tau. \tag{1.73}$$

Mas t_0 não depende de τ, então:

$$\Im\{f(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau, \tag{1.74}$$

$$\Im\{f(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0}\Im\{f(t)\}. \tag{1.75}$$

Tem-se então a *propriedade*: $f(t-t_0) \xrightarrow{\Im} e^{-j\omega t_0}F(\omega)$.

1.4.4. PROPRIEDADE DE DESLOCAMENTO NA FREQÜÊNCIA

Considere que já é sabida a transformada de Fourier $F(\omega)$ de uma função $f(t)$. Esta propriedade mostra que é possível determinar a transformada inversa da transformada deslocada $F(\omega-\omega_0)$ sem calcular a transformada de Fourier novamente. Tomando a transformada inversa de Fourier de $F(\omega-\omega_0)$:

$$\Im^{-1}\{F(\omega-\omega_0)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega. \tag{1.76}$$

Fazendo uma mudança de variáveis, $X=\omega-\omega_0$, tem-se:

$$\Im^{-1}\{F(\omega-\omega_0)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(X)e^{j(X+\omega_0)t}dX, \tag{1.77}$$

$$\Im^{-1}\{F(\omega-\omega_0)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(X)e^{jXt}e^{j\omega_0 t}dX. \tag{1.78}$$

Mas ω_0 não depende de X, então:

$$\Im^{-1}\{F(\omega-\omega_0)\}=e^{j\omega_0 t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(X)e^{jXt}dX, \tag{1.79}$$

$$\Im^{-1}\{F(\omega-\omega_0)\}=e^{j\omega_0 t}\Im^{-1}\{F(\omega)\}, \tag{1.80}$$

$$\Im^{-1}\{F(\omega-\omega_0)\}=e^{j\omega_0 t}f(t). \tag{1.81}$$

Tem-se então a *propriedade*: $e^{j\omega_0 t}f(t)\xrightarrow{\Im}F(\omega-\omega_0)$.

1.4.5. FUNÇÃO DELTA DE DIRAC

A função Delta de Dirac, representada pela função $f(t)=\delta(t)$, é muito utilizada para amostragem de sinais. Também pode ser vista como a derivada da função porta, apresentada anteriormente. As características principais do delta de Dirac são:

$\delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$. Ou seja, tecnicamente é uma função com área unitária e com largura infinitesimal.

Outra propriedade importante do delta de Dirac é $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$, onde $\delta(t - t_0)$ é o delta de Dirac deslocado na abscissa do tempo.

1.4.6. TRANSFORMADA DE FOURIER DA FUNÇÃO DELTA DE DIRAC

Pode-se calcular a transformada de Fourier a partir da definição e das propriedades da função Delta de Dirac, apresentadas na seção anterior.

$$F(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega 0} = 1 \qquad (1.82)$$

Tem-se então o *par*: $\delta(t) \xrightarrow{\Im} 1$

Considerando o Delta de Dirac deslocado $\delta(t - t_0)$, tem-se:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt. \qquad (1.83)$$

Como $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$, então:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}. \qquad (1.84)$$

Tem-se então o *par*: $\delta(t - t_0) \xrightarrow{\Im} e^{-j\omega t_0}$.

1.4.7. TRANSFORMADA DE FOURIER DA CONSTANTE

Considere a transformada inversa da função Delta de Dirac, representada pela função $F(\omega)=\delta(\omega)$. Utilizando a definição da transformada inversa de Fourier, tem-se:

$$f(t)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}e^{j0t}=\frac{1}{2\pi}. \qquad (1.85)$$

Ou seja, $\delta(\omega)\xrightarrow{\Im^{-1}}\frac{1}{2\pi}$.

Então, pode-se concluir que: $1\xrightarrow{\Im}2\pi\delta(\omega)$.

Multiplicando a função no tempo por uma constante a, tem-se o par: $a\xrightarrow{\Im}2\pi a\delta(\omega)$.

1.4.8. TRANSFORMADA DE FOURIER DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Considere a função exponencial, representada pela função $f(t)=u(t)e^{-at}$. Pode-se calcular a transformada de Fourier a partir da definição.

$$F(\omega)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)e^{-at}e^{-j\omega t}dt. \qquad (1.86)$$

Relembrando a função degrau, $u(t)=\begin{cases}0, t<0\\ 1, t\geq 0\end{cases}$, tem-se:

$$F(\omega)=\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-j\omega t}dt, \qquad (1.87)$$

$$F(\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt\,, \tag{1.88}$$

$$F(\omega) = \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \Big|_{0}^{\infty}\,. \tag{1.89}$$

Como $\lim_{t\to\infty} e^{-(a+j\omega)t} = \lim_{t\to\infty} e^{-j\omega t} \lim_{t\to\infty} e^{-at} = \lim_{t\to\infty} e^{-j\omega t}\, 0 = 0$. Então:

$$F(\omega) = -\frac{e^{-(a+j\omega)0}}{-(a+j\omega)}, \tag{1.90}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)}\,. \tag{1.91}$$

Tem-se então o *par*: $u(t)e^{-at} \xrightarrow{\Im} \dfrac{1}{(a+j\omega)}$.

1.4.9. TRANSFORMADA DE FOURIER DA FUNÇÃO EXPONENCIAL DO MÓDULO

Considere a função exponencial, representada pela função $f(t) = e^{-a|t|}$. Pode-se calcular a transformada de Fourier a partir da definição.

$$F(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt\,, \tag{1.92}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt\,. \tag{1.93}$$

Relembrando da função módulo, $|t| = \begin{cases} -t, t < 0 \\ t, t \geq 0 \end{cases}$, tem-se:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt\,, \tag{1.94}$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t}dt+\int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt\,, \tag{1.95}$$

$$F(\omega)=\frac{e^{(a-j\omega)t}}{(a-j\omega)}\Bigg|_{-\infty}^{0}+\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\Bigg|_{0}^{\infty}. \tag{1.96}$$

Como $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-(a+j\omega)t}=\lim\limits_{t\to\infty} e^{-j\omega t}\lim\limits_{t\to\infty} e^{-at}=0$ e $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{(a-j\omega)t}=\lim\limits_{t\to-\infty} e^{-j\omega t}\lim\limits_{t\to-\infty} e^{at}=0$,

Então:

$$F(\omega)=\frac{e^{(a-j\omega)0}}{(a-j\omega)}-\frac{e^{-(a+j\omega)0}}{-(a+j\omega)}, \tag{1.97}$$

$$F(\omega)=\frac{1}{(a-j\omega)}+\frac{1}{(a+j\omega)}, \tag{1.98}$$

$$F(\omega)=\frac{(a+j\omega)+(a-j\omega)}{a^2+\omega^2}, \tag{1.99}$$

$$F(\omega)=\frac{2a}{a^2+\omega^2}. \tag{1.100}$$

Tem-se então o *par*: $e^{-a|t|}\xrightarrow{\Im}\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$.

1.4.10. TRANSFORMADA DE FOURIER DA FUNÇÃO COSENO

Considere a função exponencial, representada pela função $f(t)=\cos(\omega_0 t)$. Pode-se calcular a transformada de Fourier a partir da definição.

$$F(\omega)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega_0 t)e^{-j\omega t}dt\,. \tag{1.101}$$

Relembrando a relação de *Euler*, $\cos(\omega_0 t) = \dfrac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$, tem-se:

$$F(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \right) e^{-j\omega t} dt \, , \tag{1.102}$$

$$F(\omega) \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \, , \tag{1.103}$$

$$F(\omega) \equiv \frac{1}{2} \Im\left\{ e^{j\omega_0 t} \right\} + \frac{1}{2} \Im\left\{ e^{-j\omega_0 t} \right\}. \tag{1.104}$$

Utilizando o par transforma da constante, $1 \xrightarrow{\Im} 2\pi\delta(\omega)$, e a propriedade de deslocamento na freqüência $f(t)e^{j\omega_0 t} \to F(\omega - \omega_0)$, tem-se: $\Im\left\{ e^{j\omega_0 t} \right\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ e $\Im\left\{ e^{-j\omega_0 t} \right\} = 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$. Então:

$$F(\omega) \equiv \frac{1}{2} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} 2\pi\delta(\omega + \omega_0), \tag{1.105}$$

$$F(\omega) \equiv \pi\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \right]. \tag{1.106}$$

Tem-se então o *par*: $\cos(\omega_0 t) \xrightarrow{\Im} \pi\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \right]$.

1.4.11. TRANSFORMADA DE FOURIER DA FUNÇÃO SENO

Considere a função exponencial, representada pela função $f(t) = sen(\omega_0 t)$. Pode-se calcular a transformada de Fourier a partir da definição.

$$F(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} sen(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt \, . \tag{1.107}$$

Relembrando a relação de *Euler*, $sen(\omega_0 t) = \dfrac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$, tem-se:

$$F(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \right) e^{-j\omega t} dt \, , \tag{1.108}$$

$$F(\omega) \equiv \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt - \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \, , \tag{1.109}$$

$$F(\omega) \equiv \frac{1}{2j} \Im\left\{e^{j\omega_0 t}\right\} - \frac{1}{2j} \Im\left\{e^{-j\omega_0 t}\right\}, \tag{1.110}$$

Utilizando os mesmos dados da seção anterior, tem-se:

$$F(\omega) \equiv \frac{1}{2j} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2j} 2\pi\delta(\omega + \omega_0), \tag{1.111}$$

$$F(\omega) \equiv \frac{\pi}{j} \left[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\right]. \tag{1.112}$$

Tem-se então o *par*: $sen(\omega_0 t) \xrightarrow{\Im} \dfrac{\pi}{j} \left[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\right]$.

1.4.12. PROPRIEDADE DO ESCALONAMENTO

Considere que já é sabida a transformada de Fourier $F(\omega)$ de uma função $f(t)$. Esta propriedade mostra que é possível determinar a transformada da função expandida ou comprimida $f(at)$ por um fator a sem calcular a transformada de Fourier novamente. Tomando a transformada de Fourier de $f(at)$:

$$\Im\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt \, . \tag{1.113}$$

Fazendo uma mudança de variáveis, $\tau = at$, tem-se:

$$\Im\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\frac{\tau}{a}} d\tau. \qquad (1.114)$$

Note que se $a < 0$, os limites da integral são invertidos. Para facilitar a notação, pode-se inverter novamente os limites da integral multiplicando-se a integral por -1. Como $|a| = -a$ para $a < 0$, tem-se a equação acima.

$$\Im\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)\tau} d\tau, \qquad (1.115)$$

$$\Im\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right). \qquad (1.116)$$

Tem-se então a *propriedade*: $f(at) \xrightarrow{\Im} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

1.4.13. PROPRIEDADE DA DERIVADA NO TEMPO

Considere que já é sabida a transformada de Fourier $F(\omega)$ de uma função $f(t)$. Esta propriedade mostra que é possível determinar a transformada da derivada da função $f(t)$ sem calcular a transformada de Fourier novamente. Tomando a transformada de Fourier de $\frac{df(t)}{dt}$:

$$\Im\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-j\omega t} dt. \qquad (1.117)$$

Aplicando integração por partes com $u = e^{-j\omega t}$ e $dv = df(t)$, tem-se:

$$\Im\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = e^{-j\omega t} f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}(-j\omega)dt. \qquad (1.118)$$

Se a função $f(t)$ for limitada, tem-se:

$$\Im\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = j\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt, \qquad (1.119)$$

$$\Im\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = j\omega F(\omega). \qquad (1.120)$$

Tem-se então a *propriedade*: $\frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{\Im} j\omega F(\omega)$.

Note que: $\Im\left\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right\} = \Im\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{df(t)}{dt}\right)\right\} = j\omega\Im\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = j\omega j\omega F(\omega) = (j\omega)^2 F(\omega)$.

Pode-se generalizar para:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \xrightarrow{\Im} (j\omega)^n F(\omega). \qquad (1.121)$$

1.4.14. PROPRIEDADE DA DERIVADA NA FREQÜÊNCIA

Considere que já é sabida a transformada de Fourier $F(\omega)$ de uma função $f(t)$. Esta propriedade mostra que é possível determinar a transformada inversa da derivada de $F(\omega)$ sem calcular a transformada inversa de Fourier novamente. Tomando a transformada de Fourier de $\frac{dF(\omega)}{d\omega}$:

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\right], \qquad (1.122)$$

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d\left(e^{-j\omega t}\right)}{d\omega} dt\,, \tag{1.123}$$

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} (-jt) dt\,, \tag{1.124}$$

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} -jtf(t) e^{-j\omega t} dt\,, \tag{1.125}$$

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \Im\{-jtf(t)\}. \tag{1.126}$$

Tem-se então a *propriedade*: $-jtf(t) \xrightarrow{\Im} \frac{dF(\omega)}{d\omega}$.

1.4.15. USO DA TRANSFORMADA PARA CÁLCULO DE ÁREA

Considere a transformada de Fourier $F(\omega)$ de uma função $f(t)$, $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$. Calcule $F(0)$.

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j0t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt\,. \tag{1.127}$$

Ou seja, a área da função $f(t)$ pode ser avaliada utilizando-se a transformada de Fourier $F(\omega)$ com argumento $\omega = 0$.

1.4.16. PROPRIEDADE DA DUALIDADE

Considere a transformada de Fourier $F(\omega)$ de uma função $f(t)$. Então,

$$F(t) \xrightarrow{\Im} 2\pi f(-\omega). \tag{1.128}$$

Esta propriedade é muito importante porque, à princípio, duplica a quantidade de pares conhecidos.

1.4.17. TRANSFORMADA DE FOURIER DA FUNÇÃO GAUSSIANA

Considere a função Gaussiana, representada pela função $f(t) = e^{-at^2}$. De Moivre desenvolveu a distribuição normal como aproximação da distribuição binomial. Tal função também foi usada por Laplace, em 1783, para estudar erros e por Gauss, em 1809, para análise de dados astronômicos.

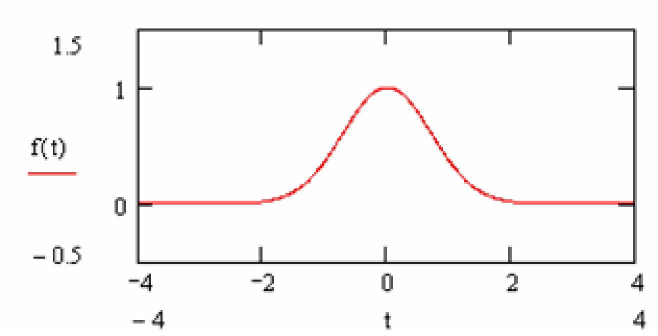


Figura 1.5 – *Exemplo de função gaussiana* $f(t) = e^{-t^2}$.

Utilizando a definição da transformada inversa de Fourier, tem-se:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \qquad (1.129)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} [\cos(\omega t) - j sen(\omega t)] dt, \qquad (1.130)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} sen(\omega t) dt. \qquad (1.131)$$

O operando da segunda integral é ímpar e a integral sobre este termo é zero. A solução da primeira integral é dada pela solução de *Abramowitz and Stegun*:

$$F(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{-\pi^2\omega^2}{a}}. \qquad (1.132)$$

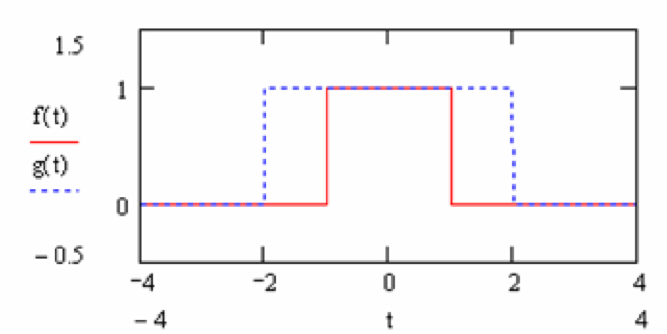
1.5. CONVOLUÇÃO

A convolução é um operador matemático importante para análise de sinais, processamento de imagens, processamento de voz, etc. Dadas duas funções $f(t)$ e $g(t)$, a convolução é representada por $f(t)*g(t)$. Também pode ser representada da seguinte forma: $f(t)\otimes g(t)$. Matematicamente é definida como um produto de funções na álgebra das funções de Schwartz no espaço $\Re^n$. É a integral que expressa a quantidade de sobreposição de uma função $g(t)$ com uma outra função $f(t)$ deslocada. Descrevendo matematicamente, temos:

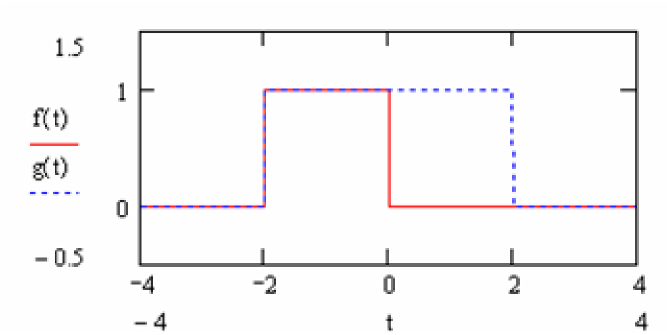
$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \qquad (1.133)$$

Exemplo 1.2: Este exemplo visa mostrar como calcular a convolução entre duas portas. Considere a porta $f(t)=\Pi\left(\frac{t}{2}\right)$ e a porta $g(t)=\Pi\left(\frac{t}{4}\right)$. Para realização da convolução, deve-se rebater um das portas. Como a porta é uma função para o rebatimento resulta na mesma função. Para o caso onde o deslocamento é nulo, ou seja *t=0* (ver Figura 1.6.a), deve-se multiplicar estas duas funções (definido agora como $h(t)=f(t).g(t)$) e depois integrá-las. A Figura 1.6 ilustra $f(t)$ e $g(t)$. Note que $h(t)$ coincide com $f(t)$. O resultado da integração é igual a *2*, ou seja, $f(0)*g(0)=2$.

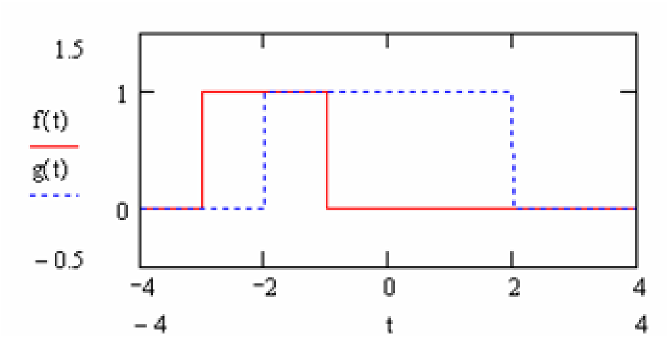
O limite deste caso, onde $h(t)$ coincide com $f(t)$, ocorre para um deslocamento máximo de uma unidade de tempo *t* (ver Figura 1.6.b). A conseqüência disso esta mostrada na Figura 1.7.



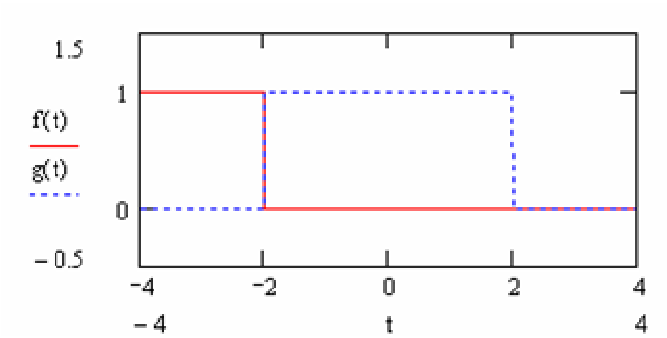
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1.6 – *Disposição das funções envolvidas no cálculo da convolução do exemplo 1.2.*

Note que a partir deste momento $h(t)$ deixa de coincidir com $f(t)$, isso porque a área da multiplicação destas duas funções diminui (ver Figura 1.6.c). Note que esta área diminui proporcionalmente ao deslocamento a partir de um deslocamento maior que *1*. Como esta área diminui, a convolução também diminui em magnitude. Note que, no caso de um deslocamento maior que *2* o produto entre as funções $f(t)$ e $g(t)$ é nulo, e por conseqüência, a convolução para este caso é zero.

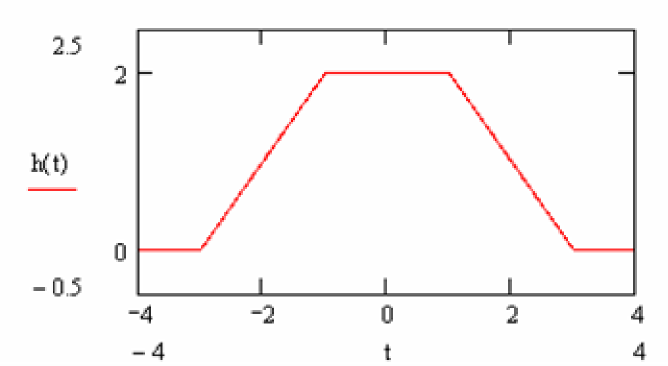


Figura 1.7 – *Resultado da convolução entre duas portas do exemplo 1.2.*

1.5.1. PROPRIEDADES DA CONVOLUÇÃO

Para utilização póstuma da operação *convolução*, é necessário definir as propriedades mais importantes, como: linearidade, simetria, associativa, distributiva, derivada da *convolução*, integral da *convolução*.

1.5.1.1. Simetria da convolução

A propriedade da simetria afirma que $f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$. Considere:

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \qquad (1.xxx)$$

Fazendo uma mudança de variáveis, $y=t-\tau$, tem-se:

$$f(t)*g(t)=\int_{\infty}^{-\infty} f(t-y)g(y)(-d\tau), \tag{1.121}$$

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(t-y)d\tau, \tag{1.122}$$

$$f(t)*g(t)=g(t)*f(t). \tag{1.123}$$

1.5.1.2. Propriedade distributiva da convolução

A propriedade distributiva afirma que $f(t)*[g(t)+h(t)]=f(t)*g(t)+f(t)*h(t)$. Considere:

$$f(t)*[g(t)+h(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)[g(t-\tau)+h(t-\tau)]d\tau, \tag{1.124}$$

$$f(t)*[g(t)+h(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau, \tag{1.125}$$

$$f(t)*[g(t)+h(t)]=f(\tau)*g(\tau)+f(\tau)*h(\tau). \tag{1.126}$$

Assim, tem-se: $f(t)*[g(t)*h(t)]=[f(t)*g(t)]*h(t)$.

1.5.1.3. Propriedade da linearidade da convolução

A propriedade da linearidade afirma que $a[f(t)*g(t)]=af(t)*g(t)=f(t)*ag(t)$. Considere:

$$a[f(t)*g(t)]=a\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau, \tag{1.127}$$

$$a[f(t)*g(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} af(\tau)g(t-\tau)d\tau, \tag{1.128}$$

$$a[f(t)*g(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}[af(\tau)]g(t-\tau)d\tau=af(\tau)*g(t), \tag{1.129}$$

$$a[f(t)*g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)[ag(t-\tau)]d\tau = f(\tau)*ag(t). \tag{1.130}$$

1.5.1.4. Propriedade da convolução com delta de Dirac

A propriedade da linearidade afirma que $f(t)*\delta(t-t_0) = f(t-t_0)$. Considere:

$$f(t)*\delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-t_0-\tau)d\tau. \tag{1.131}$$

Temos a função de amostragem quando $t-t_0 = \tau$, ou seja:

$$f(t)*\delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-t_0-\tau)d\tau = f(t-t_0). \tag{1.132}$$

1.5.1.5. Propriedade da derivada da convolução

A propriedade da linearidade afirma que $\frac{d}{dt}[f(t)*g(t)] = \frac{df(t)}{dt}*g(t) = f(t)*\frac{dg(t)}{dt}$.

1.5.1.6. Propriedade associativa da convolução

A propriedade associativa afirma que $f(t)*[g(t)*h(t)] = [f(t)*g(t)]*h(t)$.

1.5.2. TRANSFORMADA DE FOURIER DA CONVOLUÇÃO

Calculando a transformada da *convolução* $f(t)*g(t)$, tem-se:

$$\Im\{f(t)*g(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)*g(t)e^{-j\omega t}dt\,, \tag{1.133}$$

$$\Im\{f(t)*g(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau e^{-j\omega t}dt\,, \tag{1.134}$$

$$\Im\{f(t)*g(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)e^{-j\omega t}d\tau dt\,, \tag{1.135}$$

Fazendo uma mudança de variáveis, $y=t-\tau$, tem-se:

$$\Im\{f(t)*g(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(y)e^{-j\omega(\tau+y)}d\tau dy\,, \tag{1.136}$$

$$\Im\{f(t)*g(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(y)e^{-j\omega\tau}e^{-j\omega y}d\tau dy\,, \tag{1.137}$$

$$\Im\{f(t)*g(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-j\omega y}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau dy\,, \tag{1.138}$$

$$\Im\{f(t)*g(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-j\omega y}F(\omega)dy\,, \tag{1.139}$$

$$\Im\{f(t)*g(t)\}=F(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-j\omega y}dy\,, \tag{1.140}$$

$$\Im\{f(t)*g(t)\}=F(\omega)G(\omega). \tag{1.141}$$

Tem-se então a *propriedade*: $f(t)*g(t)\xrightarrow{\Im}F(\omega)G(\omega)$.

1.5.3. TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER DA CONVOLUÇÃO

Calculando a transformada inversa da *convolução* $F(\omega)*G(\omega)$, tem-se:

$$\Im^{-1}\{F(\omega)*G(\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)*G(\omega)e^{j\omega t}d\omega\,, \tag{1.142}$$

$$\Im^{-1}\{F(\omega)*G(\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(X)G(\omega-X)dXe^{j\omega t}d\omega, \tag{1.143}$$

$$\Im^{-1}\{F(\omega)*G(\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(X)G(\omega-X)e^{j\omega t}dX\,d\omega. \tag{1.144}$$

Fazendo uma mudança de variáveis, $Z=\omega-X$, tem-se:

$$\Im^{-1}\{F(\omega)*G(\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(X)G(Z)e^{j(X+Z)t}dX\,dZ, \tag{1.145}$$

$$\Im^{-1}\{F(\omega)*G(\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(X)G(Z)e^{jXt}e^{jZt}dX\,dZ, \tag{1.146}$$

$$\Im^{-1}\{F(\omega)*G(\omega)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(X)e^{jXt}dXG(Z)e^{jZt}dZ, \tag{1.147}$$

$$\Im^{-1}\{F(\omega)*G(\omega)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{jZt}G(Z)dZ, \tag{1.148}$$

$$\Im^{-1}\{F(\omega)*G(\omega)\}=f(t)\int_{-\infty}^{\infty}G(Z)e^{jZt}dZ, \tag{1.149}$$

$$\Im^{-1}\{F(\omega)*G(\omega)\}=2\pi f(t)g(t), \tag{1.150}$$

$$\frac{1}{2\pi}\Im^{-1}\{F(\omega)*G(\omega)\}=f(t)g(t), \tag{1.151}$$

$$\Im\{f(t)g(t)\}=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega). \tag{1.152}$$

Tem-se então a *propriedade*: $f(t)g(t)\xrightarrow{\Im}\frac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega)$.

1.6. TRANSFORMADA MULTIDIMENSIONAL

A transformada bidimensional de Fourier é definida em dois eixos distintos, como apresentado na equação abaixo.

$$F(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dxdy \,. \qquad (1.153)$$

A transformada inversa bidimensional de Fourier é definida analogamente, como:

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_x, \omega_y) e^{j(\omega_x x + \omega_y y)} d\omega_x d\omega_y \,. \qquad (1.154)$$

Também podemos estender os conceitos para transformadas multidimensionais por meio de um vetor na correspondência biunívoca entre um vetor *n*-dimensional no tempo $\vec{t}$ e um vetor *n*-dimensional no espaço de freqüências $\vec{\omega}$, como apresentado na equação abaixo.

$$F(\vec{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{t}) e^{-j(\vec{\omega}.\vec{t})} d^n\vec{t} \,. \qquad (1.155)$$

Analogamente, tem-se:

$$f(\vec{t}) = \frac{1}{2\pi^n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F(\vec{\omega}) e^{j(\vec{\omega}.\vec{t})} d^n\vec{\omega} \,. \qquad (1.156)$$

1.7. TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Com o advento do computador digital, foi necessária uma adequação da transformada para sinais de tempo discreto, sendo definida assim a transformada discreta de Fourier com uma seqüência discreta no domínio da freqüência e representada pela equação abaixo.

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi mn}{N}} \,, \qquad (1.157)$$

onde $x[n]$ é a seqüência discreta no domínio do tempo que descreve os valores amostrados da variável continua $x(t)$ e N é o número de amostras da seqüência da entrada.

Uma outra possível representação da transformada discreta de Fourier é a forma retangular que se utiliza da relação de Euler. A relação de Euler é dada por $e^{j\theta} = \cos\theta + jsen\theta$. A DFT pode ser escrita então da seguinte forma:

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\left[\cos\left(\frac{2\pi mn}{N}\right) - jsen\left(\frac{2\pi mn}{N}\right)\right], \tag{1.158}$$

Onde é interessante lembrar que $j = \sqrt{-1}$ e este é um conceito abstrato conveniente para nos ajudar a comparar a relação de fase entre várias componentes senoidais do sinal.

Considere agora um sinal com taxa *B* (amostras/segundo) e uma seqüência que representa um sinal com *N* amostras, então dizemos que a freqüência fundamental pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$f_{fundamental} = \frac{B}{N}. \tag{1.159}$$

Sabendo disso, podemos associar a série $X[m]$ com o conteúdo espectral do sinal em questão. $X[0]$ representa a componente *dc* do sinal, $X[1]$ representa a magnitude do sinal na freqüência fundamental, $X[2]$ representa a magnitude do sinal no dobro da freqüência fundamental e $X[m]$ representa a magnitude do sinal na freqüência *m* vezes a freqüência fundamental.

A DFT define uma transformação de um sinal no domínio no tempo para um sinal no domínio da freqüência. Sabendo disso, é apropriado esclarecer que o processo inverso é possível, ou seja, podemos reverter o sinal no domínio da freqüência para o domínio do tempo. Este processo é chamado de transformada inversa discreta de Fourier, IDFT. A IDFT é expressa por:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X[m]e^{\frac{j2\pi mn}{N}}. \tag{1.160}$$

1.7.1. PROPRIEDADES DA DFT

A DFT apresenta algumas propriedades que são muito úteis no processamento digitais de sinais, como: simetria, linearidade, deslocamento no tempo e freqüência, entre outras. Fora a simetria, as outras propriedades são comuns a transformada de Fourier de tempo contínuo. Por isso, vamos explorar um pouco mais a propriedade da simetria.

A simetria pode poupar muito esforço computacional. Quando a seqüência do sinal for real, então $X[N-m]^{*} = X[m]$. O seja basta que calculemos as componentes de $X[m]$ para $0 \le m \le N/2$. Isto pode ser demonstrado da seguinte forma:

$$X[N-m]^{*} = \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi n(N-m)}{N}} \right\}^{*}, \tag{1.161}$$

$$X[N-m]^{*} = \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi nN}{N}} e^{\frac{j2\pi nm}{N}} \right\}^{*}, \tag{1.162}$$

$$X[N-m]^{*} = \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi n} e^{\frac{j2\pi nm}{N}} \right\}^{*}, \tag{1.163}$$

Mas $e^{-j2\pi n} = \cos(2\pi n) - jsen(2\pi n) = 1 - j.0 = 1$, então:

$$X[N-m]^{*} = \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{j2\pi nm}{N}} \right\}^{*}. \tag{1.164}$$

Se $x[n]$ for real,

$$X[N-m]^{*} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi nm}{N}} = X[N]. \tag{1.165}$$

Outra propriedade interessante diz que se a seqüência $x[n]$ for real e par, então sua DFT é real e par. Se a seqüência $x[n]$ for real e ímpar,então sua DFT é puramente imaginária.

1.7.1. TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER (FFT)

Embora a DFT seja o melhor procedimento matemático para determinar o conteúdo espectral de uma seqüência no domínio do tempo, ela é muito ineficiente. Em 1965, um artigo foi publicado por Cooley e Tukey descrevendo um algoritmo eficiente para implementação da DFT, este algoritmo ficou conhecido como Transformada rápida de Fourier (FFT). Antes do advento da FFT, a DFT com muitos pontos estava restrita a grandes centros de pesquisas. Graças a Cooley e Tukey, e a indústria dos semicondutores, DFTs com 1024 pontos podem ser calculadas em apenas alguns segundos em computadores pessoais.

Para uma seqüência de N pontos, o algoritmo comum para cálculo da DFT realiza N^2 multiplicações, enquanto o algoritmo FFT realiza apenas $\frac{N}{2}\log_2(N)$.

A derivação da FFT procede com a separação da seqüência de entrada em duas partes. Uma seqüência que absorve os valores associados aos valores pares de n e outra com os valores ímpares de n. Com isso a DFT pode ser dividida em duas partes:

$$X[m] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2n]e^{-j2\pi(2n)m/N} + e^{-j2\pi m/N} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2n+1]e^{-j2\pi(2n)m/N} . \tag{1.166}$$

Deve-se agora definir uma notação para simplificação. Vamos definir $W_N = e^{-\frac{j2\pi}{N}}$ para representar o fator de ângulo de fase complexo que é constante com N.

Então,

$$X[m] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2n]W_N^{2nm} + W_N^m \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2n+1]W_N^{2nm} . \tag{1.167}$$

Mas,

$$W_N^2 = e^{-j2\pi 2/N} = e^{-j2\pi/(N/2)} = W_{N/2} . \tag{1.168}$$

Assim,

$$X[m] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2n] W_{N/2}^{nm} + W_N^m \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2n+1] W_{N/2}^{nm} . \qquad (1.169)$$

Então, temos *N/2* somas e *N/2* multiplicações entre os valores da seqüência e os termos W_N^m. Note que existem *N* termos W_N^m.

1.8. RESUMO DOS PARES DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

Função porta	$f(t) = \Pi(t)$	$F(\omega) = \frac{2}{\omega} sen\left(\frac{\omega}{2}\right)$
Delta de Dirac	$f(t) = \delta(t)$	$F(\omega) = 1$
Constante	$f(t) = a$	$F(\omega) = 2\pi a \delta(\omega)$
Exponencial	$f(t) = u(t)e^{-at}$	$F(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$
Exponencial	$f(t) = e^{-a\lvert t\rvert}$	$F(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
Coseno	$f(t) = \cos(\omega_0 t)$	$F(\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
Seno	$f(t) = sen(\omega_0 t)$	$F(\omega) = \frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
Função gaussiana	$f(t) = e^{-at^2}$	$F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{-\pi^2\omega^2}{a}}$

1.9. RESUMO DAS PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE FOURIER

Considere os pares de transformada de Fourier

$f(t) \to F(\omega)$ e $g(t) \to G(\omega)$

Têm-se as seguintes propriedades:

Linearidade: $af(t) + bg(t) \to aF(\omega) + bG(\omega)$

Deslocamento no tempo: $f(t - t_0) \to e^{-j\omega t_0} F(\omega)$

Deslocamento na freqüência: $f(t)e^{j\omega_0 t} \to F(\omega - \omega_0)$

Escalonamento: $f(at) \to \dfrac{1}{|a|} F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$

Derivada no tempo: $\dfrac{df(t)}{dt} \to j\omega F(\omega)$

Derivada no tempo: $\dfrac{d^n f(t)}{dt^n} \to (j\omega)^n F(\omega)$

Derivada na freqüência: $-jtf(t) \to \dfrac{dF(\omega)}{d\omega}$

Convolução no tempo: $f(t) * g(t) \to F(\omega)G(\omega)$

Convolução na freqüência: $f(t)g(t) \to \dfrac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$

Dualidade: $F(t) \to 2\pi f(-\omega)$

1.10. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1.10.1. Calcule os coeficientes da expansão por série de Fourier das seguintes funções periódicas:

a. Onda quadrada com período *2L*, amplitude mínima *-1* e amplitude máxima *1*.

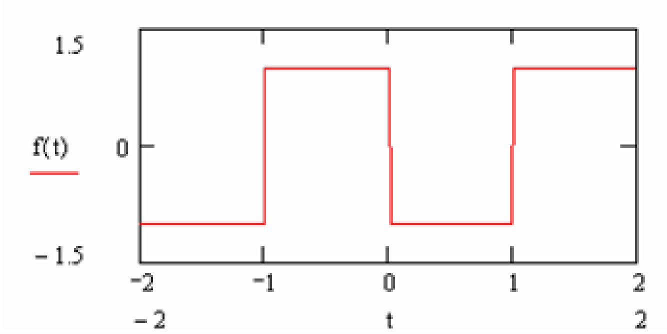


Figura 1.8 – *Função usada no exercício resolvido 1.10.1.a.*

Tomando o intervalo *[0,2L]* a função pode ser representada por:

$$f(t) = \begin{cases} 1, 0 \le t < L \\ -1, L \le t < 2L \end{cases}. \quad (1.170)$$

Considerando que o valor médio é zero, então $a_0 = 0$. Também notando que a função é ímpar, tem-se $a_n = 0$. Só resta calcular b_n.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^L sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt + \frac{1}{L}\int_L^{2L} -sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt, \quad (1.171)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\left.\frac{-\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)}{\frac{n\pi}{L}}\right|_0^L + \frac{1}{L}\left.\frac{\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)}{\frac{n\pi}{L}}\right|_L^{2L}, \quad (1.172)$$

$$b_n = \frac{-\cos(n\pi) + \cos(0)}{n\pi} + \frac{\cos(2n\pi) - \cos(n\pi)}{n\pi}, \quad (1.173)$$

$$b_n = \frac{-\cos(n\pi)+1}{n\pi} + \frac{1-\cos(n\pi)}{n\pi}, \tag{1.174}$$

$$b_n = \frac{2-2\cos(n\pi)}{n\pi}, \tag{1.175}$$

$$b_n = \frac{4sen^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}, \tag{1.176}$$

$$b_n = \begin{cases} 0, se\_n \to par \\ \frac{4}{n\pi}, se\_n \to ímpar \end{cases}, \tag{1.177}$$

Então, pode-se representar a função da seguinte forma:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=0 \\ n \to ímpar}}^{\infty} \frac{1}{n} sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right). \tag{1.178}$$

b. Onda triangular simétrica com período *2L*, amplitude mínima *-1* e amplitude máxima *1*.

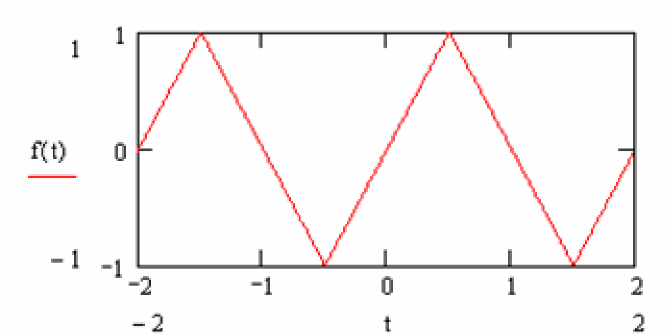


Figura 1.9 – *Função usada no exercício resolvido 1.10.1.b.*

Tomando o intervalo $\left[-\frac{L}{2}, \frac{3L}{2}\right]$, a função pode ser representada por:

$$f(t)=\begin{cases}\frac{2t}{L},-\frac{L}{2}\le t<\frac{L}{2}\\ 1-\frac{2}{L}\left(t-\frac{L}{2}\right),\frac{L}{2}\le t<\frac{3L}{2}\end{cases}. \quad (1.179)$$

Note que os limites do período foram escolhidos convenientemente para facilitar a valoração das integrais envolvidas no cálculo dos coeficientes da série. Considerando que o valor médio é zero, então $a_0=0$. Também notando que a função é ímpar, tem-se $a_n=0$. Só resta calcular b_n.

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{2t}{L}sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt+\frac{1}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{2}}1-\frac{2}{L}\left(t-\frac{L}{2}\right)sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt, \quad (1.180)$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{2t}{L}sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt+\frac{1}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{2}}sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt-\frac{1}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{\frac{3L}{2}}\frac{2}{L}\left(t-\frac{L}{2}\right)sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt. \quad (1.181)$$

Resolvendo estas integrais pode-se chegar a:

$$b_n=\frac{32\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)sen^3\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n^2\pi^2}, \quad (1.182)$$

$$b_n=\begin{cases}0, n=0,4,8,12,\dots\\ \frac{1}{4}, n=1,5,9,13,\dots\\ 0, n=2,6,10,14,\dots\\ -\frac{1}{4}, n=3,7,11,15,\dots\end{cases}, \quad (1.183)$$

$$b_n=\begin{cases}0, se\_n\to par\\ \frac{8}{\pi^2n^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}, se\_n\to ímpar\end{cases}. \quad (1.184)$$

Então, pode-se representar a função da seguinte forma:

$$f(t)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{\substack{n=0\\ n\to ímpar}}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2}sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right). \tag{1.185}$$

1.10.2. Use a definição da Transformada de Fourier para obter as representações no domínio de freqüência dos sinais seguintes:

c. $f(t)=e^{-3t}u(t-1)$.

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3t}u(t-1)e^{-j\omega t}dt,$$

$$F(\omega)=\int_{1}^{\infty}e^{-3t}e^{-j\omega t}dt,$$

$$F(\omega)=\int_{1}^{\infty}e^{-(3+j\omega)t}dt,$$

$$F(\omega)=\left.\frac{e^{-(3+j\omega)t}}{-(3+j\omega)}\right|_{1}^{\infty},$$

$$F(\omega)=\frac{e^{-(3+j\omega)}}{(3+j\omega)}.$$

d. $f(t)=e^{-|t|}$.

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|t|}e^{-j\omega t}dt,$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{0}e^{t}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-t}e^{-j\omega t}dt,$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{0}e^{(1-j\omega)t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-(1+j\omega)t}dt,$$

$$F(\omega)=\left.\frac{e^{(1-j\omega)t}}{(1-j\omega)}\right|_{-\infty}^{0}+\left.\frac{e^{-(1+j\omega)t}}{-(1+j\omega)}\right|_{0}^{\infty},$$

$$F(\omega)=\left.\frac{e^{(1-j\omega)t}}{(1-j\omega)}\right|_{-\infty}^{0}+\left.\frac{e^{-(1+j\omega)t}}{-(1+j\omega)}\right|_{0}^{\infty},$$

$$F(\omega)=\frac{1}{(1-j\omega)}+\frac{1}{(1+j\omega)},$$

$$F(\omega)=\frac{2}{\left(1+\omega^2\right)}.$$

e. $f(t)=te^{-2t}u(t)$.

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}te^{-2t}u(t)e^{-j\omega t}dt,$$

$$F(\omega)=\int_{0}^{\infty}te^{-2t}e^{-j\omega t}dt,$$

$$F(\omega)=\int_{0}^{\infty}te^{-(2+j\omega)t}dt.$$

Integrando por partes com $u=t$, $du=dt$, $dv=e^{-(2+j\omega)t}dt$ e $v=\dfrac{e^{-(2+j\omega)t}}{-(2+j\omega)}$. tem-se:

$$F(\omega)=\left[t\frac{e^{-(2+j\omega)t}}{-(2+j\omega)}\right]_{0}^{\infty}-\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-(2+j\omega)t}}{-(2+j\omega)}dt,$$

$$F(\omega)=\frac{1}{(2+j\omega)}\int_{0}^{\infty}e^{-(2+j\omega)t}dt,$$

$$F(\omega)=\frac{1}{(2+j\omega)}\left[\frac{e^{-(2+j\omega)t}}{-(2+j\omega)}\right]_{0}^{\infty},$$

$$F(\omega)=\frac{1}{(2+j\omega)^2}.$$

f. $f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a^m \delta(t-m)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a^m \delta(t-m) e^{-j\omega t} dt\,,$$

$$F(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a^m \delta(t-m) e^{-j\omega t} dt\,,$$

$$F(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} a^m \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-m) e^{-j\omega t} dt\,,$$

$$F(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} a^m e^{-j\omega m}\,.$$

1.10.3. Use a equação que descreve a representação por transformada de Fourier para determinar os sinais no domínio do tempo correspondentes As seguintes transformadas de Fourier:

a. $F(\omega) = \begin{cases} \cos(\omega t), |\omega| < \dfrac{\pi}{2} \\ 0, c.c. \end{cases}.$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega\,,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\omega t) e^{j\omega t} d\omega\,,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} e^{j\omega t} d\omega\,,$$

$$f(t)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1+e^{j2\omega t}d\omega\,,$$

$$f(t)=\frac{1}{4\pi}\left[\omega+\frac{e^{j2\omega t}}{j2t}\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}},$$

$$f(t)=\frac{1}{4\pi}\left[\pi+\frac{1}{j2t}\left(e^{j\pi t}-e^{-j\pi t}\right)\right],$$

$$f(t)=\frac{1}{4\pi}\left[\pi+\frac{1}{t}sen(\pi t)\right],$$

$$f(t)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4\pi t}sen(\pi t).$$

b. $F(\omega)=e^{-2\omega}u(\omega)$.

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\omega}u(\omega)e^{j\omega t}dt\,,$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-2\omega}e^{j\omega t}dt\,,$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}e^{(jt-2)\omega}d\omega\,,$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(jt-2)\omega}}{(jt-2)}\right]\Bigg|_{0}^{\infty},$$

$$f(t)=-\frac{1}{2\pi(jt-2)},$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi(2-jt)}.$$

c. $F(\omega)=e^{-|\omega|}$.

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|\omega|}e^{j\omega t}d\omega,$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}e^{\omega}e^{j\omega t}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-\omega}e^{j\omega t}d\omega,$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}e^{(1+jt)\omega}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-(1-jt)\omega}dt\,,$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{(1+jt)\omega}}{(1+jt)}\bigg|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-(1-jt)\omega}}{-(1-jt)}\bigg|_{0}^{\infty},$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{(1+jt)}+\frac{1}{2\pi}\frac{1}{(1-jt)}\,,$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{(1+jt)+(1-jt)}{(1+jt)(1-jt)},$$

$$f(t)=\frac{1}{\pi\left(1+t^2\right)}.$$

1.10.4. Use os pares de transformadas e as propriedades da transformadas de Fourier para calcular a transformada das funções abaixo:

a. $f(t)=sen(\pi t)e^{-2t}u(t)$.

Na tabela de pares de transformadas de Fourier, tem-se:

$$sen(\omega_0 t)\xrightarrow{\Im}\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)].$$

Então,

$$sen(\pi t)\xrightarrow{\Im}\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\pi)-\delta(\omega+\pi)].$$

Na tabela de pares de transformadas de Fourier, tem-se:

$$u(t)e^{-at} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{a+j\omega}.$$

Então,

$$u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{2+j\omega}.$$

Utilizando a propriedade da convolução na freqüência:

$$f(t)g(t) \rightarrow \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega),$$

tem-se:

$$sen(\pi t)u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\pi)-\delta(\omega+\pi)] * \frac{1}{2+j\omega}\right\},$$

$$sen(\pi t)u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{j}\left\{[\delta(\omega-\pi)-\delta(\omega+\pi)] * \frac{1}{2+j\omega}\right\},$$

$$sen(\pi t)u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{2j}\left\{\frac{1}{2+j(\omega-\pi)} - \frac{1}{2+j(\omega+\pi)}\right\},$$

$$sen(\pi t)u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{2j}\left\{\frac{2+j(\omega+\pi)-2-j(\omega-\pi)}{[2+j(\omega-\pi)][2+j(\omega+\pi)]}\right\},$$

$$sen(\pi t)u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{2j}\left\{\frac{j2\pi}{4+2j(\omega-\pi)+2j(\omega+\pi)-(\omega-\pi)(\omega+\pi)}\right\},$$

$$sen(\pi t)u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{2j}\left\{\frac{j2\pi}{4+j4\omega-(\omega^2-\pi^2)}\right\},$$

$$sen(\pi t)u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{2j}\left\{\frac{j2\pi}{4+j4\omega-\omega^2+\pi^2}\right\}.$$

b. $f(t) = e^{-3|t-2|}$.

Utilizando o par $e^{-|t|} \xrightarrow{\Im} \frac{2}{1+\omega^2}$ e utilizando a propriedade do escalonamento, tem-se:

$$e^{-3|t|} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{|3|}\frac{2}{1+\left(\frac{\omega}{3}\right)^2},$$

$$e^{-3|t|} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{3}\frac{2.9}{9\left[1+\left(\frac{\omega}{3}\right)^2\right]},$$

$$e^{-3|t|} \xrightarrow{\Im} \frac{2.3}{9+(\omega)^2},$$

$$e^{-3|t|} \xrightarrow{\Im} \frac{6}{9+(\omega)^2}.$$

Utilizando a propriedade do deslocamento no tempo,

$$e^{-3|t-2|} \xrightarrow{\Im} \frac{6}{9+(\omega)^2}e^{-j2\omega}$$

c. $f(t) = \dfrac{2sen(\pi t)}{\pi t}\dfrac{sen(2\pi t)}{\pi t}$.

Utilizando o par $\Pi(t) \xrightarrow{\Im} \frac{2}{\omega}sen\left(\frac{\omega}{2}\right)$ e utilizando a propriedade do escalonamento, tem-se:

$$\Pi\left(\frac{t}{a}\right) \xrightarrow{\Im} \frac{1}{\left|\frac{1}{a}\right|}\frac{2}{(a\omega)}sen\left[\frac{(a\omega)}{2}\right],$$

$$\Pi\left(\frac{t}{a}\right) \xrightarrow{\Im} \frac{2}{\omega}sen\left(\frac{a\omega}{2}\right).$$

Utilizando a propriedade da dualidade, tem-se:

$$\frac{2}{t}sen\left(\frac{at}{2}\right)\xrightarrow{\Im}2\pi\Pi\left(\frac{-\omega}{a}\right),$$

$$\frac{1}{\pi t}sen\left(\frac{at}{2}\right)\xrightarrow{\Im}\Pi\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Com $a = 2\pi$, tem-se $\frac{sen(\pi t)}{\pi t}\xrightarrow{\Im}\Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$. Com $a = 4\pi$, tem-se $\frac{sen(2\pi t)}{\pi t}\xrightarrow{\Im}\Pi\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)$. Então,

$$\frac{sen(\pi t)}{\pi t}\frac{sen(2\pi t)}{\pi t}\xrightarrow{\Im}\frac{1}{2\pi}\Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)*\Pi\left(\frac{\omega}{4\pi}\right),$$

$$2\frac{sen(\pi t)}{\pi t}\frac{sen(2\pi t)}{\pi t}\xrightarrow{\Im}\frac{1}{\pi}\Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)*\Pi\left(\frac{\omega}{4\pi}\right).$$

d. $f(t) = \frac{d}{dt}\left[te^{-2t}sen(t)u(t)\right].$

Na tabela de pares de transformadas de Fourier, tem-se:

$$u(t)e^{-at}\xrightarrow{\Im}\frac{1}{a+j\omega}.$$

Então,

$$u(t)e^{-2t}\xrightarrow{\Im}\frac{1}{2+j\omega}.$$

Na tabela de pares de transformadas de Fourier, tem-se:

$$sen(\omega_0 t) \xrightarrow{\Im} \frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)].$$

Então,

$$sen(t) \xrightarrow{\Im} \frac{\pi}{j}[\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)].$$

Utilizando a propriedade da convolução na freqüência, tem-se:

$$sen(t)u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)]*\frac{1}{2+j\omega}\right\},$$

$$sen(t)u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{j}\left\{[\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)]*\frac{1}{2+j\omega}\right\},$$

$$sen(t)u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{2j}\left\{\frac{1}{2+j(\omega-1)}-\frac{1}{2+j(\omega+1)}\right\},$$

$$sen(t)u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{2j}\left\{\frac{2+j(\omega+1)-2-j(\omega-1)}{[2+j(\omega-1)][2+j(\omega+1)]}\right\},$$

$$sen(t)u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{2j}\left\{\frac{j2}{4+2j(\omega-1)+2j(\omega+1)-(\omega-1)(\omega+1)}\right\},$$

$$sen(t)u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{2j}\left\{\frac{j2}{4+j4\omega-(\omega^2-1)}\right\},$$

$$sen(t)u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{2j}\left\{\frac{j2}{4+j4\omega-\omega^2+1}\right\},$$

$$sen(t)u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} \left\{\frac{1}{(2+j\omega)^2+1}\right\}.$$

Utilizando a propriedade da derivação na freqüência $-jtf(t) \xrightarrow{\Im} \frac{dF(\omega)}{d\omega}$, tem-se:

$$-jtsen(t)u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} \frac{d}{d\omega}\left\{\frac{1}{(2+j\omega)^2+1}\right\},$$

$$tsen(t)u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} j\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{1}{(2+j\omega)^2+1}\right\},$$

$$tsen(t)u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} j\frac{-2(2+j\omega)j}{\left[(2+j\omega)^2+1\right]^2},$$

$$tsen(t)u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} \frac{2(2+j\omega)}{\left[(2+j\omega)^2+1\right]^2}.$$

Utilizando a propriedade da derivação no tempo $\frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{\Im} j\omega F(\omega)$, tem-se:

$$\frac{d}{dt}\left(tsen(t)u(t)e^{-2t}\right) \xrightarrow{\Im} j\omega\frac{2(2+j\omega)}{\left[(2+j\omega)^2+1\right]^2}.$$

e. $f(t)=e^{-2t+1}u\left(\frac{t-4}{2}\right).$

Na tabela de pares de transformadas de Fourier, tem-se:

$$u(t)e^{-at} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{a+j\omega}.$$

Então,

$$u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{2+j\omega}.$$

Aplicando a propriedade de deslocamento no tempo, tem-se:

$$u(t-4)e^{-2(t-4)} \xrightarrow{\Im} e^{-j4\omega}\frac{1}{2+j\omega},$$

$$u(t-4)e^{-2t}e^{8} \xrightarrow{\Im} e^{-j4\omega}\frac{1}{2+j\omega},$$

$$u(t-4)e^{-2t+1}e^{7} \xrightarrow{\Im} e^{-j4\omega}\frac{1}{2+j\omega},$$

$$u(t-4)e^{-2t+1}e^{7}e^{-7} \xrightarrow{\Im} e^{-7}e^{-j4\omega}\frac{1}{2+j\omega},$$

$$u(t-4)e^{-2t+1} \xrightarrow{\Im} e^{-7}e^{-j4\omega}\frac{1}{2+j\omega},$$

$$u(t-4)e^{-2t+1} \xrightarrow{\Im} \frac{e^{-j4\omega-7}}{2+j\omega}.$$

f. $f(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{sen(t)}{\pi t}*\frac{sen(2t)}{\pi t}\right).$

Como calculado (no item c),

$$\frac{1}{\pi t}sen\left(\frac{at}{2}\right) \xrightarrow{\Im} \Pi\left(\frac{\omega}{a}\right), \text{ tem-se:}$$

$$\frac{1}{\pi t}sen(t) \xrightarrow{\Im} \Pi\left(\frac{\omega}{2}\right) \text{ e } \frac{1}{\pi t}sen(2t) \xrightarrow{\Im} \Pi\left(\frac{\omega}{4}\right).$$

Então,

$$\frac{sen(t)}{\pi t}*\frac{sen(2t)}{\pi t} \xrightarrow{\Im} \Pi\left(\frac{\omega}{2}\right)\Pi\left(\frac{\omega}{4}\right),$$

$$\frac{sen(t)}{\pi t}*\frac{sen(2t)}{\pi t} \xrightarrow{\Im} \Pi\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Utilizando a propriedade da derivação no tempo $\frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{\Im} j\omega F(\omega)$, tem-se:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{sen(t)}{\pi t}*\frac{sen(2t)}{\pi t}\right) \xrightarrow{\Im} j\omega\Pi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

1.10.5. Use os pares de transformadas e as propriedades da transformadas de Fourier para calcular a transformada inversa das funções abaixo:

a. $F(\omega) = \dfrac{4sen^2(\omega)}{\omega^2}$.

Utilizando o par $\Pi\left(\frac{t}{a}\right) \xrightarrow{\Im} \frac{2}{\omega} sen\left(\frac{a\omega}{2}\right)$ com $a = 2$ e utilizando a propriedade da convolução no tempo, tem-se:

$$\Pi\left(\frac{t}{2}\right) * \Pi\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\Im} \frac{2}{\omega} sen(\omega) \frac{2}{\omega} sen(\omega),$$

$$\Pi\left(\frac{t}{2}\right) * \Pi\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\Im} \frac{4}{\omega^2} sen^2(\omega).$$

Então,

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right) * \Pi\left(\frac{t}{2}\right).$$

b. $F(\omega) = \dfrac{j\omega}{(2 + j\omega)^2}$.

Na tabela de pares de transformadas de Fourier, tem-se:

$$u(t)e^{-at} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{a + j\omega}.$$

Então,

$$u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{2+j\omega}.$$

Utilizando a propriedade da convolução no tempo, tem-se:

$$u(t)e^{-2t} * u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{2+j\omega}\frac{1}{2+j\omega},$$

$$u(t)e^{-2t} * u(t)e^{-2t} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{(2+j\omega)^2}.$$

Utilizando a propriedade da derivação no tempo $\frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{\Im} j\omega F(\omega)$, tem-se:

$$\frac{d}{dt}\left[u(t)e^{-2t} * u(t)e^{-2t}\right] \xrightarrow{\Im} \frac{j\omega}{(2+j\omega)^2}$$

c. $F(\omega) = \frac{4sen(2\omega-2)}{(2\omega-2)} + \frac{4sen(2\omega+2)}{(2\omega+2)}.$

Utilizando o par $\Pi\left(\frac{t}{a}\right) \xrightarrow{\Im} \frac{2}{\omega} sen\left(\frac{a\omega}{2}\right)$ com $a = 4$ e utilizando a propriedade do deslocamento na freqüência com $\omega_0 = 1$, tem-se:

$$e^{jt}\Pi\left(\frac{t}{4}\right) \xrightarrow{\Im} \frac{2}{\omega-1} sen[2(\omega-1)].$$

Utilizando o par $\Pi\left(\frac{t}{a}\right) \xrightarrow{\Im} \frac{2}{\omega} sen\left(\frac{a\omega}{2}\right)$ com $a = 4$ e utilizando a propriedade do deslocamento na freqüência com $\omega_0 = -1$, tem-se:

$$e^{-jt}\Pi\left(\frac{t}{4}\right)\xrightarrow{\Im}\frac{2}{\omega+1}sen[2(\omega+1)].$$

Somando as duas equações, tem-se:

$$e^{jt}\Pi\left(\frac{t}{4}\right)+e^{-jt}\Pi\left(\frac{t}{4}\right)\xrightarrow{\Im}\frac{2}{\omega-1}sen[2(\omega-1)]+\frac{2}{\omega+1}sen[2(\omega+1)],$$

$$\left(e^{jt}+e^{-jt}\right)\Pi\left(\frac{t}{4}\right)\xrightarrow{\Im}\frac{2}{\omega-1}sen[2(\omega-1)]+\frac{2}{\omega+1}sen[2(\omega+1)],$$

$$2\cos(t)\Pi\left(\frac{t}{4}\right)\xrightarrow{\Im}\frac{4}{2\omega-2}sen[2(\omega-1)]+\frac{4}{2\omega+2}sen[2(\omega+1)].$$

d. $F(\omega)=\dfrac{2sen(\omega)}{\omega(1+j\omega)}$.

Utilizando o par $\Pi\left(\frac{t}{a}\right)\xrightarrow{\Im}\frac{2}{\omega}sen\left(\frac{a\omega}{2}\right)$ com $a=2$, tem-se:

$$\Pi\left(\frac{t}{2}\right)\xrightarrow{\Im}\frac{2}{\omega}sen(\omega).$$

Na tabela de pares de transformadas de Fourier, tem-se:

$$u(t)e^{-at}\xrightarrow{\Im}\frac{1}{a+j\omega}.$$

Então,

$$u(t)e^{-t}\xrightarrow{\Im}\frac{1}{1+j\omega}.$$

Utilizando a propriedade da convolução no tempo, tem-se:

$$\Pi\left(\frac{t}{2}\right) * u(t)e^{-t} \xrightarrow{\Im} \frac{2}{\omega} sen(\omega) \frac{1}{1+j\omega}.$$

e. $F(\omega) = \frac{d}{d\omega}\left[4\cos(3\omega)\frac{sen(2\omega)}{\omega}\right].$

Utilizando o par $\Pi\left(\frac{t}{a}\right) \xrightarrow{\Im} \frac{2}{\omega} sen\left(\frac{a\omega}{2}\right)$ com $a = 4$, tem-se:

$$\Pi\left(\frac{t}{4}\right) \xrightarrow{\Im} \frac{2}{\omega} sen(2\omega).$$

Tomando agora a transformada de Fourier do coseno, tem-se:

$$\cos(\omega_0 t) \xrightarrow{\Im} \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].$$

Com $\omega_0 = 1$, tem-se:

$$\cos(t) \xrightarrow{\Im} \pi[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)].$$

Aplicando a propriedade da dualidade, tem-se:

$$\pi[\delta(t-1) + \delta(t+1)] \xrightarrow{\Im} 2\pi\cos(-\omega),$$

$$[\delta(t-1) + \delta(t+1)] \xrightarrow{\Im} 2\cos(\omega).$$

Aplicando o escalonamento, tem-se:

$$[\delta(at-1)+\delta(at+1)] \xrightarrow{\Im} \frac{1}{|a|} 2\cos\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Com $a=\dfrac{1}{3}$, tem-se:

$$[\delta(t-3)+\delta(t+3)] \xrightarrow{\Im} 6\cos(3\omega),$$

$$\frac{1}{3}[\delta(t-3)+\delta(t+3)] \xrightarrow{\Im} 2\cos(3\omega).$$

Tomando as duas equações e aplicando a propriedade da convolução no tempo, tem-se:

$$\frac{1}{3}[\delta(t-3)+\delta(t+3)]*\Pi\left(\frac{t}{4}\right) \xrightarrow{\Im} 2\cos(3\omega)\frac{2}{\omega}sen(2\omega),$$

$$\frac{1}{3}\left[\Pi\left(\frac{t-3}{4}\right)+\Pi\left(\frac{t+3}{4}\right)\right] \xrightarrow{\Im} \frac{4}{\omega}\cos(3\omega)sen(2\omega).$$

Aplicando a propriedade de derivação na freqüência, tem-se:

$$\frac{-jt}{3}\left[\Pi\left(\frac{t-3}{4}\right)+\Pi\left(\frac{t+3}{4}\right)\right] \xrightarrow{\Im} \frac{d}{d\omega}\left[\frac{4}{\omega}\cos(3\omega)sen(2\omega)\right].$$

f. $$F(\omega)=j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{e^{j2\omega}}{1+j\dfrac{\omega}{3}}\right].$$

Na tabela de pares de transformadas de Fourier, tem-se:

$$u(t)e^{-at} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{a + j\omega}.$$

Então,

$$u(t)e^{-3t} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{3 + j\omega},$$

$$3u(t)e^{-3t} \xrightarrow{\Im} \frac{3}{3 + j\omega} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{3}}.$$

Aplicando a propriedade de deslocamento no tempo, tem-se:

$$3u(t+2)e^{-3(t+2)} \xrightarrow{\Im} \frac{e^{j2\omega}}{1 + j\dfrac{\omega}{3}},$$

Aplicando a propriedade de derivação na freqüência, tem-se:

$$-jt3u(t+2)e^{-3(t+2)} \xrightarrow{\Im} \frac{d}{d\omega}\left(\frac{e^{j2\omega}}{1 + j\dfrac{\omega}{3}} \right),$$

$$3tu(t+2)e^{-3(t+2)} \xrightarrow{\Im} j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{e^{j2\omega}}{1 + j\dfrac{\omega}{3}} \right).$$

1.11. LISTA DE EXERCÍCIOS

1.11.1. Use a definição da Transformada de Fourier para obter as representações no domínio de freqüência dos sinais seguintes:

a. $f(t) = e^{t}u(-t+1)$.

b. $f(t) = e^{-3|t-2|}$.

c. $f(t) = t2e^{t}u(-t)$.

1.11.2. Use a equação que descreve a representação por transformada de Fourier para determinar os sinais no domínio do tempo correspondentes As seguintes transformadas de Fourier:

a. $F(\omega) = \begin{cases} \omega, |\omega| < \dfrac{\pi}{2} \\ 0, c.c. \end{cases}$.

b. $F(\omega) = e^{-\frac{\omega}{3}}u(\omega+2)$.

c. $F(\omega) = e^{-2|\omega|}$.

1.11.3. Use os pares de transformadas e as propriedades da transformadas de Fourier para calcular a transformada das funções abaixo:

a. $f(t) = sen(\pi t - \pi)e^{-2t-2}u(t-2)$.

b. $f(t) = e^{-|t+2|}$.

c. $f(t) = \frac{d}{dt}\left[t^2 e^{-3t} sen(5t)u(t)\right]$.

d. $f(t) = e^{-4t+3} u\left(\frac{t-5}{2}\right)$.

1.11.4. Use os pares de transformadas e as propriedades da transformadas de Fourier para calcular a transformada inversa das funções abaixo:

a. $F(\omega) = \frac{4sen^2(2\omega)}{\omega^2}$.

b. $F(\omega) = \frac{j2\omega}{(1+j3\omega)^2}$.

c. $F(\omega) = \frac{4sen(2\omega-1)}{(2\omega-1)} + \frac{4sen(2\omega+1)}{(2\omega+1)}$.

d. $F(\omega) = \frac{2sen(2\omega)}{\omega(5+j\omega)}$.

e. $F(\omega) = \frac{d}{d\omega}\left[4\cos(\omega)\frac{sen(\omega)}{\omega}\right]$.

f. $F(\omega) = \left[\frac{e^{j\omega}}{1+j\frac{5\omega}{3}}\right]$.

g. $F(\omega) = \cos(3\omega-5)sen(2\omega-3)$.