Capítulo II – TRANSFORMADA DE LAPLACE E TRANSFORMADA Z

Neste capítulo serão analisadas duas ferramentas matemáticas muito utilizadas em análise de sistemas e sistemas. As ferramentas são: a transformada de Laplace, utilizada para análise em tempo contínuo, e a transformada Z, utilizada em análises de tempo discreto. Efetivamente, a transformada Z pode ser encarada como a versão discreta da transformada de Laplace.

2.1. TRANSFORMADA DE LAPLACE

A transformada de Laplace fornece uma análise generalizada da transforma de Fourier, abordada no capítulo anterior. Além disso, é um método operacional que pode ser usado de forma vantajosa na solução de equações diferenciais lineares.

A facilidade proporcionada pela transformada de Laplace advém do fato de que funções como senoides ou exponenciais são convertidas em funções algébricas simples de uma variável em outro domínio. Com isso, operações como diferenciação ou integração são convertidas em operações algébricas simples.

Uma aplicação prática interessante da transformada de Laplace é que esta permite o uso de técnicas gráficas para avaliação e inferência de desempenho sem a necessidade de resolver as equações diferenciais que os descrevem.

A vantagem da aplicação da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais lineares reside no fato de que, ao contrário dos métodos convencionais propostos no cálculo diferencial e integral, a componente transitória e de regime permanente são obtidas simultaneamente.

A transformada de Laplace opera em um espaço complexo. Por isso, faz-se necessária uma breve revisão na teoria das variáveis complexas.

2.1.1. REVISÃO SOBRE VARIÁVEIS E FUNÇÕES COMPLEXAS

A notação utilizada para uma variável ou número complexo chamada de retangular é dada por $s = \sigma + j\omega$, onde σ é a parte real e ω é a parte imaginária. Também se pode ter uma função complexa $F(s) = F_x + jF_y$, onde $F_x = \Re e\{F(s)\}$ e $F_y = \Im m\{F(s)\}$. F_x e F_y não podem ser complexas, devem ser reais.

Existe outra representação para um número ou variável complexa, a notação *polar*. Nesta notação, tem-se magnitude e argumento angular. A magnitude de $F(s)$ é dada por $|F(s)| = \sqrt{F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2}}$. Já o argumento angular é dado por $\angle F(s) = arctg\left(\frac{F_y}{F_x}\right)$, onde $\angle F(s)$ é medido no sentido anti-horário.

O conjugado complexo de uma função complexa é definida por $\overline{F(s)} = F_x - jF_y$.

Uma função complexa $F(s)$ é analítica em uma região se $F(s)$ e todas as suas derivadas existem nesta região. No entanto, duas condições são suficientes para que $F(s)$ seja analítica, são as condições de Cauchy-Riemann. Estas condições são satisfeitas se $\frac{\partial F_x}{\partial \sigma} = \frac{\partial F_y}{\partial \omega}$ e $\frac{\partial F_y}{\partial \sigma} = -\frac{\partial F_x}{\partial \omega}$.

Os pontos para os quais $F(s)$ não é analítica são chamados de pontos singulares. Os pontos singulares nos quais a função $F(s)$ tende a infinito são ditos pólos. Se $F(s)$ tender a infinito quando $s \longrightarrow -p$ e se a função $F(s)[s+p]^n$ possuir um valor finito e não nulo em $s = -p$, então $s = -p$ é dito um pólo de ordem *n*. Se *n=1*, o pólo é chamado de simples. Os pontos onde a função $F(s)$ se anula são ditos zeros.

Exemplo 1.1: Considere a seguinte função no espaço *s*, determine os zeros e pólos.

$$G(s) = \frac{k(s+2)(s+10)}{s(s+1)(s+5)(s+15)^2}.$$

Pode ser observado diretamente que os zeros são -2 e -10, enquanto que os pólos são 0, -1, -5 e -15. Note que -15 é um pólo de multiplicidade dois. Além disso, deve ser observado o comportamento quando $s \to \infty$.

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{k(s+2)(s+10)}{s(s+1)(s+5)(s+15)^2} = \frac{k}{s^3}.$$

Ou seja, existe um pólo com multiplicidade 3 quando *s* tende ao infinito.

2.1.2. FÓRMULA DE EULER

É importante relembrar a fórmula de Euler.

$$e^{j\theta} = \cos\theta + jsen\theta.$$

Por outro lado,

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + jsen(-\theta),$$

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - jsen\theta.$$

Somando as duas equações, tem-se:

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta,$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}.$$

Subtraindo as duas equações, tem-se:

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2jsen\theta,$$

$$sen\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}.$$

2.1.3. DEFINIÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

A transformada de Laplace $L[\ ]$ de uma função $f(t)$ é definida como:

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s),$$

onde e^{-st} é o *kernel* de integração e *s* é uma variável complexa.

O processo de obtenção da função temporal $f(t)$ a partir da transformada de Laplace é chamado de transformada inversa de Laplace e definida da seguinte forma:

$$L^{-1}[F(s)] = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{F(s)e^{st}}{2\pi j} ds = f(t), \text{ para } t \geq 0.$$

onde *c* é a abscissa de convergência, *c* é um número real constante e escolhido com valor superior à parte real de todos os pontos singulares de $F(s)$. Isto para não integrar um valor infinito.

A função temporal será sempre admitida com valores nulos para valores negativos de tempo, ou seja, $f(t) = 0$, para $t < 0$.

2.1.4. EXISTÊNCIA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

A transformada de Laplace de uma função $f(t)$ existe se a integral de Laplace convergir. A integral converge se $f(t)$ for seccionalmente contínua para $t > 0$ e de ordem exponencial.

Uma função $f(t)$ é dita de ordem exponencial se $\lim_{t\to\infty} e^{-\sigma t}|f(t)| = 0$, ou seja, $f(t)$ deve crescer mais lentamente do que uma exponencial.

Considere o caso:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\sigma t}\left|Ae^{\alpha t}\right| = \begin{cases} 0, \sigma > \alpha \\ \infty, \sigma < \alpha \end{cases},$$

Quando $\sigma = \alpha$, σ é definido como abscissa de convergência (σ_c). A abscissa de convergência é definida pela parte real do pólo mais à direita do plano *s*.

2.1.5. PROPRIEDADES E PARES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Nesta seção serão deduzidos alguns pares de transformadas de Laplace que podem ser utilizados para resolução rápida de exercícios posteriores. Também são apresentados algumas propriedades da transformada de Laplace.

2.1.5.1. Propriedade da linearidade

Considere duas funções $f(t)$ e $g(t)$, que têm transformadas de Laplace $F(s) \equiv \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ e $G(s) \equiv \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt$. Calculando a transformada de $af(t)+bg(t)$ pela definição:

$$L\{af(t)+bg(t)\} \equiv \int_0^\infty af(t)+bg(t)e^{-st}dt\,,$$

$$L\{af(t)+bg(t)\} = \int_0^\infty af(t)e^{-st}dt + \int_0^\infty bg(t)e^{-st}dt\,,$$

$$L\{af(t)+bg(t)\} = a\int_0^\infty f(t)e^{-j\omega t}dt + b\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt\,,$$

$$L\{af(t)+bg(t)\}=aF(s)+bG(s).$$

Tem-se então a *propriedade*: $af(t)+bg(t)\xrightarrow{L}aF(s)+bG(s)$. A propriedade da linearidade mostra que quando uma função é multiplicada por uma constante, a transformada de Laplace da mesma é multiplicada pela mesma constante. A propriedade da linearidade também mostra que a transformada de Laplace da soma de duas funções é a soma das transformadas de Laplace das funções.

2.1.5.2. Função exponencial

Considere a função exponencial representada pela seguinte função:

$$f(t)=\begin{cases} 0, t<0 \\ Ae^{-\alpha t}, t\geq 0 \end{cases},$$

onde A e α são constantes.

Calculando a transformada de Laplace da função exponencial, tem-se

$$L\left[Ae^{-\alpha t}\right]=\int_0^\infty Ae^{-\alpha t}e^{-st}dt,$$

$$L\left[Ae^{-\alpha t}\right]=\int_0^\infty Ae^{-(\alpha+s)t}dt,$$

$$L\left[Ae^{-\alpha t}\right]=A\left.\frac{e^{-(\alpha+s)t}}{-(\alpha+s)}\right|_0^\infty,$$

$$L\left[Ae^{-\alpha t}\right]=A\left[0-\frac{e^{-(\alpha+s)0}}{-(\alpha+s)}\right],$$

$$L\left[Ae^{-\alpha t}\right]=\frac{A}{(\alpha+s)}.$$

Note que as condições de convergência são respeitadas em todo o plano *s*, menos no pólo $s = -\alpha$.

2.1.5.3. Função Degrau Unitário

Considere a função degrau unitário representada pela seguinte função:

$$u(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}.$$

Calculando a transformada de Laplace da função degrau unitário, tem-se:

$$L[u(t)] = \int_0^\infty u(t)e^{-st}dt\ ,$$

$$L[u(t)] = \int_0^\infty e^{-st}dt\ ,$$

$$L[u(t)] = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty,$$

$$L[u(t)] = \left[0 - \frac{e^{-s0}}{-s}\right],$$

$$L[u(t)] = \frac{1}{s}.$$

Note que as condições de convergência são respeitadas em todo o plano *s*, menos no pólo $s = 0$.

2.1.5.4. Função Rampa

Considere a função rampa representada pela seguinte função:

$$f(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ At, t \geq 0 \end{cases}.$$

Calculando a transformada de Laplace da função rampa, tem-se:

$$F(s) = \int_0^\infty Ate^{-st}dt$$

Integrando por partes com $u = At$ e $dv = e^{-st}dt$, então tem-se:

$$F(s) = At\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s}Adt,$$

$$F(s) = A\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s}dt,$$

$$F(s) = \frac{A}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt,$$

$$F(s) = \frac{A}{s}\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\infty,$$

$$F(s) = \frac{A}{s^2}.$$

Note que as condições de convergência são respeitadas em todo o plano *s*, menos no pólo $s = 0$.

2.1.5.4. Função Seno e Coseno

Considere a função seno representada pela seguinte função:

$$f(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ sen(t), t \geq 0 \end{cases}.$$

Lembrando que $sen\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$, tem-se:

$$F(s) = \int_0^{\infty} sen(t) e^{-st} dt ,$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \right) e^{-st} dt ,$$

$$F(s) = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{jt} e^{-st} dt - \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{-jt} e^{-st} dt ,$$

$$F(s) = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{-(s-j)t} dt - \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{-(s+j)t} dt ,$$

$$F(s) = \frac{1}{2j} \frac{e^{-(s-j)t}}{-(s-j)} \Bigg|_0^{\infty} - \frac{1}{2j} \frac{e^{-(s+j)t}}{-(s+j)} \Bigg|_0^{\infty} ,$$

$$F(s) = \frac{1}{2j} \frac{1}{(s-j)} - \frac{1}{2j} \frac{1}{(s+j)} ,$$

$$F(s) = \frac{1}{2j} \frac{(s+j) - (s-j)}{(s-j)(s+j)} ,$$

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)} .$$

Considere a função seno representada pela seguinte função:

$$f(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ \cos(t), t \geq 0 \end{cases} .$$

Lembrando que $\cos\theta = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$, tem-se:

$$F(s)=\int_0^{\infty}\cos(t)e^{-st}dt\,,$$

$$F(s)=\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}\right)e^{-st}dt\,,$$

$$F(s)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{jt}e^{-st}dt+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-jt}e^{-st}dt\,,$$

$$F(s)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-(s-j)t}dt+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-(s+j)t}dt\,,$$

$$F(s)=\frac{1}{2}\frac{e^{-(s-j)t}}{-(s-j)}\Bigg|_0^{\infty}+\frac{1}{2}\frac{e^{-(s+j)t}}{-(s+j)}\Bigg|_0^{\infty}\,,$$

$$F(s)=\frac{1}{2}\frac{1}{(s-j)}+\frac{1}{2}\frac{1}{(s+j)}\,,$$

$$F(s)=\frac{1}{2}\frac{(s+j)+(s-j)}{(s-j)(s+j)}\,,$$

$$F(s)=\frac{s}{(s^2+1)}\,.$$

2.1.5.5. Propriedade da translação no tempo

Considere a função $f(t)u(t)$, então $f(t-a)u(t-a)$ é a mesma função deslocada à direita de *a* unidades de tempo. Calculando a transformada de Laplace da função translada, tem-se:

$$L\{f(t-a)u(t-a)\}\equiv\int_0^{\infty}f(t-a)u(t-a)e^{-st}dt\,,$$

Substituindo a variável de integração *t* por $\tau=t-a$, tem-se:

$$L\{f(t-a)u(t-a)\} \equiv \int_{-a}^{\infty} f(\tau)u(\tau)e^{-s(\tau+a)}d\tau,$$

Mas $f(\tau)=0$ para $t<0$, então:

$$L\{f(t-a)u(t-a)\} \equiv \int_{0}^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+a)}d\tau,$$

$$L\{f(t-a)u(t-a)\} \equiv e^{-as}L\{f(t)u(t)\}.$$

Note que esta propriedade só é válida neste formato se $\alpha \geq 0$.

2.1.5.6. Função Pulso Retangular

A função pulso retangular é representada pela seguinte função:

$$f(t)=\begin{cases} \dfrac{A}{t_0}, 0<t\leq t_0 \\ 0, c.c. \end{cases}.$$

A função pulso retangular pode ser representada por uma combinação linear de funções degrau unitário.

$$f(t)=\frac{A}{t_0}u(t)-\frac{A}{t_0}u(t-t_0),$$

$$f(t)=\Pi\left(\frac{t-\frac{t_0}{2}}{t_0}\right),$$

onde $\Pi\left(\frac{t-\frac{t_0}{2}}{t_0}\right)$ é uma função porta com largura t_0 e centrada em $\frac{t_0}{2}$.

Calculando a transformada de Laplace, tem-se:

$$F(s)=L\left[\frac{A}{t_0}u(t)-\frac{A}{t_0}u(t-t_0)\right],$$

$$F(s)=\frac{A}{t_0}L[u(t)]-\frac{A}{t_0}L[u(t-t_0)],$$

$$F(s)=\frac{A}{t_0}\frac{1}{s}-\frac{A}{t_0}e^{-st_0}L[u(t)],$$

$$F(s)=\frac{A}{t_0}\frac{1}{s}-\frac{A}{t_0}\frac{1}{s}e^{-st_0},$$

$$L\left[\Pi\left(\frac{t-\frac{t_0}{2}}{t_0}\right)\right]=\frac{A}{st_0}\left(1-e^{-st_0}\right).$$

2.1.5.7. Função Impulso

A função impulso é o caso particular do pulso retangular quando $t_0 \to 0$ e $A=1$. Neste caso a amplitude $\frac{1}{t_0}\to\infty$. Para representar um impulso com área unitária pode-se utilizar a função Delta de Dirac $\delta(t)$.

$$\delta(t)=\begin{cases}0, t\neq t_0\\ \infty, t=t_0\end{cases}.$$

Note que como a área é unitária, então:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1.$$

Como $L\left[\Pi\left(\frac{t-\frac{t_0}{2}}{t_0}\right)\right] = \frac{1}{st_0}\left(1-e^{-st_0}\right)$ e $\delta(t) = \underset{t_0 \to 0}{Lim}\left[\Pi\left(\frac{t-\frac{t_0}{2}}{t_0}\right)\right]$, então:

$$L[\delta(t)] = \underset{t_0 \to 0}{Lim}\left[\frac{1}{st_0}\left(1-e^{-st_0}\right)\right].$$

Usando a regra de L´Hopital:

$$L[\delta(t)] = \underset{t_0 \to 0}{Lim}\left[\frac{-e^{-st_0}(-s)}{s}\right],$$

$$L[\delta(t)] = \underset{t_0 \to 0}{Lim}\left[e^{-st_0}\right],$$

$$L[\delta(t)] = 1.$$

É conveniente mencionar que a derivada da função degrau corresponde à função impulso.

$$\frac{d[u(t)]}{dt} = \delta(t).$$

2.1.5.8. Propriedade da translação na freqüência

Considere a função $f(t)$ com transformada de Laplace $F(s)$, multiplicando $f(t)$ por e^{-at} tem-se:

$$L\left\{f(t)e^{-at}\right\} \equiv \int_0^\infty f(t)e^{-at}e^{-st}dt\,,$$

$$L\left\{f(t)e^{-at}\right\} \equiv \int_0^\infty f(t)e^{-(a+s)t}dt\,,$$

Note que $\int_0^\infty f(t)e^{-(a+s)t}dt = F(s+a)$. Então,

$$f(t)e^{-at} \xrightarrow{L} F(s+a).$$

2.1.5.9. Propriedade de escalonamento no tempo

Calculando a transformada de Laplace $f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$, tem-se:

$$L\left\{f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right\} \equiv \int_0^\infty f\left(\frac{t}{\alpha}\right)e^{-st}dt\,,$$

Se for feito $\frac{t}{\alpha} = t_1$ e $\alpha s = s_1$, tem-se:

$$L\left\{f(t_1)\right\} = \int_0^\infty f(t_1)e^{-\frac{s_1}{\alpha}\alpha t_1}d(\alpha t_1),$$

$$L\left\{f(t_1)\right\} = \alpha\int_0^\infty f(t_1)e^{-s_1t_1}dt_1,$$

$$L\left\{f(t_1)\right\} = \alpha F(s_1),$$

$$L\left\{f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right\} = \alpha F(\alpha s).$$

Exemplo 2.2: Dado $f(t) = e^{-t}$, calcule a transformada de Laplace de $f\left(\frac{t}{5}\right)$.

Sabe-se que $e^{-at} \xrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)}$, então:

$$e^{-t} \xrightarrow{L} \frac{1}{(s+1)}.$$

Aplicando a propriedade do escalonamento, tem-se:

$$e^{-\frac{t}{5}} \xrightarrow{L} 5\frac{1}{(5s+1)},$$

$$e^{-\frac{t}{5}} \xrightarrow{L} \frac{5}{5s+1}.$$

2.1.5.10. Propriedade da derivação real

Considere a integração por partes da integral que define a transformada de Laplace:

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = f(t)\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}\frac{e^{-st}}{-s}dt,$$

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt,$$

$$L[f(t)] = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s}L\left[\frac{df(t)}{dt}\right],$$

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sL[f(t)] - f(0).$$

O resultado pode ser generalizado para a enésima derivada:

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n L[f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2}\frac{df(0)}{dt} - \ldots - s\frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} - \frac{d^n f(t)}{dt^n}.$$

Exemplo 2.3: Sabendo que a transformada de Laplace da função $f(t) = sen(\omega t)u(t)$ é dada por $F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$. Calcule a transformada de Laplace da função $f(t) = \cos(\omega t)u(t)$ utilizando o teorema da derivação real.

Sabe-se que $L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sL[f(t)] - f(0)$, então:

$$L\left[\frac{dsen(\omega t)}{dt}\right] = sL[sen(\omega t)] - sen(0),$$

$$L[\omega \cos(\omega t)] = sL[sen(\omega t)] - 0,$$

$$\omega L[\cos(t)] = s\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - 0,$$

$$L[\cos(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

2.1.5.11. Teorema do valor final

Esta propriedade é muito útil para identificar qual o comportamento de uma função quando seu argumento tende ao infinito. Entretanto, só é válida se o limite $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existe. Considere a propriedade anterior:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0),$$

Tomando o limite de ambos os lados da equação quando $s \to 0$, tem-se:

$$\lim_{s \to 0} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s \to 0} [sF(s) - f(0)],$$

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} dt = \lim_{s \to 0} [sF(s)] - \lim_{s \to 0} [f(0)],$$

$$f(t)\Big|_0^{\infty} = \lim_{s \to 0} [sF(s)] - f(0),$$

$$\lim_{t \to \infty} f(t) - f(0) = \lim_{s \to 0} [sF(s)] - f(0),$$

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} [sF(s)].$$

Exemplo 2.4: Calcule $\lim_{t \to \infty} f(t)$ sabendo que $L[f(t)] = \dfrac{1}{s(s+1)}$.

Sabendo que $\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} [sF(s)]$, tem-se:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} \left[s \frac{1}{s(s+1)} \right],$$

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} \left[\frac{1}{(s+1)} \right],$$

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = 1.$$

2.1.5.12. Teorema do valor inicial

Considere novamente a propriedade:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sF(s)-f(0).$$

Tomando o limite de ambos os lados da equação quando $s\to\infty$, tem-se:

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt=\lim_{s\to\infty}[sF(s)-f(0)].$$

Note que $\lim_{s\to\infty}e^{-st}=0$, então:

$$\lim_{s\to\infty}[sF(s)-f(0)]=0,$$

$$\lim_{s\to\infty}[sF(s)]=f(0),$$

$$f(0)=\lim_{s\to\infty}[sF(s)].$$

Exemplo 2.5: Calcule $\lim_{t\to 0}f(t)$ sabendo que $L[f(t)]=\dfrac{1}{s(s+1)}$.

Sabendo que $f(0)=\lim_{s\to\infty}[sF(s)]$, tem-se:

$$f(0)=\lim_{s\to\infty}\left[s\frac{1}{s(s+1)}\right],$$

$$f(0)=\lim_{s\to\infty}\left[\frac{1}{(s+1)}\right],$$

$$f(0)=0.$$

2.1.5.13. Teorema da integração real

Para demonstrar esta propriedade, parte-se da transformada de Laplace da integral da função em questão.

$$L\left[\int \frac{df(t)}{dt}dt\right] = \int_0^{\infty}\int \frac{df(t)}{dt}dt e^{-st}dt\,,$$

Integrando por partes com $u = \int \frac{df(t)}{dt}dt$ e $dv = e^{-st}dt$, tem-se:

$$L\left[\int \frac{df(t)}{dt}dt\right] = \left[\int \frac{df(t)}{dt}dt\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\frac{e^{-st}}{-s}f(t)dt\,,$$

$$L\left[\int \frac{df(t)}{dt}dt\right] = \frac{1}{s}\lim_{t\to 0}\left[\int \frac{df(t)}{dt}dt\right] + \frac{1}{s}\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt\,,$$

$$L\left[\int \frac{df(t)}{dt}dt\right] = \frac{1}{s}\lim_{t\to 0}\left[\int \frac{df(t)}{dt}dt\right] + \frac{1}{s}F(s),$$

$$L\left[\int \frac{df(t)}{dt}dt\right] = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}f^{-1}(0),$$

onde $f^{-1}(0)$ é a primitiva de $f(t)$ avaliada em *t=0*.

Mas $\int_0^t \frac{df(\tau)}{dt}d\tau = \int \frac{df(\tau)}{dt}d\tau - f^{-1}(0)$, então:

$$L\left[\int_0^t \frac{df(t)}{dt}dt\right] = L\left[\int \frac{df(t)}{dt}dt\right] - L\left[f^{-1}(0)\right],$$

$$L\left[\int_0^t \frac{df(t)}{dt}dt\right] = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}f^{-1}(0) - f^{-1}(0)L[1],$$

$$L\left[\int_0^t \frac{df(t)}{dt}dt\right] = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}f^{-1}(0) - f^{-1}(0)\frac{1}{s},$$

$$L\left[\int_0^t \frac{df(t)}{dt}dt\right] = \frac{1}{s}F(s),$$

2.1.5.15. Teorema da diferenciação complexa

Considere agora calcular a transformada de Laplace de $tf(t)$.

$$L[tf(t)] = \int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt,$$

$$L[tf(t)] = \int_0^\infty f(t)\left[te^{-st}\right]dt,$$

$$L[tf(t)] = \int_0^\infty f(t)\left[-\frac{d\left(e^{-st}\right)}{ds}\right]dt,$$

$$L[tf(t)] = -\int_0^\infty \left[\frac{d\left(f(t)e^{-st}\right)}{ds}\right]dt,$$

$$L[tf(t)] = -\frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt,$$

$$L[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s).$$

Note que pode-se generalizar esta fórmula.

$$L\left[t^2 f(t)\right] = L[tg(t)] = -\frac{d}{ds}G(s) = -\frac{d}{ds}\left[-\frac{d}{ds}f(t)\right] = \frac{d^2 f(t)}{ds^2},$$

onde $g(t) = tf(t)$.

2.1.5.16. Integral da Convolução

Definindo a convolução entre duas funções $f(t)$ e $g(t)$ como $f(t)*g(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$. Pode-se calcular a transformada de Laplace da convolução:

$$L[f(t)*g(t)]=\int_0^\infty\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right]e^{-st}dt\ ,$$

$$L[f(t)*g(t)]=\int_0^\infty e^{-st}\int_0^\infty f(t-\tau)u(t-\tau)g(\tau)d\tau dt\ ,$$

$$L[f(t)*g(t)]=\int_0^\infty\int_0^\infty f(t-\tau)u(t-\tau)g(\tau)e^{-st}d\tau dt\ ,$$

$$L[f(t)*g(t)]=\int_0^\infty\int_0^\infty f(t-\tau)u(t-\tau)g(\tau)e^{-st}dtd\tau\ ,$$

$$L[f(t)*g(t)]=\int_0^\infty\int_0^\infty f(t-\tau)u(t-\tau)g(\tau)e^{-st}dtd\tau\ ,$$

Fazendo $t=\alpha+\tau$, tem-se:

$$L[f(t)*g(t)]=\int_0^\infty\int_0^\infty f(\alpha)u(\alpha)g(\tau)e^{-s(\alpha+\tau)}d\alpha d\tau\ ,$$

$$L[f(t)*g(t)]=\int_0^\infty\int_0^\infty f(\alpha)u(\alpha)g(\tau)e^{-s\alpha}e^{-s\tau}d\alpha d\tau\ ,$$

$$L[f(t)*g(t)]=\int_0^\infty f(\alpha)u(\alpha)e^{-s\alpha}d\alpha\int_0^\infty g(\tau)e^{-s\tau}d\tau\ ,$$

$$L[f(t)*g(t)]=\int_0^\infty f(\alpha)e^{-s\alpha}d\alpha\int_0^\infty g(\tau)e^{-s\tau}d\tau\ ,$$

$$L[f(t)*g(t)]=F(s)G(s).$$

Também é possível mostrar que uma multiplicação entre duas funções no domínio do tempo gera uma convolução no plano das freqüências complexas *s*.

2.2. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Como toda ferramenta para analise em outro domínio, a transformada de Laplace também precisa de uma operação inversa. Entretanto, às vezes é muito difícil calcular a transformada de Laplace diretamente da definição. Uma metodologia interessante para abordar este tema é tentar associar o uso das tabelas contendo os pares e propriedades da transformada de Laplace à técnica de *Expansão em Frações Parciais*, já que normalmente funções comuns apresentam transformadas de Laplace na forma:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)},$$

onde $A(s)$ e $B(s)$ são polinômios em *s*.

para que se possa fazer $L^{-1}[F(s)] = L^{-1}[F_1(s)] + L^{-1}[F_2(s)] + ... + L^{-1}[F_n(s)]$. Para a utilização adequada da técnica é importante que a maior potência de $A(s)$ seja maior que a maior potência de $B(s)$.

O objetivo da metodologia é decompor $F(s)$ na forma $F(s) = F_1(s) + F_2(s) + ... + F_n(s)$,

2.2.1. EXPANSÃO DE F(S) SÓ TEM PÓLOS SIMPLES

Suponha que a transformada de Laplace de uma função $f(t)$ só apresenta pólos simples e o número de zeros *m* é menor do que o número de pólos *n*, então esta pode ser rearrumada para a seguinte forma:

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{k(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)...(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)...(s+p_n)}.$$

A partir da equação acima pode-se expandir para:

$$F(s)=\frac{a_1}{(s+p_1)}+\frac{a_2}{(s+p_2)}+\frac{a_3}{(s+p_3)}+...+\frac{a_n}{(s+p_n)}.$$

Pode-se calcular os coeficientes a_k (resíduo no pólo p_k) de forma simples. Considere a igualdade:

$$\frac{k(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)...(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)...(s+p_n)}=\frac{a_1}{(s+p_1)}+\frac{a_2}{(s+p_2)}+\frac{a_3}{(s+p_3)}+...+\frac{a_n}{(s+p_n)}.$$

Multiplicando todos os membros por $(s+p_k)$:

$$\frac{k(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)...(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)...(s+p_n)}(s+p_k)=$$
$$\frac{a_1(s+p_k)}{(s+p_1)}+...+\frac{a_{k-1}(s+p_k)}{(s+p_{k-1})}+\frac{a_k(s+p_k)}{(s+p_k)}+\frac{a_{k+1}(s+p_k)}{(s+p_{k+1})}+...+\frac{a_n(s+p_k)}{(s+p_n)},$$

$$\frac{k(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)...(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_{k-1})(s+p_{k+1})...(s+p_n)}=$$
$$\frac{a_1(s+p_k)}{(s+p_1)}+...+\frac{a_{k-1}(s+p_k)}{(s+p_{k-1})}+a_k+\frac{a_{k+1}(s+p_k)}{(s+p_{k+1})}+...+\frac{a_n(s+p_k)}{(s+p_n)},$$

Fazendo $s = -p_k$, tem-se:

$$\left.\frac{k(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_{k-1})(s+p_{k+1})\ldots(s+p_n)}\right|_{s=-p_k} =$$

$$\left.\frac{a_1(s+p_k)}{(s+p_1)}+\ldots+\frac{a_{k-1}(s+p_k)}{(s+p_{k-1})}+a_k+\frac{a_{k+1}(s+p_k)}{(s+p_{k+1})}+\ldots+\frac{a_n(s+p_k)}{(s+p_n)}\right|_{s=-p_k},$$

$$a_k = \left.\frac{k(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_{k-1})(s+p_{k+1})\ldots(s+p_n)}\right|_{s=-p_k}$$

Quando dois pólos p_1 e p_2 forem conjugados complexos, os coeficientes a_1 e a_2 também serão.

Lembrando que:

$$L^{-1}\left[\frac{a_k}{(s+p_k)}\right] = a_k e^{-p_k t}.$$

Então,

$$L^{-1}\left[\frac{a_1}{(s+p_1)}+\frac{a_2}{(s+p_2)}+\frac{a_3}{(s+p_3)}+\ldots+\frac{a_n}{(s+p_n)}\right] = a_1e^{-p_1t}+a_2e^{-p_2t}+a_3e^{-p_3t}+\ldots+a_ne^{-p_nt}.$$

Exemplo 2.6: Calcule a transformada de Laplace inversa da seguinte função $F(s)=\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}$.

Separando a função em duas funções mais simples $\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}=\frac{a_1}{(s+1)}+\frac{a_2}{(s+2)}$ e calculando os coeficientes, tem-se:

$$a_1 = \left.\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}(s+1)\right|_{s=-1} = \frac{(-1+3)}{(-1+2)} = 2,$$

$$a_2 = \left.\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}(s+2)\right|_{s=-2} = \frac{(-2+3)}{(-2+1)} = -1\,.$$

Então,

$$\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{(s+1)} + \frac{-1}{(s+2)}\,.$$

Calculando a transformada de Laplace inversa,

$$L^{-1}\left[\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}\right] = L^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)}\right] + L^{-1}\left[\frac{-1}{(s+2)}\right],$$

$$L^{-1}\left[\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}\right] = 2L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)}\right],$$

$$L^{-1}\left[\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}\right] = \left[2e^{-t} - e^{-2t}\right]u(t)\,.$$

Exemplo 2.7: Calcule a transformada de Laplace inversa da seguinte função $F(s) = \dfrac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)}$.

Deve-se separar termos de forma que o denominador tenha um grau maior do que o numerador:

$$\frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)} = s + \frac{2s^2 + 7s + 7}{(s+1)(s+2)}\,,$$

$$\frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)} = s + 2 + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\,.$$

Calculando a transformada de Laplace inversa,

$$L^{-1}\left[\frac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)}\right]=L^{-1}\left[s+2+\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right],$$

$$L^{-1}\left[\frac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)}\right]=L^{-1}[s]+L^{-1}[2]+L^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\right],$$

Lembre-se que $L^{-1}\left[\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}\right]=\left[2e^{-t}-e^{-2t}\right]u(t)$.

$$L^{-1}\left[\frac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)}\right]=L^{-1}[s]+L^{-1}[2]+\left[2e^{-t}-e^{-2t}\right]u(t),$$

$$L^{-1}\left[\frac{s^3+5s^2+9s+7}{(s+1)(s+2)}\right]=\frac{d\delta(t)}{dt}+2\delta(t)+\left[2e^{-t}-e^{-2t}\right]u(t).$$

Exemplo 2.8: Calcule a transformada de Laplace inversa da seguinte função $F(s)=\frac{2s+12}{s^2+2s+5}$.

Os pólos de $F(s)$ são $s+1+j2$ e $s+1-j2$. Note que os pólos de $F(s)$ são complexos e conjugados. Neste caso é melhor utilizar outra abordagem baseada em senos e cosenos amortecidos.

Lembrando da transformada do seno e deslocando na freqüência, tem-se:

$$L\left[e^{-at}sen(bt)u(t)\right]=\frac{b}{(s+a)^2+b^2}.$$

Por outro lado, lembrando da transformada do coseno e deslocando na freqüência, tem-se:

$$L\left[e^{-at}\cos(bt)u(t)\right]=\frac{(s+a)}{(s+a)^2+b^2}.$$

Então, pode-se reorganizar $F(s)$ de forma a completar um quadrado perfeito no denominador.

Tome $F(s)$:

$$F(s) = \frac{2s+12}{s^2+2s+5} = \frac{2s+12}{s^2+2s+1+4},$$

$$F(s) = \frac{2s+12}{(s+1)^2+2^2},$$

$$F(s) = \frac{2s+2+10}{(s+1)^2+2^2},$$

$$F(s) = \frac{2s+2}{(s+1)^2+2^2} + \frac{10}{(s+1)^2+2^2},$$

$$F(s) = 2\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + 5\frac{2}{(s+1)^2+2^2}.$$

Calculando a transformada inversa, tem-se:

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[2\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + 5\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right],$$

$$L^{-1}[F(s)] = 2L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right] + 5L^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right],$$

Relembrando as transformadas apresentadas anteriormente, tem-se:

$$L^{-1}[F(s)] = \left[2e^{-t}\cos(2t) + 5e^{-t}sen(2t)\right]u(t).$$

2.2.2. EXPANSÃO DE F(S) COM PÓLOS COM MULTIPLICIDADE

Suponha que a transformada de Laplace de uma função $f(t)$ apresenta um pólo com multiplicidade *m*:

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{k(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)\ldots(s+z_{m-1})}{(s+p_1)^m}\,.$$

A partir da equação acima se pode expandir para:

$$F(s)=\frac{b_1}{(s+p_1)}+\frac{b_2}{(s+p_1)^2}+\frac{b_3}{(s+p_1)^3}+\ldots+\frac{b_m}{(s+p_1)^m}\,.$$

Então, considere a igualdade:

$$\frac{k(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)\ldots(s+z_{m-1})}{(s+p_1)^m}=\frac{b_1}{(s+p_1)}+\frac{b_2}{(s+p_1)^2}+\frac{b_3}{(s+p_1)^3}+\ldots+\frac{b_m}{(s+p_1)^m}\,.$$

Multiplicando todos os membros por $(s+p_1)^m$:

$$\frac{k(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)\ldots(s+z_{m-1})}{(s+p_1)^m}(s+p_1)^m=$$
$$(s+p_1)^m\frac{b_1}{(s+p_1)}+(s+p_1)^m\frac{b_2}{(s+p_1)^2}+(s+p_1)^m\frac{b_3}{(s+p_1)^3}+\ldots+(s+p_1)^m\frac{b_m}{(s+p_1)^m},$$

$$k(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)\ldots(s+z_{m-1})=b_1(s+p_1)^{m-1}+b_2(s+p_1)^{m-2}+b_3(s+p_1)^{m-3}+\ldots+b_m,$$

Fazendo $s = -p_1$, tem-se:

$$b_m=k(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)\ldots(s+z_{m-1})\big|_{s=-p_1},$$

Ou melhor,

$$b_m=\left.\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_1)^m\right|_{s=-p_1}.$$

Retomando a seguinte equação desenvolvida anteriormente:

$$k(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)\ldots(s+z_{m-1}) = b_1(s+p_1)^{m-1} + b_2(s+p_1)^{m-2} + b_3(s+p_1)^{m-3} + \ldots + b_m\,,$$

$$\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_1)^m = b_1(s+p_1)^{m-1} + b_2(s+p_1)^{m-2} + b_3(s+p_1)^{m-3} + \ldots + b_m\,.$$

Derivando em relação a *s*, tem-se:

$$\frac{d\left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_1)^m\right]}{ds} = \frac{d\left[b_1(s+p_1)^{m-1} + b_2(s+p_1)^{m-2} + b_3(s+p_1)^{m-3} + \ldots + b_m\right]}{ds}\,,$$

$$\frac{d\left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_1)^m\right]}{ds} = b_1(m-1)(s+p_1)^{m-2} + (m-2)b_2(s+p_1)^{m-3} + b_3(m-3)(s+p_1)^{m-4} + \ldots + b_{m-1}$$

Fazendo $s = -p_1$, tem-se:

$$b_{m-1} = \frac{d}{ds}\left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_1)^m\right]\Bigg|_{s=-p_1}\,.$$

Este resultado pode ser generalizado para:

$$b_{m-n} = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{ds^n}\left[\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_1)^m\right]\Bigg|_{s=-p_1}\,.$$

Exemplo 2.9: Calcule a transformada de Laplace inversa da seguinte função $F(s) = \dfrac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$.

A função pode ser expandida para:

$$F(s)=\frac{b_1}{(s+1)}+\frac{b_2}{(s+1)^2}+\frac{b_3}{(s+1)^3}.$$

Calculando os coeficientes, tem-se:

$$b_3=\left.\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}(s+1)^3\right|_{s=-1},$$

$$b_3=\left.s^2+2s+3\right|_{s=-1},$$

$$b_3=(-1)^2+2(-1)+3,$$

$$b_3=2.$$

$$b_2=\left.\frac{d}{ds}\left[\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}(s+1)^3\right]\right|_{s=-1},$$

$$b_2=\left.\frac{d}{ds}\left[s^2+2s+3\right]\right|_{s=-1},$$

$$b_2=\left.2s+2\right|_{s=-1},$$

$$b_2=0.$$

$$b_1=\left.\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}(s+1)^3\right]\right|_{s=-1},$$

$$b_1=\left.\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left[s^2+2s+3\right]\right|_{s=-1},$$

$$b_2=\left.s\right|_{s=-1},$$

$$b_2=-1.$$

Então, tem-se a seguinte representação:

$$F(s) = \frac{-1}{(s+1)} + \frac{0}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^3}.$$

Calculado a transformada inversa, tem-se:

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{-1}{(s+1)}\right] + L^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^3}\right],$$

$$f(t) = -L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right] + 2L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^3}\right],$$

$$f(t) = -e^{-t}u(t) + 2L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^3}\right].$$

Lembre-se que $L\left[e^{-t}\right] = \frac{1}{(s+1)}$ e que $L\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$, então:

$$L\left[t^2 e^{-t}\right] = (-1)^2 \frac{d^2\left[\frac{1}{(s+1)}\right]}{ds^2},$$

$$L\left[t^2 e^{-t}\right] = \frac{d\left[\frac{-1}{(s+1)^2}\right]}{ds},$$

$$L\left[t^2 e^{-t}\right] = \frac{2(s+1)}{(s+1)^4},$$

$$L\left[t^2 e^{-t}\right] = \frac{2}{(s+1)^3}.$$

Logo,

$$f(t) = \left[-e^{-t} + t^2 e^{-t}\right]u(t).$$

2.3. SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O método de Laplace pode ser utilizado para a resolução de equações diferenciais lineares e invariantes no tempo. A vantagem é que o método que está descrito nesta seção fornece a solução completa.

O método pode ser descrito em três etapas. Primeiro, aplica-se a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial. Depois a equação algébrica é reorganizada em função das variáveis independentes. Por último, a solução em função do tempo é obtida achando a transformada inversa. Para a resolução do problema, é importante que todas as condições iniciais sejam fornecidas.

Exemplo 2.10: Resolva a seguinte equação diferencial $\frac{df(t)^2}{dt^2}+3\frac{df(t)}{dt}+2f(t)=0$, com as seguintes condições iniciais $\frac{df(0)}{dt}=b$ e $f(0)=a$.

Aplicando a transformada em ambos os lados da equação diferencial, tem-se:

$$L\left[\frac{df(t)^2}{dt^2}+3\frac{df(t)}{dt}+2f(t)\right]=L[0],$$

$$L\left[\frac{df(t)^2}{dt^2}\right]+3L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]+2L[f(t)]=0.$$

Sabe-se que:

$$L[f(t)]=F(s),$$

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sF(s)-f(0)$$

e

$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = L\left[\frac{d}{dt}\frac{df(t)}{dt}\right] = sL\left[\frac{df(t)}{dt}\right] - \frac{df(0)}{dt} = s[sF(s) - f(0)] - \frac{df(0)}{dt}.$$
$$= s^2F(s) - sf(0) - \frac{df(0)}{dt}$$

Substituindo na equação diferencial:

$$s^2F(s) - sf(0) - \frac{df(0)}{dt} + 3[sF(s) - f(0)] + 2F(s) = 0\,,$$

$$s^2F(s) + 3sF(s) + 2F(s) - sf(0) - 3f(0) - \frac{df(0)}{dt} = 0\,,$$

$$\left[s^2 + 3s + 2\right]F(s) = sf(0) + 3f(0) + \frac{df(0)}{dt}\,,$$

$$\left[s^2 + 3s + 2\right]F(s) = (s+3)a + b\,,$$

$$F(s) = \frac{(s+3)a + b}{\left(s^2 + 3s + 2\right)},$$

$$F(s) = \frac{as + (3a+b)}{(s+1)(s+2)},$$

Pode ser expandido para:

$$F(s) = \frac{c_1}{(s+1)} + \frac{c_2}{(s+1)},$$

Calculando os coeficientes, tem-se:

$$c_1 = \frac{as + (3a+b)}{(s+1)(s+2)}(s+1)\bigg|_{s=-1} = \frac{as + (3a+b)}{(s+2)}\bigg|_{s=-1} = \frac{-a + (3a+b)}{(-1+2)} = 2a + b\,,$$

e

$$c_2 = \frac{as + (3a+b)}{(s+1)(s+2)}(s+2)\bigg|_{s=-2} = \frac{as + (3a+b)}{(s+1)}\bigg|_{s=-2} = \frac{-2a + (3a+b)}{(-2+1)} = -(a+b).$$

Substituindo os coeficientes na equação, tem-se:

$$F(s)=\frac{2a+b}{(s+1)}-\frac{a+b}{(s+2)},$$

Calculando a transformada inversa, tem-se:

$$f(t)=\left[(2a+b)e^{-t}-(a+b)e^{-2t}\right]u(t).$$

Exemplo 2.11: Resolva a seguinte equação diferencial $\frac{df(t)^2}{dt^2}+2\frac{df(t)}{dt}+5f(t)=3u(t)$, com as seguintes condições iniciais $\frac{df(0)}{dt}=0$ e $f(0)=0$.

Aplicando a transformada em ambos os lados da equação diferencial, tem-se:

$$L\left[\frac{df(t)^2}{dt^2}\right]+2L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]+5L[f(t)]=L[3].$$

$$s^2F(s)-sf(0)-\frac{df(0)}{dt}+2[sF(s)-f(0)]+5F(s)=\frac{3}{s},$$

$$s^2F(s)+2sF(s)+5F(s)=\frac{3}{s},$$

$$F(s)=\frac{3}{s(s^2+2s+5)}.$$

Pode ser expandido para:

$$F(s)=\frac{c_1}{s}+\frac{c_2s+c_3}{(s^2+2s+5)},$$

Calculando os coeficientes, tem-se:

$$c_1 = \left.\frac{3}{\left(s^2 + 2s + 5\right)}\right|_{s=0} = \frac{3}{5},$$

e

$$3 = c_1\left(s^2 + 2s + 5\right) + s\left(c_2 s + c_3\right) \rightarrow c_2 = -\frac{3}{5} \text{ e } c_3 = -\frac{6}{5}.$$

Substituindo os coeficientes na equação, tem-se:

$$F(s) = \frac{3}{5s} - \frac{s+2}{5\left(s^2 + 2s + 5\right)},$$

$$F(s) = \frac{3}{5s} - \frac{3(s+2)}{5(s+1)^2 + 2^2},$$

$$F(s) = \frac{3}{5s} - \frac{3}{5}\frac{s+1}{\left[(s+1)^2 + 2^2\right]} - \frac{3}{10}\frac{2}{\left[(s+1)^2 + 2^2\right]},$$

Calculando a transformada inversa, tem-se:

$$f(t) = \left[\frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\cos(2t) - \frac{3}{10}e^{-t}sen(2t)\right]u(t).$$

2.4. TRANSFORMADA Z

É uma ferramenta matemática poderosa para análise de sinais e sistemas. A transformada Z constitui a forma discreta da transformada de Laplace. Definimos a transformada Z da resposta ao impulso como a função de transferência do sistema. É utilizada para tratamento em tempo discreto de um sinal (amostragem de um sinal de tempo contínuo), no estudo das características de sistemas e na derivação de estruturas computacionais para implementar sistemas de tempo discreto em computadores. A transformada Z unilateral também é utilizada para resolver equações de diferenças sujeitas a condições iniciais. Torna possível a análise de sinais discretos cuja transformada de Fourier de tempo discreto não é definida. A transformada Z se transforma na transformada de Fourier de tempo discreto quando |Z| = 1.

A transformada Z é uma ferramenta amplamente utilizada para análise de sistemas causais, especificados por equações diferenciais com coeficientes constantes e com condição inicial não nula.

De maneira geral, a transformada Z pode ser definida de duas formas. A definição para sinais bilaterais:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \ .$$

E a transformada unilateral:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \ .$$

2.4.1. CÁLCULO DA TRANSFORMADA Z DO DELTA DE KRONECKER

Seja o delta de Kronecker $\delta[n]$ definido por:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, n \neq 0 \\ 1, n = 0 \end{cases}.$$

A transformada Z é dada por:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} \ ,$$

$$X(z) = \ldots + x[-2]z^{-2} + x[-1]z^{-1} + x[0]z^{0} + x[1]z^{1} + x[2]z^{2} + \ldots ,$$

$$X(z) = x[0]z^{0} = 1 \, .$$

2.4.2. CÁLCULO DA TRANSFORMADA Z DO DEGRAU UNITÁRIO

Seja a função degrau unitário de tempo discreto definida por:

$$x[n] = u[n].$$

A transformada Z é dada por:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] z^{-n} \ ,$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \ ,$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z^{-1}\right)^{n} \ .$$

Sabendo que $\sum_{n=0}^{\infty} \left(z^{-1}\right)^{n} = \left(z^{-1}\right)^{0} + \left(z^{-1}\right)^{1} + \left(z^{-1}\right)^{2} + \ldots$ e que $\left(z^{-1}\right)\sum_{n=0}^{\infty} \left(z^{-1}\right)^{n} = \left(z^{-1}\right)^{1} + \left(z^{-1}\right)^{2} + \left(z^{-1}\right)^{3} + \ldots$, tem-se:

$$X(z) = 1 + \left(z^{-1}\right) X(z),$$

$$X(z) - \left(z^{-1}\right) X(z) = 1,$$

$$X(z)\left[1 - \left(z^{-1}\right)\right] = 1,$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \left(z^{-1}\right)},$$

$$X(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Note que para o somatório convergir, deve-se ter:

$$\left|z^{-1}\right| < 1,$$

$$\left|z\right| > 1.$$

Diz-se então que $\left|z\right| > 1$ é a região de convergência.

2.4.3. CÁLCULO DA TRANSFORMADA Z DE $a^n u[n]$

Seja uma função exponencial de tempo discreto definida por:

$$x[n] = a^n u[n].$$

A transformada Z é dada por:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} \;,$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \;,$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n .$$

Sabendo que $\sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n = \left(az^{-1}\right)^0 + \left(az^{-1}\right)^1 + \left(az^{-1}\right)^2 + \ldots$ e que $az^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n = \left(az^{-1}\right)^1 + \left(az^{-1}\right)^2 + \left(az^{-1}\right)^3 + \ldots$, tem-se:

$$X(z) = 1 + \left(az^{-1}\right) X(z),$$

$$X(z) - \left(az^{-1}\right) X(z) = 1,$$

$$X(z)\left[1-\left(az^{-1}\right)\right]=1,$$

$$X(z)=\frac{1}{1-\left(az^{-1}\right)},$$

$$X(z)=\frac{z}{z-a}.$$

Note que para o somatório convergir, deve-se ter:

$$\left|az^{-1}\right|<1,$$

$$|z|>a.$$

A região de convergência é $|z|>a$.

2.4.4. CÁLCULO DA TRANSFORMADA Z DA EXPONENCIAL

Seja uma função exponencial de tempo discreto definida por:

$$x[n]=e^{-an}u[n].$$

A transformada Z é dada por:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-an}u[n]z^{-n},$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-an}z^{-n},$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-a}z^{-1}\right)^{n}.$$

Sabendo que $\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-a}z^{-1}\right)^{n} = \left(e^{-a}z^{-1}\right)^{0} + \left(e^{-a}z^{-1}\right)^{1} + \left(e^{-a}z^{-1}\right)^{2} + \ldots$ e que $\left(e^{-a}z^{-1}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-a}z^{-1}\right)^{n} = \left(e^{-a}z^{-1}\right)^{1} + \left(e^{-a}z^{-1}\right)^{2} + \left(e^{-a}z^{-1}\right)^{3} + \ldots$, tem-se:

$$X(z) = 1 + \left(e^{-a}z^{-1}\right)X(z),$$

$$X(z) - \left(e^{-a}z^{-1}\right)X(z) = 1,$$

$$X(z)\left[1 - \left(e^{-a}z^{-1}\right)\right] = 1,$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \left(e^{-a}z^{-1}\right)},$$

$$X(z) = \frac{z}{z - e^{-a}}.$$

Note que para o somatório convergir, deve-se ter:

$$\left|e^{-a}z^{-1}\right| < 1,$$

$$|z| > e^{-a}.$$

A região de convergência é $|z| > e^{-a}$.

2.4.5. PROPRIEDADE DA LINEARIDADE

Considere duas funções $x[n]$ e $y[n]$, que têm transformadas $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$ e $Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n}$. Calculando a transformada Z de $ax[n] + by[n]$ pela definição:

$$Z\{ax[n] + by[n]\} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty}\{ax[n] + by[n]\}z^{-n},$$

$$Z\{ax[n]+by[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}ax[n]z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}by[n]z^{-n},$$

$$Z\{ax[n]+by[n]\}=a\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}+b\sum_{n=-\infty}^{\infty}y[n]z^{-n},$$

$$L\{af(t)+bg(t)\}=aX(z)+bY(z).$$

Tem-se então a *propriedade*: $ax[n]+by[n]\xrightarrow{Z}aX(z)+bY(z)$.

Exemplo 2.12: Calcule a transformada Z da seguinte função $x[n]=\begin{cases}3^n, n<0\\ \left(\frac{1}{3}\right)^n, n=0,2,4,6,...\\ \left(\frac{1}{2}\right)^n, n=1,3,5,7,...\end{cases}$.

Calculando a transformada Z, tem-se:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}3^n u[-n+1]z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{3}^{2n}u[n]z^{-2n}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}^{2n+1}u[n]z^{-2n-1},$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}3^n z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}^{2n}z^{-2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}^{2n+1}z^{-2n-1},$$

$$X(z)=\sum_{m=1}^{\infty}3^{-m}z^{m}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}z^{-2}\right)^n+\frac{1}{2}z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}^{2n}z^{-2n},$$

$$X(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(3^{-1}z\right)^m+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}z^{-2}\right)^n+\frac{1}{2}z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}z^{-2}\right)^n,$$

$$X(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(3^{-1}z\right)^m-1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^{-2}}{9}\right)^n+\frac{z^{-1}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^{-2}}{4}\right)^n,$$

$$X(z)=\frac{1}{1-3^{-1}z}-1+\frac{1}{1-\frac{z^{-2}}{9}}+\frac{z^{-1}}{2}\frac{1}{1-\frac{z^{-2}}{4}},$$

$$X(z)=\frac{3}{3-z}-1+\frac{9}{9-z^{-2}}+\frac{z^{-1}}{2}\frac{4}{4-z^{-2}},$$

$$X(z)=\frac{z}{3-z}+\frac{9z^2}{9z^2-1}+\frac{2z}{4z^2-1}.$$

Note que para os três somatórios devem convergir, então:

$$\left|3^{-1}z\right|<1,\ \left|\frac{1}{9}z^{-2}\right|<1 \text{ e } \left|\frac{1}{4}z^{-2}\right|<1,$$

$$|z|<3,\ |z|>\frac{1}{3} \text{ e } |z|>\frac{1}{2}.$$

A região de convergência é $\frac{1}{2}<|z|<3$.

2.4.6. CÁLCULO DA TRANSFORMADA Z DO SENO

Seja uma função exponencial de tempo discreto definida por:

$$x[n]=sen(an)u[n].$$

A transformada Z é dada por:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}sen(an)u[n]z^{-n},$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[e^{jan}-e^{-jan}\right]}{2j}z^{-n},$$

$$X(z)=\frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}e^{jan}z^{-n}-\frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-jan}z^{-n},$$

$$X(z)=\frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{ja}z^{-1}\right)^n-\frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-ja}z^{-1}\right)^n,$$

$$X(z)=\frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{ja}z^{-1}\right)^{n}-\frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-ja}z^{-1}\right)^{n},$$

$$X(z)=\frac{1}{2j}\frac{1}{1-\left(e^{ja}z^{-1}\right)}-\frac{1}{2j}\frac{1}{1-\left(e^{-ja}z^{-1}\right)},$$

$$X(z)=\frac{1}{2j}\frac{z}{z-e^{ja}}-\frac{1}{2j}\frac{z}{z-e^{-ja}},$$

$$X(z)=\frac{z}{2j}\frac{\left(z-e^{-ja}\right)-\left(z-e^{ja}\right)}{\left(z-e^{ja}\right)\left(z-e^{-ja}\right)},$$

$$X(z)=\frac{z}{2j}\frac{\left(e^{ja}-e^{-ja}\right)}{z^{2}-2z\cos(a)+1},$$

$$X(z)=\frac{zsen(a)}{z^{2}-2z\cos(a)+1},$$

Note que para os somatórios convergirem, deve-se ter:

$$\left|e^{ja}z^{-1}\right|<1 \text{ e } \left|e^{-ja}z^{-1}\right|<1,$$

$$\left|e^{ja}\right|<|z| \text{ e } \left|e^{-ja}\right|<|z|.$$

A região de convergência é $|z|<1$.

2.4.7. CÁLCULO DA TRANSFORMADA Z DO COSENO

Seja uma função exponencial de tempo discreto definida por:

$$x[n]=\cos(an)u[n].$$

A transformada Z é dada por:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(an) u[n] z^{-n} \ ,$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[e^{jan} + e^{-jan}\right]}{2} z^{-n} \ ,$$

$$X(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{jan} z^{-n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-jan} z^{-n} \ ,$$

$$X(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{ja} z^{-1}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-ja} z^{-1}\right)^n \ ,$$

$$X(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{ja} z^{-1}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-ja} z^{-1}\right)^n \ ,$$

$$X(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \left(e^{ja} z^{-1}\right)} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \left(e^{-ja} z^{-1}\right)} ,$$

$$X(z) = \frac{1}{2} \frac{z}{z - e^{ja}} + \frac{1}{2} \frac{z}{z - e^{-ja}} \ ,$$

$$X(z) = \frac{z}{2} \frac{\left(z - e^{-ja}\right) + \left(z - e^{ja}\right)}{\left(z - e^{ja}\right)\left(z - e^{-ja}\right)} ,$$

$$X(z) = \frac{z}{2} \frac{2z - \left(e^{ja} + e^{-ja}\right)}{z^2 - 2z\cos(a) + 1} ,$$

$$X(z) = \frac{z[z - \cos(a)]}{z^2 - 2z\cos(a) + 1} \ .$$

Note que para os somatórios convergirem, deve-se ter:

$$\left|e^{ja} z^{-1}\right| < 1 \text{ e } \left|e^{-ja} z^{-1}\right| < 1 ,$$

$$\left|e^{ja}\right| < |z| \text{ e } \left|e^{-ja}\right| < |z| .$$

A região de convergência é $|z| < 1$.

2.4.8. PROPRIEDADE DE DESLOCAMENTO NO TEMPO

Considere a função $x[n]$ com transformada $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$. Deslocando o sinal no tempo, tem-se:

$$Z\{x[n-n_0]\}\equiv\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n-n_0]z^{-n}.$$

Fazendo $m=n-n_0$,

$$Z\{x[n-n_0]\}\equiv\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]z^{-m-n_0},$$

$$Z\{x[n-n_0]\}=z^{-n_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]z^{-m},$$

$$Z\{x[n-n_0]\}=z^{-n_0}X(z).$$

2.4.9. PROPRIEDADE DE MULTIPLICAÇÃO POR UMA SEQUENCIA EXPONENCIAL

Considere a função $x[n]$ com transformada $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$. Calculando a transformada de $x[n]a^n$ a partir da definição, tem-se:

$$Z\{a^n x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^n x[n]z^{-n},$$

$$Z\{a^n x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\left(a^{-1}z\right)^{-n},$$

$$Z\{a^n x[n]\}=X\left(a^{-1}z\right).$$

Exemplo 2.13: Calcule a transformada Z da seguinte função $x[n] = a^n u[n]$.

Já foi calculado $Z\{u[n]\} = \frac{z}{z-1}$, então aplicando a propriedade de multiplicação no domínio do tempo por a^n, tem-se:

$$Z\{a^n x[n]\} = X\left(a^{-1}z\right) = \frac{a^{-1}z}{a^{-1}z - 1},$$

$$Z\{a^n x[n]\} = \frac{z}{z-a}.$$

Note que este resultado já foi obtido de outra forma.

2.4.10. PROPRIEDADE DE INVERSÃO NO TEMPO

Considere a função $x[n]$ com transformada $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$. Calculando a transformada de $x[-n]$ a partir da definição, tem-se:

$$Z\{x[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] z^{-n},$$

Fazendo $-n = m$,

$$Z\{x[-n]\} = \sum_{m=\infty}^{-\infty} x[m] z^{m},$$

$$Z\{x[-n]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left(z^{-1}\right)^{-m},$$

$$Z\{x[-n]\} = X\left(z^{-1}\right).$$

2.4.11. PROPRIEDADE DE DERIVAÇÃO EM RELAÇÃO A Z

Considere a função $x[n]$ com transformada $X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$. Derivando em relação à *z*, tem-se:

$$\frac{dX(z)}{dz}=\frac{d\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}}{dz},$$

$$\frac{dX(z)}{dz}=\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\frac{dz^{-n}}{dz},$$

$$\frac{dX(z)}{dz}=\sum_{n=0}^{\infty} x[n](-n)z^{-n-1},$$

$$-z\frac{dX(z)}{dz}=\sum_{n=0}^{\infty} nx[n]z^{-n},$$

Ou seja,

$$Z\{nx[n]\}=-z\frac{dX(z)}{dz}.$$

Aplicando a *k*-ésima derivada, pode-se obter:

$$Z\{n^k x[n]\}=\left[(-z)^k\frac{d^k}{dz^k}\right][X(z)].$$

Exemplo 2.14: Calcule a transformada *Z* da seguinte função $x[n]=n(n+1)u[n]$.

A função pode ser reescrita como:

$$x[n] = nu[n] + n^2u[n].$$

Calculando a transformada *Z*:

$$Z\{nu[n] + n^2u[n]\} = Z\{nu[n]\} + Z\{n^2u[n]\},$$

$$Z\{nu[n] + n^2u[n]\} = -z\frac{dU(z)}{dz} + z^2\frac{d^2U(z)}{dz^2}.$$

Mas $Z\{u[n]\} = \frac{z}{z-1}$, então:

$$Z\{n(n+1)u[n]\} = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-1}\right] - z\frac{d}{dz}\left\{-z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-1}\right]\right\},$$

$$Z\{n(n+1)u[n]\} = \frac{z}{(z-1)^2} + -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z-1)^2}\right],$$

$$Z\{n(n+1)u[n]\} = \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z(z+1)}{(z-1)^3},$$

$$Z\{n(n+1)u[n]\} = \frac{2z^2}{(z-1)^3}.$$

Exemplo 2.14: Calcule o valor inicial e valor final da função que tem transformada *Z* $X(z) = \frac{z}{z+4}$.

Calculando o valor inicial:

$$x[0] = \lim_{z\to\infty}\frac{z}{z+4},$$

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{1} = 1.$$

Calculando o valor final:

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} \frac{z}{z+4} = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z+4} = 0.$$

2.4.12. PROPRIEDADE DA CONVOLUÇÃO

Considere duas funções $x[n]$ e $y[n]$, que têm transformadas $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$ e $Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n] z^{-n}$. Calculando a transformada Z de $x[n] * y[n]$, pode-se obter:

$$Z\{x[n] * y[n]\} = X(z) Y(z).$$

Exemplo 2.15: Calcule a convolução de $x[n] = \delta[n] + 3\delta[n-1] - \delta[n-2] - 2\delta[n-3]$ com $y[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3] + \delta[n-4]$.

Calculando as transformadas *Z*:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \{\delta[n] + 3\delta[n-1] - \delta[n-2] - 2\delta[n-3]\} z^{-n},$$

$$X(z) = z^{-0} + 3z^{-1} - z^{-2} - 2z^{-3},$$

e

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \{\delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3] + \delta[n-4]\} z^{-n},$$

$$X(z) = z^{-0} + 2z^{-1} - z^{-3} + z^{-4}.$$

Calculando a transformada da convolução:

$$Z\{x[n]*y[n]\} = \left(z^{-0} + 3z^{-1} - z^{-2} - 2z^{-3}\right)\left(z^{-0} + 2z^{-1} - z^{-3} + z^{-4}\right),$$
$$Z\{x[n]*y[n]\} = z^{-0} + 5z^{-1} + 5z^{-2} - 5z^{-3} - 6z^{-4} + 4z^{-5} + z^{-6} - 2z^{-7},$$

Calculando a transformada da inversa:

$$\begin{aligned} x[n]*y[n] &= \delta[n] + 5\delta[n-1] + 5\delta[n-2] - 5\delta[n-3] \\ &- 6\delta[n-4] + 4\delta[n-5] + \delta[n-6] - 2\delta[n-7] \end{aligned}.$$

2.5. TRANSFORMADA Z INVERSA

Assim como a transformada de Laplace, a transformada *Z* também precisa de uma operação inversa. Existem diversas metodologias interessantes para calcular a transformada *Z*, entre elas: método da integral de inversão, método da divisão direta e método de expansão em frações parciais.

2.5.1. MÉTODO DA INTEGRAL DE INVERSÃO

A transformada *Z* inversa Pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$x[n] = \frac{1}{j2\pi}\oint X(z)z^{n-1}dz .$$

Entretanto, este método pode ser complicado.

2.5.2. MÉTODO DA DIVISÃO DIRETA

Este método se baseia no fato de que *X(z)* é uma expansão em uma série de potências de *Z*. Com isso, os valores da série *x[n]* podem ser encontrados por inspeção dos coeficientes de Z^{-k}.

Exemplo 2.16: Calcule a transformada *Z* inversa de $X(z) = \dfrac{2+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$.

Note que,

$$\frac{2+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = 2+2z^{-1}+z^{-2}+\frac{1}{2}z^{-3}+\dots.$$

Então,

$$x[0]=2,\ x[1]=2,\ x[2]=1,\ x[3]=\frac{1}{2},\ \text{etc.}$$

2.5.3. MÉTODO DA EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

É semelhante ao utilizado no cálculo da transformada inversa de Laplace. É o método mais comum. O método se baseia nas informações sobre pares de transformada *Z* conhecidos previamente.

Exemplo 2.17: Calcule a transformada *Z* inversa da seguinte função $X(z) = \dfrac{\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}, |z| > \dfrac{1}{2}$.

$$X(z)=\frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}=\frac{a_1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}+\frac{a_2}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

$$a_1\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)+a_2\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)=\frac{1}{4}z^{-1}$$

$$\begin{cases} a_1+a_2=0 \\ -\frac{a_1}{4}-\frac{a_2}{2}=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$-\frac{a_1}{4}+\frac{a_1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$-a_1+2a_1=1\Rightarrow a_1=1$$

$$a_1=1\Rightarrow a_2=-1$$

$$X(z)==\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}-\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

Calculando a transformada de Laplace inversa,

$$x[n]=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u[n]$$

Exemplo 2.18: Calcule a transformada *Z* inversa da seguinte função $X(z)=\frac{(z+5)}{(z+3)(z+4)}$.

Separando a função em duas funções mais simples $\frac{(z+5)}{(z-3)(z-4)}=\frac{a_1}{(z-3)}+\frac{a_2}{(z-4)}$ e calculando os coeficientes, tem-se:

$$a_1=\frac{(z+5)}{(z-3)(z-4)}(z-3)\Big|_{s=3}=-8\,,$$

$$a_2 = \frac{(z+5)}{(z-3)(z-4)}(z-4)\bigg|_{s=4} = 9\,.$$

Então,

$$\frac{(z+5)}{(z-3)(z-4)} = -\frac{8}{(z-3)} + \frac{9}{(z-4)}\,.$$

Calculando a transformada de Laplace inversa,

$$Z^{-1}\left[\frac{(z+5)}{(z-3)(z-4)}\right] = Z^{-1}\left[-\frac{8}{(z-3)}\right] + Z^{-1}\left[\frac{9}{(z-4)}\right],$$

$$Z^{-1}\left[\frac{(z+5)}{(z-3)(z-4)}\right] = -8Z^{-1}\left[\frac{1}{(z-3)}\right] + 9Z^{-1}\left[\frac{1}{(z-4)}\right],$$

$$x[n] = -8(3)^{n-1}u[n-1] + 9(4)^{n-1}u[n-1]\,.$$

2.6. SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENÇAS

A transformada *Z* pode ser utilizada para a resolução de equações diferenças lineares e invariantes no tempo. O método é baseado na propriedade de deslocamento no tempo para a transformada *Z* unilateral.

$$Z\{x[n+n_0]\} \equiv z^{n_0}\left\{X[z] - \sum_{m=0}^{n_0-1} x[m]z^{-m}\right\},$$

e

$$Z\{x[n-n_0]\} \equiv z^{-n_0}\left\{X[z] + \sum_{m=-n_0}^{-1} x[m]z^{-m}\right\}.$$

O método pode ser descrito em três etapas. Primeiro, aplica-se a transformada *Z* a ambos os membros da equação diferença. Depois a equação algébrica é reorganizada em função das variáveis independentes. Por último, a solução em função do tempo é obtida achando a transformada inversa. Para a resolução do problema, é importante que todas as condições iniciais sejam fornecidas.

Exemplo 2.19: Resolva a seguinte equação diferença $x[n+2]+3x[n+1]+2x[n]=0$, com as seguintes condições iniciais $x[0]=0$ e $x[1]=1$.

Aplicando a transformada em ambos os lados da equação diferença, tem-se:

$$Z\{x[n+2]+3x[n+1]+2x[n]\}=Z\{0\},$$

$$z^2X(z)-z^2x[0]-zx[1]+3zX(z)-zx[0]+2X(z)=0,$$

$$z^2X(z)-z+3zX(z)+2X(z)=0,$$

$$z^2X(z)+3zX(z)+2X(z)=z,$$

$$\left[z^2+3z+2\right]X(z)=z,$$

$$X(z)=\frac{z}{z^2+3z+2},$$

Utilizando o método de separação em frações parciais, tem-se:

$$X(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)},$$

$$X(z)=-\frac{1}{(z+1)}+\frac{2}{(z+2)},$$

Calculando a transformada inversa, tem-se:

$$x[n]=-(-1)^{n-1}u[n-1]+2(-2)^{n-1}u[n-1].$$

2.7. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2.7.1. Ache os pólos de $F(s)=\dfrac{1}{1-e^{-s}}$.

$$1-e^{-s}=0,$$
$$e^{-s}=1,$$
$$e^{-\sigma}e^{-j\omega}=1,$$
$$e^{-\sigma}e^{-j\omega}=e^{\pm j2n\pi}.$$

O que implica em,

$$\sigma=0,$$
$$\omega=\pm 2n\pi.$$

2.7.2. Calcule a transformada de Laplace de $f(t)=te^{-3t}u(t)$.

Lembre-se que $L\left[e^{-t}\right]=\dfrac{1}{(s+1)}$ e que $L\left[t^n f(t)\right]=(-1)^n\dfrac{d^nF(s)}{ds^n}$, então:

$$L\left[te^{-3t}\right]=(-1)^1\frac{d\left[\frac{1}{(s+3)}\right]}{ds},$$
$$L\left[te^{-3t}\right]=-\frac{-1}{(s+3)^2},$$
$$L\left[te^{-3t}\right]=\frac{1}{(s+3)^2}.$$

2.7.3. Calcule a transformada de Laplace de $f(t) = sen(at + b)u(t)$.

$$L[sen(at+b)u(t)] = L[\cos(b)sen(at)u(t) + sen(b)\cos(at)u(t)],$$

$$L[sen(at+b)u(t)] = L[\cos(b)sen(at)u(t)] + L[sen(b)\cos(at)u(t)],$$

$$L[sen(at+b)u(t)] = \cos(b)L[sen(at)u(t)] + sen(b)L[\cos(at)u(t)],$$

$$L[sen(at+b)u(t)] = \cos(b)\frac{a}{s^2+a^2} + sen(b)\frac{s}{s^2+a^2},$$

$$L[sen(at+b)u(t)] = \frac{a\cos(b) + sen(b)s}{s^2+a^2}.$$

2.7.4. Calcule a transformada de Laplace de $f(t) = t^2 sen(at)u(t)$.

Lembre-se que $L[sen(at)u(t)] = \frac{a}{s^2+a^2}$ e que $L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$, então:

$$L[t^2 sen(at)u(t)] = \frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right],$$

$$L[t^2 sen(at)u(t)] = \frac{d}{ds}\left[\frac{-2sa}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right],$$

$$L[t^2 sen(at)u(t)] = \left[\frac{-2a\left(s^2+a^2\right)^2 + 2sa2\left(s^2+a^2\right)2s}{\left(s^2+a^2\right)^4}\right],$$

$$L[t^2 sen(at)u(t)] = \left[\frac{-2a\left(s^2+a^2\right) + 8s^2a}{\left(s^2+a^2\right)^3}\right],$$

$$L[t^2 sen(at)u(t)] = \left[\frac{6s^2a - 2a^3}{\left(s^2+a^2\right)^3}\right].$$

2.7.5. Calcule a transformada de Laplace de $f(t)=\frac{1}{a^2}u(t)-\frac{2}{a^2}u(t-a)+\frac{1}{a^2}u(t-2a)$.

$$L\left[\frac{1}{a^2}u(t)-\frac{2}{a^2}u(t-a)+\frac{1}{a^2}u(t-2a)\right]=L\left[\frac{1}{a^2}u(t)\right]-L\left[\frac{2}{a^2}u(t-a)\right]+L\left[\frac{1}{a^2}u(t-2a)\right],$$

$$L\left[\frac{1}{a^2}u(t)-\frac{2}{a^2}u(t-a)+\frac{1}{a^2}u(t-2a)\right]=\frac{1}{a^2}L[u(t)]-\frac{2}{a^2}L[u(t-a)]+\frac{1}{a^2}L[u(t-2a)],$$

$$L\left[\frac{1}{a^2}u(t)-\frac{2}{a^2}u(t-a)+\frac{1}{a^2}u(t-2a)\right]=\frac{1}{a^2}\frac{1}{s}-\frac{2}{a^2}\frac{e^{-s}}{s}+\frac{1}{a^2}\frac{e^{-2s}}{s},$$

$$L\left[\frac{1}{a^2}u(t)-\frac{2}{a^2}u(t-a)+\frac{1}{a^2}u(t-2a)\right]=\frac{1}{sa^2}\left(1-2e^{-s}+e^{-2s}\right).$$

2.7.6. Determine o valor inicial de $\frac{df(t)}{dt}$ sabendo que a transformada de Laplace de $f(t)$ é dada por $F(s)=\frac{2s+1}{s^2+s+1}$.

$$f(0)=\lim_{s\to\infty}sF(s)=\lim_{s\to\infty}\left(s\frac{2s+1}{s^2+s+1}\right),$$

$$f(0)=\lim_{s\to\infty}\left(\frac{2s^2+s}{s^2+s+1}\right).$$

Aplicando L´Hopital, tem-se:

$$f(0)=\lim_{s\to\infty}\left(\frac{4s+1}{2s+1}\right).$$

Aplicando novamente L´Hopital, tem-se:

$$f(0)=\lim_{s\to\infty}\left(\frac{4}{2}\right)=2.$$

Por outro lado sabe-se que $L\left[d\,\frac{f(t)}{dt}\right]=sF(s)-f(0)$, aplicando o teorema do valor inicial, tem-se:

$$\frac{df(0)}{dt}=\lim_{s\to\infty}s[sF(s)-f(0)],$$

$$\frac{df(0)}{dt}=\lim_{s\to\infty}s\left[s\frac{2s+1}{s^2+s+1}-2\right],$$

$$\frac{df(0)}{dt}=\lim_{s\to\infty}s\left[\frac{2s^2+s}{s^2+s+1}-2\right],$$

$$\frac{df(0)}{dt}=\lim_{s\to\infty}s\left[\frac{2s^2+s}{s^2+s+1}-2\frac{s^2+s+1}{s^2+s+1}\right],$$

$$\frac{df(0)}{dt}=\lim_{s\to\infty}s\left[\frac{2s^2+s-2s^2-2s-2}{s^2+s+1}\right],$$

$$\frac{df(0)}{dt}=\lim_{s\to\infty}\left[\frac{-s^2-2s}{s^2+s+1}\right]=-1.$$

2.7.7. Calcule a transformada de Laplace inversa da seguinte função $F(s)=\frac{1}{s(s^2+2s+2)}$.

A função pode ser expandida para:

$$F(s)=\frac{a_1}{s}+\frac{b_1s+b_2}{s^2+2s+2}.$$

Calculando o mínimo múltiplo comum, tem-se:

$$\frac{1}{s\left(s^2+2s+2\right)}=\frac{a_1}{s}+\frac{b_1 s+b_2}{s^2+2s+2}\,,$$

$$\frac{1}{s\left(s^2+2s+2\right)}=\frac{a_1\left(s^2+2s+2\right)+\left(b_1 s+b_2\right)s}{s\left(s^2+2s+2\right)}\,,$$

$$1=a_1 s^2+2a_1 s+2a_1+b_1 s^2+b_2 s\,,$$

Então, obtem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 1=2a_1 \\ 2a_1+b_2=0 \\ a_1+b_1=0 \end{cases}.$$

Por conseqüência:

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{2} \\ b_2=-1 \\ b_1=-\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Então, tem-se a seguinte representação:

$$F(s)=\frac{1}{2s}-\frac{1}{2}\frac{s+2}{s^2+2s+2}\,,$$

$$F(s)=\frac{1}{2s}-\frac{1}{2}\frac{s+2}{\left(s^2+2s+1\right)+1}\,,$$

$$F(s)=\frac{1}{2s}-\frac{1}{2}\frac{s+2}{(s+1)^2+1}\,,$$

$$F(s)=\frac{1}{2s}-\frac{1}{2}\frac{s+1}{(s+1)^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2+1}\,,$$

Calculado a transformada inversa, tem-se:

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{2s}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2+1}\right],$$

$$f(t) = \frac{1}{2}u(t) - \frac{1}{2}e^{-t}\cos(t)u(t) - \frac{1}{2}e^{-t}sen(t)u(t).$$

2.7.8. Calcule a transformada de Laplace inversa da seguinte função $F(s) = \frac{1}{s(s^2+a^2)}$.

Usando a mesma idéia da questão anterior, pode-se expandir para a seguinte representação:

$$F(s) = \frac{1}{a^2}\frac{1}{s} - \frac{1}{a^2}\frac{s}{s^2+a^2}.$$

Calculado a transformada inversa, tem-se:

$$f(t) = \frac{1}{a^2}u(t) - \frac{1}{a^2}\cos(at)u(t).$$

2.7.9. Resolva a seguinte equação diferencial usando a transformada de Laplace $5\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = 2x(t),\ y(0^+) = 2,\ x(t) = u(t).$

Usando a propriedade da transformada de Laplace

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2}\frac{d\ \ f(0)}{dt} - \ldots - s\ \frac{d^{n-2} f(0)}{dt^{n-2}} - \frac{d^{n-1} f(0)}{dt^{n-1}}$$

Tem-se:

$$5[sY(s)-y(0)]+10Y(s)=2\frac{1}{s},$$

$$5[sY(s)-2]+10Y(s)=2\frac{1}{s},$$

$$5sY(s)+10Y(s)=10+2\frac{1}{s},$$

$$Y(s)=\frac{10+2\frac{1}{s}}{5s+10} \rightarrow Y(s)=\frac{10s+2}{5s^2+10s},$$

$$Y(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2},$$

$$A=\left.\frac{10s+2}{5s+10}\right|_{s=0}=\frac{1}{5},$$

$$B=\left.\frac{10s+2}{5s}\right|_{s=-2}=-\frac{9}{5},$$

$$Y(s)=\frac{1}{5}\frac{1}{s}-\frac{9}{5}\frac{1}{s+2} \rightarrow y(t)=\frac{1}{5}u(t)-\frac{9}{5}e^{-2t}u(t),$$

2.7.10. Resolva a seguinte equação diferencial usando a transformada de Laplace

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=-4x(t)-3\frac{dx(t)}{dt},\ y(0^+)=-1,\ \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0}=5,\ x(t)=e^{-t}u(t).$$

$$\left[s^2Y(s)-sy(0)-\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0}\right]+5[sY(s)-y(0)]+6Y(s)=-4X(s)-3[sX(s)-x(0)],$$

$$\left[s^2Y(s)+s-5\right]+5[sY(s)+1]+6Y(s)=-4\frac{1}{s+1}-3\left[\frac{s}{s+1}-1\right],$$

$$s+Y(s)\left[s^2+5s+6\right]=-4\frac{1}{s+1}-3\left[\frac{s}{s+1}-\frac{s+1}{s+1}\right],$$

$$Y(s)\left[s^2+5s+6\right]=-s-\frac{4}{s+1}+\frac{3}{s+1},$$

$$Y(s)\left[s^2+5s+6\right]=-\frac{s^2+s+1}{s+1},$$

$$Y(s)\left[s^2+5s+6\right]=-\frac{s^2+s+1}{s+1},$$

$$Y(s)=-\frac{s^2+s+1}{(s+1)\left(s^2+5s+6\right)},$$

$$Y(s)=-\frac{s^2+s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)},$$

$$Y(s)=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+3},$$

$$A=-\left.\frac{s^2+s+1}{(s+2)(s+3)}\right|_{s=-1}=-\frac{1}{2},$$

$$B=-\left.\frac{s^2+s+1}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=-2}=3,$$

$$C=-\left.\frac{s^2+s+1}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=-3}=-\frac{7}{2},$$

$$Y(s)=-\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}+3\frac{1}{s+2}-\frac{7}{2}\frac{1}{s+3}\rightarrow\ y(t)=-\frac{1}{2}e^{-t}u(t)+3e^{-2t}u(t)-\frac{7}{2}e^{-3t}u(t).$$

2.7.11. Resolva a seguinte equação diferencial usando a transformada de Laplace

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}=8x(t),\ y\left(0^+\right)=1,\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0}=2,\ x(t)=u(t).$$

$$\left[s^2Y(s)-sy(0)-\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0}\right]+4\left[sY(s)-y(0)\right]=8\frac{1}{s},$$

$$\left[s^2Y(s)-s-2\right]+4\left[sY(s)-1\right]=8\frac{1}{s},$$

$$s^2Y(s)+4sY(s)-s-6=8\frac{1}{s},$$

$$s^2Y(s)+4sY(s)=s+6+8\frac{1}{s},$$

$$Y(s)=\frac{(s+2)}{s^2},$$

$$Y(s)=\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2},$$

$$y(t)=(1+2t)u(t).$$

2.7.12. Resolva a seguinte equação diferencial usando a transformada de Laplace

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+5y(t)=\frac{dx(t)}{dt},\; y(0^+)=2, \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0}=0,\; x(t)=e^{-t}u(t).$$

$$\left[s^2Y(s)-sy(0)-\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0}\right]+2[sY(s)-y(0)]+5Y(s)=[sX(s)-x(0)],$$

$$\left[s^2Y(s)-2s\right]+2[sY(s)-2]+5Y(s)=\left[\frac{s}{s+1}-1\right],$$

$$Y(s)\left(s^2+2s+5\right)-2s-4=\left[-\frac{1}{s+1}\right],$$

$$Y(s)=\frac{2s+4-\frac{1}{s+1}}{\left(s^2+2s+5\right)},$$

$$Y(s)=\frac{(s+1)(2s+4)-1}{(s+1)\left(s^2+2s+5\right)},$$

$$Y(s)=\frac{2s^2+6s+3}{(s+1)\left(s^2+2s+5\right)},$$

$$Y(s)=\frac{A}{(s+1)}+\frac{Bs+C}{\left(s^2+2s+5\right)},$$

$$A=\left.\frac{2s^2+6s+3}{\left(s^2+2s+5\right)}\right|_{s=-1}=\frac{-1}{4},$$

$$\frac{-1}{4}\frac{1}{(s+1)}+\frac{Bs+C}{\left(s^2+2s+5\right)}=\frac{2s^2+6s+3}{(s+1)\left(s^2+2s+5\right)},$$

$$4(Bs+C)(s+1)=4\left(2s^2+6s+3\right)+\left(s^2+2s+5\right),$$

$$4\left[Bs^2+(B+C)s+c\right]=\left(9s^2+26s+17\right),$$

$$\begin{cases} 4B=9 \\ 4B+4C=26 \\ 4C=17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4B=9 \\ \\ 4C=17 \end{cases},$$

$$Y(s)=-\frac{1}{4}\frac{1}{(s+1)}+\frac{1}{4}\frac{9s+17}{\left(s^2+2s+5\right)},$$

$$Y(s)=-\frac{1}{4}\frac{1}{(s+1)}+\frac{1}{4}\frac{9s+17}{\left(s^2+2s+1\right)+4},$$

$$Y(s)=-\frac{1}{4}\frac{1}{(s+1)}+\frac{1}{4}\frac{9s+17}{(s+1)^2+2^2} \rightarrow Y(s)=-\frac{1}{4}\frac{1}{(s+1)}+\frac{1}{4}\frac{9s+9}{(s+1)^2+2^2}+\frac{1}{4}\frac{8}{(s+1)^2+2^2},$$

$$Y(s)=-\frac{1}{4}\frac{1}{(s+1)}+\frac{9}{4}\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}+\frac{2}{(s+1)^2+2^2},$$

$$y(t)=-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{9}{4}e^{-t}\cos(2t)+e^{-t}sen(2t).$$

2.7.13. Determine a transformada Z de cada um dos seguintes sinais usando a equação de definição. Determine a RDC.

a. $x[n]=\delta[n+k], k>0$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n+k]u[k]z^{-n}=\begin{cases}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n+k]z^{-n}, k\geq 0 \\ 0, k<0\end{cases},$$

$$X(z)=\begin{cases} z^k, k\geq 0 \\ 0, k<0 \end{cases}, \text{ RDC todo plano z.}$$

b. $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n(u[n]-u[n-10])$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n(u[n]-u[n-10])z^{-n},$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]z^{-n}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-10]z^{-n},$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}-\sum_{n=10}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n},$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n},$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{9}\left(\frac{1}{2z}\right)^n, \text{ mas } \sum_{n=n_1}^{n_2}a^n=\frac{a^{n_1}-a^{n_2+1}}{1-a},$$

$$X(z)=\frac{\left(\frac{1}{2z}\right)^0-\left(\frac{1}{2z}\right)^{10}}{1-\left(\frac{1}{2z}\right)}=\frac{1-2z^{-10}}{1-2z^{-1}},$$

RDC → $z\neq 0$.

c. $x[n]=2^n u[-n-1]$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2^n u[-n-1]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}2^n z^{-n},$$

$$X(z)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}z^k=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)}{1-\left(\frac{z}{2}\right)}=\frac{z}{2-z}, \text{ para RDC} \rightarrow |z|<2.$$

d. $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]\right\}z^{-n},$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u[-n-1]z^{-n},$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}z^{-n},$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^{n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{3z}\right)^{n},$$

$$X(z)=\frac{\left(\frac{1}{2z}\right)^{0}}{1-\left(\frac{1}{2z}\right)}+\frac{-\left(\frac{1}{3z}\right)^{-1+1}}{1-\left(\frac{1}{3z}\right)},$$

$$X(z)=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2z}\right)}-\frac{1}{1-\left(\frac{1}{3z}\right)}.$$

RDC → $|z|>\frac{1}{2}$ e $|z|<\frac{1}{3}$ “não converge”.

2.7.14. Determine a transformada Z de cada um dos seguintes sinais usando as tabelas de pares e propriedades. Determine a RDC.

a. $x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n-4]+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[-n-4]$

$$\alpha^{n}u[n]\Leftrightarrow\frac{1}{1-\alpha z^{-1}},\ |z|>|\alpha|$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]\Leftrightarrow\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}},\ |z|>\left|\frac{1}{4}\right|$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]\Leftrightarrow\frac{4z}{4z-1},\ |z|>\left|\frac{1}{4}\right|$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n-4]\Leftrightarrow\frac{4z}{4z-1}z^{-4},\ |z|>\left|\frac{1}{4}\right|$$

$$\alpha^n u[-n-1] \Leftrightarrow -\frac{1}{1-\alpha z^{-1}},\ |z|<|\alpha|$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \Leftrightarrow -\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\ |z|<\left|\frac{1}{2}\right|$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \Leftrightarrow -\frac{2z}{2z-1},\ |z|<\left|\frac{1}{2}\right|$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-4] \Leftrightarrow -\frac{2z}{2z-1}z^3,\ |z|<\left|\frac{1}{2}\right|$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-4]+\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-4] \Leftrightarrow \frac{4z}{4z-1}z^{-4}-\frac{2z}{2z-1}z^3,\ \frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-4]+\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-4] \Leftrightarrow \frac{4z^{-3}}{4z-1}-\frac{2z^4}{2z-1},\ \frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-4]+\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-4] \Leftrightarrow \frac{4z^{-3}(2z-1)-2z^4(4z-1)}{(4z-1)(2z-1)},\ \frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-4]+\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-4] \Leftrightarrow \frac{8z^{-2}-4z^{-3}-8z^5+2z^4}{8z^2-6z+1},\ \frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{2}$$

b. $x[n]=nsen\left(\frac{n\pi}{2}\right)u[-n]$

$$sen(\Omega n)u[n] \Leftrightarrow \frac{z^{-1}sen(\Omega)}{1-z^{-1}2\cos(\Omega)+z^{-2}},\ |z|>1$$

$$sen\left(\frac{\pi n}{2}\right)u[n] \Leftrightarrow \frac{z^{-1}sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1-z^{-1}2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+z^{-2}},\ |z|>1$$

$$sen\left(\frac{\pi n}{2}\right)u[n] \Leftrightarrow \frac{z^{-1}}{1+z^{-2}},\ |z|>1$$

$$x[-n] \Leftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$sen\left(\frac{-\pi n}{2}\right)u[-n] \Leftrightarrow \frac{z}{1+z^2}$$

$$sen\left(\frac{\pi n}{2}\right)u[-n] \Leftrightarrow \frac{-z}{1+z^2}$$

$$nx[n] \Leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$$

$$nsen\left(\frac{\pi n}{2}\right)u[-n] \Leftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{-z}{1+z^2}\right)$$

$$nsen\left(\frac{\pi n}{2}\right)u[-n] \Leftrightarrow z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{1+z^2}\right)$$

$$nsen\left(\frac{\pi n}{2}\right)u[-n] \Leftrightarrow z\left[\frac{1+z^2-2z^2}{\left(1+z^2\right)^2}\right]$$

$$nsen\left(\frac{\pi n}{2}\right)u[-n] \Leftrightarrow z\left[\frac{1-z^2}{\left(1+z^2\right)^2}\right]$$

c. $x[n] = n\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\}$

$$\alpha^n u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha z^{-1}},\ |z| > |\alpha|$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)z^{-1}},\ |z| > \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \Leftrightarrow \frac{2z}{2z-1},\ |z| > \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} \Leftrightarrow \frac{2z}{2z-1}\frac{2z}{2z-1},\ |z| > \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$nx[n] \Leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$$

$$n\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} \Leftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{2z}{2z-1}\right)^2$$

$$n\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]*\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} \Leftrightarrow -2z\frac{2z}{2z-1}\frac{d}{dz}\left(\frac{2z}{2z-1}\right)$$

$$n\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]*\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} \Leftrightarrow \frac{-4z^2}{2z-1}\frac{2(2z-1)-2(2z)}{(2z-1)^2}$$

$$n\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]*\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} \Leftrightarrow \frac{-4z^2}{2z-1}\frac{-2}{(2z-1)^2}$$

$$n\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]*\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} \Leftrightarrow \frac{8z^2}{(2z-1)^3},\ |z|>\left(\frac{1}{2}\right)$$

2.7.15. Use o método das frações parciais para determinar a transformada Z inversa

$X(z)=\dfrac{z^2-3z}{z^2+\frac{3}{2}z-1}, \frac{1}{2}<|z|<2$.

$$X(z)=\frac{z^2-3z}{z^2+\frac{3}{2}z-1}=1+\frac{-\frac{9}{2}z+1}{z^2+\frac{3}{2}z-1}=1+\frac{-\frac{9}{2}z+1}{(z+2)\left(z-\frac{1}{2}\right)},$$

$$\frac{-\frac{9}{2}z+1}{(z+2)\left(z-\frac{1}{2}\right)}=\frac{a}{(z+2)}+\frac{b}{\left(z-\frac{1}{2}\right)},$$

$$-\frac{9}{2}z+1=a\left(z-\frac{1}{2}\right)+b(z+2),$$

$$\begin{cases} a+b=-\frac{9}{2} \\ -\frac{a}{2}+2b=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b=-\frac{9}{2} \\ b=\frac{1}{2}+\frac{a}{4} \end{cases},$$

$$a=-4 \text{ e } b=-\frac{1}{2},$$

$$X(z)=1-\frac{4}{(z+2)}-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)}.$$

Pares de Transformada de Laplace

Função exponencial: $f(t)=\begin{cases} 0, t<0 \\ Ae^{-\alpha t}, t\geq 0 \end{cases}$ → $F(s)=\dfrac{A}{s+\alpha}$

Função degrau unitário: $f(t)=u(t)=\begin{cases} 0, t<0 \\ 1, t\geq 0 \end{cases}$ → $F(s)=\dfrac{1}{s}$

Função rampa: $f(t)=\begin{cases} 0, t<0 \\ At, t\geq 0 \end{cases}$ → $F(s)=\dfrac{A}{s^2}$

Função seno: $f(t)=\begin{cases} 0, t<0 \\ Asen(\omega t), t\geq 0 \end{cases}$ → $F(s)=\dfrac{A\omega}{s^2+\omega^2}$

Função coseno: $f(t)=\begin{cases} 0, t<0 \\ A\cos(\omega t), t\geq 0 \end{cases}$ → $F(s)=\dfrac{As}{s^2+\omega^2}$

Função pulso retangular: $f(t)=\begin{cases} \dfrac{A}{t_0}, 0<t<t_0 \\ 0, c.c. \end{cases}$ → $F(s)=\dfrac{A}{st_0}\left(1-e^{-t_0 s}\right)$

Função impulso: $f(t)=\delta(t)=\begin{cases} \infty, t=0 \\ 0, t\neq 0 \end{cases}$ → $F(s)=1$

Propriedades da Transformada de Laplace

Considere duas funções *f(t)* e *g(t)*, e as respectivas transformadas *F(s)* e *G(s)*. Temos as seguintes propriedades:

Linearidade: $L(af(t)+bg(t)) = aF(s)+bG(s)$

Translação no tempo: $L[u(t-\alpha)f(t-\alpha)] = e^{-\alpha s}F(s)$

Translação na freqüência: $L\left[f(t)e^{-\alpha t}\right] = F(s+\alpha)$

Escalonamento no tempo: $L\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \alpha F(\alpha s)$

Teorema da derivação real: $L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$

ou ainda, $L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2}\frac{d\ \ f(0)}{dt} - \ldots - s\ \frac{d^{n-2} f(0)}{dt^{n-2}} - \frac{d^{n-1} f(0)}{dt^{n-1}}$

Teorema do valor final: $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

Teorema do valor inicial: $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

Teorema da integração real: $L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$

Teorema da diferenciação complexa: $L[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$

ou ainda, $L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$

Integral de convolução: $L[f(t)*g(t)] = L\left[\int_0^t f(\tau)*g(t-\tau)d\tau\right] = F(s)G(s)$

Pares de Transformada Z

Sinal de tempo discreto	Transformada Z	Região de convergência
$\delta[n]$	1	Todo plano z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\alpha^n u[n]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$n\alpha^n u[n]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$\cos(\Omega n)u[n]$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\Omega)}{1-z^{-1}2\cos(\Omega)+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$sen(\Omega n)u[n]$	$\frac{z^{-1}sen(\Omega)}{1-z^{-1}2\cos(\Omega)+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$r^n\cos(\Omega n)u[n]$	$\frac{1-z^{-1}r\cos(\Omega)}{1-z^{-1}2r\cos(\Omega)+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
$r^n sen(\Omega n)u[n]$	$\frac{z^{-1}rsen(\Omega)}{1-z^{-1}2r\cos(\Omega)+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
$u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
$-\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
$-n\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$

Propriedades da Transformada Z

Sinal	Transformada unilateral	Transformada bilateral	Região de convergência
$x[n]$	$X(z)$	$X(z)$	R_x
$y[n]$	$Y(z)$	$Y(z)$	R_y
$ax[n]+by[n]$	$aX(z)+bY(z)$	$aX(z)+bY(z)$	No mínimo $R_x \cap R_y$
$x[n-k]$	Veja abaixo	$z^{-k}X(z)$	R_x com exceção, possivelmente, de $\|z\| = 0,\infty$
$\alpha^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{\alpha}\right)$	$X\left(\frac{z}{\alpha}\right)$	$\|\alpha\| R_x$
$x[-n]$	-	$X\left(\frac{1}{z}\right)$	$\frac{1}{R_x}$
$x[n]*y[n]$	$X(z)Y(z)$	$X(z)Y(z)$	No mínimo $R_x \cap R_y$
$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	R_x com exceção, possivelmente, da adição ou exclusão de $z=0$

$x[n-k] \leftrightarrow x[-k] + x[-k+1]z^{-1} + \ldots + x[-1]z^{-k+1} + z^{-k}X(z)$, para $k > 0$

$x[n+k] \leftrightarrow -x[0]z^{k} - x[1]z^{k-1} - \ldots - x[k-1]z + z^{k}X(z)$, para $k > 0$

2.6. LISTA DE EXERCÍCIOS

2.6.1. Determine a transformada unilateral de Laplace de cada um dos seguintes sinais usando a equação de definição:

a. $f(t) = u(t-1)$

b. $f(t) = u(t+1)$

c. $f(t) = e^{-t+2}u(t)$

d. $f(t) = \cos(\omega_0 t)u(t-3)$

e. $f(t) = sen(\omega_0 t)u(t+2)$

2.6.2. Use os pares de transformadas e as propriedades da transformadas de Laplace para calcular a transformada de Laplace das funções abaixo:

a. $f(t) = t^2 e^{-2t}u(t)$

b. $f(t) = e^{-t}u(t) * sen(3\pi t)u(t)$

c. $f(t) = \dfrac{d[tu(t)]}{dt}$

d. $f(t) = tu(t) - (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2) + (t-3)u(t-3)$

e. $f(t) = \int_0^t e^{-2\tau}\cos(3\tau)d\tau$

f. $f(t) = 2t\dfrac{d\left[e^{-t}sen(t)u(t)\right]}{dt}$

2.6.3. Use os pares de transformadas e as propriedades da transformadas de Laplace para calcular a transformada inversa das funções abaixo:

a. $F(s) = \dfrac{1}{s}\dfrac{1}{s+1}$

b. $F(s) = \dfrac{d}{ds}\left[e^{-2s}\dfrac{1}{(s+2)^2}\right]$

c. $F(s) = \dfrac{1}{(2s+1)^2 + 4}$

d. $F(s) = s\dfrac{d^2}{ds^2}\left[\dfrac{4}{s^2+4}\right]$

2.6.4. Determine o valor inicial $f(0^+)$ das seguintes transformadas de Laplace:

a. $F(s) = \dfrac{3}{s^2 + 5s - 1}$

b. $F(s) = \dfrac{2s+3}{s^2 + 5s - 6}$

c. $F(s) = e^{-5s}\dfrac{3s^2 + 2s}{s^2 + s - 1}$

2.6.5. Determine o valor final $f(\infty)$ das seguintes transformadas de Laplace:

a. $F(s)=\dfrac{2s+3}{s^2+5s+1}$

b. $F(s)=\dfrac{2s+3}{s^3+5s^2+6s}$

c. $F(s)=e^{-3s}\dfrac{3s^2+2s}{s(s+1)(s+2)}$

2.6.6. Use o método das frações parciais para encontrar os sinais de tempo correspondentes às seguintes transformadas de Laplace:

a. $F(s)=\dfrac{-s-4}{s^2+3s+2}$

b. $F(s)=\dfrac{s}{s^3+5s^2+6s}$

c. $F(s)=\dfrac{2s-1}{s^2+2s+1}$

d. $F(s)=\dfrac{5s+4}{s^3+3s^2+2s}$

e. $F(s)=\dfrac{\left(3s^2+8s+5\right)}{(s+2)\left(s^2+2s+1\right)}$

f. $F(s)=\dfrac{(3s+2)}{\left(s^2+4s+5\right)}$

g. $F(s) = \dfrac{(4s^2 + 8s + 10)}{(s+2)(s^2 + 2s + 10)}$

h. $F(s) = \dfrac{-9}{(s+1)(s^2 + 2s + 10)}$

i. $F(s) = \dfrac{s + 4 + e^{-2s}}{s^2 + 5s + 6}$

2.6.7. Determine a transformada Z de cada um dos seguintes sinais usando a equação de definição. Determine a RDC.

a. $x[n] = \delta[n+k], k > 0$

b. $x[n] = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (u[n] - u[n-10])$

c. $x[n] = 2^n u[-n-1]$

d. $x[n] = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$

2.6.8. Determine a transformada Z de cada um dos seguintes sinais usando as tabelas de pares e propriedades. Determine a RDC.

a. $x[n] = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n u[n-4] + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n u[-n-4]$

b. $x[n] = nsen\left(\frac{n\pi}{2}\right)u[-n]$

c. $x[n] = n\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\}$

2.6.9. Use o método das frações parciais para determinar a transformada Z inversa.

a. $X(z) = \dfrac{\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}, |z| > \frac{1}{2}$

b. $X(z) = \dfrac{z^2 - 3z}{z^2 + \frac{3}{2}z - 1}, \frac{1}{2} < |z| < 2$