

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

ESCOLA DE ENGENHARIA

CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DISCIPLINA:

ELT032 - ANÁLISE DE SISTEMAS LINEARES

FEVEREIRO DE 2005

Professor: Benjamim Rodrigues de Menezes

E-mail: brm@ppdee.ufmg.br / www.ppdee.ufmg.br/~brm

Sumário

I.	Introdução à Teoria de Sinais e Sistemas	02
I.1 -	Introdução aos Sinais e Sistemas	02
I.2 -	Sinais e Sistemas Contínuos e Discretos no Domínio do Tempo	05
I.2.1 -	Introdução – Conceitos Básicos	05
I.2.2 -	Classificações de Sinais	06
I.2.3	Operações Básicas com Sinais	09
I.2.4 -	Sinais Elementares	12
I.2.5 -	Sinais Exponenciais	15
I.3 -	Convolução – Operação Dinâmica entre Sinais e Sistemas	21
I.3.1 -	Introdução	21
I.3.2 -	Convolução entre Sinais e Sistemas Discretos	23
I.3.3 -	Convolução entre Sinais e Sistemas Contínuos	27
I.4 -	Propriedades de Sistemas	34
I.5 -	Equações Diferenciais e a Diferenças	41
I.5.1 -	Equações Diferenciais	41
I.5.2 -	Equações a Diferenças	42
I.5.3 -	Introdução à Solução de Equações Diferenciais	43
I.6 -	Respostas de Sistemas às Entradas Elementares	44
I.6.1 -	Resposta ao Impulso Unitário	44
I.6.2 -	Resposta ao Degrau Unitário	45
I.6.3	Resposta em Frequência	45
I.7 -	Conclusão	47
	Problemas	48

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO À TEORIA DE SINAIS E SISTEMAS

I.1 – Introdução aos Sinais e Sistemas

O conteúdo do Curso *Análise de Sistemas Lineares*, ora apresentado tem por objetivo permitir ao aluno a associação dos conceitos matemáticos com os fenômenos da natureza, para a compreensão e a análise do comportamento dinâmico de sinais e sistemas lineares.

Os conhecimentos adquiridos neste curso são básicos para o aprendizado e análise de vários conteúdos essenciais à formação de um engenheiro, tais como:

- Sistemas elétricos, no caso de alunos de Cursos de Engenharia Elétrica, Controle e Automação e outros;
- Sistemas mecânicos, no caso de alunos de Cursos de Engenharia Mecânica, Mecatrônica, Controle e Automação e outros;
- Processos químicos, no caso de alunos de Curso de Engenharia Química e outros;
- Sistemas de controle;
- Processamento de sinais;
- Áreas diversas de aplicações das engenharias.

Neste capítulo¹ serão introduzidos os conceitos fundamentais e as operações básicas da teoria de sinais e sistemas, sobretudo no domínio do tempo. Entretanto, nos demais capítulos serão enunciados os conceitos e ferramentas de análise de sinais e sistemas no domínio do tempo e da frequência.

A metodologia de aprendizado utilizada neste curso é apresentar a teoria de sinais e sistemas de maneira integrada e, sempre que possível, visualizar os fenômenos físicos existentes na natureza como a origem da teoria e não o contrário. Um dos itens importantes desta metodologia é direcionar suas análises com foco na *Teoria de Sistemas de Controle*, pelo fator motivação e também porque diversas aplicações de sinais e sistemas podem ser incorporadas em um sistema de controle.

Inicialmente serão enunciados alguns fatores históricos e diagramas ilustrativos de um sistema de controle.

A análise, projeto e implementação dos sistemas de controle têm evoluído continuamente. Para se ter uma idéia temporal e simplificada de alguns fatores marcantes na evolução da teoria de sistemas de controle, serão destacados os seguintes marcos:

- **Século XVII** - Controlador centrífugo (controle de velocidade de máquina a vapor - James Watt);
- Início do **Século XX** - Controle de velocidade de acionamentos elétricos; - W. Leonard
- Ano de **1922** - Controle automático de navio e sistemas de equações diferenciais; Minorsny
- Transformada de Fourier;
- Transformada de Laplace;
- Transformada Z;
- Ano de **1932** - Análise da estabilidade; Nyquist

¹ Este capítulo está relacionado com os capítulos 1 e 2 do livro texto, S. Haynin, B. Van Veen; “Sinais e Sistemas”; John Wiley / Boonman, 1999.

- Ano de **1934** - Servomecanismos; Hazen
- Transformada rápida de Fourier
- Década de **1940** - ***Teoria de controle clássico:*** Resposta em frequência, Lugar das raízes;
- Década de **1950** - Controle Ótimo;
- Década de **1960** - Controle por Variáveis de Estado;
- Outras técnicas de Controle:
 - Controle Adaptativo
 - Controle por Estrutura Variável
 - Sistemas Especialistas
 - Inteligência Computacional: Sistemas Nebulosos, Redes Neurais e Computação Evolutiva.
- .
- .
- .
- .
- .
- .
- .

Com a finalidade de ilustrar algumas aplicações típicas de sistemas de controle, serão dados alguns exemplos gerais, sem, contudo neste momento, se preocupar com análises detalhadas.

6

Engenharia de Controle Moderno

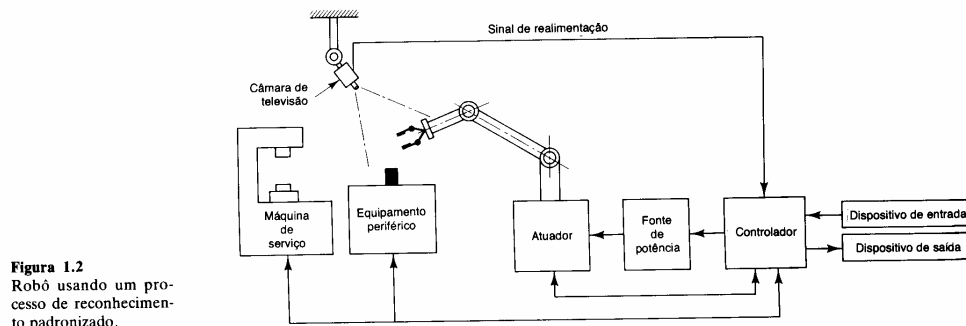


Figura 1.2
Robô usando um processo de reconhecimento padronizado.

a) Manipulador Robótico

8

Engenharia de Controle Moderno

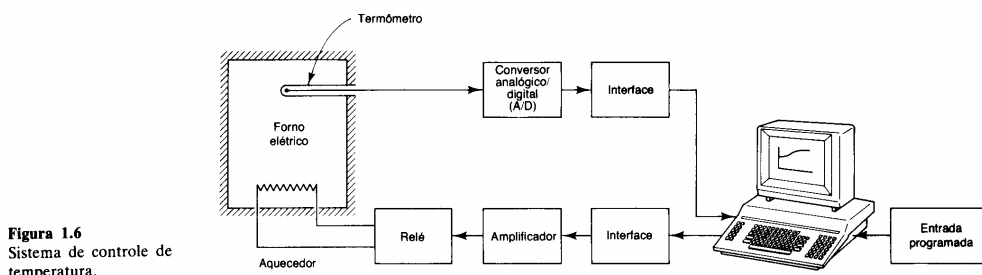


Figura 1.6
Sistema de controle de temperatura.

b) Sistema de Aquecimento

Figura I.1 – Diagrama de Blocos de Sistemas de Controle ²

Uma das principais classificações de um sistema de controle é quanto à natureza de seus sinais e componentes físicas, qual seja:

- Sistema de tempo contínuo (ou sistema contínuo) em que todos seus sinais e componentes físicos variam dinamicamente e continuamente com o tempo;
- Sistema de tempo discreto (ou sistemas discretos) em que todos seus sinais e componentes físicos variam dinamicamente, mas que são avaliados somente em instante de tempos discretos;
- Sistemas híbridos, que são compostos por sistemas contínuos e discretos.

Os conceitos e definições que envolvem a análise de sinais e sistemas serão enunciados nos próximos itens.

² Figuras do livro *Engenharia de Controle Moderno*; N. OGATA, 1996.

I.2 – Sinais e Sistemas Contínuos e Discretos no Domínio do Tempo

I.2.1 – Introdução - Conceitos Básicos

Neste item serão enunciados os primeiros conceitos e definições de sinais e sistemas no domínio do tempo, sobretudo para introduzir os termos técnicos iniciais desta área de estudo.

As definições serão introduzidas de maneira simples e direta, sem, contudo, omitir suas principais características, como na sequência:

- Sinais de tempo contínuo (ou sinais contínuos) são sinais que variam dinamicamente e continuamente com o tempo;
- Sinais de tempo discreto (ou sinais discretos) são sinais que variam dinamicamente, mas que são avaliados somente em instante de tempos discretos;
- “Modelo é o conjunto de hipóteses sobre a estrutura ou o comportamento de um *fenômeno* físico pelo qual se procura explicar ou prever, dentro de uma teoria científica, as propriedades deste fenômeno”. (Aurélio, 1986)
- Diagrama esquemático de um sistema físico é um diagrama que envolve os seguintes itens:
 - *Sinal*: informação do fenômeno;
 - *Sistema*: meio de propagação desta informação;
 - Diagrama de blocos pode ser o próprio diagrama esquemático e é a representação lógica de sinais e sistemas.

A figura I.2, através de um diagrama esquemático de um circuito elétrico, ilustra estas definições.

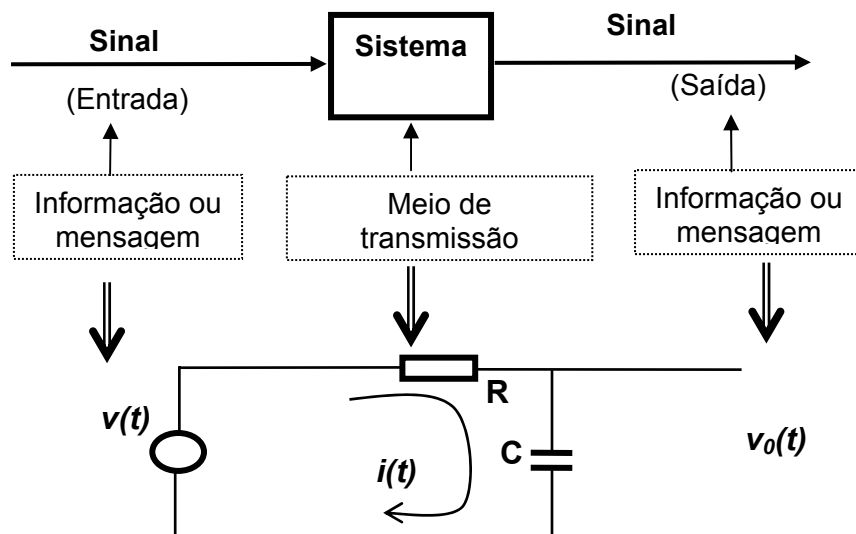


Figura I.2 – Diagrama de Blocos representando Sinais e Sistema

A figura I.3, através do diagrama de blocos, também ilustra os principais sinais e sistemas de uma estrutura de controle típico, onde:

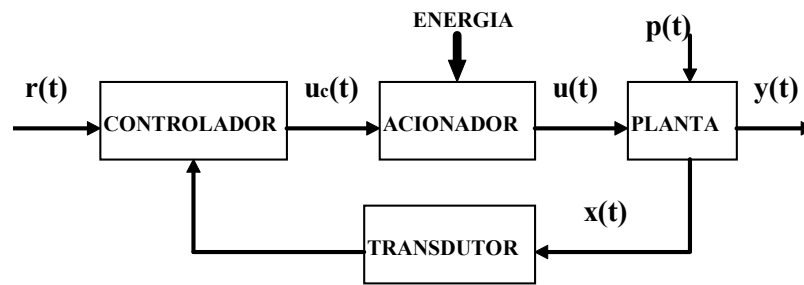


Figura I.3 – Diagrama de Blocos de um Sistema de Controle

Sinais	Sistemas
<ul style="list-style-type: none"> • $r(t)$: referência, saída desejável ou “set-point”; • $u_c(t)$: variável de controle (baixa energia); • $u(t)$: entrada da planta; • $y(t)$: resposta ou saída (variável controlada); • $x(t)$: variáveis de estado; • $p(t)$: perturbação externa. 	<ul style="list-style-type: none"> • Controlador (?); • Acionador (?); • Planta ou Processo ou Sistema (?); • Transdutor (?); • Energia (?);

I.2.2 –Classificação de Sinais

Na classificação e propriedades dos sinais contínuos e discretos serão destacados somente os sinais contínuos, quando a teoria apresentada for comum tanto aos sinais contínuos quanto aos discretos. Entretanto, quando houver diferenças operacionais, elas serão apresentadas separadamente.

a) Sinal de Tempo Contínuo e de Tempo Discreto

No domínio do tempo, uma das classificações mais comuns é relacionada à continuidade do sinal. A figura I.4 mostra o sinal contínuo no tempo $x(t)$ e o sinal discreto no tempo $x(n)$.

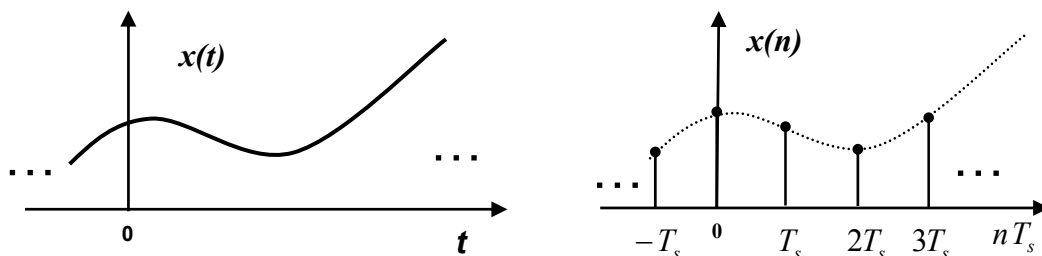


Figura I.4 – Gráficos de sinais contínuo e discreto (amostrado)

Onde:

- $x(t), x(nT_s) \in \mathfrak{R}$: sinal contínuo e sinal discreto (amostrado);
- $t \in \mathfrak{R}$: variável independente no tempo contínuo, t em 's';
- $n \in \mathbb{Z}$: variável independente no tempo discreto, escalar adimensional³;
- O sinal $x(nT)$ ou $x(n)$ pode ser amostrado⁴, como no gráfico anterior, ou de natureza propriamente discreta, conforme ilustrado pela figura I.5, onde $x(n)$ é o rendimento diário da bolsa e “ n ” o dia do mês.
- $T_s \in \mathfrak{R}$: É o período de amostragem do sinal , conforme ilustrado na figura I.4.

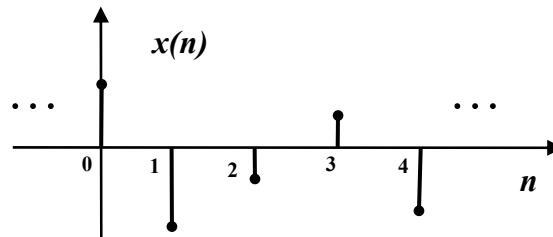


Figura I.5 – Gráfico de um sinal de natureza discreta.

b) Sinal Real e Sinal Complexo

A classificação de sinais em reais e complexos é uma ferramenta matemática necessária e importante na representação dos elementos de um espaço vetorial. Entretanto, como será estudo nos capítulos posteriores, os sinais representados de forma complexa são mais corriqueiramente utilizados na análise de sinais no domínio da frequência. No domínio do tempo, restringiremos nossa análise em apenas classificá-los e somente no tempo contínuo, qual seja:

O sinal $x(t)$ é um sinal complexo se $x(t) \in \mathbb{C}$ ou seja, $x(t) = x_{rl}(t) + j.x_{ig}(t)$, sendo $x_{rl}(t)$ a parte real e $x_{ig}(t)$ parte imaginária e $x_{rl}(t), x_{ig}(t) \in \mathfrak{R}$;

- $x(t)^* = x_{rl}(t) - j.x_{ig}(t)$: é o sinal conjugado complexo de $x(t)$;
- $x(t)^* = x(-t)$, quando $x(t)$ é um sinal conjugado simétrico.
- Se $x(t)$ é um sinal complexo, então também pode ser escrito pela representação vetorial, ou seja:

$$x(t) = |x(t)|e^{j\theta}; \quad |x(t)| = \sqrt{x_{rl}^2(t) + x_{ig}^2(t)} \quad e \quad \theta = \arctan\left[\frac{x_{ig}(t)}{x_{rl}(t)}\right]$$

O sinal $x(t)$ é um sinal real se $x(t) \in \mathfrak{R}$ ou seja, a parte imaginária não existe.

³ É importante observar a diferença existente entre as unidades das variáveis independentes “ t ” e “ n ” dos sinais contínuos e discretos.

⁴ A teoria relativa à amostragem de sinais contínuos será estudada no Cap. IV.

c) Sinal Par e Sinal Impar

Genericamente, todo sinal pode ser escrito como $x(t) = x_p(t) + x_i(t)$ onde define-se:

- $x_p(t) = x_p(-t)$: como um sinal par e
- $x_i(t) = -x_i(-t)$: como um sinal impar.

Além do mais, se $x(t)$ é um sinal real genérico então:

$$\begin{cases} x_p(t) = [x(t) + x(-t)]/2 \\ x_i(t) = [x(t) - x(-t)]/2 \end{cases}$$

Se $x(t)$ é um sinal complexo e conjugado simétrico, então:

$$x^*(t) = x(-t) \Rightarrow \begin{cases} x_{rl}(t) \text{ é um sinal par} \\ x_{ig}(t) \text{ é um sinal impar} \end{cases}$$

Esta propriedade é simples de ser deduzida e ficará a cargo do aluno como exercício. Além do mais, todas as expressões e definições deste item também se aplicam aos sinais no domínio do tempo discreto.

Exemplos:

d) Periodicidade de um Sinal Real

A classificação dos sinais reais, quanto a sua periodicidade, será feita distintamente em termos de sua continuidade, qual seja:

- Sinal Contínuo: Um sinal contínuo é definido como periódico quando $x(t) = x(t + T)$ onde:
 - $T = 2\pi / \omega = 1/f$: período fundamental (s);
 - ω, f : frequência fundamental (rd/s, Hz);
 - $t, \omega, f \in \mathbb{R}$; $T \in \mathbb{R}^+$;

Caso contrário o sinal será classificado como não-periódico.

- Sinal Discreto: Um sinal discreto é definido como periódico quando $x(n) = x(n + N)$ onde:
 - $N = 2\pi / \Omega$: período fundamental (adimensional);
 - Ω : frequência fundamental ⁵ (rd);
 - $n \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}$, $\Omega \in \mathbb{R}$;

Caso contrário o sinal será classificado como não-periódico.

Exemplos de sinais periódicos:

- 1) $x(t) = \cos(t) \stackrel{?}{=} \cos(t + T)$
- 2) $x(t) = e^{j\omega t} \stackrel{?}{=} e^{j\omega(t+T)}$
- 3) $x(n) = \cos(n\pi) \stackrel{?}{=} \cos[\pi(n + N)]$

e) Sinal Determinístico e Sinal Aleatório

O sinal $x(t, n)$ é um sinal determinístico quando este sinal é previsível a qualquer tempo. Entretanto, $x(t, n)$ será classificado como um sinal aleatório quando há incerteza (probabilidade) de sua ocorrência real.

f) Sinal Real de Energia e de Potência

Sinais de Energia e de Potências são funções quadráticas e são a seguir definidos:

- Define-se $x(t, n)$ como um **Sinal de Energia**, quando sua energia total for limitada, ou seja:

$$0 < \left\{ E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t).dt; \quad E(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2(k) \right\} < \infty$$

Ex: Sinais não-periódicos e sinais determinísticos.

- Define-se $x(t, n)$ como um **Sinal de Potência**, quando sua potência média for limitada, ou seja:

$$0 < \left\{ P(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t).dt; \quad P(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^N x^2(k) \right\} < \infty$$

Ex: Sinais periódicos e sinais aleatórios.

⁵ É importante observar a diferença existente entre as unidades das variáveis frequências contínua e discreta.

I.2.3 – Operações Básicas com Sinais

Na sequência deste item serão definidos algumas das principais operações com sinais, sendo que algumas delas são autoexplicativas e não serão se querem exemplificadas. Nas demonstrações das operações, $x(t, n)$ sempre será o sinal original e $y(t, n)$ o sinal resultante da operação.

a) Adição ou Misturador

$$\text{Dado os sinais: } x(t, n); z(t, n) \Rightarrow y(t, n) = \alpha x(t, n) + z(t, n)$$

Neste caso o sinal resultante $y(t, n)$ é composto da adição de dois sinais em que um deles foi amplificado pelo escalar α (escalonamento em amplitude).

b) Diferenciação e Integração

É uma operação exaustivamente estudada nos cursos de cálculo, que será aqui simplesmente ilustrada através da relação entre a corrente e a tensão em uma bobina dada pela figura I.6.

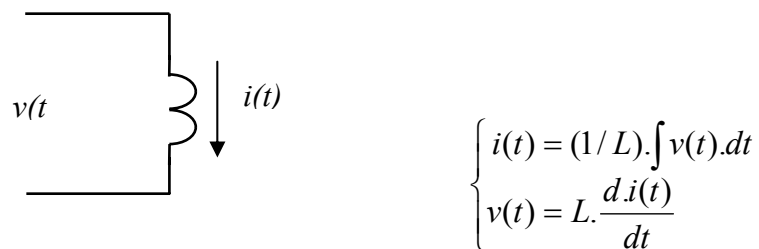


Figura I.6 – Circuito elétrico indutivo

c) Reflexão

Esta operação também é conhecida como orientação reversa ou operação “espelho”, cuja expressão matemática é a seguinte:

$$\text{Dado } x(t, n) \Rightarrow y(t, n) = x(-t, -n).$$

A figura I.7 ilustra esta operação para sinais contínuos.



Figura I.7 – Reflexão do eixo das abscissas de um sinal no tempo contínuo.

d) Deslocamento no Tempo

Esta operação é comumente utilizada para representar sinais de mesma forma, porem deslocados em relação ao eixo da variável independente tempo. Sua operação pode ser assim expressa:

$$\text{Dado } x(t, n) \Rightarrow y(t \pm a, n \pm a)$$

O deslocamento pode ser feito em termos de atraso ou avanço em relação ao sinal original, sendo a orientação do eixo t positiva ou negativa. A figura I.8 ilustra esta operação apenas para um sinal contínuo, já que procedimento análogo se verifica para sinais discretos.

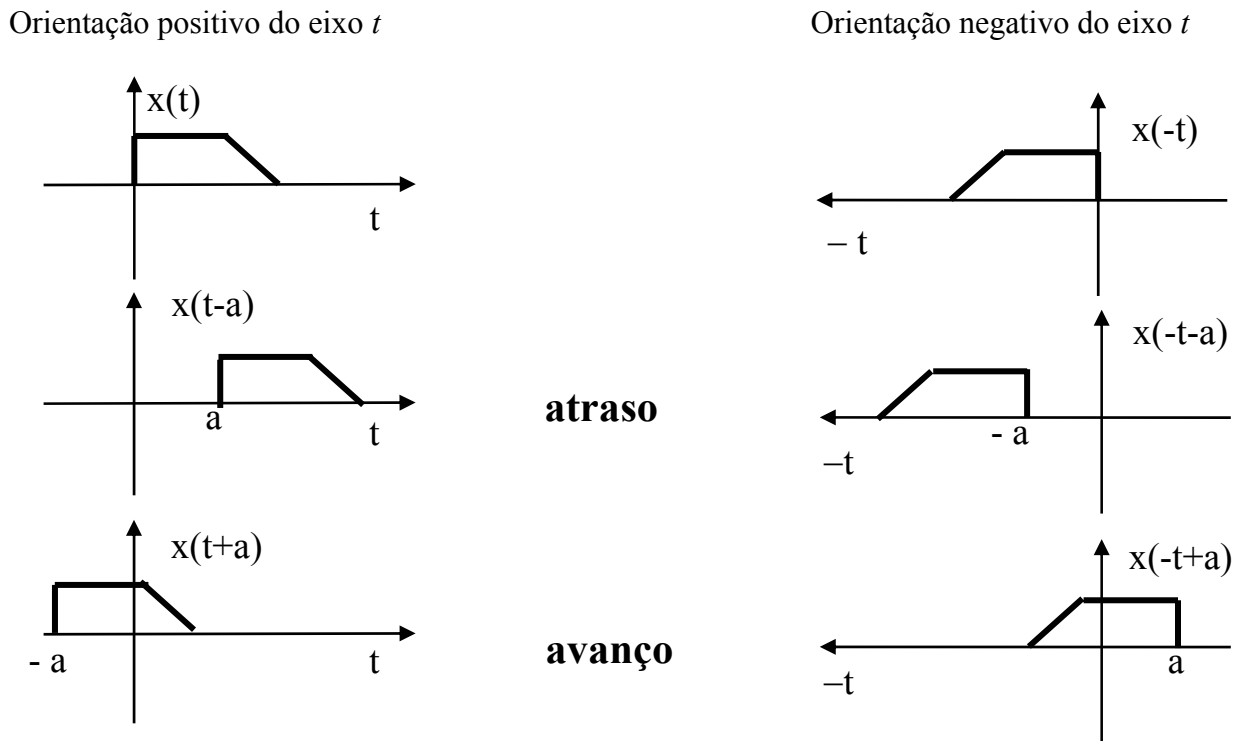


Figura I.8 – Deslocamento de sinal no tempo contínuo.

e) Mudança de Escala de Tempo

Esta operação é, normalmente, utilizada no espalhamento ou compressão de um sinal em relação à variável independente tempo, sem alteração da sua amplitude. Sua expressão matemática é a seguinte:

$$\text{Dado } x(t, n) \Rightarrow y(t, n) = x(at, an)$$

Onde:

- Se $a > 1 \Rightarrow$ compressão de $x(t, n)$;
- Se $a < 1 \Rightarrow$ espalhamento de $x(t, n)$.

Esta operação será ilustrada através da próxima propriedade.

f) Deslocamento e Mudança de Escala de Tempo

Esta operação está associada com as duas propriedades anteriores e é aqui inserida no conjunto das propriedades somente para analisar a sequência da aplicação das propriedades de escalonamento no tempo e deslocamento.

$$\text{Seja o sinal dado } x(t, n) \Rightarrow y(t, n) = x(at + b, an + b)$$

A análise desta operação será realizada somente para sinais contínuos. No caso de sinais discretos, a operação é análoga, respeitando-se, no entanto suas peculiaridades.

As figuras I.9 e I.10 ilustram esta operação para sinais contínuos e discretos.

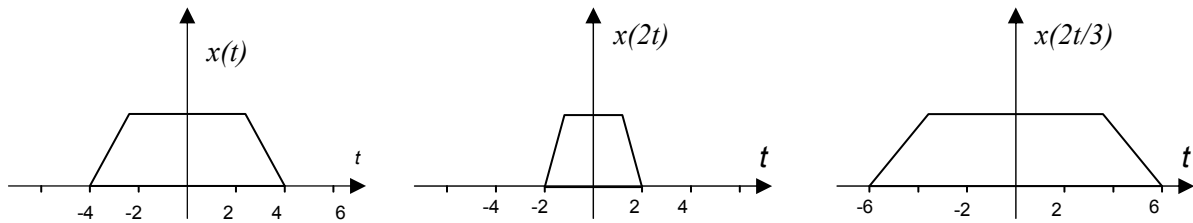


Figura I.9 – Escalonamento no tempo de sinal contínuo

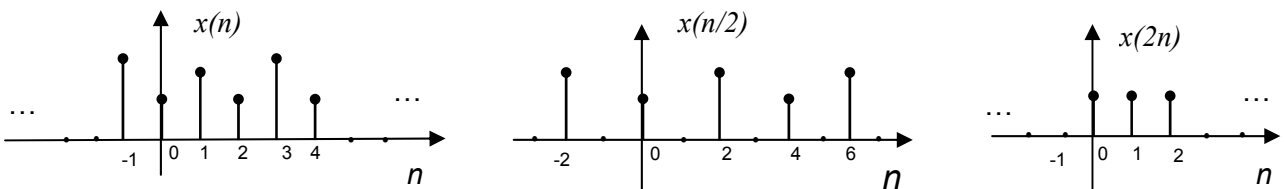
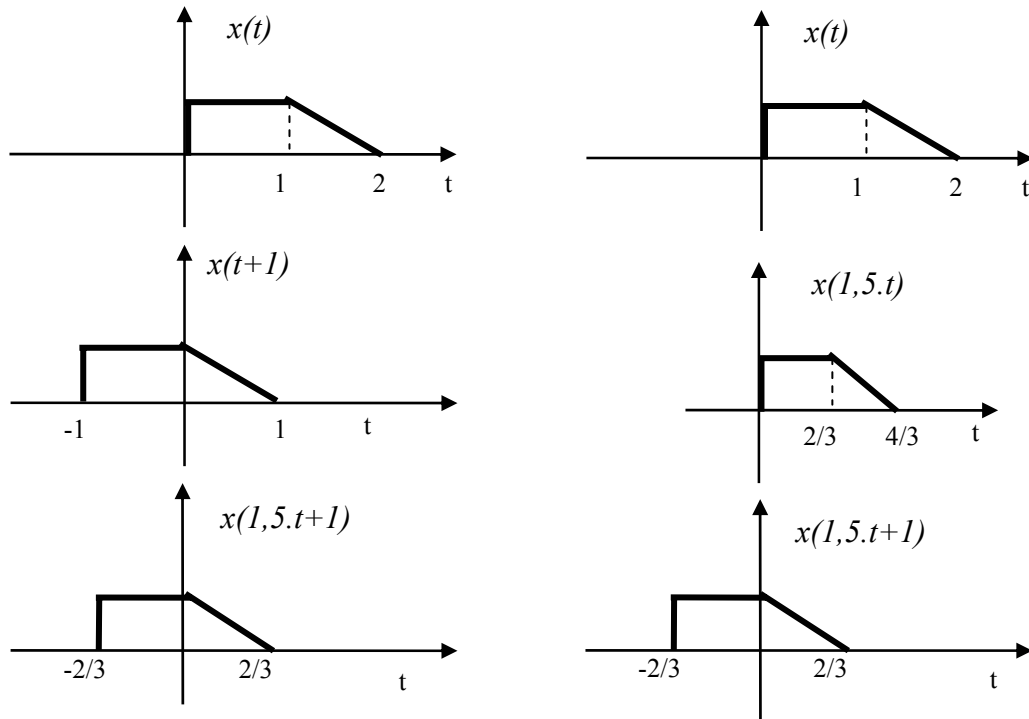


Figura I.10 – Escalonamento no tempo de sinal discreto ⁶.

Esta propriedade será realizada por dois métodos diferentes, que serão ilustrados pela figura I.11, quais sejam:

- Método 1: primeiro efetua-se o deslocamento no tempo e depois aplica-se a regra do escalonamento no tempo;
- Método 2: primeiro efetua-se o escalonamento no tempo e depois aplica-se a regra do deslocamento na nova escala de tempo ' $\tau = b/a$ '.

⁶ Na compressão do sinal discreto há perda de informação nesta operação.



a) primeiro efetua-se o deslocamento no tempo e depois o escalonamento no tempo

b) primeiro efetua-se o escalonamento no tempo e depois o deslocamento na nova escala de tempo

Figura I.11 – Deslocamento e escalonamento de sinal no tempo contínuo $x(1,5,t+1)$

g) Modulação e Convolução

Esta operação possui uma ampla aplicação neste curso e, portanto, será mais bem analisada na sequência deste curso. Entretanto, para familiarizar o estudante com a nomenclatura utilizada será dado sua representação.

$$\text{Dado } \begin{cases} x(t, k) \\ z(t, k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(t, k) = x(t, k) \bullet z(t, k) : \text{modulação} \\ y(t, n) = x(t, k) * z(t, k) : \text{convolução} \end{cases}$$

I.2.4 – Sinais Elementares

O objetivo deste item é analisar, no domínio do tempo, a dinâmica dos sinais reais e elementares mais usuais, quais sejam:

- Sinal impulso unitário $\delta(n; t)$;
- Sinal degrau unitário $u^I(n; t)$;
- Sinal rampa unitária $u^t(n; t)$;

A análise destes sinais será feita independentemente ou de forma associada, quando houver correspondências entre eles.

a) Sinais Impulso e Degrau Unitários Discretos

Impulso Unitário $\delta(n)$ e Degrau Unitário $u_d(n)$ discretos são definidos pelas seguintes expressões:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1; & n = 0 \\ 0; & n \neq 0 \end{cases} \quad u_d(n) = \begin{cases} 1; & n \geq 0 \\ 0; & n < 0 \end{cases}$$

Suas representações gráficas são ilustradas pela figura I.12.

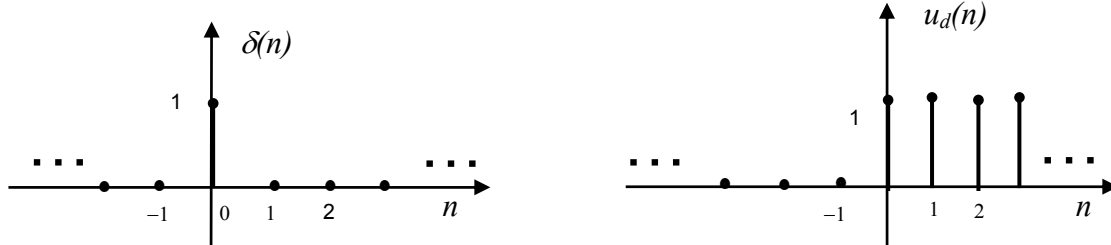


Figura I.12 – Sinais discretos: (a) impulso unitário; (b) de grau unitário.

Estes dois sinais podem ser associados através das seguintes relações matemáticas:

$$\begin{cases} u_d(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) \\ \delta(n) = u_d(n) - u_d(n-1) \end{cases}$$

Algumas operações elementares com estes sinais serão dadas a seguir, onde $x(n)$ é um sinal real qualquer:

- 1) $y_1(n) = u_d(n) \delta(k) = u_d(n=0) \delta(n) = \delta(n)$
- 2) $y_2(n) = u_d(n) \delta(n-k) = u_d(n=k) \delta(k-n) = \delta(n-k)$
- 3) $y_3(n) = x(n) \delta(n) = x(0) \delta(n)$
- 4) $y_4(n) = x(n) \delta(n-k) = x(k) \delta(n-k)$
- 5) $y_5(n) = x(n) u_d(n) = x(n); n \geq 0$

b) Sinais Impulso e Degrau Unitários Contínuos

Impulso Unitário $\delta(t)$ e Degrau Unitário $u_d(t)$ contínuos serão definidos e então correlacionados. O impulso unitário possui as seguintes propriedades:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty; & t = 0 \\ 0; & t \neq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Uma outra maneira de representar o impulso unitário é ilustrada pela figura I.13 dada na sequência.

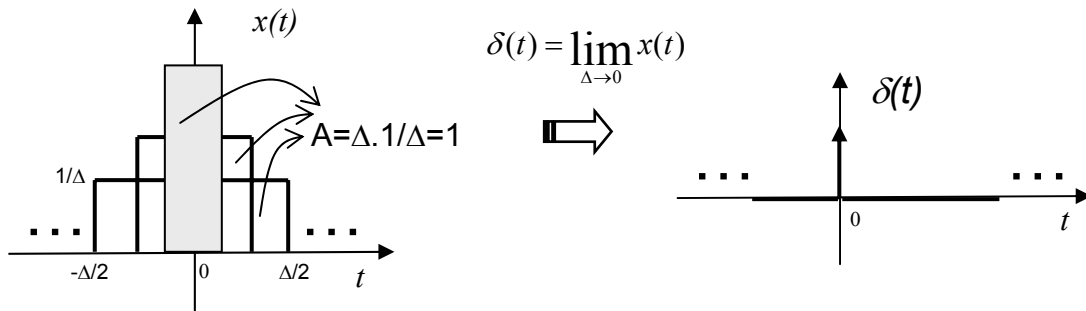


Figura I.13 – Representação gráfica do impulso unitário contínuo - A: área.

O degrau unitário contínuo é definido pela figura I.14.

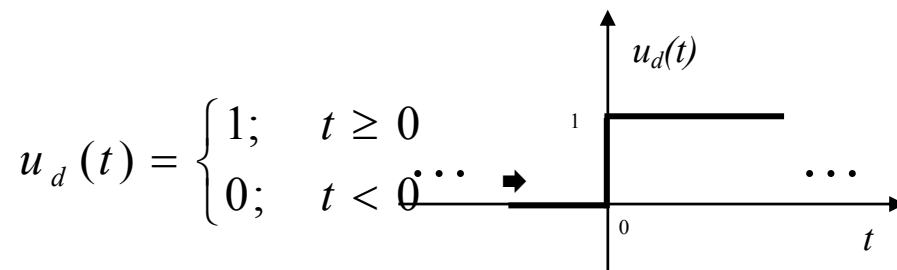


Figura I.14 – Representação gráfica do degrau unitário contínuo.

Estes dois sinais possuem as seguintes relações matemáticas:

$$u_d(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad e \quad \delta(t) = \frac{d}{dt} u_d(t) = \dot{u}_d(t)$$

Algumas operações elementares com estes sinais serão dadas a seguir, onde $x(t)$ é um sinal real qualquer:

- | | |
|--|--|
| 1) $y_1(t) = u_d(t) \delta(t) = \delta(t)$ | 4) $y_4(t) = x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0)$ |
| 2) $y_2(t) = u_d(t) \delta(t - t_0) = \delta(t - t_0)$ | 5) $y_5(t) = x(t) u_d(t) = x(t); t \geq 0$ |
| 3) $y_3(t) = x(t) \delta(t) = x(0) \delta(t)$ | 6) $y_6(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = ? = x(t_0)$ |

c) Sinal Rampa Unitária

O sinal rampa unitária é definido pelas seguintes expressões:

$$u_r(t) = \begin{cases} t; & t \geq 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases} \quad u_r(n) = \begin{cases} n; & n \geq 0 \\ 0; & n < 0 \end{cases}$$

Uma observação importante é destacar a relação linear existente entre impulso, degrau e rampa unitários, dada pelas seguintes expressões:

$$\begin{cases} u_r(t) = \int_{-\infty}^t u_d(\tau) d\tau & e & u_d(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \\ u_r(n) = n u_d(n) & e & u_d(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) \end{cases}$$

I.2.5 – Sinais Exponenciais

O objetivo deste item é analisar a dinâmica dos sinais exponenciais de forma independente ou mesmo associada a sistemas, de maneira a dar um significado físico a este estudo.

Os sinais exponenciais podem ser classificados em sinais reais e sinais complexos. Neste item será dada uma maior ênfase aos sinais reais, cuja associação com os fenômenos físicos é mais imediata e direta.

Para efeito de análise, classificaremos os sinais exponenciais em:

- Sinal Exponencial Real e Sistemas;
- Sinal Cosenoidal Real e Sistemas;
- Sinal Exponencial Composto: Exponencial Real e Senoidal;
- Sinal Exponencial Complexo

a) Sinal Exponencial Real e Sistemas

A análise deste tipo de sinal, sempre que pertinente e sobretudo no tempo contínuo, estará associada a um fenômeno físico. Para melhor compreensão, a análise de sinais contínuos e discretos será feita separadamente.

O sinal contínuo é descrito pela seguinte expressão genérica:

$$x(t) = A e^{\alpha t} ; \quad \begin{cases} \alpha > 0; & \text{função crescente} \\ \alpha < 0; & \text{função decrescente} \\ A: & \text{escalar constante} \end{cases}$$

Como exemplos a figura I.15 ilustra este tipo de sinal através de dois sistemas físicos.

O sinal discreto é, genericamente, expresso por:

$$\begin{cases} x(n) = A e^{a.n} \\ \text{ou} \\ x(n) = A \alpha^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 1: & \text{crescimento exponencial} \\ 0 < \alpha < 1: & \text{decréscimento exponencial} \\ -1 < \alpha < 0: & \text{decréscimento exponencial oscilante} \\ \alpha < -1: & \text{crescimento exponencial oscilante} \end{cases}$$

A figura I.16 exemplifica a curva característica para este tipo de sinal.

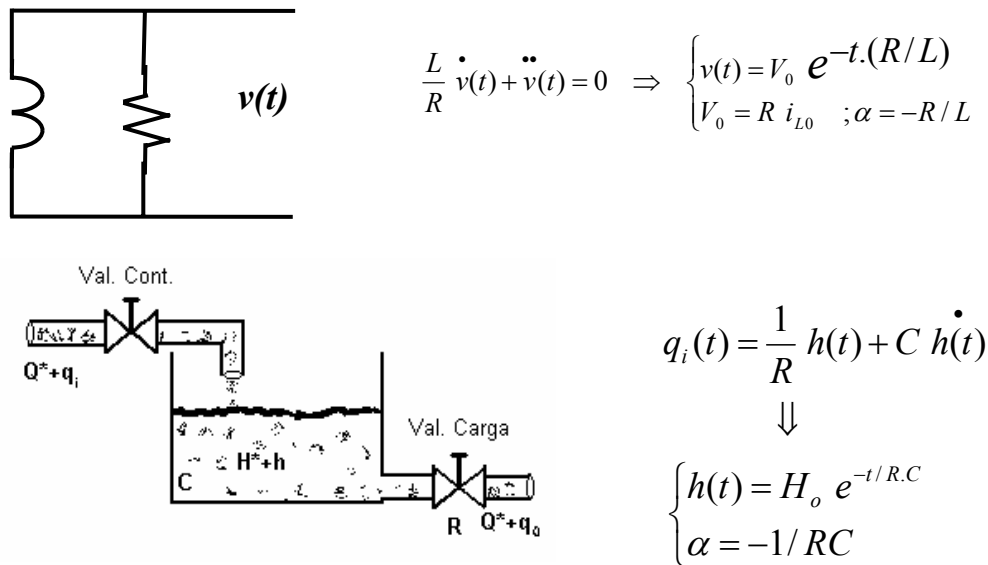


Figura I.15 – Sistemas físicos que possui sinais exponenciais amortecidos ⁷

Figura I.16 – Sinal exponencial real no tempo discreto (Fig 1.24 – Oppenheim)

a) Sinal Cosenoidal Real e Sistemas

Como no item anterior, a análise de sinais contínuos e discretos será feita separadamente.

O sinal contínuo cuja expressão é dada por:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \theta); \quad A: \text{constante}$$

O sinal $x(t)$ é cosenoidal não-amortecido e será sempre periódico, pois satisfaz as condições de periodicidade dadas por:

$$\begin{cases} x(t) = x(t + T); & \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ A \cdot \cos(\omega t) = A \cdot \cos(\omega t + \omega T); & \forall t, \omega \in \mathbb{R} \end{cases}$$

⁷ O escalar $\tau = -\alpha$ é definido, nestes casos, como constante de tempo, parâmetro que mede a rapidez de resposta dos sinais destes sistemas.

Para exemplificar fisicamente este tipo de sinal serão dados sistemas reais (figura I.17) com dois elementos armazenadores de energia, para haver a troca de energia entre eles e satisfazer assim a condição de oscilação.

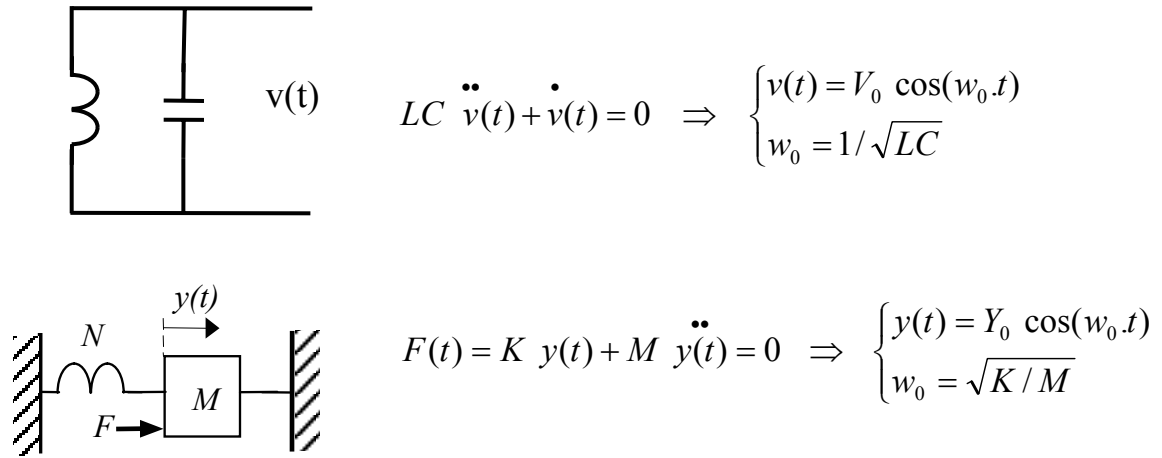


Figura I.17 – Sistemas físicos com sinais cosenoidais não-amortecidos

Uma outra situação importante a ser verificada é quanto à variação da frequência do sinal. Seja o sinal $x(t)$ dado pela expressão:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta); \quad A : \text{constante}$$

Pode-se observar que para frequências diferentes, os sinais, embora periódicos, serão sempre diferentes, ou seja:

$$\begin{cases} x_1(t) = A \cos(\omega_1 t) \\ x_2(t) = A \cos(\omega_2 t) \end{cases} \Rightarrow x_1(t) \neq x_2(t) \quad \forall \omega_1 \neq \omega_2$$

O sinal discreto é dado pela seguinte expressão:

$$x(n) = A \cos(\Omega n)$$

Neste caso, a condição de periodicidade será verificada a partir da definição de sinal periódico, já enunciada anteriormente, e dada por:

$$\begin{cases} x(n) = x(n + N) \\ A \cos(\Omega n) = A \cos(\Omega n + \Omega N) \end{cases}$$

Então, a igualdade estabelecida nesta expressão deve satisfazer a condição de existência de $N \in \mathbf{N}$, sendo $\Omega \in \mathcal{R}$. Conclui-se que esta condição só é satisfeita quando $\Omega N = m \cdot 2\pi$ também com $m \in \mathbf{N}$. Caso contrário, o sinal $x(n)$ não será periódico⁸.

Esta dedução matemática também pode ser ilustrada pelos gráficos da figura I.18.

⁸ É importante observar que a diferença existente entre as unidades dos sinais contínuo e discreto, impõe uma restrição adicional à condição de periodicidade do sinal discreto.

Figura I.18 – Sinais Cosenoidais no tempo discreto (Fig 1.25 – Oppenheim)

Após análise das curvas e suas respectivas funções, pode-se deduzir que:

- 1) $x(n) = \cos(\pi n / 6)$; \Rightarrow *Periodico com $\Omega = \pi / 6$ e $N = 12$*
- 2) $x(n) = \cos(8\pi n / 31)$; \Rightarrow *Periodico com $\Omega = 8\pi / 31$ e $N = 31$*
- 3) $x(n) = \cos(n / 6)$; \Rightarrow *Não-periodico pois $N \notin \mathbf{N}$*

Como verificado anteriormente para os sinais contínuos, também para os sinais discretos será analisada a situação quanto à variação da frequência do sinal. Seja $x(n)$ dado pela expressão:

$$x(n) = A \cos(\Omega n)$$

A questão a ser analisada neste caso é a seguinte: “Sejam dados dois sinais discretos e periódicos com frequências diferentes. Estes sinais serão sempre diferentes?”

Ou seja, há alguma situação em que a expressão abaixo não se verifica?

$$\begin{cases} x_1(n) = A \cos(\Omega_1 n) \\ x_2(n) = A \cos(\Omega_2 n) \end{cases} \Rightarrow x_1(n) \neq x_2(n) \quad \forall \quad \Omega_1 \neq \Omega_2$$

Dadas as características dos sinais discretos e após simples deduções, esta condição só se verificará com a seguinte condição ⁹:

$$\forall \quad \Omega_1 \neq \Omega_2, \text{ mas } 0 < (\Omega_1, \Omega_2) < 2\pi$$

Nos casos em que as frequências são diferentes, mas possuem a seguinte relação:

$$\Omega_2 = \Omega_1 + m.2\pi; \quad m \in \mathbf{N}$$

Os dois sinais serão iguais. A figura I.19 ilustra graficamente esta expressão matemática, mostrando o sinal cosenoidal discreto para diferentes valores de frequência, mas dentro de um período.

c) Sinal Exponencial Imaginário Puro

Devido às características distintas dos sinais contínuos e discretos, suas análises serão feitas separadamente.

Seja um sinal contínuo com a seguinte expressão:

$$x(t) = e^{j.w.t} = \cos w.t + j.\text{sen } w.t$$

Então, como detalhado anteriormente:

- 1) $x(t)$ é periódico, pois $x(t) = x(t + T)$;
- 2) $x_1(t) \neq x_2(t) \quad \forall \quad w_1 \neq w_2$.

⁹ É importante observar mais uma vez que a diferença existente entre as unidades dos sinais contínuo e discreto ($T \in \mathfrak{R}$; $N \in \mathbf{N}$), impõe uma restrição ao sinal discreto em relação à sua faixa de variação de frequência. Neste caso, pode-se dizer que a série de sinais discretos, variando-se a frequência, compõe uma seqüência finita de sinais.

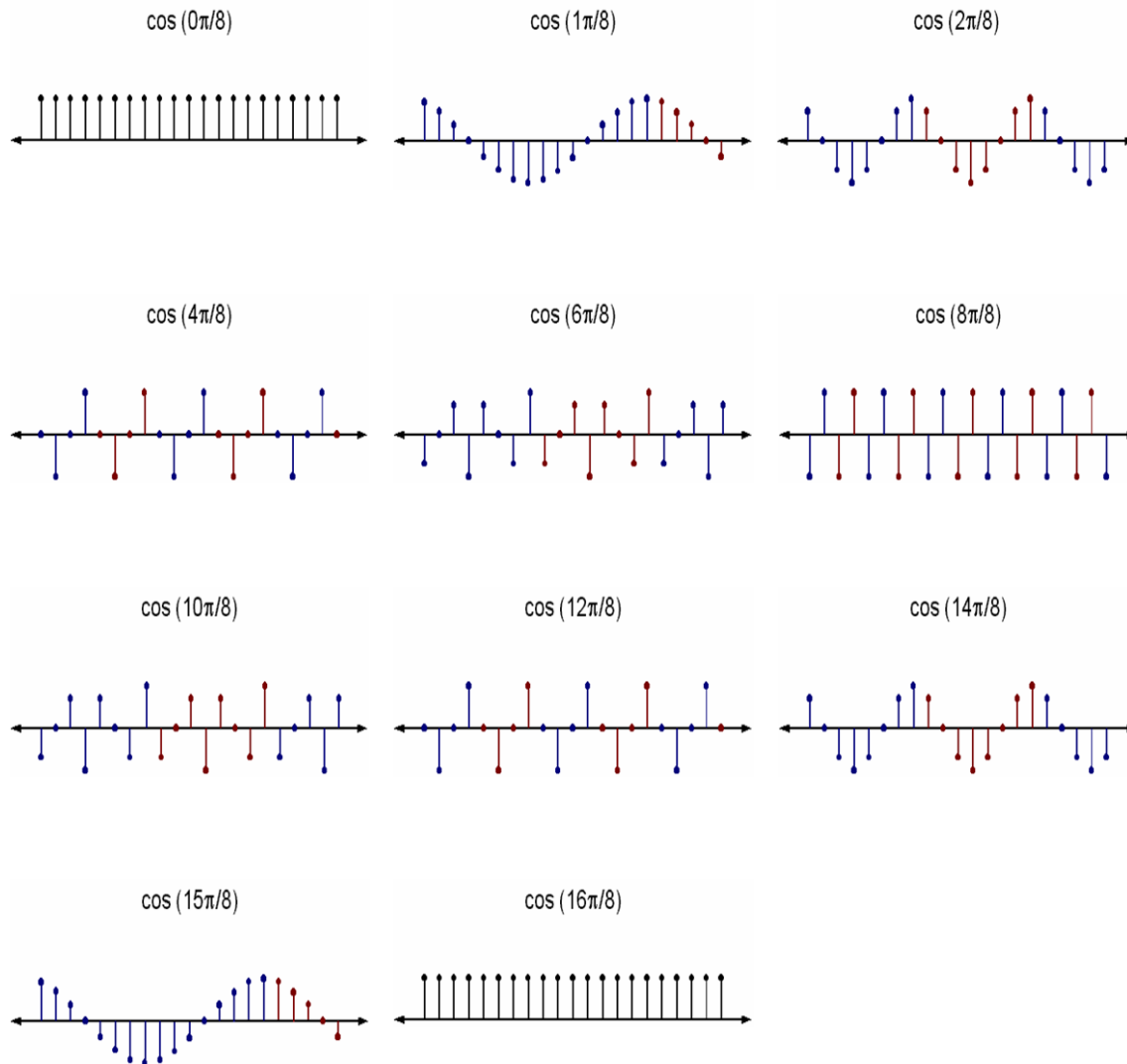


Figura I.19 – Ilustração gráfica da faixa de variação de um sinal cosenoidal discreto

Seja agora um sinal discreto dado pela seguinte expressão:

$$x(n) = e^{j\Omega n} = \cos(\Omega n) + j \sin(\Omega n)$$

Então, conforme item (b) anterior:

- 1) $x(n)$ é periódico, pois $x(n) = x(n + N)$;
- 2) $x_1(n) \neq x_2(n) \quad \forall \quad \Omega_1 \neq \Omega_2 \quad \text{para} \quad 0 < \Omega < 2\pi$;

d) Sinal Exponencial Composto: Exponencial Real e Senoidal

Devido às características distintas dos sinais contínuos e discretos, suas análises serão feitas separadamente.

Seja o sinal discreto dado pela expressão abaixo:

$$x(n) = A e^{a^n} \cos \Omega n = A \alpha^n \cos \Omega n$$

Onde a convergência do sinal irá depender do fator α ou seja:

$|\alpha| > 1$: sinal discreto cosenoidal com amplitude crescendo exponencialmente;

$|\alpha| < 1$: sinal discreto cosenoidal com amplitude decrescendo exponencialmente.

Como ilustrado pela figura I.20.

Figura I.20 – Sinais discretos cosenoidais com amplitude variando com o tempo (Fig 1.26 – Opp)

Seja o sinal contínuo dado pela seguinte expressão:

$$x(t) = A e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \theta) \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0; & x(t): \text{decrescente} \\ \alpha < 0; & x(t): \text{crescente} \end{cases}$$

A figura I.21 ilustra a dinâmica no tempo deste sinal e a figura I.22 exemplifica tipos de sistemas físicos que apresentam sinais com este tipo de dinâmica.

Figura I.21 – Sinais contínuos cosenoidais com amplitude variando com o tempo (Fig 1.23 – Opp)

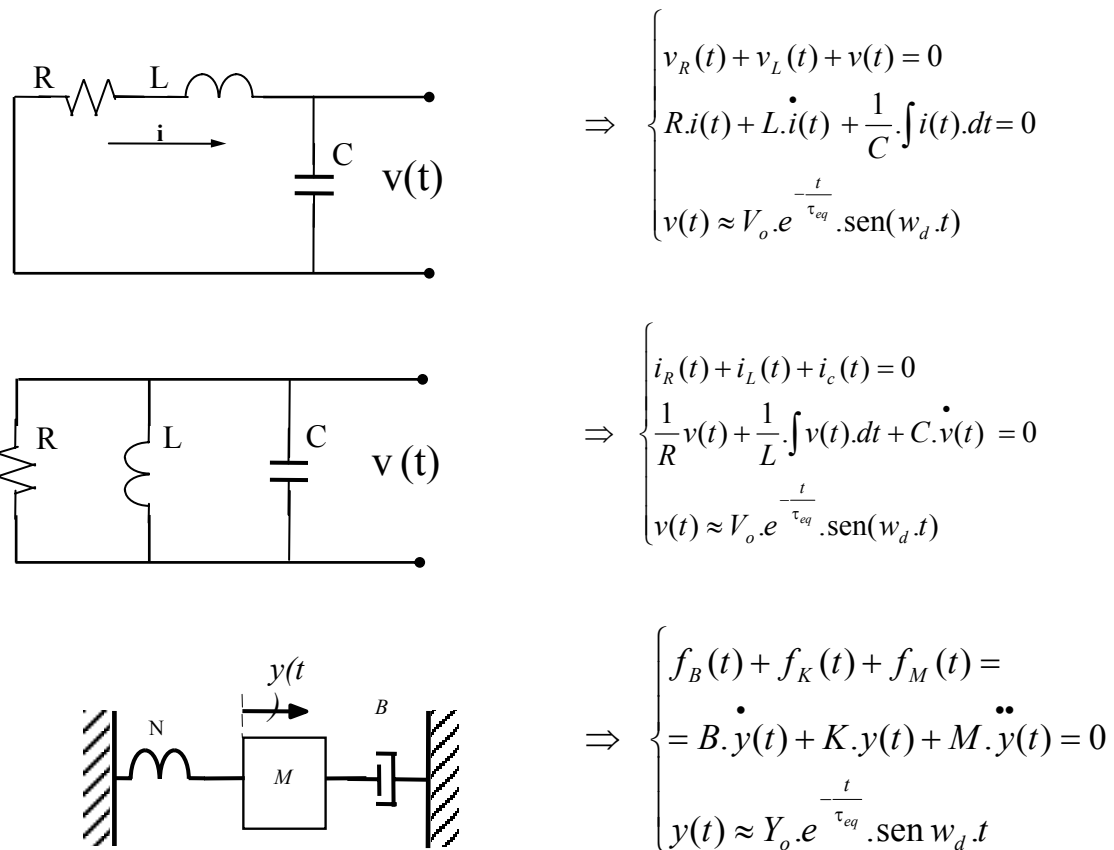


Figura I.22 – Sistemas físicos com sinais cosenoidais amortecidos

I.3 – Convolução - Operação Dinâmica entre Sinais e Sistemas

I.3.1 – Introdução

A interação entre sinais e sistemas físicos é uma operação complexa e de natureza dinâmica por, na maioria das vezes, envolver transferência de energia entre seus componentes armazenadores ou acumuladores.

A representação matemática que descreve esta operação dinâmica é definida como modelo, em cuja direção serão feitas algumas considerações:

- Segundo Aurélio, 1986: “Modelo é o conjunto de hipóteses sobre a estrutura ou o comportamento de um fenômeno físico pelo qual se procura explicar ou prever, dentro de uma teoria científica, as propriedades deste fenômeno”.
- Representação gráfica relacionando sinais e sistema

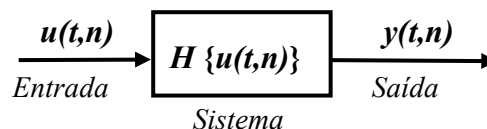


Figura I.23 – Representação em Diagrama de Blocos de um fenômeno físico

- A representação matemática de um fenômeno físico deve envolver a representação dos elementos armazenadores e dissipadores de energia, a interdependência entre estes elementos e seus respectivos sinais. Esta representação, que é ilustrada pela figura I.23, é conhecida como relação **Entrada / Saída** e é assim expressa:

$$y(t,n) = H\{u(t,n)\}$$

Onde $H\{\cdot\}$ é um **Operador Matemático**.

Exemplo: Identifique o operador que represente o circuito elétrico capacitivo da figura I.24.

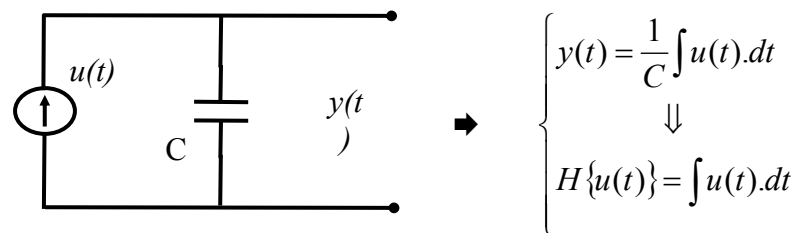


Figura I.24 – Relação entrada / saída de um sistema linear

Observa-se que o operador que representa este circuito é a função integral, sendo um operador linear.

A interação dinâmica, no domínio do tempo, envolvendo sistemas físicos e sinais é descrita matematicamente por um operador definido como “*Convolução*”. Neste item serão descritos seus principais conceitos e propriedades.

Convolução é uma operação matemática utilizada, normalmente, para representar a resultante da interação dinâmica entre sinais e sistemas, como a seguir:

$$y(t,n) = H\{u(t,n)\} = \begin{cases} y(t) = h(t) * u(t) \\ y(n) = h(n) * u(n) \end{cases}$$

Onde:

- ➔ O termo “*Convolução*” é usado, genericamente, para caracterizar uma interação dinâmica entre dois sinais quaisquer $h(t,n)$ e $u(t,n)$, sendo $y(t,n)$ o sinal resultante desta operação e $H\{\cdot\}$ o operador;
- ➔ Na interação entre sinais e sistemas, o termo “*Convolução*” é usado para caracterizar a reação “ $y(t,n)$ ” do sistema físico, como resultante da operação dinâmica entre o próprio sistema, representado pelo operador “ $H\{\cdot\}$ ”, e o sinal de excitação ou entrada “ $u(t,n)$ ”;
- ➔ A função “ $h(t,n)$ ” pode ser interpretada como a imagem da aplicação do operador $H\{\cdot\}$ e, matematicamente, a representa a dinâmica do sistema.
- ➔ Na interação entre sinais e sistemas, o termo “*Modulação*” é usado para caracterizar a reação “ $y(t,n)$ ” do sistema físico, como resultante de uma operação instantânea entre o próprio sistema, representado pelo operador “ $H\{\cdot\}$ ”, e o sinal de excitação ou entrada “ $u(t,n)$ ”. Neste caso, não há ocorrência de uma interação dinâmica, já que não envolve transferência de energia.

A importância do estudo da operação convolução em um Curso de Engenharia está intrinsecamente ligada à necessidade da representação matemática e à análise de um sistema físico, com a finalidade de avaliar o desempenho dinâmico de seus sinais. Nos itens seguintes será apresentado, em detalhes, o estudo da operação convolução no domínio do tempo discreto e contínuo.

I.3.2 – Convolução entre Sinais e Sistemas Discretos

Seja um sinal discreto genérico $x(n)$ dado pela figura abaixo, onde o período de amostragem é constante e igual a T_s .

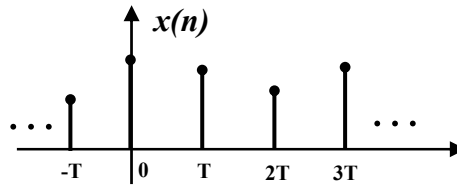


Figura I.25 – Sinal discreto genérico

Matematicamente, este sinal $x(n)$ pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x(n) &= x(n) \delta(n + \infty) + \dots + x(n) \delta(n + 1) + x(n) \delta(n) + x(n) \delta(n - 1) \\ &\quad + \dots + x(n) \delta(n - k) + \dots + x(n) \delta(n - \infty) \\ &= x(-\infty) \delta(n + \infty) + \dots + x(-1) \delta(n + 1) + x(0) \delta(n) + x(1) \delta(n - 1) \\ &\quad + \dots + x(k) \delta(n - k) + \dots + x(\infty) \delta(n - \infty) \end{aligned}$$

Ou seja:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n - k)$$

Então, $x(n)$ é escrito como uma combinação linear de impulsos unitários deslocados no tempo $\delta(n-k)$ e ponderados pelos coeficientes escalares ou amplitudes dos pulsos $x(n)$ nos instantes n .

A partir das equações anteriores para sistemas discretos lineares e invariantes no tempo¹⁰ e da relação entrada / saída, tem-se que:

$$\begin{aligned} y(n) &= H\{u(n)\} = H\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) \delta(n - k)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) H\{\delta(n - k)\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) h_k(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) h(n - k) = h(n) * u(n) \end{aligned}$$

Onde, para efeito de notação, definiu-se a seguinte expressão para a operação com a função impulso unitário:

$$H\{\delta(n - k)\} = h_k(n) = h(n - k)$$

¹⁰ As propriedades de linearidade e invariância no tempo serão enunciadas posteriormente neste capítulo.

Conclui-se então, como o sinal de entrada “ $u(n)$ ” é expresso como combinação linear de **Impulsos** descolados do tempo, o sinal de saída “ $y(n)$ ” será então expressa como uma combinação linear de suas respectivas funções “ $h(n)$ ” deslocados no tempo, cuja operação é conhecida como:

Convolução Discreta ou Somatória de Convolução

a) Cálculo da operação Convolução

A operação matemática da Somatória de Convolução pode ser desenvolvida por dois métodos diferentes:

1º. Método: Desenvolvendo o lado direito da equação

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) h(n-k) \\ &= u(-\infty) h(n+\infty) + \dots + u(-1) h(n+1) + u(0) h(n) + u(1) h(n-1) + \dots + u(\infty) h(n-\infty) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(k) \end{aligned}$$

Exemplo Ilustrativo: Calcule $y(n)$ a partir do sistema dado pela figura abaixo.

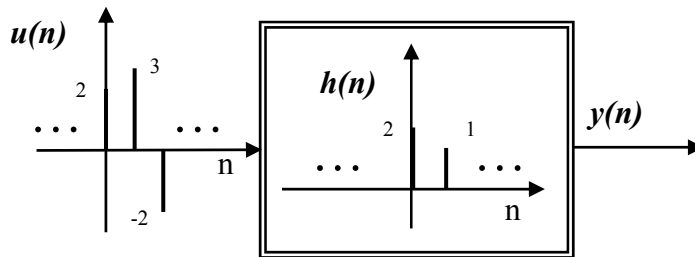


Figura I.26 – Operação convolução em um sistema discreto

Para facilitar a aplicação da fórmula de convolução na solução deste exemplo, é importante observar que o sinal $u(n)$ possui valores diferentes de zero somente nos instantes $n = 0; 1; 2$. Da mesma forma, o sinal $h(n)$ possui valores diferentes de zero somente nos instantes $n = 0; 1$.

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) h(n-k) \\ &= u(-\infty)h(n+\infty) + \dots + u(-1)h(n+1) + u(0)h(n) + u(1)h(n-1) + u(2)h(n-2) + \dots + u(\infty)h(n-\infty) \\ &= 0 + \dots + 0 + u(0)h(n) + u(1)h(n-1) + u(2)h(n-2) + 0 + \dots + 0 \\ &= \sum_{k=0}^2 y_k(k) = y_0(n) + y_1(n) + y_2(n) = 4\delta(n) + 8\delta(n-1) - \delta(n-2) - 2\delta(n-3) \end{aligned}$$

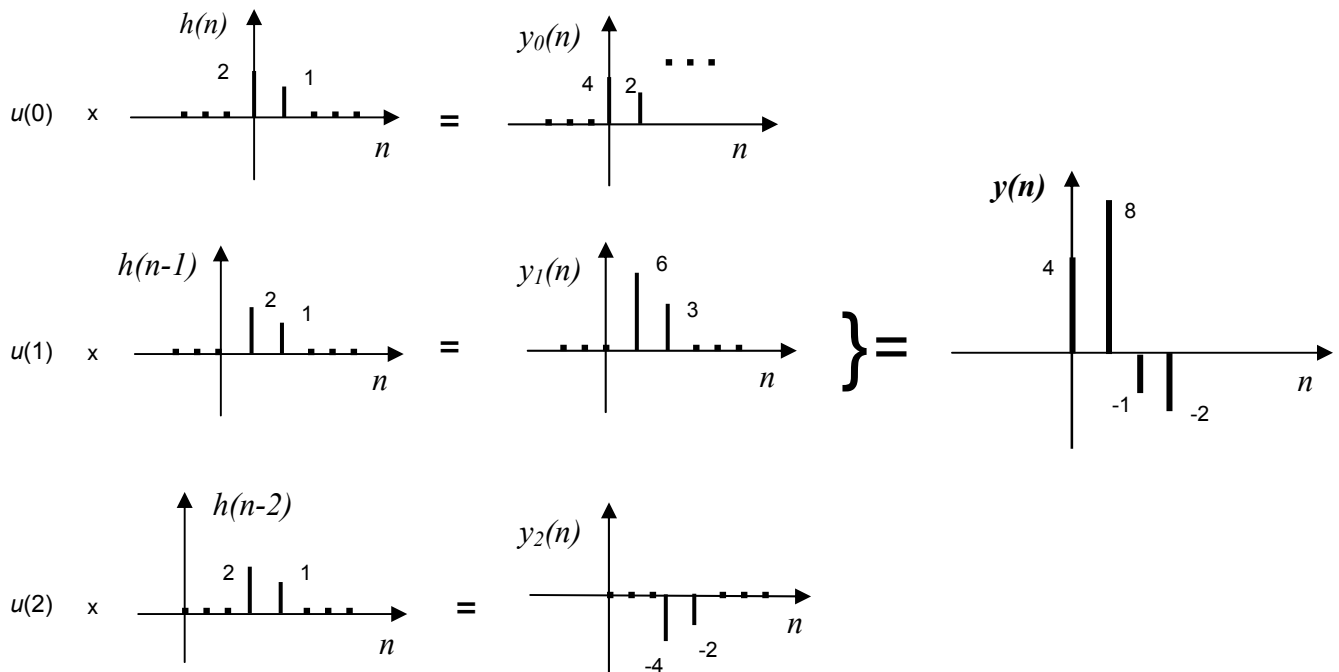


Figura I.27 – Cálculo da operação convolução em um sistema discreto (1º. método)

2º. Método: Desenvolvendo o lado esquerdo da equação

$$\begin{aligned}
 y(n) &= y(n=-\infty) + \dots + y(n=-2) + y(n=-1) + y(n=0) + y(n=1) + y(n=2) + \dots + y(n=\infty) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) h(n-k)
 \end{aligned}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
 y(n=-\infty) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) h(-\infty-k) = \sum_{k=0}^2 u(k) h(-\infty-k) = 0 \\
 &\vdots \\
 y(n=-1) &= \sum_{k=0}^2 u(k) h(-1-k) = u(0)h(-1) + u(1)h(-2) + u(2)h(-3) = 0 \\
 y(n=0) &= \sum_{k=0}^2 u(k) h(-k) = u(0)h(0) + u(1)h(-1) + u(2)h(-2) = 4 \\
 y(n=1) &= \sum_{k=0}^2 u(k) h(1-k) = u(0)h(1) + u(1)h(0) + u(2)h(-1) = 8 \\
 y(n=2) &= \sum_{k=0}^2 u(k) h(2-k) = u(0)h(2) + u(1)h(1) + u(2)h(0) = -1 \\
 y_3(n=3) &= \sum_{k=0}^2 u(k) h(3-k) = u(0)h(3) + u(1)h(2) + u(2)h(1) = -2 \\
 y(n=4) &= \sum_{k=0}^2 u(k) h(4-k) = 0 \\
 &\vdots \\
 y(n=\infty) &= \sum_{k=0}^2 u(k) h(\infty-k) = 0
 \end{aligned}$$

Então:

$$y(n) = 4\delta(n) + 8\delta(n-1) - \delta(n-2) - 2\delta(n-3)$$

Uma conclusão importante é possível ser deduzida das expressões dos cálculos individuais dos instantes n , somente baseado nos instantes em que o sinal $y(n)$ possui valores não nulos, ou seja:

$$\begin{cases} y(n=0) = u(n) h(-n) \\ y(n=1) = u(n) h(-n+1) \\ y(n=2) = u(n) h(-n+2) \\ y(n=3) = u(n) h(-n+3) \end{cases} \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^3 u(n) h(-n+k)$$

O gráfico da figura I.28 ilustra estas expressões, onde a função $u(n)$ permanece fixa enquanto a função $h(n)$ é refletida e com os deslocamentos pertinentes.

A partir da solução deste último exemplo, pode-se generalizar uma nova expressão para o cálculo da somatória de convolução, qual seja:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(n) h(-n+k)$$

Ou, alternativamente, como pode ser facilmente obtida:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n) u(-n+k)$$

b) Cálculo de Somatória de Convolução por Software

A operação Somatória de Convolução pode ser resolvida por programação e alguns endereços eletrônicos já disponibilizam este tipo de software demonstrativo, tal como o abaixo relacionado:

“<http://www.jhu.edu/~signals/index.html>”¹¹

¹¹ Software produzido pelo grupo de pesquisa “ Signals and Systems Control” da Johns Hopnins University – USA, originado do artigo: “Crutchfield, S.G. and Rugh, W. J; Interactive Learning for Signals, Systems, and Control; IEEE CDC, San Diego – USA, 1997”.

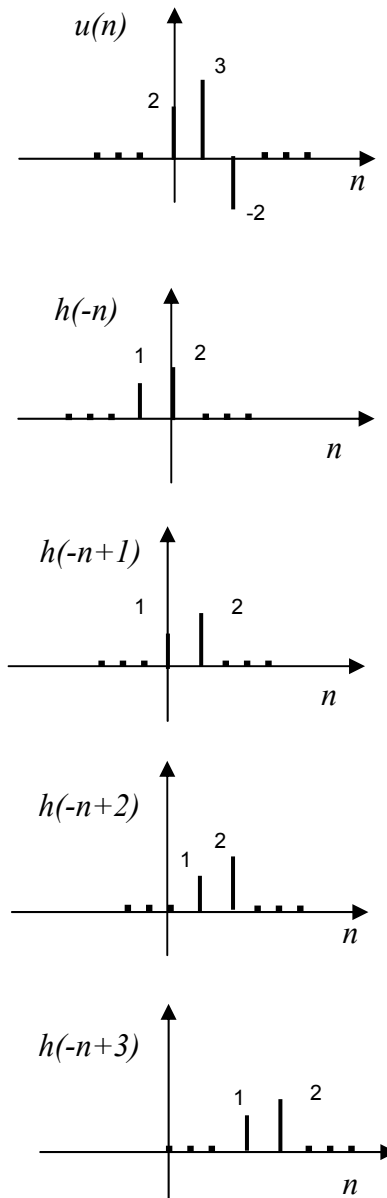


Figura I.28 – Cálculo da operação convolução de sinais discretos (2º. método)

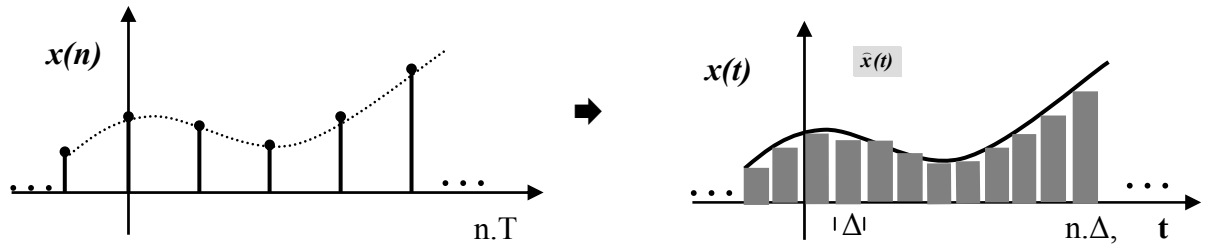
I.3.3 – Convolução entre Sinais e Sistemas Contínuos

A expressão do cálculo da operação convolução entre sinais contínuos será deduzida em analogia à obtenção desta mesma expressão para a operação de convolução entre sinais discretos.

Um sinal discreto qualquer pode ser escrito pela seguinte expressão:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k)$$

Seja o sinal contínuo genérico $x(t)$ obtido como uma aproximação por pulsos δ_{Δ} , de largura Δ , a partir do sinal $x(n)$, como mostrado na fig I.29.


 Figura I.29 – Obtenção do sinal $x(t)$ por analogia com o sinal $x(n)$

Então, o sinal contínuo aproximado pode ser escrito pela seguinte expressão:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta) \delta_{\Delta}(t - n\Delta)$$

O sinal contínuo genérico $x(t)$ será então assim descrito:

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \hat{x}(t) \Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

E assim o sinal $x(t)$ pode ser escrito, aproximadamente, como uma combinação linear de Pulsos Unitários deslocados no tempo e ponderados.

A partir das equações anteriores para sistemas contínuos lineares e invariantes no tempo e da relação entrada / saída, tem-se que:

$$\begin{aligned} y(t) &= H\{u(t)\} = H\left\{\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) H\{\delta(t - \tau)\} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau = h(t) * u(t) \end{aligned}$$

Onde, para efeito de notação, definiu-se a seguinte expressão para a operação com a função impulso unitário:

$$H\{\delta(t - \tau)\} = h_{\tau}(t) = h(t - \tau)$$

Conclui-se então que o sinal de saída “ $y(t)$ ” é expresso como uma combinação linear de funções “ $h(t)$ ” deslocadas no tempo e ponderadas, e é definido como:

Convolução Contínua ou Integral de Convolução

Na sequência, serão descritos os métodos de cálculo da integral de convolução.

a) Cálculo da integral de convolução pelo método matemático

A operação matemática da Integral de Convolução é calculada classicamente, resolvendo-se a função integral, conforme expressão anteriormente deduzida. Para ilustrar este cálculo, seja dado o seguinte exemplo:

Calcule a integral de convolução entre as funções $x(t)$ e $h(t)$ dadas por:

$$y(t) = f(t) * h(t) \quad \text{sendo} \quad \begin{cases} f(t) = \begin{cases} 1; & 0 \leq t < 1 \\ 0; & 0 > t \geq 1 \end{cases} \\ h(t) = \begin{cases} 1/2; & 0 \leq t < 1 \\ 0; & 0 > t \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Então:

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau = \begin{cases} \int_0^t (1/2) d\tau; & 0 \leq t < 1 \\ \int_{t-1}^1 (1/2) d\tau; & 1 \leq t < 2 \\ 0; & t < 0 \text{ e } t \geq 2 \end{cases}$$

b) Ilustração gráfica do cálculo da integral de convolução

O cálculo matemático da convolução entre as funções do exemplo anterior será agora ilustrado graficamente. A expressão da integral de convolução é dada por:

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(-\tau + t) d\tau$$

Esta expressão pode ser analisada como o cálculo da integral entre duas funções em que uma delas é refletida e deslocada no tempo de $-\infty$ até ∞ .

Para ilustrar graficamente a integral de convolução do exemplo anterior, primeiramente a figura I.30 mostra as curvas dos sinais que serão convoluídos.

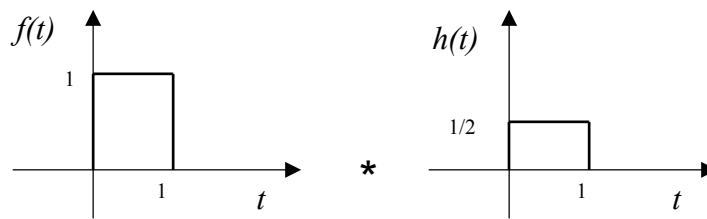


Figura I.30 – Ilustração gráfica dos sinais a serem convoluídos

A ilustração gráfica da operação integral de convolução é mostrada na figura I.31, onde o sinal $f(\tau)$ é mantido fixo enquanto o sinal $h(\tau)$ é refletido e deslocado de $-\infty$ até ∞ . Observe que são ilustrados somente alguns pontos desta operação e que nestes instantes, o valor resultante (integral) é a área interseção entre os sinais $f(\tau)$ e $h(\tau)$.

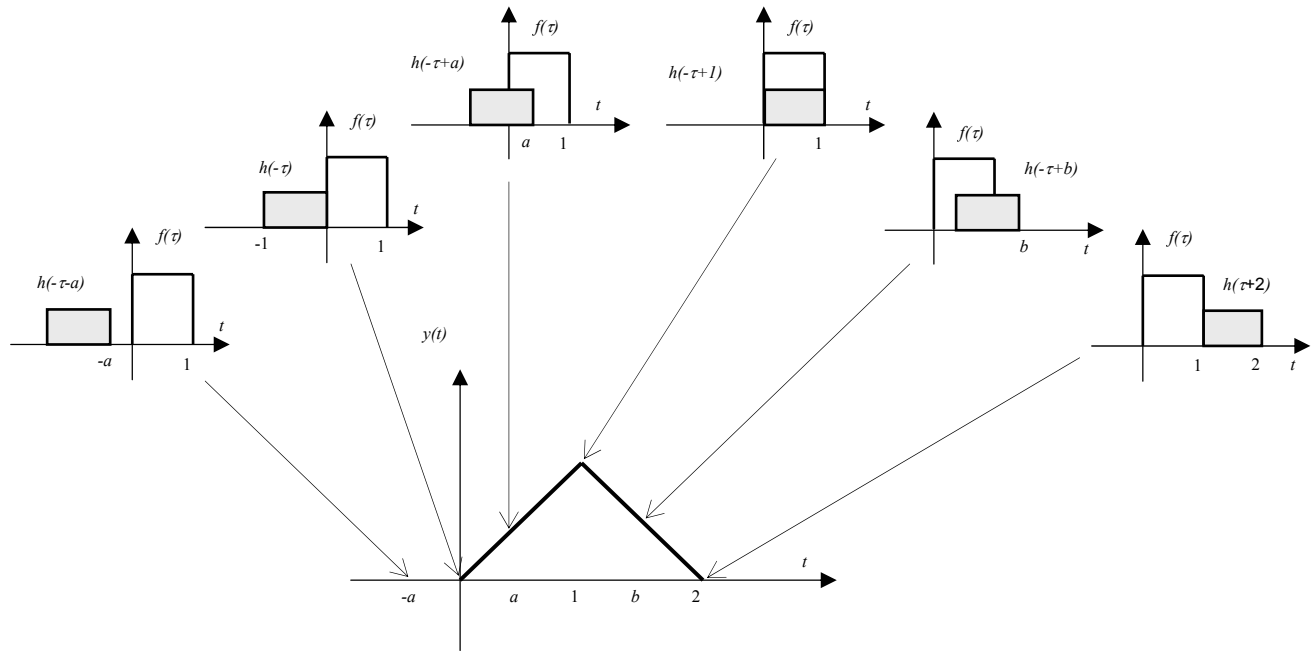


Figura I.31 – Operação gráfica da convolução entre dois sinais contínuos

c) Cálculo Sistemático das Integrais de Convolução por Regiões ¹²

O cálculo da operação convolução, ou integral de convolução, pode ser um exercício exaustivo. Então foi criado um método sistematizado e simples para o cálculo da integral de convolução, definido como “Cálculo de Convolução por Bandas”. Este método está detalhado no apêndice deste capítulo.

I.4 – Propriedades dos Sistemas

Neste item serão enunciadas as propriedades e analisadas as operações entre sinais e sistemas, sem fazer distinção entre as variáveis independentes contínua “ t ” e discreta “ n ”.

a) Linearidade ou princípio da superposição

A propriedade “Linearidade” está relacionada com os sinais ou variáveis que interagem com os sistemas e são classificados da seguinte maneira:

- Sistemas lineares (SL), quando as seguintes operações são verificadas:

$$\begin{cases} y(t) = H\{u(t)\} \\ u(t) = \sum_{i=1}^N a_i u_i(t) \end{cases} \Rightarrow y(t) = H\left\{\sum_{i=1}^N a_i u_i(t)\right\} \equiv \sum_{i=1}^N a_i H\{u_i(t)\}$$

- Os sistemas são classificados como não-lineares (SNL), quando a expressão anterior não se verifica. Um sistema descrito pela equação abaixo:

¹² A autoria deste método não é ainda, seguramente, conhecida pelos autores deste texto e tem como referência um texto manuscrito.

$$\ddot{y}(t) = -y^2(t) \quad \dot{y}(t) = \text{sen } y(t)$$

ele é classificado por não-linear. A solução analítica desta equação poderá ser obtida utilizando a teoria de sistemas não-lineares ou de sistema lineares. A análise linear é uma solução aproximada, chamada de linearização.

A solução analítica de uma equação não-linear é muitas vezes uma operação complexa e nestes casos, uma das possibilidades é a utilização da análise linear. Linearização é a obtenção de uma função linear ou linearizada que represente a função não-linear. A validade da função linearizada está restrita a uma pequena região do espaço, definida em termos de um *ponto de operação* (*p. o.*).

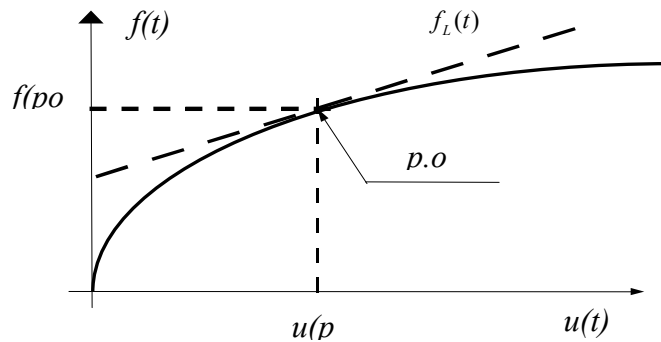


Figura I.32 – Linearização: função não-linear $f(t)$ e função linearizada $f_L(t)$.

A figura I.32 ilustra graficamente a operação matemática realizada, em que:

- no “*p.o.*” a função linearizada representa exatamente a função não-linear: $f_L(t) = f(t)$;
- fora do “*p.o.*” a função linearizada não representa com exatidão a função não-linear e a análise se torna imprecisa, à medida que se distancia do *p.o.*: $f_L(t) \neq f(t)$.

O cálculo da função linear $f_L(t)$ é efetuado através da expansão da função não-linear $f(t)$ em série de Taylor, ou seja:

$$f(t) = f(po) + \left[\frac{df(t)}{du(t)} \right]_{po} [u(t) - u(po)] + \left[\frac{d^2 f(t)}{du^2(t)} \right]_{po} \frac{[u(t) - u(po)]^2}{2!} + \dots + \left[\frac{d^n f(t)}{du^n(t)} \right]_{po} \frac{[u(t) - u(po)]^n}{n!}$$

Em que, como hipótese de “pequenas variações em torno do *p.o.*”, considera-se somente as “derivadas sucessivas até primeira ordem”, ou seja:

$$f_L(t) = f_{po}(t) + \alpha \Delta u(t); \quad \text{onde } \Delta u(t) = [u(t) - u_{po}(t)]$$

Obs.: Os termos das derivadas sucessivas restantes podem ser utilizados na avaliação do erro cometido na linearização.

Exemplos:

1) Pêndulo simples:

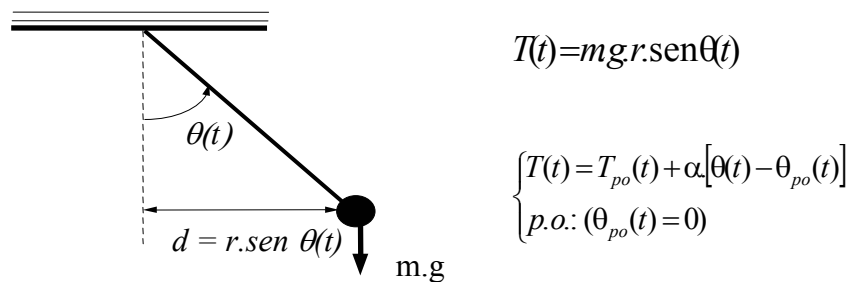


Figura I.33 – Função não-linear e linearização do pêndulo simples

2) Linearizar a função de múltiplas variáveis dada pela expressão:

$$\ddot{y}(t) = -y^2(t) \dot{y}(t) - \sin y(t)$$

b) Variância no Tempo ¹³

O conceito de invariância / variância no tempo está relacionado com os parâmetros do sistema e não com seus sinais, que são normalmente variantes com o tempo. Os sistemas físicos podem ser classificados quando à variância no tempo em:

- Sistemas invariantes no tempo (SIT);
- Sistemas variantes no tempo (SVT).

Sejam as relações entrada /saída de um sistema representadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{cases} y(t) = H\{u(t)\} \\ \bar{y}(t) = H\{u(t + t_o)\} \end{cases}$$

Onde t_o representa o deslocamento no tempo do sinal de entrada.

Este sistema será classificado como invariante no tempo (SIT) se a seguinte expressão for verificada:

$$\bar{y}(t) = y(t + t_o).$$

Caso contrário, o sistema será classificado como variante no tempo (SVT).

Exemplo: Classifique as expressões abaixo quanto a sua variância no tempo:

- $y(t) = \text{Sen } u(t)$

¹³ No texto deste capítulo e dos próximos será utilizado com frequência a sigla SLIT para indicar Sistema Linear Invariante no tempo. Algumas variações desta sigla também serão usadas.

- $y(n) = n u(n)$
- Problemas do livro texto.

c) Distributiva ou Operação de Sistemas em Paralelo:

A propriedade distributiva equivale à associação de sistemas em série, como ilustrado pelo diagrama da figura I.34.

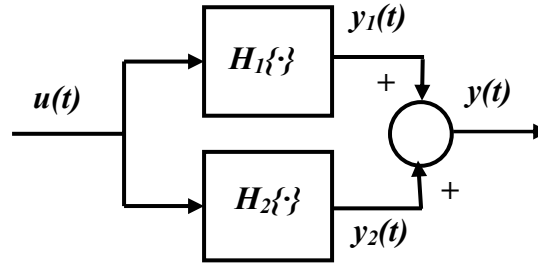


Figura I.34 – Diagrama de blocos de sistemas em paralelo

Como o círculo representa uma somatória, então:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

Onde:

$$\begin{cases} y_1(t) = h_1(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot h_1(t - \tau) \cdot d\tau \\ y_2(t) = h_2(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot h_2(t - \tau) \cdot d\tau \end{cases}$$

Que após manipulações matemática:

$$\begin{aligned} y(t) &= h_1(t) * u(t) + h_2(t) * u(t) \\ &= \{h_1(t) + h_2(t)\} * u(t) \end{aligned}$$

No caso de sistemas discretos, a mesma relação se verifica.

d) Associativa ou Conexão de Sistemas em Série

A propriedade associativa equivale à associação de sistemas em série e é ilustrada pelo diagrama de blocos da figura I.35.

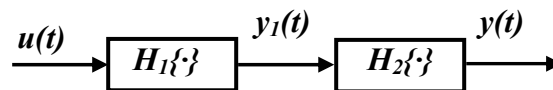


Figura I.35 – Diagrama de blocos de sistemas em série

A operação matemática desta associação é deduzida em seguida:

$$\begin{cases} y(t) = h_2(t) * y_1(t) \\ y_1(t) = h_1(t) * u(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(t) = h_2(t) * \{h_1(t) * u(t)\} \\ = \{h_2(t) * h_1(t)\} * u(t) \end{cases}$$

e) Comutativa

Esta propriedade está relacionada com a ordem da conexão de sistemas em série. A partir da figura I.35 pode ser deduzido que:

$$h(t) = h_2(t) * h_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) \cdot h_2(t - \tau) \cdot d\tau$$

Que após uma mudança de variáveis $v = t - \tau$ tem-se que:

$$\begin{aligned} h(t) &= h_2(t) * h_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) \cdot h_2(t - \tau) \cdot d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t - v) \cdot h_2(v) \cdot dv = h_1(t) * h_2(t) \end{aligned}$$

Então, a ordem da conexão de sistemas em série não altera o produto, ou seja, a resultante.

 f) Memória

Esta propriedade está relacionada com a capacidade do sistema de armazenar ou acumular energia e é classificado em duas categorias:

- Sistema com memória: define-se que um *sistema é com memória*, quando seu sinal de saída depende dos valores passados ou anteriores do sinal de entrada. Sendo assim, o sistema será capaz de reter informações passadas;
- Sistema sem memória: *sistema sem Memória* é aquele cujo sinal de saída depende somente do valor atual do sinal de entrada.

Para caracterizar matematicamente esta classificação será dada ênfase nos sistemas sem memória. Seja a operação convolução de sistemas discretos:

$$y(n) = h(n) * u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) u(n - k)$$

Como em um sistema sem memória a saída só depende de $u(n)$ e não de $u(n-k)$, para $n \neq 0$, então o sinal de saída $y(n)$ será descrito pela seguinte expressão:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) u(n - k) = \alpha \delta(n) u(n)$$

Então, a expressão que representa o sistema sem memória será:

$$h(n) = \begin{cases} \alpha; & n = 0 \\ 0; & n \neq 0 \end{cases} \Rightarrow h(n) = \alpha \delta(n)$$

Cuja expressão do sinal de saída é uma equação algébrica.

Em sistemas contínuos a operação convolução é dada por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

Como em um sistema sem memória a saída só depende de $u(t)$ e não de $u(t-\tau)$, para $\tau \neq 0$, então o sinal de saída $y(t)$ pode ser expresso como:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau = \alpha u(t)$$

Então, a expressão que representa o sistema sem memória será:

$$h(t) = \begin{cases} \alpha; & t = 0 \\ 0; & t \neq 0 \end{cases} \Rightarrow h(t) = \alpha \delta(t)$$

Cuja expressão do sinal de saída é também uma equação algébrica.

Exemplos:

1. Sistema financeiro: $y(n) = 1,01 y(n-1) + u(n)$ - ?
2. $y(n) = \sum_{k=0}^n u(k)$ - ?
3. Circuito RLC e Circuito elétrico puramente resistivo - ?
4. $y(n) = u^2(n)$ - ?

g) Causalidade

Um sistema, quando a causalidade, é classificado em causal e não causal. O sistema é definido como *Causal* quando o sinal de saída depende somente dos valores passados e atuais do sinal de entrada, com isto, para sinais discretos, o sinal de saída $y(n)$ só dependerá de $u(n-k)$, para $n < 0$, então:

$$\begin{cases} y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) u(n-k) \\ u(k) = 0 \quad \text{para } k < 0 \end{cases} \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) u(n-k)$$

E em sistemas contínuos, $y(t)$ só dependerá de $u(t-\tau)$, para $\tau < 0$, então:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

Em contrapartida, um sistema é definido como *Não-Causal* quando o sinal de saída depende dos valores futuros do sinal de entrada.

Exemplos:

1. - $y(n) = u(n) + u(n-1) + u(n-2)$?
2. - $y(n) = u(-n)$?
3. - $y(n) = u(n-1) + u(n) + u(n+1)$ - ?

4. - $y(t) = u(t + 1)$ - ?

h) Estabilidade BIBO (Bounded Input Bounded Output)

O conceito que qualifica o comportamento dinâmico de um sistema tendo como base a relação existente entre os sinais de saída e de entrada em termos de convergência, é qualificado como estabilidade. Dentre as várias maneiras de qualificar a convergência do sinal de saída e a mais simples delas é o critério conhecido como estabilidade BIBO ou entrada limitada saída limitada, cuja definição será dada em seguida.

Seja o sinal de entrada $u(n, t)$ limitado, ou seja:

$$|u(n, t)| \leq M_u < \infty; \quad \forall n, t$$

então o sistema representado pelo operador $H\{u(n, t)\}$ é **Estável BIBO** se a sua saída também for limitada e dada por:

$$|y(n, t)| < M_y < \infty; \quad \forall n, t.$$

Esta definição relaciona os sinais de entrada e saída e a partir deles será definido os critérios aplicáveis diretamente ao sistema.

A relação entrada, saída e sistemas discretos com as restrições acima pode ser assim descrita:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) u(n-k)$$

$$\Downarrow$$

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) u(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| |u(n-k)| < M_y < \infty; \quad \forall n.$$

Então, como em sistema **BIBO** os sinais de entrada e de saída são limitados:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| M_u < M_y < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Conclui-se então que “*dado que o sinal de entrada $u(n)$ seja limitado, o sinal de saída $y(n)$ será limitado se a função $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|$ for limitada.*”

Analogamente, para um sistema contínuo tem-se: “*dado que o sinal de entrada $u(t)$ seja limitado, o sinal de saída $y(t)$ será limitado se a função $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$ for limitada.*”

i) Inversibilidade ou Desconvolução

Um sistema é dito ser inversível se o sinal de entrada $u(t)$ puder ser recuperado a partir do sinal de saída $y(t)$, como ilustrado pela figura I.36.

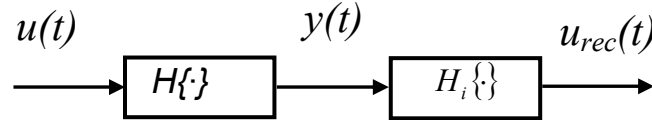


Figura I.36 – Sistema inverso

Ou seja, para um sistema contínuo ou discreto ele será inversível se:

$$u(t, n) = u_{rec}(t, n)$$

A partir da figura I.38 pode-se deduzir que:

$$\begin{cases} y(t, n) = H\{u(t, n)\} = h(t, n) * u(t, n) \\ u_{rec}(t, n) = H_i\{y(t, n)\} = H_i\{H\{u(t, n)\}\} \\ \quad = h_i(t, n) * \{h(t, n) * u(t, n)\} = \{h_i(t, n) * h(t, n)\} * u(t, n) \end{cases}$$

A condição de inversibilidade é que então:

$$\begin{cases} h_i(t, n) * h(t, n) = \delta(t, n) \\ \text{ou} \\ H_r\{H\{\cdot\}\} = I \end{cases}$$

Esta última expressão define a condição para um sistema ser inversível.

Exemplo 1: Tensão e corrente em uma bobina

$$\begin{cases} i(t) = (1/L) \cdot \int v(t) \cdot dt \\ v(t) = L \cdot \frac{d i(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H\{\cdot\} = \int (\cdot) \cdot dt \\ H_i\{\cdot\} = \frac{d(\cdot)}{dt} \end{cases} \Rightarrow H_i\{\cdot\} = H^{-1}\{\cdot\}$$

Exemplo 2: Resolver o Ex. 2.12, pp. 114, Haynin.

I.5 – Equações Diferenciais e a Diferenças

No item I.3 foi definida a relação entrada / saída de um sistema dinâmico causal pela operação convolução, ou seja:

$$y(t, n) = H\{u(t, n)\}$$

Esta relação é também descrita por uma equação matemática, imagem desta operação, que é definida por *Equação Diferencial*, no caso de sistemas no tempo contínuo, ou *Equação a Diferenças*, no caso de sistemas no tempo discreto.

I.5.1 - Equações Diferenciais

A equação diferencial, que representa a operação convolução, descreve a dinâmica da movimentação de energia existente na natureza ou seja, a *Lei de Conservação da Energia*, aqui expressa por uma “**Equação Diferencial**” genérica de ordem “n”, dada por:

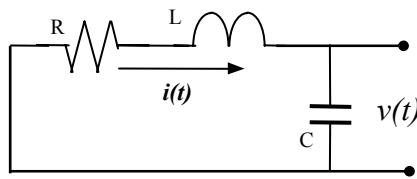
$$a_n \cdot y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_0 \cdot y(t) = c_m \cdot u^{(m)}(t) + c_{m-1} \cdot u^{(m-1)}(t) + \dots + c_1 \cdot \dot{u}(t) + c_0 \cdot u(t)$$

Onde:

- $\dot{y}(t) = dy(t)/dt$ $y^{(i)}(t) = d^i y(t)/dt^i$
- **n**: derivada de máxima ordem do sinal $y(t)$, que também define a ordem da equação diferencial¹⁴;
- **m**: derivada de máxima ordem do sinal $u(t)$.

Exemplos de equações diferenciais de sistemas físicos:

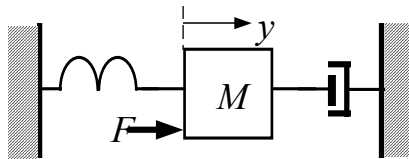
1. O circuito elétrico descrito pela figura I.37 possui dois elementos armazenadores de energia (o capacitor e o indutor), então é representado por uma equação diferencial de 2^a. ordem.



$$\begin{cases} v(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) \\ v(t) = R i(t) + L \dot{i}(t) + \frac{1}{C} \int i(\tau) d\tau \\ \dot{v}(t) = R \dot{i}(t) + L \ddot{i}(t) + \frac{1}{C} i(t) \end{cases}$$

Figura I.37 – Equação diferencial de um circuito elétrico RLC

2. O Sistema mecânico descrito pela figura I.38 possui dois elementos armazenadores de energia (a massa e a mola), então é representado por uma equação diferencial de 2^a. ordem.



$$\begin{cases} f(t) = f_B(t) + f_K(t) + f_M(t) \\ f(t) = B \dot{y}(t) + K y(t) + M \ddot{y}(t) \end{cases}$$

Figura I.38 – Equação diferencial de um sistema massa-mola

¹⁴ Para sistemas físicos contínuos, pode também ser interpretado como o número máximo de elementos armazenadores de energia que o sistema representado possui.

I.5.2 - Equações a Diferenças

A representação de sinais e de sistemas discretos no tempo é realizada por uma expressão matemática, definida como **“Equação a Diferenças”**.

Uma equação linear a diferenças de ordem n é representada pela seguinte expressão:

$$y(n-k) + a_{k-1}y(n-k-1) + \dots + a_1y(n-1) + a_0y(n) = b_mu(n-m) + b_{m-1}u(n-m-1) + \dots + b_1u(n-1) + b_0u(n)$$

Onde:

$y(n-k)$: seqüência numérica;

$k \in \mathbb{N}$: ordem da equação a diferenças;

$n \in \mathbb{Z}$: variável independente.

Exemplo – Seja a equação a diferenças a seguir:

$$y(n-2) + y(n-1) + (1/4)y(n) = u(n) + 2u(n-1)$$

Este sistema discreto possui dois acumuladores, então ele é representado por uma equação a diferenças de 2ª. ordem.

I.5.3 – Introdução à Solução de Equações Diferenciais e a Diferenças

A solução de uma equação diferencial / a diferenças envolve conceitos e métodos que podem ser classificados da seguinte maneira:

- Solução numérica;
- Solução utilizando transformações apropriadas;
- Solução “tentativa e erro”.

O primeiro método já foi estudo em cursos anteriores de análise numérica de equações matemáticas e o segundo método será estudado em capítulos posteriores. O terceiro método será brevemente abordado neste item.

O método aqui definido por “tentativa e erro” resolve a equação diferencial por partes, em que a solução completa é composta da solução natural e a solução forçada, que são detalhadas a seguir:

- **Solução natural ou solução da equação homogenia**, em que a excitação do sistema é nula e a energia do sistema se restringe aquela existente em seus armazenadores ou acumuladores internos de energias, aqui definidos como condições iniciais (CI). A equação a ser solucionada será para sistemas contínuos é dada por:

$$a_k y^{(k)}(t) + a_{k-1} y^{(k-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0$$

$$C.I.: \left[y(t_0); \dot{y}(t_0); \dots; y^{(k-1)}(t_0) \right]$$

E para sistemas discretos por:

$$\begin{cases} y(n-k) + a_{k-1}y(n-k-1) + \dots + a_1y(n-1) + a_0y(n) = 0 \\ C.I.: [y(k-1); \dots; y(1); y(0)] \end{cases}$$

A solução desta equação é, geralmente, composta de termos exponenciais, cujos expoentes são as raízes da equação homogenia. Esta solução expressa, qualitativamente, o comportamento transitório do sistema.

- **Solução forçada ou solução da equação particular**, em que a excitação externa do sistema está presente, mas supõe-se que as energias existentes nos acumuladores ou armazenados são nulas ou seja, o sistema está inicialmente relaxado. A equação a ser solucionada é a equação original com **C.I.** nulas. A solução desta equação possui, geralmente, a mesma forma da excitação externa do sistema. Esta solução expressa, qualitativamente, o comportamento em regime estático do sistema. Para um sistema contínuo, tem-se que:

$$a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} + a_{k-1} \frac{d^{k-1} y(t)}{dt^{k-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t)$$

$$C.I.: \left[y(t_0); \dot{y}(t_0); \dots; y^{(k-1)}(t_0) \right] \equiv 0$$

E para sistemas discretos por:

$$\begin{cases} y(n-k) + a_{k-1}y(n-k-1) + \dots + a_1y(n-1) + a_0y(n) = u(n) \\ C.I.: [y(k-1); \dots; y(1); y(0)] \equiv 0 \end{cases}$$

- Solução completa é composta da somatória das soluções natural e forçada.

I.6 – Respostas de Sistema a Entradas Elementares

Seja um sistema dinâmico descrito pela figura I.39.

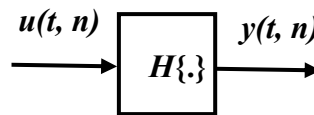


Figura I.39 – Diagrama de blocos de um SLIT

Então, seu sinal de saída pode ser representado pela seguinte expressão:

$$\begin{cases} y(n) = h(n) * u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) h(n-k) \\ y(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t-\tau) d\tau \end{cases}$$

A saída “**y(t, n)**” é escrita como uma combinação linear das respectivas funções “**h(t, n)**” deslocadas no tempo.

Neste item serão descritas, de maneira qualitativa, as respostas de SLIT’s quando submetidos a entradas elementares, quais sejam:

- Resposta ao impulso;

- Resposta ao degrau;
- Resposta em frequência.

I.6.1 - Resposta ao Impulso Unitário

É definida como a resultante da aplicação do “Operador $H(t, n)$ ” ao sinal “Entrada $u(t, n)$ ”, quando este é um “Impulso Unitário $\delta(t, n)$ ”. Então:

$$\begin{cases} y(n) = h(n) * \delta(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \delta(n-k) = h(n) \\ y(t) = h(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) h(t-\tau) d\tau = h(t) \end{cases}$$

Conclui-se então que, o sinal de resposta $y(t, n)$ de um SLIT quando sua entrada é um sinal impulso unitário $\delta(t, n)$ será a própria função interna $h(t, n)$, definida como **resposta ao impulso**.

Exemplos:

$$\begin{cases} y(t) = H\{\delta(t)\} = h(t) * \delta(t) = h(t) \\ y(t) = H\{\delta(t-\tau)\} = h(t) * \delta(t-\tau) = h(t-\tau) \\ y(n) = H\{\delta(n-k)\} = h(n) * \delta(n-k) = h(n-k) \end{cases}$$

I.6.2 - Resposta ao Degrau Unitário

É definida como a resultante da aplicação do “Operador $H(t; n)$ ” ao sinal “Entrada $u(t; n)$ ”, quando este é um “Degrau Unitário $u_d(t; n)$ ”, ou seja:

$$\begin{cases} y_d(k) = h(n) * u_d(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) u_d(n-k) = \sum_{k=-\infty}^n h(k) \\ y_d(t) = h(t) * u_d(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u_d(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \end{cases}$$

Para interpretar esta dedução é importante visualizar graficamente a função $u_d(t-\tau)$. Na expressão genérica deve-se levar em consideração que:

$$u_d(n-k) = \begin{cases} 0; & k > n \\ 1; & k \leq n \end{cases} \quad e \quad u_d(t-\tau) = \begin{cases} 0; & \tau > t \\ 1; & \tau \leq t \end{cases}$$

I.6.3 – Relação entre Entradas Elementares e Respostas de um SLIT

A partir das expressões desenvolvidas neste item, pode-se também deduzir a relação entre resposta ao degrau e resposta ao impulso de um SLIT qual seja:

$$\begin{cases} h(n) = y_d(n) - y_d(n-1) \\ h(t) = \dot{y}_d(t) \end{cases}$$

Verifica-se que esta relação é definida por um operador linear.

Sejam dois sinais de entrada relacionados por um operador linear e dado pela expressão:

$$u_2(t) = F[u_1(t)]$$

Suponha agora, que um SLIT será submetido a estes dois sinais de entrada, qual seja:

$$\begin{cases} y_1(t) = H\{u_1(t)\} \\ y_2(t) = H\{u_2(t)\} \end{cases}$$

Então, pelo princípio da linearidade destas operações tem-se que:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= H\{u_2(t)\} = H\{F[u_1(t)]\} = F[H\{u_1(t)\}] \\ &= F[y_1(t)] \end{aligned}$$

Conclui-se então que, em SLIT's, quando seus sinais de entrada estão relacionados por um operador linear, esta mesma relação também será verificada entre seus respectivos sinais de saída.

1.6.4 - Resposta em Frequência

A resposta em frequência é definida como a resultante da aplicação do “Operador $H(t; n)$ ” ao sinal “Entrada $u(t; n)$ ”, quando este é uma harmônica representada pelo sinal “Exponencial Complexo $u_f(t; n)$ ”. Na expressão genérica deve ser considerado que:

$$\begin{cases} u_f(n) = e^{j\Omega n} = \cos \Omega n + j \sen \Omega n \\ u_f(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sen \omega t \end{cases}$$

Tem-se então que para o tempo discreto:

$$\begin{aligned} y_f(n) &= h(n) * u_f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) u_f(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{j\Omega(n-k)} \\ &= e^{j\Omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\Omega k} = e^{j\Omega n} H(e^{j\Omega}) \end{aligned}$$

Onde dada pela expressão abaixo é definida como resposta em frequência.

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\Omega k}$$

No caso de sistemas contínuos tem-se que:

$$\begin{aligned} y_f(t) &= h(t) * u_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u_f(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = e^{j\omega t} H(j\omega) \end{aligned}$$

Onde, analogamente, a resposta em frequência no tempo contínuo é definida como:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau$$

Neste item é importante destacar os seguintes resultados:

- A resposta $y(t, n)$ de um SLIT quando sua entrada é um sinal impulso unitário $\delta(t, n)$ será a própria função interna $h(t, n)$, definida como resposta ao impulso;
- A resposta $y(t, n)$ de um SLIT quando sua entrada é um sinal exponencial real (harmônica) é definida como resposta em frequência $H(j\omega, e^{j\Omega})$;
- A resposta ao impulso e a resposta em frequência estão relacionadas entre si pelas expressões:

$$\begin{cases} H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \\ H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\Omega k} \end{cases}$$

- A função $h(t, n)$ é, normalmente, real e a função $H(j\omega, e^{j\Omega})$ é, normalmente, complexa.

Então, dado um SLIT pode-se fazer sua análise no domínio do tempo por $h(t, n)$ e no domínio da frequência por $H(j\omega, e^{j\Omega})$

A análise no domínio da frequência pode ser realizada pelas componentes da função complexa, composta de parte real e parte imaginária ou pelas componentes amplitude e fase. A relação entre estas componentes é dada pelas seguintes expressões:

$$H(j\omega) = \text{Real}\{H(j\omega)\} + j \cdot \text{Imag}\{H(j\omega)\} = |H(j\omega)| e^{j\theta}$$

Em que:

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = \sqrt{[\text{Real}\{H(j\omega)\}]^2 + [\text{Imag}\{H(j\omega)\}]^2} \\ \theta = \arctg\left\{\frac{\text{Imag}\{H(j\omega)\}}{\text{Real}\{H(j\omega)\}}\right\} \end{cases}$$

A partir desta expressão pode-se ter uma análise teórica e gráfica de uma função no domínio da frequência.

Exemplos:

- 1) Sistema contínuo - Seja um circuito elétrico RC cuja resposta ao impulso seja dada por

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} u(t)$$

Calcule $H(j\omega)$ e esboce os gráficos representativos das funções módulo e fase.

Solução: Da expressão da resposta em frequência tem-se:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega \tau} d\tau = ?$$

Ou seja:

$$H(jw) = \frac{1}{1 + jRCw} = \begin{cases} |H(jw)| = [1 + (wRC)^2]^{-1/2} \\ \theta = \left\{ \arctg \frac{0}{1} \right\} - \left\{ \arctg \frac{wRC}{1} \right\} \end{cases}$$

Traçam-se então os gráficos *Módulo e Fase x frequência* e pode-se analisar o comportamento do sistema, em termos de resposta em frequência.

- 2) Calcule a resposta em frequência do circuito dado pelo exemplo 1 a partir da sua equação diferencial relacionada abaixo:

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{RC} u(t)$$

- 3) Sistema discreto - Dado a resposta ao impulso por

$$h_1(n) = (1/2)[\delta(n) + \delta(n-1)] \quad e \quad h_2(n) = (1/2)[\delta(n) - \delta(n-1)]$$

Calcule sua resposta em frequência.

$$\text{Resposta: } H(e^{-j\Omega n}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\Omega n}$$

- 4) Seja a equação a diferenças de um SLIT dada por:

$$y(n-1) + 2y(n) = u(n)$$

Calcule sua resposta em frequência.

I.7 – Conclusões

O objetivo principal deste capítulo foi introduzir os conceitos básicos de SLIT e suas respectivas interpretações físicas, que são fundamentais para o estudo, compreensão, análise e aplicações em Engenharia.

Apêndice Cap. I – Cálculo da Convolução por Bandas

O cálculo da operação convolução, ou integral de convolução, pode ser um exercício exaustivo. Então foi criado um método sistematizado e simples para o cálculo da integral de convolução, definido como “Cálculo de Convolução por Bandas”.

O método será demonstrado através de um exemplo prático, pelo cálculo da convolução entre as seguintes funções:

$$f(t) = \begin{cases} t; & 0 \leq t < 1 \\ 2; & 1 \leq t < 2 \\ 0; & 0 > t \text{ e } t \geq 2 \end{cases} \quad e \quad g(t) = \begin{cases} 1; & -1 \leq t < 1 \\ e^t; & 1 \leq t < 3 \\ 0; & -1 > t \text{ e } t \geq 3 \end{cases}$$

A ilustração gráfica destas funções é dada pela figura I.40.

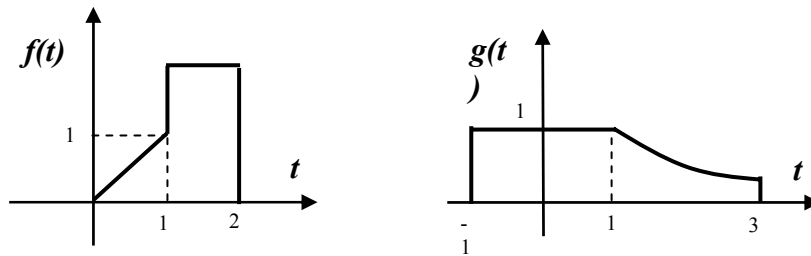


Figura I.41 – Curvas dos sinais contínuos a serem convoluídos

Para o cálculo da convolução entre estes dois sinais será definido o seguinte algoritmo:

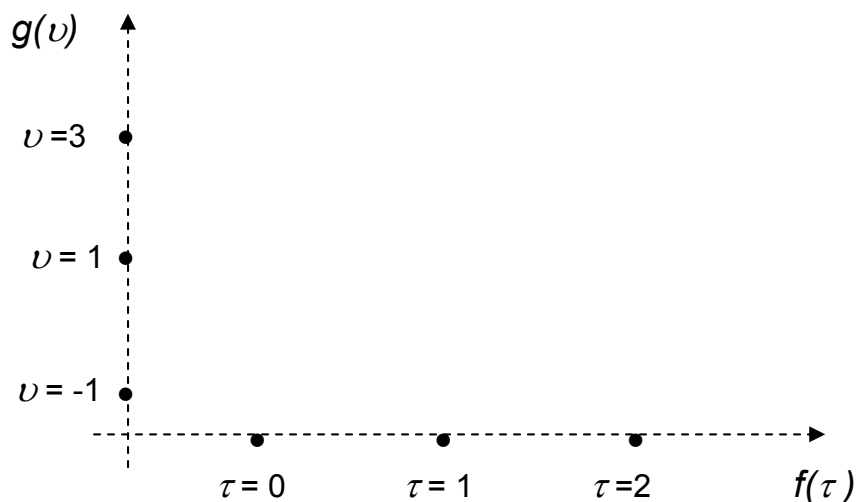
1º) Estabelece-se a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(v) dv \\ v = t - \tau \end{cases}$$

Obs.: o método se aplica tanto no cálculo de $y(t) = g(t) * f(t)$ quanto de $y(t) = f(t) * g(t)$.

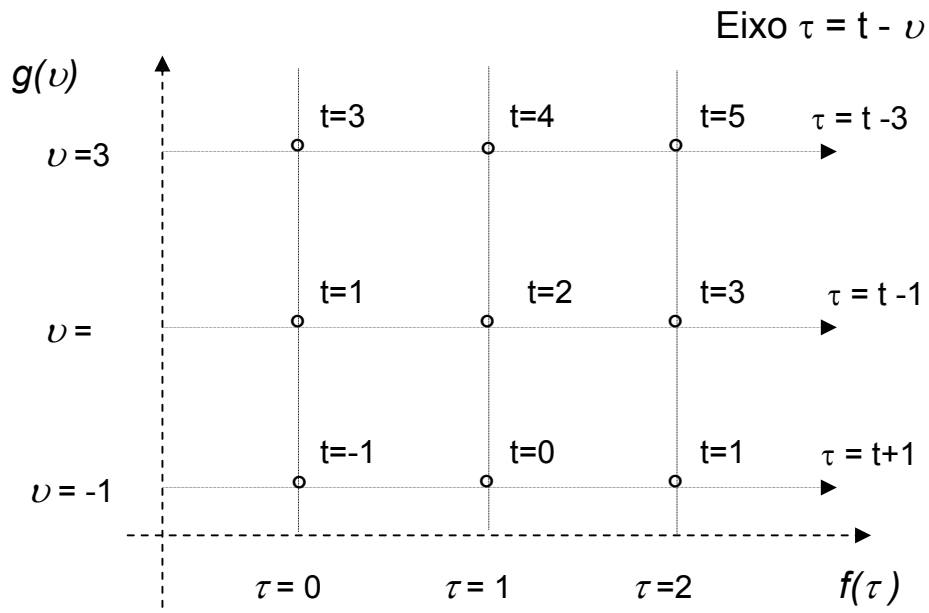
2º) Traça-se os eixos do plano das bandas, considerando como variáveis dos eixos abscissas e ordenadas as funções a serem convoluídas, cujas escalas serão definidas pelos instantes de alteração das formas de onda de cada função. Então, a partir do exemplo especificado:

- A função $f(\tau)$ será o eixo das abscissas (ou das ordenadas), contendo os seguintes pontos ou instantes de alteração da forma de onda desta função, onde $\tau = 0; 1; 2$; que serão plotados equidistantes entre si.
- A função $g(v)$ será o eixo das ordenadas (ou das abscissas), contendo os seguintes pontos ou instantes de alteração da forma de onda desta função, onde $v = -1; 1; 3$; que serão plotados equidistantes entre si.
- O esboço do plano das bandas é dado pela figura a seguir:

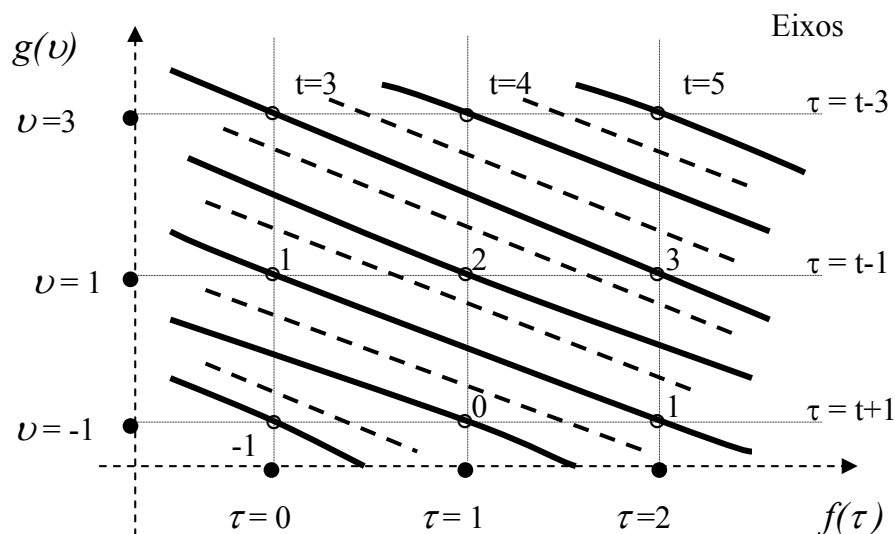


3º) Traçado das isóclinas equitemporais na variável independente “ t ”:

- Primeiramente calculam-se os instantes “ t ” a partir dos cruzamentos das linhas verticais em $\tau = 0; 1; 2$ e das linhas horizontais em $v = -1; 1; 3$, conforme gráfico a seguir:

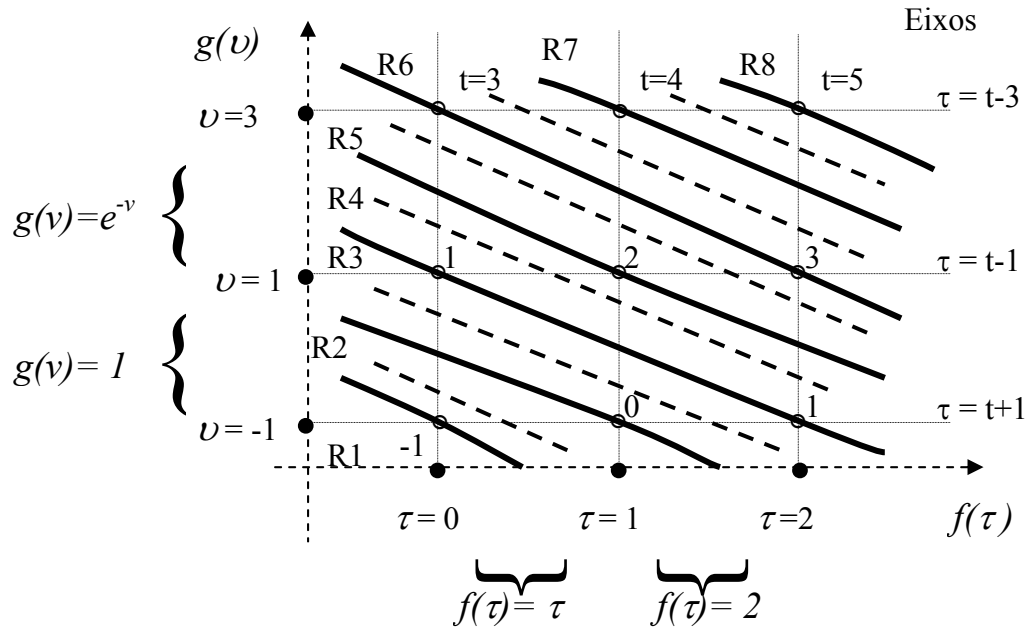


- Traçados das curvas isóclinas em “ t ” (interligando os valores iguais em t) e seus respectivos pontos médios, conforme figura abaixo:



4º) Cálculo dos intervalos de integração e das respectivas integrais, de cada região “ R_i ” :

- Inicialmente determinam-se as regiões, como ilustrado na figura a seguir:



- Em seguida monta-se a tabela das integrais por banda, calculando-se a região R_4 como exemplo, a partir dos seguintes passos:

- Cálculo do intervalo da banda “ t ” da função $y_4(t)$: a partir das isóclinas cheias tem-se que $1 \leq t < 2$;
- Cálculo dos intervalos de integração em τ , seguindo-se a linha média-tracejada da região e computando-se as interseções com as linhas verticais (τ é fixo) e com as linhas horizontais (τ é função de t), onde são definidas três regiões:

$$\begin{cases} 0 \leq \tau < t-1: & \Rightarrow f(\tau) = \tau \text{ e } g(v) = e^{-v} \\ t-1 \leq \tau < 1: & \Rightarrow f(\tau) = \tau \text{ e } g(v) = 1 \\ 1 \leq \tau < 2: & \Rightarrow f(\tau) = 2 \text{ e } g(v) = 1 \end{cases}$$

- Cálculo das parcelas da função $y_4(t)$:

$$\begin{aligned} y_4(t) &= \int_0^{t-1} f(\tau).g(v).d\tau + \int_{t-1}^1 f(\tau).g(v).d\tau + \int_1^2 f(\tau).g(v).d\tau \\ &= \int_0^{t-1} \tau.e^{-(t-\tau)}.d\tau + \int_{t-1}^1 \tau.d\tau + \int_1^2 2.d\tau \end{aligned}$$

4) Montagem da tabela com as integrais das oito regiões, como a seguir:

Região	Intervalo integração	Integral $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau).g(\nu).d\tau$ por regiões
R1	$t < 1$	$y_1(t) = 0$
R2	$-1 \leq t < 0$	$y_2(t) = \int_0^{t+1} 1.\tau.d\tau$
R3	$0 \leq t < 1$	$y_3(t) = \int_0^1 \tau.d\tau + \int_1^{t+1} 2.d\tau$
R4	$1 \leq t < 2$	$y_4(t) = \int_0^{t-1} \tau.e^{-(t-\tau)}.d\tau + \int_{t-1}^1 \tau.d\tau + \int_1^2 2.d\tau$
R5	$2 \leq t < 3$	$y_5(t) = \int_0^1 \tau.e^{-(t-\tau)}.d\tau + \int_1^{t-1} 2.e^{-(t-\tau)}.d\tau + \int_{t-1}^2 2.d\tau$
R6	$3 \leq t < 4$	$y_6(t) = \int_{t-3}^1 \tau.e^{-(t-\tau)}.d\tau + \int_1^2 2.e^{-(t-\tau)}.d\tau$
R7	$4 \leq t < 5$	$y_7(t) = \int_{t-3}^2 2.e^{-(t-\tau)}.d\tau$
R8	$5 \leq t$	$y_8(t) = 0$

5º.) Cálculo final e traçado da curva Integral de Convolução:

$$y(t) = g(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau).g(t-\tau).d\tau = y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_8(t)$$

Figura I.42 – Operação gráfica da convolução entre os dois sinais contínuos