Capítulo V – MODULAÇÃO

Sistemas para comunicação à distância normalmente requerem uma portadora de alta freqüência para transmitir informação. Existem três parâmetros da "portadora" que podem ser modificados (ou como chamaremos *modulados*) para suportar esta transmissão. Os parâmetros são amplitude, freqüência e fase, que por sua ver resultam em modulação em amplitude, modulação em freqüência e modulação em fase, respectivamente.

5.1. TEOREMA DA MODULAÇÃO

Basicamente, quando aplicada uma translação em freqüência (propriedade da transformada de Fourier) a um sinal de banda passante, o resultado obtido é uma resposta em freqüência de banda passante.

Para melhor explicar o teorema da modulação vamos utilizar a seguinte notação: O sinal modulador $x(t)$, que contem a mensagem a ser transmitida, tem banda limitada e módulo da amplitude normalizada, ou seja,

$$x(t) = 0, |\omega| > \omega_0 \tag{5.1}$$

e,

$$|x(t)| \leq 1\,. \tag{5.2}$$

Vamos considerar então o sinal de banda passante $x_{\text{mod}}(t)$ (modulado):

$$x_{\text{mod}}(t) = x(t)e^{-j(\omega_c t+\phi)}\,, \tag{5.3}$$

onde $x(t)$ é o envelope, ϕ é a fase do sinal e ω_c é a freqüência angular de oscilação da portadora.

Então, a partir da propriedade de translação na freqüência da transformada de Fourier, $x(t)y(t) \xrightarrow{\Im} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$, pode-se calcular o conteúdo espectral do sinal modulado apresentado em (5.3). Considerando a fase fixa, tem-se:

$$x(t)e^{-j(\omega_c t)} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)], \tag{5.4}$$

$$x(t)e^{-j(\omega_c t)} \xrightarrow{\Im} \frac{1}{2}[X(\omega - \omega_c) + X(\omega + \omega_c)]. \tag{5.5}$$

Note que o sinal de mensagem aparece deslocado na freqüência em (5.5), ou seja, o sinal está modulado pela portadora oscilando na freqüência ω_c. A Fig. 5.1 ilustra este processo.

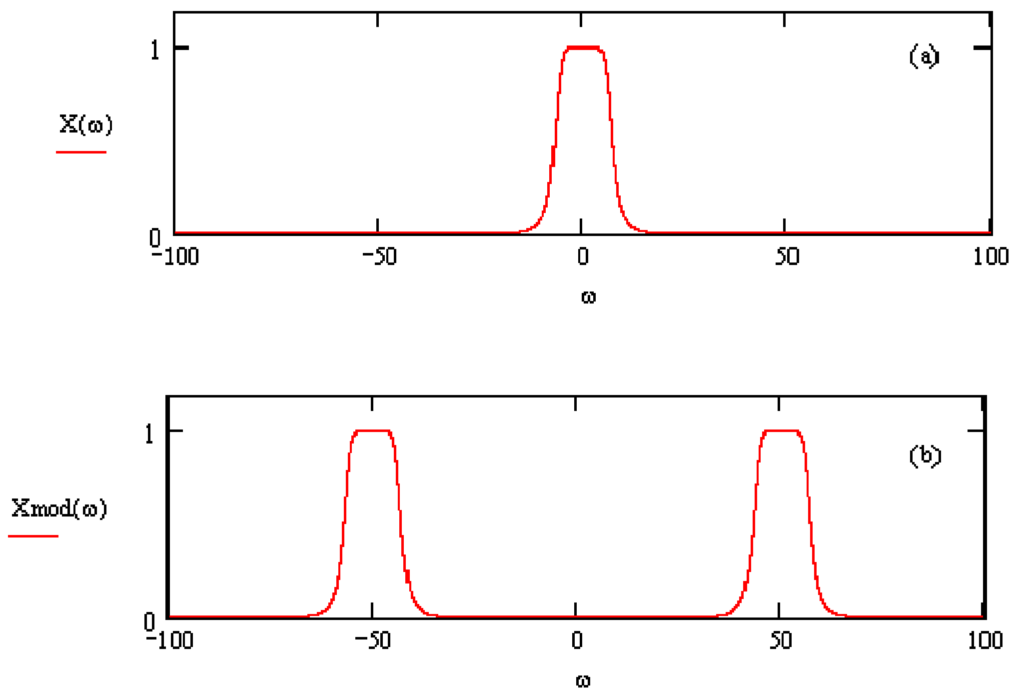


Figura 5.1 – *(a) Espectro do sinal de mensagem e (b) espectro do sinal modulado.*

Considerando (5.3) e sabendo que $e^{j(\omega_c t + \phi)} = \cos(\omega_c t + \phi) + j sen(\omega_c t + \phi)$, tem-se:

$$x_{\mathrm{mod}}(t) = x(t)\cos(\omega_c t + \phi) + j x(t) sen(\omega_c t + \phi). \tag{5.6}$$

Mas sabendo que:

$$\cos(\omega_c t+\phi)=\cos(\omega_c t)\cos(\phi)-sen(\omega_c t)sen(\phi) \tag{5.7}$$

e

$$sen(\omega_c t+\phi)=sen(\omega_c t)\cos(\phi)-\cos(\omega_c t)sen(\phi), \tag{5.8}$$

Então,

$$\begin{aligned} x_{\text{mod}}(t) &= x(t)[\cos(\omega_c t)\cos(\phi)-sen(\omega_c t)sen(\phi)] \\ &+ jx(t)[sen(\omega_c t)\cos(\phi)-\cos(\omega_c t)sen(\phi)] \end{aligned}. \tag{5.9}$$

Re-arrumando os termos, tem-se:

$$x_{\text{mod}}(t)=x(t)[\cos(\phi)-jsen(\phi)]\cos(\omega_c t)+x(t)[j\cos(\phi)-sen(\phi)]sen(\omega_c t). \tag{5.10}$$

As componentes $x(t)[\cos(\phi)-jsen(\phi)]$ e $x(t)[j\cos(\phi)-sen(\phi)]$ são chamadas de componentes em fase e em quadratura respectivamente.

5.2. MODULAÇÃO EM AMPLITUDE

A propriedade mais importante dos sistemas que utilizam modulação em amplitude é que o envelope apresenta a mesma forma do sinal de mensagem. A freqüência da portadora é normalmente muito maior do que a freqüência máxima do sinal. Isto significa que a portadora oscila em uma freqüência muito alta do que o sinal de mensagem. Como conseqüência, tem-se o sinal modulado na portadora a uma distância espectral convenientemente afastada da freqüência nula. Um exemplo razoável é $f_c=1000kHz$ e $B=4kHz$. Note que $f_c=1000kHz$ recai dentro da faixa de transmissão das emissoras de

AM. Uma banda de 4 kHz também é razoável, já que o conteúdo espectral da voz humana recai nesta faixa.

O envelope pode ser escrito como:

$$A(t) = A_c[1 + \mu x(t)]. \tag{5.11}$$

onde μ é uma constante positiva chamada de índice de modulação. É importante lembrar que $|x(t)| \leq 1$.

Então, o sinal AM completo pode ser escrito como:

$$x_{AM}(t) = A_c[1 + \mu x(t)]\cos(\omega_c t), \tag{5.12}$$

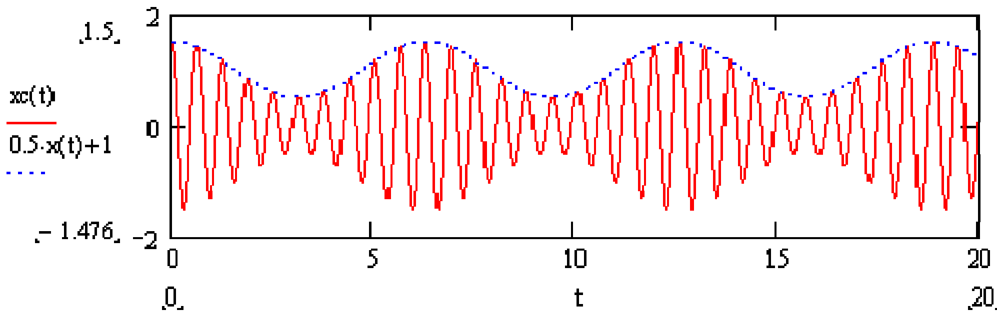
$$x_{AM}(t) = A_c \cos(\omega_c t) + A_c \mu x(t)\cos(\omega_c t). \tag{5.13}$$

Pode-se notar que nesta modulação não existe mudança de fase na portadora. Também é importante frisar que não existe componente em quadratura, somente em fase.

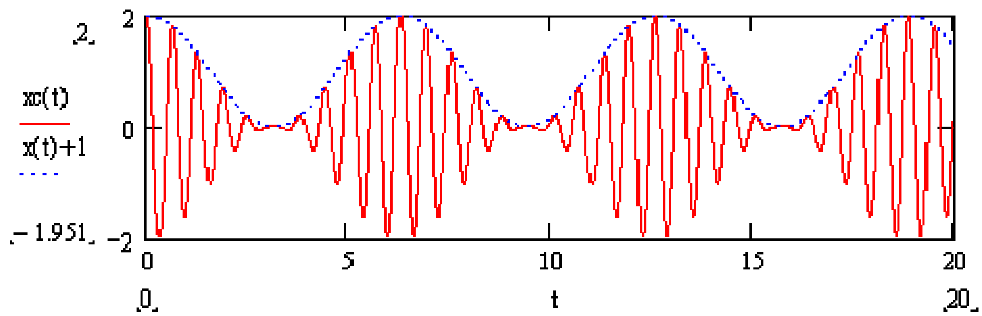
Na Fig. 5.2 estão apresentados exemplos de sinais modulados em amplitude (em vermelho) e o sinal de mensagem (azul pontilhado) para três valores distintos de índice de modulação (a) $\mu = 0{,}5$, (b) $\mu = 1$ e (c) $\mu = 1{,}5$.

No caso onde $\mu < 1$, toda a informação está na envoltória sem nenhuma inversão de fase. Então, é fácil extrair a mensagem com um circuito detector de envoltória. Obedecendo esta condição, tem-se a garantia que a amplitude mínima da envoltória é maior do que zero e a amplitude máxima da envoltória é no máximo duas vezes a amplitude da portadora. Assim, não se tem distorção do envelope.

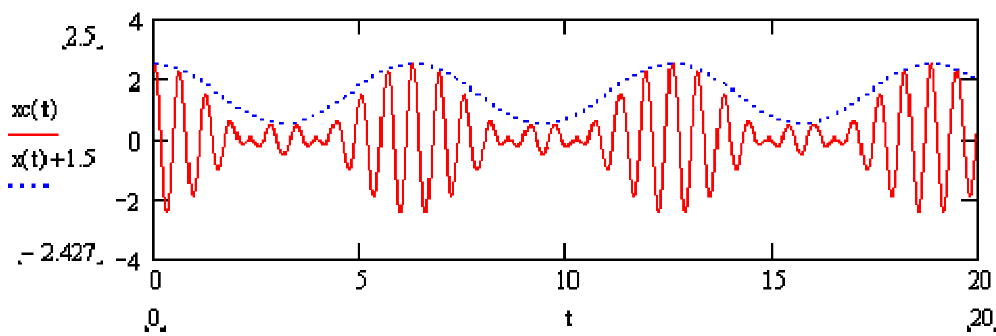
Se $\mu > 1$, tem-se mudança de fase na portadora (ver Fig. 5.2.a), implicando em distorção do envelope, tornando a detecção pelo circuito detector de envoltória impossível. É importante frisar que existem detectores que podem ser utilizados neste caso.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.2 – *Sinais modulados AM (vermelho) e sinal de mensagem (azul pontilhado) para três valores distintos de índice de modulação (a)* $\mu = 0{,}5$, *(b)* $\mu = 1$ *e (c)* $\mu = 1{,}5$.

Tomando a expressão para o sinal modulado e calculando a transformada de Fourier em ambos os lados da equação, tem-se:

$$X_{AM}(\omega) = \frac{A_c}{2}\left[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)\right] + \mu \frac{A_c}{2}\left[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)\right], \qquad (5.14)$$

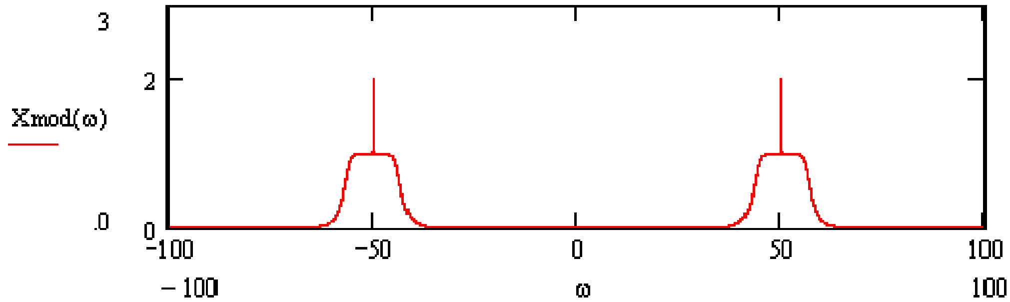


Figura 5.3 – *Espectro do sinal modulado em amplitude com portadora.*

Pode-se calcular a potência média transmitida pela seguinte expressão:

$$S_{AM}(\omega) = \frac{1}{T}\int_0^T x_{AM}{}^2(t)dt\ , \tag{5.15}$$

$$S_{AM}(\omega) = \frac{1}{T}\int_0^T \{A_c[1+\mu x(t)]\cos(\omega_c t)\}^2 dt\ , \tag{5.16}$$

$$S_{AM}(\omega) = \frac{A_c{}^2}{T}\int_0^T [1+\mu x(t)]^2 \cos(\omega_c t)^2 dt\ , \tag{5.17}$$

$$S_{AM}(\omega) = \frac{A_c{}^2}{T}\int_0^T [1+\mu x(t)]^2 \left[\frac{1+\cos(2\omega_c t)}{2}\right]dt\ , \tag{5.18}$$

$$S_{AM}(\omega) = \frac{A_c{}^2}{2T}\int_0^T [1+\mu x(t)]^2 dt + \frac{A_c{}^2}{2T}\int_0^T [1+\mu x(t)]^2 \cos(2\omega_c t)dt\ . \tag{5.19}$$

Como a freqüência da portadora é muito maior do que a freqüência máxima do sinal de mensagem, então o segundo termo à direita de (5.19) é zero. Tem-se então:

$$S_{AM}(\omega) = \frac{A_c{}^2}{2T}\int_0^T [1+\mu x(t)]^2 dt\ , \tag{5.20}$$

$$S_{AM}(\omega) = \frac{A_c{}^2}{2T}\int_0^T \left[1+2\mu x(t)+\mu^2 x(t)^2\right]dt\ , \tag{5.21}$$

$$S_{AM}(\omega) = \frac{A_c{}^2}{2T}\int_0^T \left[1+\mu^2 x(t)^2\right]dt + \frac{A_c{}^2}{2T}\int_0^T 2\mu x(t)dt\ . \tag{5.22}$$

Assumindo que o valor médio do sinal de mensagem é zero, ou seja, $\int_0^T \mu x(t) dt = 0$.

Tem-se:

$$S_{AM}(\omega) = \frac{A_c^2}{2T}\int_0^T \left[1 + \mu^2 x(t)^2\right] dt\,, \tag{5.23}$$

$$S_{AM}(\omega) = \frac{A_c^2}{2T}\int_0^T 1 dt + \frac{A_c^2}{2T}\int_0^T \mu^2 x(t)^2 dt\,, \tag{5.24}$$

$$S_{AM}(\omega) = \frac{A_c^2}{2T}T + \frac{A_c^2\mu^2}{2T}\int_0^T x(t)^2 dt\,, \tag{5.25}$$

$$S_{AM}(\omega) = \frac{A_c^2}{2} + \frac{A_c^2\mu^2}{2}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2 dt\,, \tag{5.25}$$

$$S_{AM}(\omega) = \frac{A_c^2}{2}\left[1 + \mu^2\frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2 dt\right], \tag{5.25}$$

$$S_{AM}(\omega) = \frac{A_c^2}{2}\left[1 + \mu^2 S_x(\omega)\right], \tag{5.25}$$

onde $S_x(\omega)$ é a densidade espectral de potência do sinal de mensagem.

5.2.1. MODULADORES AM

Existem basicamente dois tipos clássicos de moduladores AM. O modulador produto e o modulador balanceado. O modulador produto está apresentado esquematicamente na Fig. 5.4. O circuito multiplicador pode ser implementado utilizando uma célula de Gilbert, cujo funcionamento é baseado num par circuito par diferencial. O circuito somador pode ser implementado utilizando um circuito somador com amplificadores operacionais.

Note que a entrada é multiplicada pela onda oscilando na freqüência da portadora e depois multiplicada pelo índice de modulação para só depois ser somada à portadora. Note que se for realizada uma redução de diagramas de blocos, tem-se uma resposta equivalente a apresentada em (5.12).

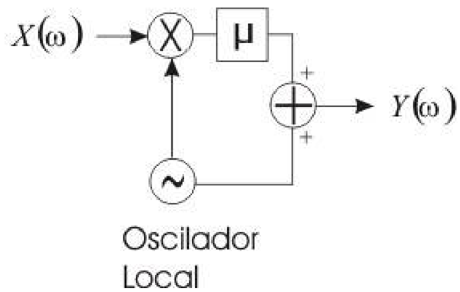


Figura 5.4 – *Diagrama esquemático de um modulador AM produto.*

O outro tipo de modulador é o modulador balanceado cujo diagrama esquemático está mostrado na Fig. 5.5. Note que o resultado proporcionado por este circuito não conta com uma parcela exclusiva da portadora. Esta solução é chamada de modulação em amplitude com supressão de portadora (**AM**, *Supressed Carrier Amplitude Modulation*) e o seu espectro está apresentado na Fig. 5.6.a. Esta solução é mais eficiente em termos de potência, contudo apresenta como desvantagens maior custo e detectores mais caros, já que um sistema AM comum pode utilizar um demodulador mais simples.

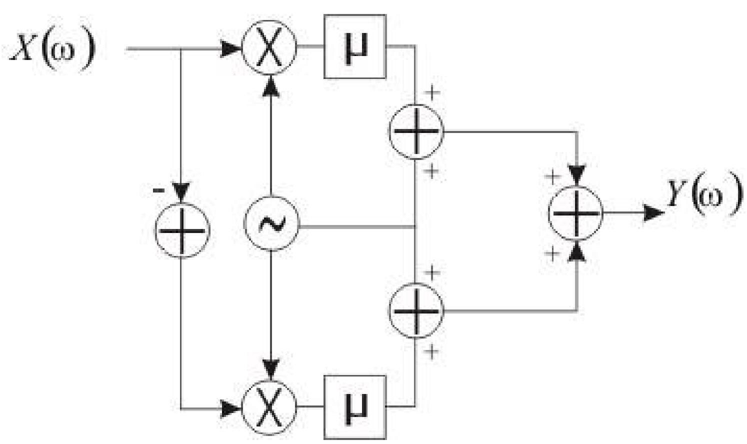


Figura 5.5 – *Diagrama esquemático de um modulador AM balanceado.*

Também é sabido que para sinais reais no tempo, o espectro na freqüência é par, ou seja, as partes positivas (*Upper Side Band*) e negativo (*Lower Side Band*) do espectro em banda básica contém a mesma informação. Então, para economizar banda de transmissão pode-se enviar somente uma das bandas. Este tipo de modulação é chamada de modulação em amplitude em banda simples (**AM-SSB**, *Amplitude Modulation with Single Sided Band*) e o seu espectro está apresentado na Fig. 5.6.b. Muitos sistemas AM utilizam este sistema.

Entretanto, às vezes é custoso construir filtros precisos para extrair somente uma parte do sinal. Então, existe uma solução intermediária (usada para transmitir o sinal de vídeo de um canal de televisão analógico convencional). Esta alternativa é chamada de modulação em amplitude com banda vestigial (**AM-VSB**, *Amplitude Modulation with Vestigial Sided Band*) e o seu espectro está apresentado na Fig. 5.6.c. O AM-VSB manda uma das bandas e uma parte da outra banda. A vantagem é que se tem uma menor utilização de faixa com menor restrição aos filtros.

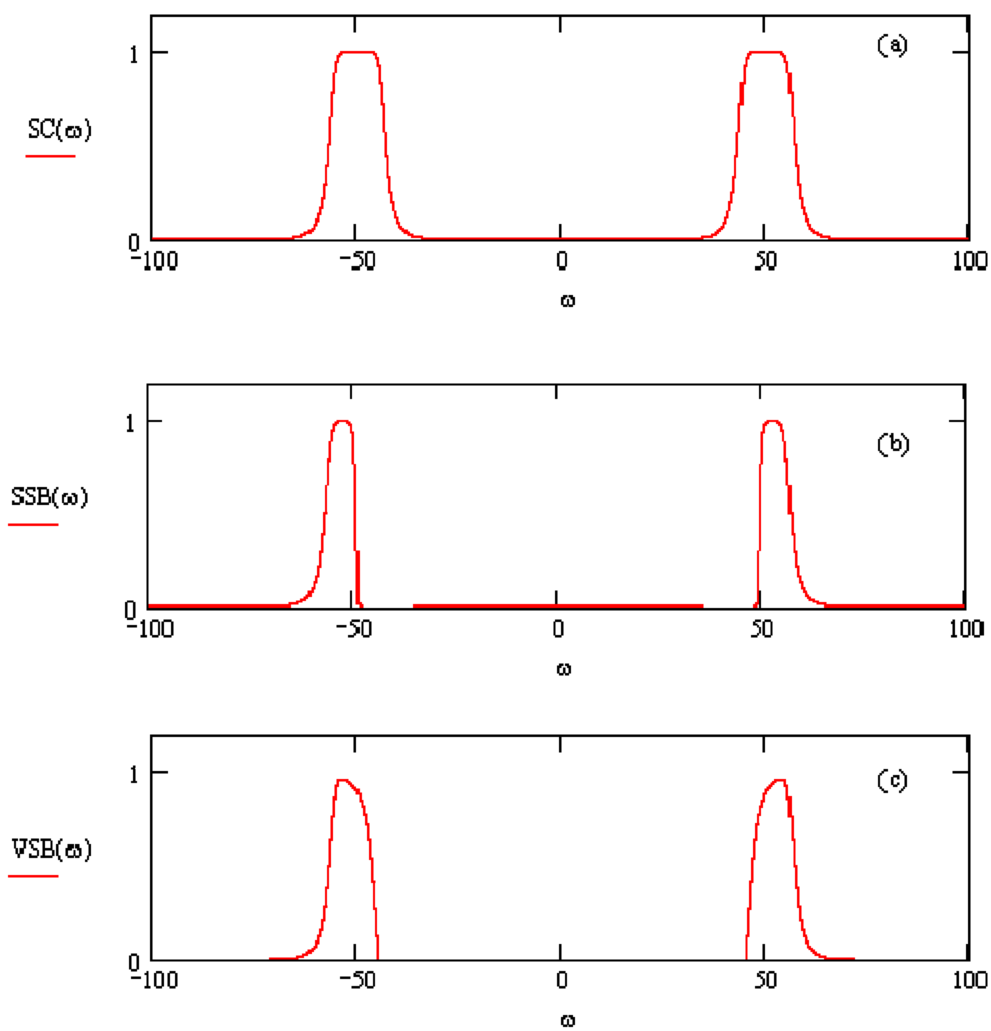


Figura 5.6 – *Espectro do sinal modulado em amplitude com portadora.*

5.2.2. DEMODULADORES AM

Existem basicamente dois tipos clássicos de demoduladores AM. O demodulador detector de envoltória e o demodulador por conversão de freqüência. O demodulador detector de envoltória está apresentado esquematicamente na Fig. 5.7. O demodulador por conversão de freqüência está apresentado esquematicamente na Fig. 5.8.

Considere o demodulador detector de envoltória, o primeiro bloco funcional é um retificador. O objetivo é tomar somente a parte positiva do sinal A(t) (indicado na Fig. 5.8) resultando no sinal B(t). Depois o sinal B(t) passa por um filtro passa-baixa, gerando o sinal indicado em azul C(t). Este sinal tem esta aparência porque o sinal não consegue acompanha o sinal de alta freqüência.

Figura 5.7 – *Diagrama esquemático de um demodulador AM detector de envoltória.*

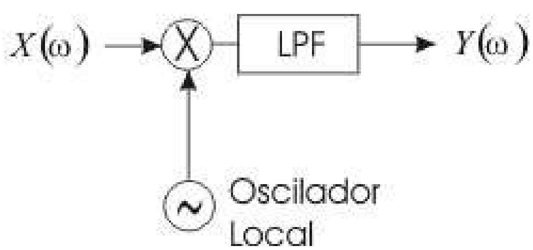


Figura 5.8 – *Diagrama esquemático de um demodulador AM por conversão de freqüência.*

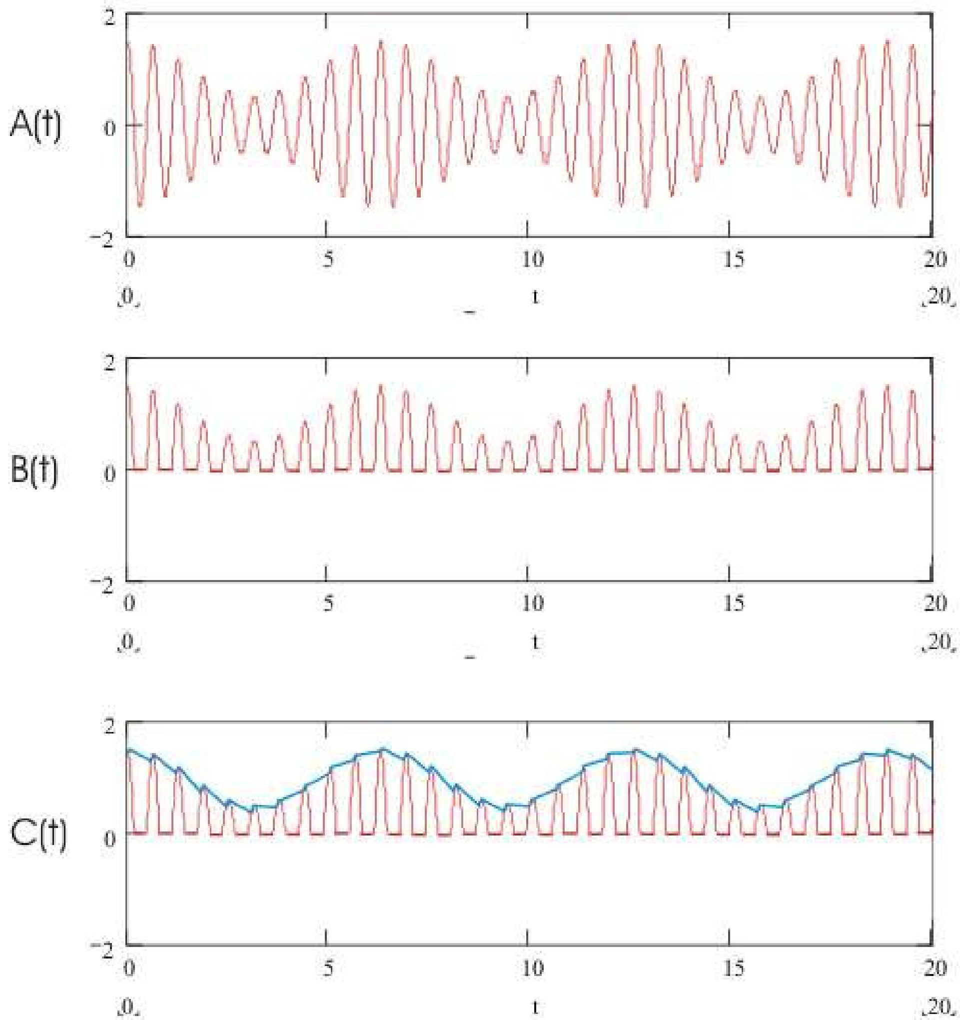


Figura 5.9 – *Sinais envolvidos em um exemplo de demodulação AM por detecção de envoltória. A(t) Sinal original, b(t) sinal retificado e c(t) sinal demodulado depois de passar pelo LPF.*

Considere o demodulador por conversor de frequencia, o bloco funcional multiplicador gera um sinal produto do sinal proveniente de um oscilador local e o sinal modulado que tem a seguinte forma:

$$y_{multiplicador}(t) = A_c[1+\mu x(t)]\cos(\omega_c t)A_c\cos(\omega_c t), \tag{5.26}$$

$$y_{multiplicador}(t) = A_c^2[1+\mu x(t)]\cos^2(\omega_c t), \tag{5.27}$$

$$y_{multiplicador}(t) = A_c^2[1+\mu x(t)]\left[\frac{1+\cos(2\omega_c t)}{2}\right], \tag{5.27}$$

Depois do filtro passa-baixa o sinal $y_{multiplicador}(t)$ perde a componente de alta freqüência e se reduz a:

$$y_{multiplicador}(t)=\frac{A_c^2}{2}\left[1+\mu x(t)\right], \tag{5.27}$$

que depende linearmente com o sinal em banda básica.

5.4. MODULAÇÃO ANGULAR

A modulação angular consiste em alterar a fase instantânea da portadora de acordo com o sinal que se deseja transmitir. A maior vantagem desta classe de modulações é que como a variação imposta pelo sinal está na fase da portadora e a maioria dos ruídos e interferências atuam na amplitude, então estas podem fornecer uma melhor discriminação contra ruído e interferência quando comparadas às modulações em amplitude.

Essencialmente, todas as modulações angulares podem ser representadas da seguinte forma:

$$x_{\text{mod}ulação\_angular}(t)=A_c\cos\phi_i(t), \tag{5.28}$$

onde $\phi_i(t)$ é a fase instantânea da portadora.

Se a fase instantânea da portadora $\phi_i(t)$ aumentar monotonicamente no tempo em um intervalo de tempo $[t,t+t_0]$, pode-se calcular a freqüência media da portadora como:

$$\omega_{média}(t)=\frac{\phi_i(t+t_0)-\phi_i(t)}{t_0}. \tag{5.29}$$

Então, se o intervalo de tempo t_0 for infinitesimal, pode-se definir a freqüência angular instantânea $\omega_i(t)$ pela seguinte expressão:

$$\omega_i(t) = \frac{d\phi_i(t)}{dt}. \tag{5.30}$$

Note que a freqüência angular instantânea $\omega_i(t)$ for constante, caso correspondente à portadora não modulada, então:

$$\phi_i(t) = \omega_c t + \phi_c, \tag{5.31}$$

onde ω_c é a freqüência angular central da portadora e ϕ_c é a fase inicial da portadora.

Existem duas formas básicas de associar a fase da portadora ao sinal de mensagem $x(t)$, são elas:

- Modulação em fase (PM, *Phase modulation*)
- Modulação em freqüência (FM, *Frequency modulation*)

5.3.1. MODULAÇÃO EM FASE: DEFINIÇÃO

Neste caso, o ângulo instantâneo da portadora é variado linearmente de acordo com o sinal de mensagem, ou seja,

$$\phi_i(t) = \omega_c t + K_p x(t), \tag{5.32}$$

onde K_p é a sensibilidade à fase do modulador.

Note que a freqüência central da portadora permanece inalterada. Entretanto, a fase da portadora será alterada de acordo com a amplitude do sinal. O sinal modulado em fase pode então ser expresso pela seguinte equação:

$$x_{PM}(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + K_p x(t)\right], \tag{5.33}$$

isto se a fase inicial da portadora for nula.

Perceba que se o sinal de mensagem for nulo, tem-se uma onda em fase com a função coseno. Por outro lado, se $x(t) = \frac{\pi}{2K_p}$:

$$x_{PM}(t) = A_c \cos\left(\omega_c t + \frac{\pi}{2}\right), \tag{5.34}$$

que corresponde a:

$$x_{PM}(t) = -A_c sen(\omega_c t). \tag{5.35}$$

Perceba que se o sinal de mensagem pode influenciar diretamente a fase do sinal modulado. A modulação em fase é muito utilizada para esquemas de modulação digital.

5.3.2. MODULAÇÃO EM FREQUENCIA: DEFINIÇÃO

Neste caso, a freqüência instantânea da portadora é que depende linearmente do sinal de mensagem, ou seja,

$$\omega_i(t) = \omega_c + K_\omega x(t), \tag{5.36}$$

onde K_ω é a sensibilidade à freqüência angular do modulador. Pode-se definir também a sensibilidade à freqüência do modulador como $K_f = \frac{K_\omega}{2\pi}$.

Note que como $\omega_i(t) = \frac{d\phi_i(t)}{dt}$, então:

$$\phi_i(t) = \int_0^t \omega_i(\tau)d\tau, \tag{5.37}$$

Substituindo (5.36) em (5.37):

$$\phi_i(t) = \int_0^t [\omega_c + K_\omega x(\tau)] d\tau \, , \tag{5.38}$$

que corresponde a:

$$\phi_i(t) = \int_0^t \omega_c d\tau + \int_0^t K_\omega x(\tau) d\tau \, , \tag{5.39}$$

$$\phi_i(t) = \omega_c \int_0^t d\tau + K_\omega \int_0^t x(\tau) d\tau \, , \tag{5.40}$$

$$\phi_i(t) = \omega_c t + K_\omega \int_0^t x(\tau) d\tau \, . \tag{5.41}$$

Substituindo (5.41) em (5.28), pode-se definir a expressão geral para um sinal modulado em freqüência:

$$x_{FM}(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + K_\omega \int_0^t x(\tau) d\tau \right], \tag{5.42}$$

5.3.3. RELAÇÃO ENTRE MODULAÇÃO EM FASE E MODULAÇÃO EM FREQUENCIA

Perceba que em ambos os casos (PM e FM), existe uma alteração nos instantes em que a portadora cruza o eixo de tempo em função do sinal de mensagem. Note que isso não ocorre para modulações em amplitude puras. Por outro lado, nas modulações PM e FM, a amplitude não é alterada significativamente, o que é bastante interessante para transmissão, já que a maior parte dos ruídos e interferências influencia na amplitude.

Um modulador FM pode ser construído a partir de um bloco funcional integrador (ver capítulo 3), seguido de um modulador PM. Por outro lado, um modulador PM pode ser construído a partir de um bloco funcional diferenciador (ver capítulo 3), seguido de um modulador FM.

5.4. MODULAÇÃO EM FREQÜÊNCIA

Como a modulação em freqüência é amplamente utilizada, esta seção será devotada a esclarecer aspectos importantes sobre a mesma.

Como pode ser facilmente percebido a partir da observação de (5.42), o sinal FM é uma função não linear do sinal de mensagem. Assim, o conteúdo espectral de um sinal FM não apresenta, à princípio, as mesmas características do sinal em banda base.

Se K_F é positivo, quanto maior o valor de $x(t)$, maior é a freqüência instantânea da portadora. A Fig. 5.10 mostra um sinal de mensagem $x(t)$ com freqüência angular 1 e o sinal modulado onde a portadora com freqüência angular fundamental 10 e com $k_F = 4$. Note que a proposição acima é verificada.

Para facilitar o entendimento para o espectro de um sinal FM, considere um sinal com tom único e de amplitude constante, ou seja,

$$x(t) = A_s \cos(\omega_s t)\,, \tag{5.43}$$

Assim utilizando (5.36) e a equação acima, pode-se determinar a freqüência angular instantânea da portadora pela seguinte expressão:

$$\omega_i(t) = \omega_c + K_\omega A_s \cos(\omega_s t), \tag{5.44}$$

Ou ainda,

$$\omega_i(t) = \omega_c + \Delta K \cos(\omega_s t), \tag{5.45}$$

onde $\Delta K = K_\omega A_s$ é o máximo desvio de freqüência angular do modulador. Note que também é possível definir o desvio de freqüência como $\Delta f = \dfrac{K_\omega A_s}{2\pi} = K_f A_s$. O desvio de freqüência representa a variação máxima da freqüência instantânea em relação à freqüência da portadora.

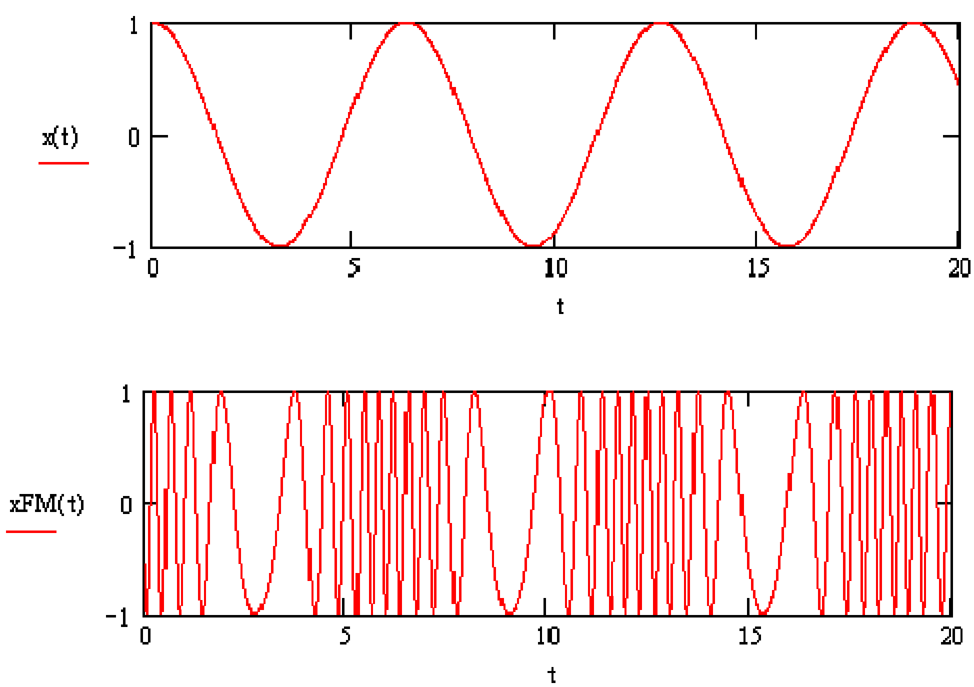


Figura 5.10 – *Sinais envolvidos em um exemplo de modulação FM por detecção de envoltória. x(t) é o sinal de mensagem, enquanto que xFM(t) é o sinal modulado em freqüência com K_F positivo.*

Substituindo (5.45) em (5.42), tem-se

$$x_{FM}(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + K_\omega \int_0^t A_s \cos(\omega_s \tau) d\tau\right], \tag{5.46}$$

$$x_{FM}(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + K_\omega A_s \int_0^t \cos(\omega_s \tau) d\tau\right], \tag{5.47}$$

$$x_{FM}(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + \Delta K \int_0^t \cos(\omega_s \tau) d\tau\right], \tag{5.48}$$

$$x_{FM}(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + \Delta K \frac{sen(\omega_s t)}{\omega_s}\right], \tag{5.49}$$

$$x_{FM}(t) = A_c \cos[\omega_c t + \beta sen(\omega_s t)], \tag{5.50}$$

onde $\beta = \frac{\Delta K}{\omega_s}$ é o índice de modulação em freqüência e é definido pela razão entre o máximo desvio de freqüência angular do modulador e a freqüência angular da portadora.

Dependendo do valor de β em relação à 1 rad, pode-se continuar esta análise de duas formas distintas, a saber:

- β << 1 rad → Análise de FM banda estreita;
- Caso contrário → Análise de FM banda larga.

5.4.1. ANÁLISE DE FM BANDA ESTREITA

Considere (5.50) e aplique a relação trigonométrica do coseno da soma:

$$x_{FM}(t) = A_c \cos[\beta sen(\omega_s \tau)]\cos(\omega_c t) - A_c sen(\omega_c t) sen[\beta sen(\omega_s t)]. \tag{5.51}$$

Como β é muito pequeno, então $\cos[\beta sen(\omega_s t)] \cong 1$ e $sen[\beta sen(\omega_s t)] \cong \beta sen(\omega_s t)$. Então,

$$x_{FM}(t) = A_c \cos(\omega_c t) - A_c sen(\omega_c t) \beta sen(\omega_s t), \tag{5.52}$$

$$x_{FM}(t) = A_c \cos(\omega_c t) - A_c \beta sen(\omega_c t) sen(\omega_s t)\,. \tag{5.53}$$

Então, pode-se construir o diagrama de blocos para um modulador FM banda estreita da seguinte forma:

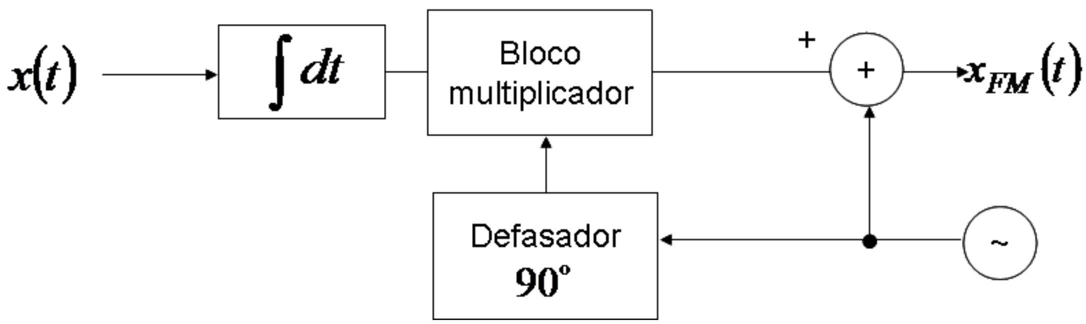


Figura 5.11 – *Diagrama de blocos de um modulador FM banda estreita.*

Perceba que neste caso o módulo do sinal FM modulado de banda estreita é um pouco de diferente da amplitude da portadora. Entretanto para valores de β muito pequenos ($\beta < 0{,}3rad$), a diferença é desprezível.

Retomando (5.53) e aplicando a propriedade trigonométrica da multiplicação de senos, tem-se:

$$x_{FM}(t) = A_c \cos[\omega_c t] - \frac{A_c \beta}{2}\left[\cos(\omega_c + \omega_s)t - \cos(\omega_c - \omega_s)t\right]. \tag{5.54}$$

Então, o espectro de um sinal FM de banda estreita para um sinal de mensagem de freqüência única é dado por:

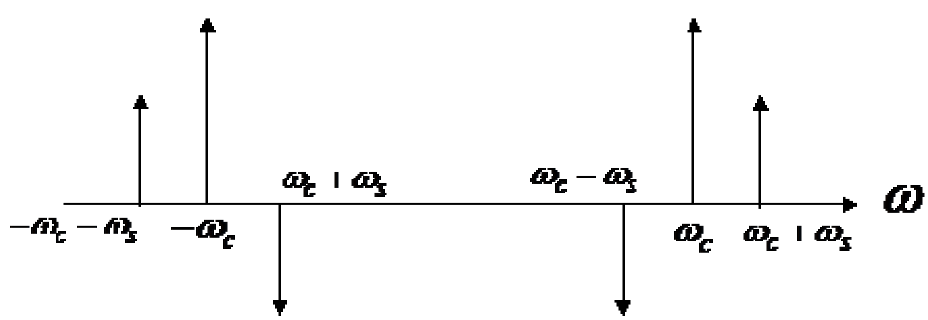


Figura 5.12 – *Espectro de um sinal FM banda estreita para um sinal de mensagem de tom único.*

Perceba que a largura de banda para sinal FM de banda estreita para um sinal de mensagem é de $2\omega_s$, que é a mesma largura para o caso AM.

5.4.2. ANÁLISE DE FM BANDA LARGA

Reconsidere (5.50), pode-se representar este sinal na forma:

$$x_{FM}(t) = A_c \Re\left[e^{j\omega_c t + j\beta sen(\omega_s t)}\right], \tag{5.55}$$

$$x_{FM}(t) = A_c \Re\left[e^{j\beta sen(\omega_s t)} e^{j\omega_c t}\right], \tag{5.56}$$

$$x_{FM}(t) = \Re\left[A_c e^{j\beta sen(\omega_s t)} e^{j\omega_c t}\right]. \tag{5.57}$$

Considerando $s(t) = A_c e^{j\beta sen(\omega_s t)}$ como a envoltória complexa do sinal de FM. Sabendo que $s(t)$ é uma função periódica, pode-se calcular a série exponencial de Fourier para representar o sinal na seguinte forma:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_s t} \quad , \tag{5.58}$$

Então, pode-se calcular os coeficientes da série de Fourier por:

$$c_n = \frac{\omega_s}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega_s}}^{\frac{\pi}{\omega_s}} s(t) e^{-jn\omega_s t} dt \quad , \tag{5.59}$$

$$c_n = \frac{\omega_s}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega_s}}^{\frac{\pi}{\omega_s}} A_c e^{j\beta sen(\omega_s t)} e^{-jn\omega_s t} dt \quad , \tag{5.60}$$

$$c_n = \frac{\omega_s A_c}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega_s}}^{\frac{\pi}{\omega_s}} e^{j\beta sen(\omega_s t) - jn\omega_s t} dt \quad . \tag{5.61}$$

Fazendo uma mudança de variáveis $y = \omega_s t$, tem-se:

$$c_n = \frac{A_c}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\beta senx - jnx} dx \quad . \tag{5.62}$$

Mas por definição, as funções de Bessel de primeira espécie de *n*-ésima ordem $J_n(\theta)$ com argumento θ são dadas por:

$$J_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\theta senx - jnx} dx \quad . \tag{5.63}$$

Então, pode-se concluir com (5.62) e (5.63) que:

$$c_n = A_c J_n(\beta) . \tag{5.64}$$

Substituindo (5.64) em (5.58), tem-se:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c J_n(\beta) e^{jn\omega_s t} \quad , \tag{5.65}$$

Substituindo a equação para a envoltória (5.65) em (5.57), tem-se:

$$x_{FM}(t) = \Re\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c J_n(\beta) e^{jn\omega_s t} e^{j\omega_c t}\right], \tag{5.66}$$

$$x_{FM}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c J_n(\beta) \Re\left[e^{jn\omega_s t} e^{j\omega_c t}\right], \tag{5.67}$$

$$x_{FM}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c J_n(\beta) \cos(\omega_c + n\omega_s)t, \tag{5.68}$$

Calculando a transformada de Fourier de (5.68), tem-se:

$$X_{FM}(\omega) = A_c \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\left[\delta(\omega + \omega_c + n\omega_s) - \delta(\omega - \omega_c - n\omega_s)\right], \tag{5.69}$$

Perceba que o espectro de FM, à princípio tem infinitas componentes de freqüência, nos harmônicos de ω_s com referência em ω_c .

A Figura 5.13 apresenta o comportamento das funções de Bessel de primeira espécie de *n-ésima* ordem.

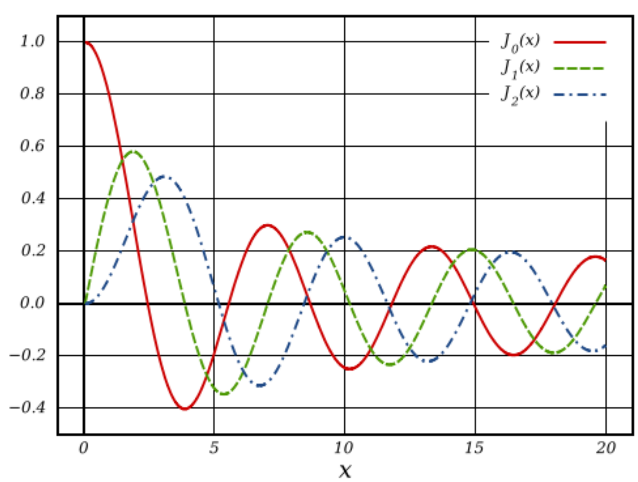


Figura 5.13 – *Comportamento das funções de Bessel de primeira espécie de n-ésima ordem.*

Algumas propriedades das funções de Bessel de primeira espécie de *n-ésima* ordem $J_n(\beta)$ podem ajudar a entender melhor o espectro de FM banda larga.

No caso em que β é muito pequeno, $J_n(\beta) \cong 0$ para n diferente de 0, 1 e -1. Já $J_0(\beta) \cong 1$ e $J_1(\beta) \cong \frac{\beta}{2}$. Como $J_n(\beta) = (-1)^n J_{-n}(\beta)$, então para β é muito pequeno $J_{-1}(\beta) \cong -\frac{\beta}{2}$. Logo, para o caso onde β é muito pequeno, utilizando (5.68), tem- se:

$$x_{FM}(t) = A_c J_0(\beta)\cos(\omega_c t) + A_c J_1(\beta)\cos(\omega_c + \omega_s)t + A_c J_{-1}(\beta)\cos(\omega_c - \omega_s)t \ , \tag{5.70}$$

$$x_{FM}(t) = A_c \cos(\omega_c t) + A_c \frac{\beta}{2}\cos(\omega_c + \omega_s)t - A_c \frac{\beta}{2}\cos(\omega_c - \omega_s)t \ , \tag{5.71}$$

Que corresponde ao caso FM banda estreita, relatado em (5.54).

Outra propriedade interessante diz que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$.

5.4.3. FM: LARGURA DE BANDA

No caso de FM banda larga com β elevado, pode-se mostrar que as componentes significativas de potência estão na faixa $\omega_c - \Delta\omega$ e $\omega_c + \Delta\omega$. Por outro lado, para FM banda estreita o intervalo é $\omega_c - \omega_s$ e $\omega_c + \omega_s$.

Seguindo estas diretivas, Carson definiu empiricamente como banda de transmissão de FM (em Hertz) gerado para um tom usando a seguinte expressão:

$$Banda = \frac{2\omega_s + 2\Delta\omega}{2\pi} \ , \tag{5.72}$$

$$Banda = \frac{\omega_s + \Delta\omega}{\pi}, \tag{5.73}$$

$$Banda = \frac{\Delta\omega}{\pi}\left(1 + \frac{\omega_s}{\Delta\omega}\right), \tag{5.74}$$

$$Banda = \frac{\Delta\omega}{\pi}\left(1 + \frac{1}{\beta}\right). \tag{5.75}$$

Outra regra que pode ser aplicada é definir o ponto de corte como sendo a última componente de freqüência cuja amplitude é maior do que 1% da amplitude da portadora não modulada, ou seja,

$$Banda = 2n_{\max} f_s , \tag{5.76}$$

Onde $n_{\max}$ é o maior inteiro que satisfaça a condição $|J_n(\beta)| > 0{,}01$.

A figura 5.14 mostra a dependência da banda de transmissão normalizada pela máxima excursão de freqüência em função de β.

FIGURA banda normalizada em função de beta

Figura 5.14 – *Comportamento da banda de transmissão normalizada necessária em função de* β.

No caso de um sinal modulante com banda *W*, deve-se pegar o pior caso, ou seja, a maior freqüência e a maior excursão de amplitude. Então, pode-se definir o coeficiente de desvio *D*, que corresponde a β no caso geral.

Como exemplo, considere um sinal com banda de 15 KHz e máximo desvio de freqüência de 60 KHz, onde se quer calcular a banda necessária para transmissão de um canal. Pela regra de Carson, $Banda = 2(15+60) = 150KHz$. Usando a regra do 1%, $\beta = \frac{\Delta f}{f_{s\_max}} = \frac{60}{15} = 4$. Pela figura 5.14, quando $\beta = 4$, a banda normalizada assume valor de aproximadamente 3,5. Logo, a banda é 3,5 vezes a excursão máxima de 60 KHz, ou seja, 210 KHz.

5.4.4. GERAÇÃO DE FM

Existem dois métodos para geração de FM:

- Método direto;
- Método indireto.

O método direto consiste em utilizar um circuito oscilador controlado por tensão (**VCO**, *Voltage Controled Oscillator*). Este circuito altera a freqüência de oscilação na sua saída a partir da amostragem do nível de tensão presente na sua entrada. Entretanto, quando se deseja estabilidade, deve-se utilizar o método indireto.

No método indireto, o sinal modulante é primeiramente usado para gerar um sinal FM banda estreita e depois se usa a multiplicação de freqüência para aumentar o desvio de freqüência até o limite desejado. O diagrama de blocos do método indireto está mostrado na Figura 5.15.

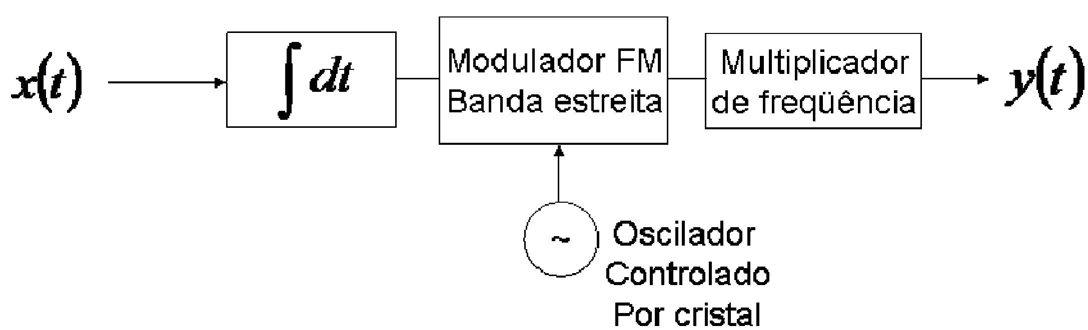


Figura 5.15 – *Diagrama de blocos para o gerador de FM pelo método indireto.*

Já o circuito demodulador de FM mais conhecido é o PLL (*Phased Locked Loop*). Este circuito utiliza um comparador, um VCO e um filtro. O funcionamento segue a seguinte lógica: Quando ocorre uma variação de fase na entrada do circuito, esta diferença de fase é detectada e gera uma variação de tensão na saída do circuito.

5.5. MODULAÇÕES DIGITAIS

As principais modulações digitais são: ASK (*Amplitude Shifting Keying*), FSK (*Frequency Shifting Keying*), PSK (*Phase Shifting Keying*) e QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*). Como dito anteriormente, a diferença entre as modulações analógicas e digitais está no sinal de mensagem que pode ser analógico ou digital, respectivamente.

A modulação ASK funciona de forma análoga à modulação AM, sendo a única diferença a formatação do sinal de mensagem. A Fig. 5.16 apresenta um exemplo de modulação ASK com 2 níveis (B do BASK indica binário). Note que a amplitude do sinal modulado só assume valores pré-determinados.

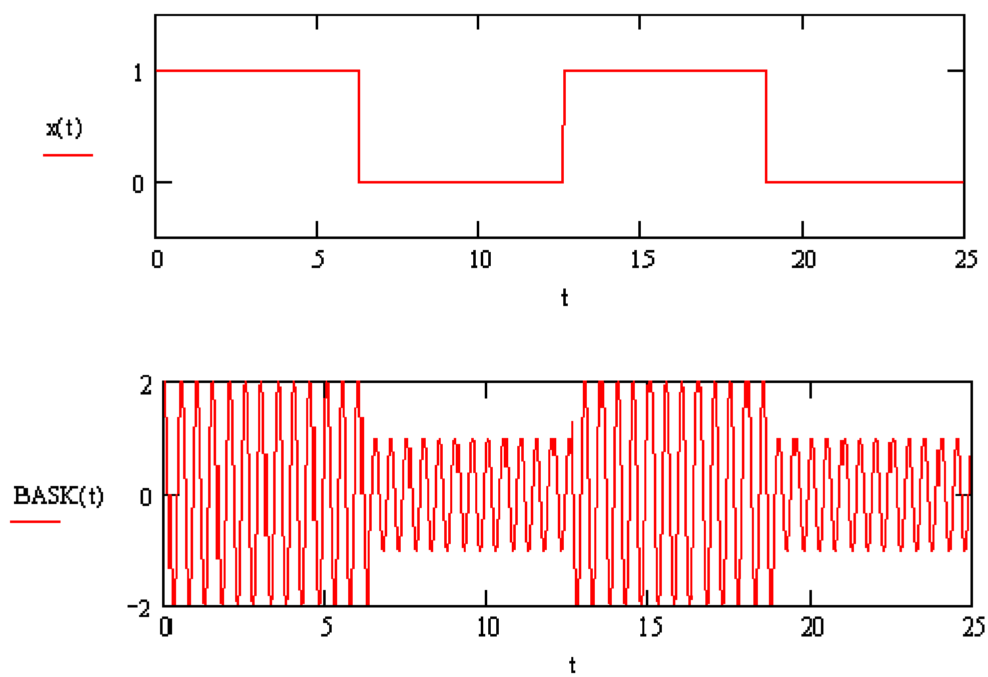


Figura 5.16 – *Sinais envolvidos em um exemplo de modulação ASK com dois níveis. x(t) é o sinal de mensagem, enquanto que BASK(t) é o sinal modulado digitalmente em amplitude com 2 níveis.*

Já a Fig. 5.17 apresenta um exemplo de modulação ASK com 4 níveis (Q do QASK indica quatro níveis). Note que a amplitude do sinal modulado assume valores de acordo com a amplitude do sinal.

A vantagem direta da modulação ASK em relação à modulação AM é que na modulação AM qualquer ruído atingia diretamente a informação contida no envelope. No caso do ASK o ruído pode agir sobre o sinal modulado, mas precisa ser mais significativo para que o receptor interprete um nível diferente.

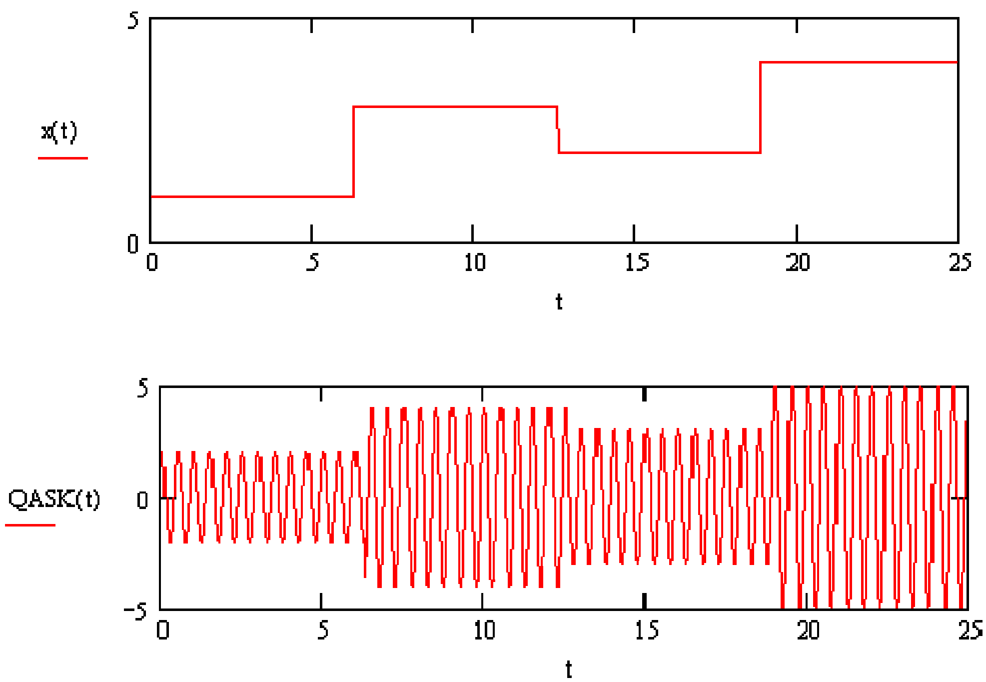


Figura 5.17 – *Sinais envolvidos em um exemplo de modulação QASK. x(t) é o sinal de mensagem, enquanto que QASK(t) é o sinal modulado digitalmente em amplitude com 4 níveis.*

A modulação FSK funciona de forma análoga à modulação FM, sendo que as freqüências permitidas para a portadora são pré-definidas e estão diretamente correlacionadas com os níveis de tensão do sinal de mensagem. Por exemplo, um sinal com três níveis n_1, n_2 e n_3 implica que a portadora só pode oscilar em freqüências f_1, f_2 e f_3. A Fig. 5.18 apresenta um exemplo de modulação FSK com 4 níveis. Note que quanto maior a amplitude do sinal, maior a freqüência da portadora.

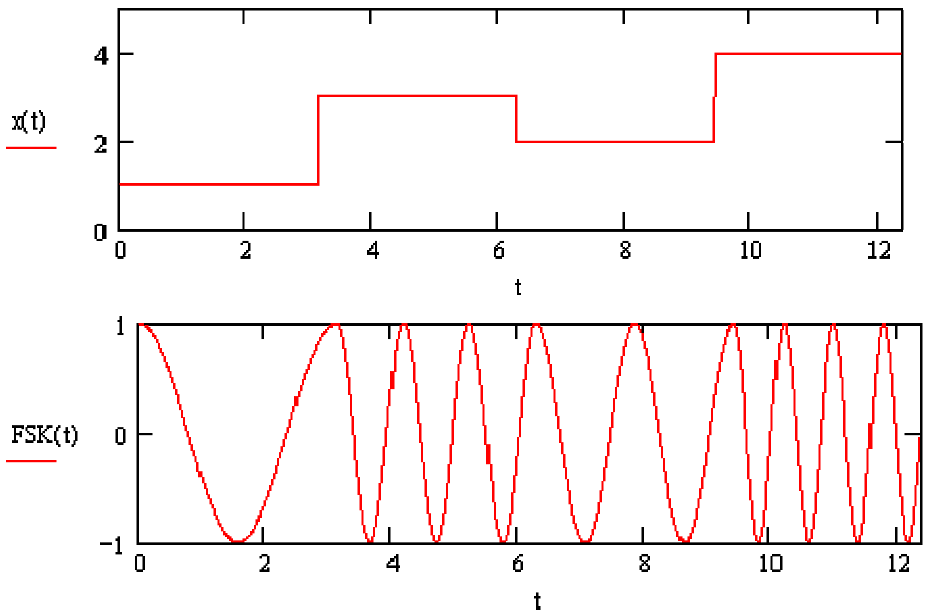


Figura 5.18 – *Sinais envolvidos em um exemplo de modulação QFSK. x(t) é o sinal de mensagem, enquanto que FSK(t) é o sinal modulado digitalmente em freqüência com 4 níveis.*

Outra forma de modulação é a modulação PSK funciona, onde a fase da portadora depende diretamente do nível de tensão do sinal de mensagem. A Fig. 5.19 apresenta um exemplo de modulação BPSK e a Fig. 5.20 apresenta um exemplo de modulação QPSK.

Por exemplo, considere o caso da Fig. 5.13, *x(t)=1* significa enviar um sinal *cos(t)*, enquanto que *x(t)=-1* significa enviar o sinal defasado de 180º, no caso *-cos(t)*.

Pode-se considerar ainda outro caso da Fig. 5.20, onde 4 níveis são codificados em dois bits e para cada combinação possível é enviado um sinal diferente, por exemplo *cos(t)*, *sen(t)*, *-cos(t)* e *-sen(t)*.

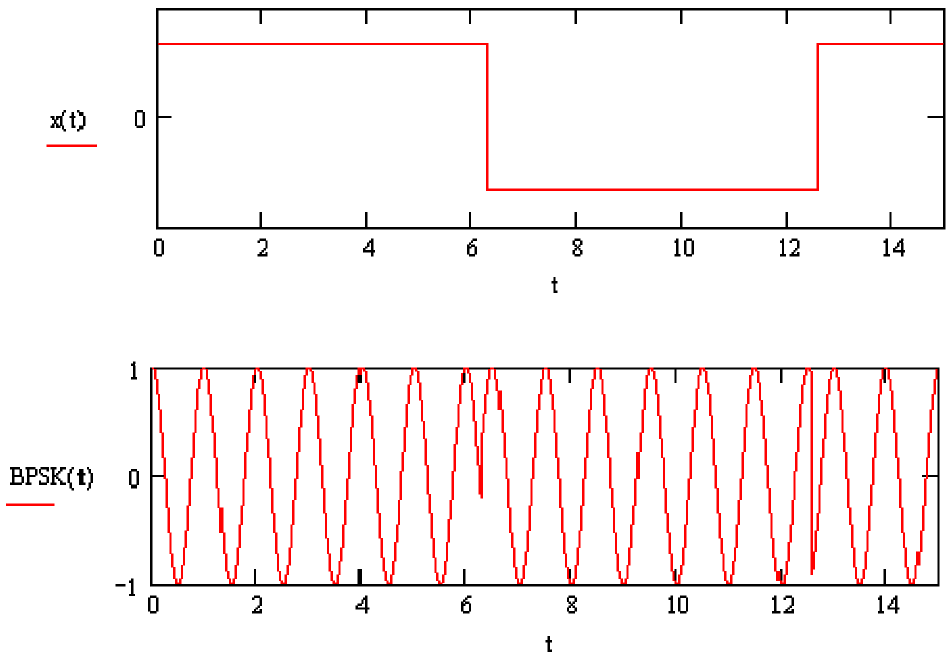


Figura 5.19 – *Sinais envolvidos em um exemplo de modulação PSK com dois níveis. x(t) é o sinal de mensagem, enquanto que BPSK(t) é o sinal modulado digitalmente em fase com 2 níveis.*

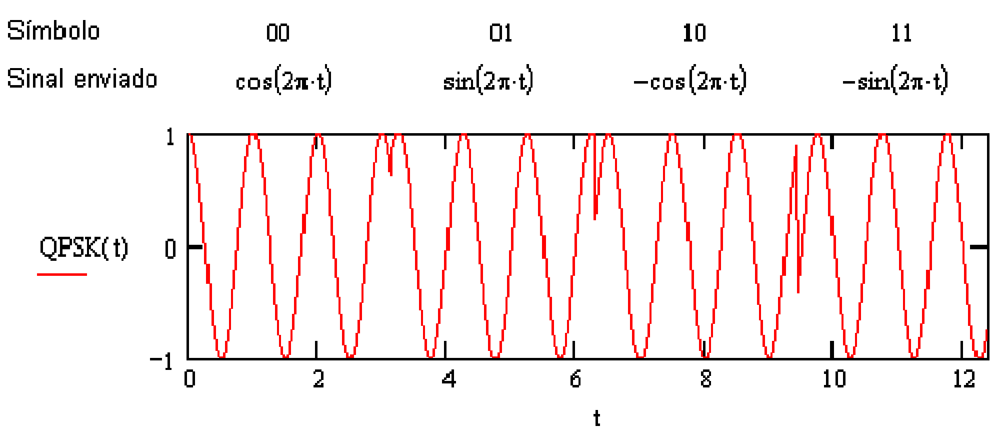


Figura 5.20 – *Sinais envolvidos em um exemplo de modulação PSK com quatro níveis. x(t) é o sinal de mensagem, enquanto que QPSK(t) é o sinal modulado digitalmente em fase com 4 níveis.*

5.5. MODULAÇÃO DE PULSO

Considere um sinal de mensagem apresentado na Fig. 5.21.a. Na modulação por amplitude de pulso (**PAM**, *Pulse Amplitude Modulation*) a amplitude de cada pulso é proporcional à amplitude do sinal de mensagem num dado instante (ver Fig. 5.21.b). Na modulação por duração de pulso (**PDM**, *Pulse Duration Modulation*) a duração temporal de cada pulso é proporcional à amplitude do sinal de mensagem num dado instante (ver Fig. 5.21.c). Na modulação por posição de pulso (**PPM**, *Pulse Position Modulation*) a posição de cada pulso dentro da janela temporal de transmissão é proporcional à amplitude do sinal de mensagem num dado instante (ver Fig. 5.21.d).

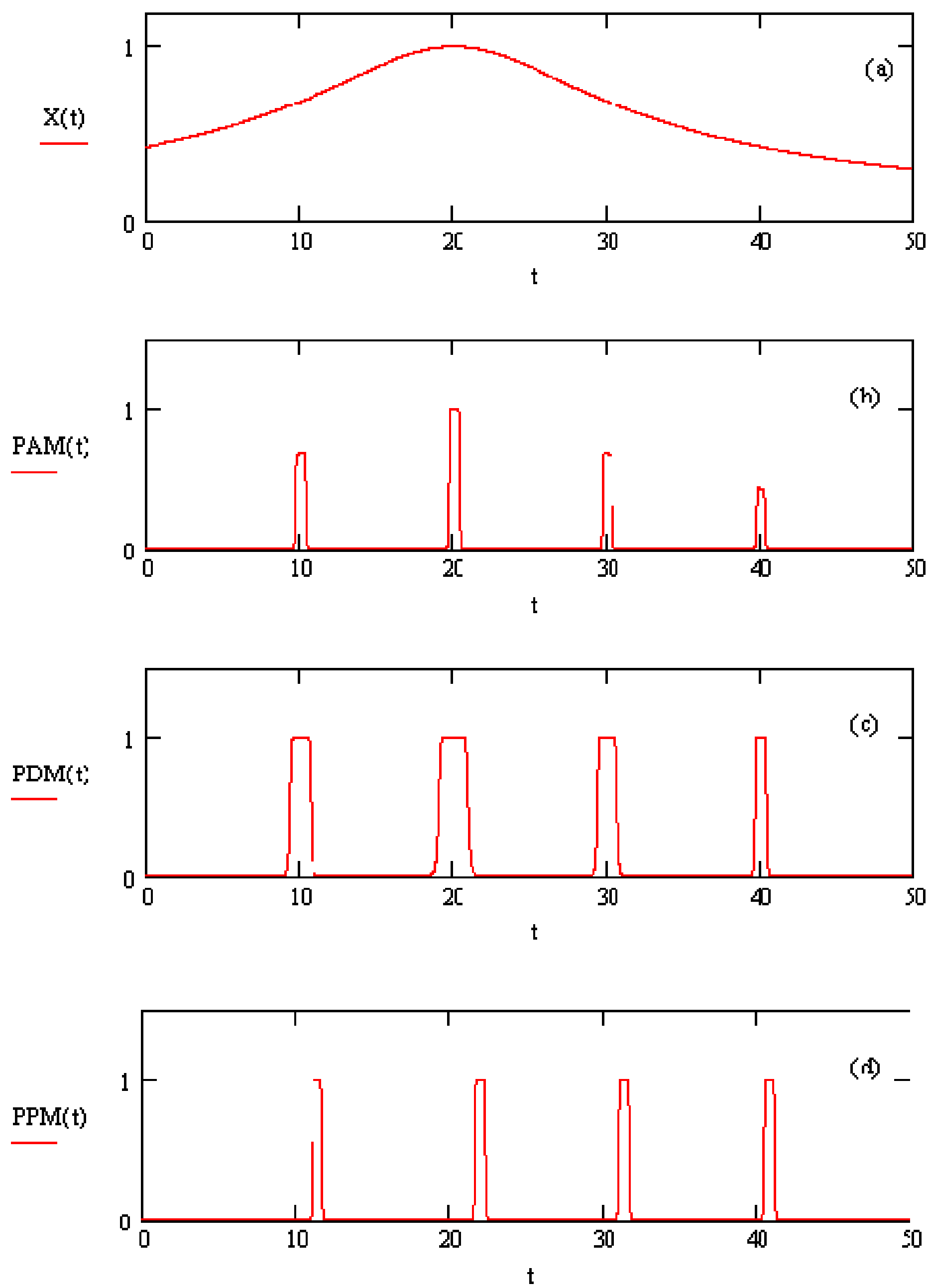


Figura 5.21 –*Modulações de trens de pulso por (a) amplitude, (b) duração e (c) deslocamento.*

5.4. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5.4.1. Por que FM é mais robusto do que AM?

5.4.2. Esboce, utilizando ferramenta computacional, o sinal modulado AM em função do tempo. A portadora tem amplitude 5 e freqüência 5 kHz. O sinal tem freqüência 100 Hz e amplitude 4. O índice de modulação é 0,7. Esboce também para um sinal AM-SC.

5.4.3. Construa o diagrama de blocos de um sistema AM-VSB. A banda do sinal é de 5 MHz. A freqüência fundamental deve ser de 100 MHz. Filtros trapezoidais de 6 MHz de banda plana e banda de 3 dB de 8 MHz devem ser usados.

5.4.4. Discorra sobre QAM.

5.4.5. Qual a diferença entre QPSK e DQPSK?