CAP. II - Representação de Sinais e Sistemas por Fourier

II.1 – Introdução: Conceitos Básicos

No capítulo I foram apresentados os conceitos matemáticos iniciais para a representação dos fenômenos da natureza através da representação dos sinais e sistemas. A finalidade deste capítulo é a apresentação preliminar da teoria matemática de representação de sinais e SLIT's no domínio da freqüência.

No final do capítulo I foi possível observar que a análise de sinais e sistemas pode ser realizada no domínio do tempo ou da frequência. Cada um destes referenciais possui suas vantagens e pode-se dizer que na maioria das vezes possuem informações complementares.

Na representação de sinais e sistemas no domínio da frequência, o objetivo principal é analisar as informações contidas em toda a faixa de frequência do fenômeno representado.

Fourier enunciou importantes ferramentas matemáticas para a representação de qualquer fenômeno, permitindo fazer uma análise detalhada de todas as informações contidas neste fenômeno.

Inicialmente serão desenvolvidos os tópicos relacionados com as representações de Fourier, aqui consideradas como essenciais para compreensão e relacionamento dos conceitos físicos com os fenômenos a eles correspondentes.

No desenvolvimento desta teoria é importante destacar, inicialmente, as seguintes características:

- Na analise de SLIT's, a representação de uma função *f(t)* no domínio da freqüência deverá ser obtida através de um *Operador Linear*;
- A teoria proposta por Fourier para representações de sinais e sistemas no domínio da freqüência é um marco muito importante na fundamentação matemática para análise de funções dinâmicas.

As representações de Fourier tiveram origem nos trabalhos de Jean Baptista Joseph Fourier que viveu na França de 1768 a 1830, onde teve também destacada participação política. Dentre seus primeiros e principais trabalhos destacam-se o anuncio de suas idéias sobre séries temporais em 1802 e o trabalho publicado em 1822 sobre séries harmônicas aplicadas à difusão do calor. Como ilustração de sua trajetória serão citados alguns fatos marcantes da vida deste cientista:

- *Como político:*
  - Na Revolução Francesa quase foi para a guilhotina;
  - Depois se associou a Napoleão;
  - Foi prefeito de Grenoble em 1802.
- *Como cientista:*
  - Anuncio de idéias sobre séries temporais em 1802;
  - Artigo relativo Séries harmônicas aplicadas à difusão do calor (1807);
  - Artigo anterior só foi publicado em 1822 (Revisores: Monge, Lacroix, Laplace e Lagrange).

A biografia de Fourier é riquíssima em contribuições científicas, sobretudo na análise de sinais e sistemas no domínio da freqüência. Assim sendo, será introduzida a formulação matemática, aqui definida como "Representações de Fourier".

II.2 – Representações de Fourier

Neste item serão mais bem fundamentados alguns conceitos importantes para a análise de sistemas no domínio da freqüência. Uma das ferramentas mais poderosas de análise de sistemas lineares é a sua representação matemática no domínio da freqüência. Então, para que os conceitos físicos sejam corretamente transportados para a teoria matemática, serão enunciadas primeiramente as representações de Fourier para sinais e sistemas.

O conceito de resposta em freqüência, como enunciado no capítulo anterior, é uma operação linear dinâmica. De uma forma genérica, uma operação linear pode ser interpretada matematicamente pela seguinte expressão:

$$A\,x_i = \lambda_i\,x_i$$

Onde:

- ***A***: imagem do operador linear;
- λ_i , x_i: respectivamente, auto-valor e auto-vetor de ***A***.

Este conceito transportado para o domínio da freqüência e aplicado a sinais e sistemas pode ser descrito matematicamente pela expressão:

$$\begin{cases} y(t,n) = H\{u(t,n)\} \\ u(t,n) = e^{jwt},\ e^{j\Omega n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(t) = e^{jwt}\, H(jw) \\ y(n) = e^{j\Omega n}\, H(e^{j\Omega}) \end{cases}$$

Onde:

- $u(t) = e^{jwt}; \quad u(n) = e^{j\Omega n}$: sinais de entrada;
- $H(jw),\ H(e^{j\Omega})$: imagens dos operadores lineares;
- $e^{jwt},\ e^{j\Omega n}$: as respectivas auto-funções de *H.*

Então, supondo-se que um sinal de entrada genérico seja escrito pela expressão:

$$\begin{cases} u(t) = \sum_{i=1}^{M} a_i . e^{j w_i t} \\ u(n) = \sum_{i=1}^{M} a_i\, e^{j\Omega_i n} \end{cases}$$

O sinal de saída será então representado pela expressão:

$$\begin{cases} y(t) = \sum_{i=1}^{M} a_i\, e^{j w_i t}\ \ H(j\, w_i) \\ y(n) = \sum_{i=1}^{M} a_i\, e^{j\Omega_i n}\ \ H(e^{j\Omega_i}) \end{cases}$$

Cujas principais características podem ser assim interpretadas:

➔ O sinal ***y(t, n)*** está sendo escrito, no domínio da freqüência, como uma superposição ponderada de senoides complexas;

➔ $a_i\, H(jw_i)$ Representa o peso ou ponderação com que a componente senoidal de freqüência w_i entra na composição do sinal ***y(t)*** (análogo para o caso discreto).

Além do mais, as representações de sinais genéricos no domínio da freqüência por Fourier são assim classificadas:

- ***Série de Fourier:*** representação, no domínio da freqüência, de sinais periódicos contínuos e discretos no tempo***;***
- ***Transformada de Fourier:*** representação, no domínio da freqüência, de sinais genéricos contínuos e discretos no tempo.

Inicialmente serão enunciadas as representações de Fourier para sinais periódicos no tempo contínuo e no tempo discreto. Na seqüência, serão enunciadas as representações de sinais não-periódicos e em seguida, a relação existente entre estas representações.

II.3 – Série de Fourier de Sinais Discretos no Tempo (SFD)

II.3.1 - Definição

Um sinal periódico e genérico pode ser escrito por uma função aproximada e constituída por uma combinação linear das múltiplas harmônicas, também conhecida como autofunções, como descrito no item anterior, da seguinte maneira:

$$\widehat{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{j\Omega_k n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{j(k\Omega_o)n}$$

Onde:

$\widehat{x}(n)$: é a representação aproximada de *x(n)****;***

$\Omega_o = 2\pi / N$: freqüência fundamental de *x(n)****;***

$k\Omega_o$: freqüência da harmônica ***k***, sendo $k \in \boldsymbol{Z}$;

$X(k)$: ponderação da harmônica ***k.***

A partir da expressão acima, pode-se fazer algumas considerações preliminares:

➔ Como as auto-funções discretas são limitadas em ***N*** termos, a função $\widehat{x}(n)$ é uma série finita de ***N*** termos consecutivos, ou seja:

$$\widehat{x}(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} X(k)\, e^{jk\Omega_o n}$$

➔ A construção da série $\widehat{x}(n)$ garante que todas suas componentes sejam periódicas e de período ***N.***

Partindo-se do pré-suposto que $\widehat{x}(n)$ é uma representação de *x(n)* e definindo-se o erro médio quadrático, como um sinal de energia, pela expressão:

$$\mathrm{E}_D = \frac{1}{N}.\sum_{n=\langle N\rangle}\left|x(n)-\widehat{x}(n)\right|^2 = \frac{1}{N}.\sum_{n=\langle N\rangle}\left|x(n)-\sum_{k=\langle N\rangle}X(k)\,e^{jk\Omega_o n}\right|^2$$

Então, o sinal *x(n)* pode ser descrito pela seguinte expressão:

$$x(n) = \underset{\mathrm{E}_D\to 0}{Lim}\,\widehat{x}(n)$$

O problema a ser resolvido passa a ser o cálculo de $X(k)$ que minimiza o erro. Como a série que representa $\widehat{x}(n)$ é limitada e a partir de manipulações matemáticas é possível calcular $X(k)$ que anula $\mathbf{E_D}$, cuja solução é dada pela seguinte expressão:

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}x(n)\,e^{-j(k\Omega_0)\,n}$$

Assim sendo, a representação de um sinal discreto periódico e genérico é definida como Série de Fourier Discreta (SFD):

$$x(n) \quad \Leftrightarrow \quad X(k)$$

$$\Updownarrow$$

$$x(n) = \sum_{k=\langle N\rangle}X(k)\;e^{jk\Omega_o n} \quad \Leftrightarrow \quad X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}x(n)\;e^{-j(k\Omega_0)\,n}$$

Onde:

➔ O sinal $x(n)$, por definição:

- Periodicidade: é um sinal periódico de período ***N***;

- Continuidade: é um sinal discreto no tempo na variável independente *n*;

- As componentes da representação de $x(n)$ constituem uma série finita de ***N*** termos periódicos e de mesmo período*;*

➔ $X(k)$ é a representação no domínio da freqüência do sinal $x(n)$, em que:

- Continuidade: é um sinal discreto, pois só existe nos instantes *k* inteiros;
- Periodicidade: é um sinal periódico, pois $e^{-jk\Omega_0}$ é uma função periódica de período ***N***;
- $X(k)$, na expressão de $x(n)$ é a ponderação da harmônica *k****;***

➔ Pelo fato da Série de Fourier para sinais discretos ser uma função discreta de termos finitos, tanto no domínio do tempo como no da freqüência, ela é calculada com exatidão por computador;

II.3.2 - Aplicação da Série de Fourier na descrição de SLIT' s Discretos

Seja um sinal qualquer discreto e periódico no domínio do tempo. Então este sinal pode ser expresso pela SFD, ou seja:

$$u(n) = \sum_{k=\langle N\rangle} U(k)\, e^{jk\Omega_0 n}$$

Supondo-se que este sinal seja a entrada de um SLIT, então seu sinal de saída terá a seguinte representação:

$$y(n) = H\{u(n)\} = h(n) * u(n)$$

Então, conclui-se que o sinal de saída *y(n)* terá a mesma natureza do sinal de entrada *u(n)* (periódico e discreto), qual seja:

$$y(n) = \sum_{k=\langle N\rangle} Y(k)\, e^{jk\Omega_0 n}$$

A partir da convolução discreta o sinal de saída *y(n)* também pode ter a seguinte representação:

$$y(n) = H\{u(n)\} = H\left\{ \sum_{k=\langle N\rangle} U(k)\ e^{jk\Omega_0 n} \right\}$$

$$= \sum_{k=\langle N\rangle} U(k)\ H\{e^{jk\Omega_0 n}\} = \sum_{k=\langle N\rangle} U(k)\ H\{e^{j\Omega}\}\, e^{jk\Omega_0 n}$$

Então, pelas duas últimas expressões, a Série de Fourier Discreta de um sinal de saída de um SLIT também pode ser representada pela seguinte expressão:

$$Y(k) = H(e^{j\Omega})\ \ U(k)$$

Analisando as principais características desta expressão, é importante fazer os seguintes destaques:

➔ ***Convolução*** no domínio do tempo resulta em ***Modulação*** no domínio da freqüência;

➔ O sinal *y(n)* possui as mesmas características de *u(n),* quais sejam:

- Continuidade: é um sinal discreto na variável independente *n* inteira;
- Periodicidade: a convolução de um sinal periódico com um outro sinal qualquer, é um sinal periódico;

➔ O sinal *Y(k)* possui as mesmas características de *U(k),* quais sejam:

- Continuidade: confirmação de que é um sinal discreto no domínio da frequência na variável independente *n* inteira;
- Periodicidade: confirmação de que é um sinal periódico, pois $e^{-j.\Omega_0.k}$ é uma função periódica de período ***N.***

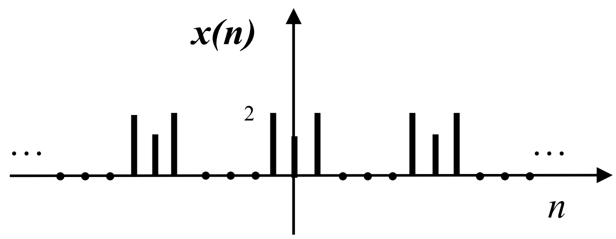
Exemplos:

1) Exemplo 3.1, pp.171: Dado $x(n) = \cos(\frac{\pi}{8}n + \phi)$ calcule *X(k).*

2) Exemplo 3.2 e 3.3, pp.172 / 175;

3) Verificar funções como esta em: **http://www.jhu.edu/~signals/index.html**;

4) Exercício 3.2, pp. 174: Dado o gráfico da figura abaixo, calcule *X(k)*.



5) Exemplo 3.4, pp. 177: Aplicação em medicina – Sinais de um eletrocardiograma.

II.4 – Série de Fourier de Sinais Contínuos no Tempo

II.4.1 - Definição

Como hipótese, seja considerado que um sinal contínuo no tempo e periódico *x(t)* cuja energia em um período seja finita (sinal de energia), ou seja, *x(t)* é um sinal integrável:

$$\int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 .dt < \infty$$

Este sinal então, pode ser escrito por uma função aproximada e constituída por combinação linear das múltiplas harmônicas (autofunções), da seguinte maneira:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-M}^{M} X(k)\, e^{j\,k\,w_o\,t}$$

Onde:

- $\hat{x}(t)$: é a representação aproximada de *x(t)*;
- $w_o = 2.\pi / T$: freqüência fundamental de *x(t)*;
- $k\,w_o$: freqüência da harmônica $k \in \mathbf{Z}$;
- *X(k)*: ponderação da harmônica *k*;
- A série numérica possui 2*M*+1 termos;
- A construção da série $\hat{x}(t)$ garante que todas suas componentes sejam periódicas e de mesmo período fundamental *T* do sinal *x(t)*.

Exemplo - Funções aproximadas: Figura 3.12, pp.184.

Seja então definida a função erro de aproximação entre $\hat{x}(t)$ e $x(t)$ como:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) = x(t) - \sum_{k=-M}^{M} X(k)\; e^{j\,k\,w_o\,t}$$

Para analisar a convergência do sinal $\widehat{x}(t)$ para $x(t)$ será utilizado o critério da energia do sinal erro em um período, ou seja:

"Encontre o valor de X(k) que minimize o erro médio quadrático (MSE), ao longo de um período, dado pela expressão:

$$E_c = \frac{1}{T}.\int_{\langle T\rangle} \left| x(t) - \widehat{x}(t) \right|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{\langle T\rangle} \left| x(t) - \sum_{k=-M}^{M} X(k)\ e^{j\,k\,w_o\,t} \right|^2 dt \text{ "}$$

É importante observar que o fato de E_c ser nulo não significa que $x(t) = \widehat{x}(t)$, mas simplesmente que a energia existente na função erro é nula. A convergência ponto a ponto só pode ser garantida se o sinal $x(t)$ satisfaz as condições de Dirichlet:

- Ser ilimitado, então, generalizando, faz-se $M \to \infty$;
- Ter um número finito de máximos e mínimos locais num período;
- Ter um número finito de descontinuidades num período.

Este fato torna a igualdade verdadeira para uma ampla classe de sinais existentes na natureza e, como as auto-funções contínuas são ilimitadas, a função $\widehat{x}(t)$ pode ser escrita como uma série de infinitos termos:

$$x(t) = \lim_{M\to\infty} \widehat{x}(t) = \sum_{k=-M}^{M} X(k)\ e^{j(k\,w_o)\,t}$$

Substituindo esta expressão na função energia e a partir de manipulações matemáticas é possível calcular *X(n)* que anula E_c,, cuja solução é dada pela seguinte expressão:

$$X(k) = \frac{1}{T} \int_{\langle T\rangle} x(t)\ e^{-j(k\,w_0)\,t}\ dt$$

Conclui-se então que a representação de um sinal contínuo e periódico pela Série de Fourier Contínua (SFC) é dada pela expressão:

$$x(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(k)$$

$$\Updownarrow$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)\, e^{j(k\,w_o)\,t} \quad \Leftrightarrow \quad X(k) = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t)\, e^{-j(k\,w_o)\,t}\; dt$$

Onde:

➔ O sinal *x(t)*, por definição:

- Periodicidade: é um sinal periódico de período *T*;
- Continuidade: é um sinal contínuo no tempo na variável independente *t*;
- As componentes da representação de *x(t)* constituem uma série infinita de termos periódicos e de mesmo período *T;*

➔ *X(k)* é um sinal no domínio da freqüência:

- Continuidade: é um sinal discreto, pois só existe nos instantes *n* inteiros;
- Periodicidade: como todas as componentes de *X(n)* são diferentes entre si, então é um sinal não-periódico;
- *X(k)* , na expressão de *x(t),* é a ponderação da harmônica *k*, qual seja:

    k =0 : componente contínua com ponderação $X(0) = \frac{1}{T}.\int_{\langle T \rangle} x(t).dt$, que é o valor médio em um período;

    k =1 : primeira harmônica com ponderação *X(1);*

    k =m : harmônica *m,* com ponderação *X(m);*

II.4.2 - Aplicação da Série de Fourier na descrição de SLIT' s Contínuos

A relação entrada / saída de um SLIT quando submetido a uma harmônica, definido no capítulo I como resposta em freqüência, é dada pela expressão:

$$y(t) = H\{u(t)\} = H\{e^{jwt}\} = e^{jwt}\ H(jw)$$

Sabendo-se também que o sinal de saída de um SLIT quando submetido a um sinal de entrada periódico é também periódico, estes dois sinais podem ser representados pela SFC:

$$\begin{cases} u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(k)\ e^{jkw_0 t} \\ y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(k)\ e^{jkw_0 t} \end{cases}$$

A partir das duas últimas expressões:

$$y(t) = H\{u(t)\} = H\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} U(k)\ e^{jkw_0 t}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(k)\ H\{e^{jkw_0 t}\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} U(k)\ H\{jw\}\ e^{jkw_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(k)\ e^{jkw_0 t}$$

Então:

$$Y(k) = H(jw)\ U(k)$$

Analisando as principais características desta expressão é importante fazer os seguintes destaques:

➔ ***Convolução*** no domínio do tempo resulta em ***Modulação*** no domínio da freqüência;

➔ *Y(k)* é um sinal no domínio da freqüência com as seguintes características:

- Continuidade: confirmação de que é um sinal discreto na variável independente *k* inteira, já que *U(k)* é um sinal discreto;
- Periodicidade: confirmação de que é um sinal não-periódico, pois *U(k)* é um sinal não-periódico.

Exemplos:

1) Exemplo 3.5, pp.180: $x(t) = 3.\cos(\frac{\pi}{2}.t + \frac{\pi}{4})$;

2) Exercício 3.3, pp.181: $x(t) = 2.\text{sen}(2\pi.t - 3) + \text{sen}(6\pi.t)$;

3) Exemplo 3.6, pp. 181.

$$X(k) = \frac{1}{T}\int_{\langle T \rangle} x(t)\, e^{-j\,k\,w_0\,t}\; dt = \frac{1}{T}\int_{-T_s}^{T_s} e^{-j\,k\,w_0\,t}\; dt$$

$$= \frac{-1}{j\,k\,T\,w_0}\, e^{-j\,k\,w_0\,t}\Bigg]_{-T_s}^{T_s} = \frac{2sen(k\,T_s\,w_0)}{k\,T\,w_0};\quad k \neq 0$$

$$X(0) = \frac{1}{T}\int_{-T_s}^{T_s} dt = \frac{2T_s}{T}$$

- Ver as figuras 3.9 e 3.10;
- Analisar as condições: $\begin{cases} T_s \to T \\ T_s \to 0 \end{cases}$

4) Exemplo 3.8, pp. 186: Calcular a série de Fourier da resposta em freqüência da saída de um circuito RC.

Dado que: $Y(k) = U(k)\; H(j\,w)$

- Para ***u(t)*** uma onda quadrada:

$$U(k) = \frac{2\;sen(k\,T_s\,w_0)}{k\,T\,w_0};\qquad k \neq 0$$

$$U(0) = \frac{1}{T}\int_{-T_s}^{T_s} dt = \frac{2\,T_s}{T};\quad k = 0$$

- Para ***H(jw)*** de um circuito RC: $$H(jw) = \frac{1}{1 + j\,w\,RC}$$

- Então ***Y(n)***:

$$\begin{cases} Y(k) = \left[\dfrac{1}{1 + j\,w\,RC}\right]\left[\dfrac{2\,sen(k\,T_s\,w_0)}{k\,T\,w_0}\right]; & k \neq 0 \\ Y(0) = \dfrac{2T_s}{T} \end{cases}$$

II.5 – Transformada de Fourier de Sinais Discretos

II.5.1 - Definição

Seja $\bar{x}(k)$ um sinal discreto e periódico no domínio do tempo, de período fundamental *N*, então ele pode ser descrito por uma função constituída por combinação linear das múltiplas harmônicas, definida como Série de Fourier Discreta (SFD) como:

$$\begin{cases} \bar{x}(n) = \displaystyle\sum_{k=\langle N\rangle} \bar{X}(k)\; e^{j\,k\,\Omega_o\,n} \\ \bar{X}(k) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{n=\langle N\rangle} \bar{x}(n)\; e^{-j\,k\,\Omega_0\,n} \end{cases}$$

Suponha-se que um sinal não-periódico e discreto no domínio do tempo $x(n)$ possa ser escrito por uma função aproximada e constituída por um único período de um sinal discreto e periódico $\bar{x}(n)$ e definido da seguinte forma:

$$x(n) = \begin{cases} \bar{x}(n); & |n| \leq \langle N\rangle \\ 0; & |n| > \langle N\rangle \end{cases}$$

Ou alternativamente como:

$$x(n) = \lim_{N\to\infty} \bar{x}(n)$$

A partir destas hipóteses pode-se fazer o seguinte desenvolvimento matemático:

$$x(n) = \lim_{N\to\infty} \bar{x}(n) = \lim_{N\to\infty} \left\{ \sum_{k=\langle N\rangle} \bar{X}(k)\ e^{j\,k\,\Omega_0\,n} \right\} = \lim_{N\to\infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N\rangle} \left[N\,\bar{X}(k) \right] e^{j\,k\,\Omega_0\,n} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \left\{ \lim_{\Omega_0 \to 0} \sum_{k=\langle N\rangle} \left[N\,\bar{X}(k) \right] e^{j\,k\,\Omega_0\,n}\ \Omega_0 \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi\rangle} \left[X(e^{j\Omega}) \right] e^{j\,k\,\Omega_0\,n}\ d\Omega$$

Onde:

$$\begin{cases} N \to \infty \\ ou \\ \Omega_0 \to 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Omega_0 \to d\Omega \\ \sum_{k\to\langle N\rangle} \Omega_0 \to \int_{\langle 2\pi\rangle} d\Omega \\ \lim_{N\to\infty} \left\{ N\,\bar{X}(k) \right\} = X(e^{j\,\Omega}) \end{cases}$$

Analogamente, pode-se fazer o mesmo desenvolvimento matemático para a representação do sinal no domínio da freqüência, ou seja:

$$X(e^{j\Omega}) = \lim_{N\to\infty} \left\{ N\,\bar{X}(k) \right\} = \lim_{N\to\infty} \left\{ N \left[\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} \bar{x}(n)\ e^{-j\,k\,\Omega_0\,n} \right] \right\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\ e^{-j\,(k\,\Omega_0)\,n}$$

A representação de Fourier para sinais discretos e não-periódicos no tempo, definida como Transformada de Fourier Discreta (TFD), é escrita da seguinte forma:

$$x(n) \qquad \Leftrightarrow \qquad X(e^{j\Omega})$$

$$\Updownarrow$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi\rangle} X(e^{j\Omega})\ e^{-j\,(k\,\Omega_0)\,n}\ d\Omega \quad \Leftrightarrow \quad X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\ e^{-j\,(k\,\Omega_0)\,n}$$

Considerações:

➔ O sinal ***x(n)***, por definição:

- Continuidade: é um sinal discreto no domínio do tempo;
- Periodicidade: um sinal não-periódico;

➔ O sinal $X(e^{j.\Omega})$, pela expressão acima, é um sinal no domínio da freqüência:

- Continuidade: é um sinal contínuo na variável independente $\Omega \in \boldsymbol{R}$;
- Periodicidade: é um sinal periódico, pois $e^{-j\Omega_0 k}$ é uma função periódica de período ***N***;
- Pelo fato de ser periódico, seu cálculo precisa ser feito somente em um período e então repetido de $-\infty \;\; a \;\; \infty$.

Exemplos:

II.5.2 - Aplicação da Transformada de Fourier em SLIT' s Discretos

O objetivo deste item é desenvolver a relação entrada-saída de um SLIT, quando este sistema é excitado por um sinal discreto e não-periódico no domínio do tempo. Neste caso, o sinal de excitação ou entrada do sistema pode ser expresso pela TFD, ou seja:

$$u(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} U(e^{j\Omega})\, e^{j(n\Omega_0)n}\, d\Omega$$

E o sinal de saída terá a seguinte expressão:

$$y(n) = H\{u(n)\} = h(n) * u(n)$$

Como o sinal de saída é a resultante da convolução entre o sinal de entrada, que é não-periódico, e a resposta ao impulso do SLIT, naturalmente também não periódica, então *y(n)* será um sinal não-periódico e, portanto, também poderá ser expresso pela TFD, ou seja:

$$y(n) = h(n) * u(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} Y(e^{j\Omega})\, e^{j\,(k\Omega_0)n}\, d\Omega$$

A expressão do sinal de saída também pode ser desenvolvida utilizando a definição da resposta em frequência, ou seja:

$$y(n) = H\{u(n)\} = H\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} U(e^{j\Omega})\, e^{j(k\Omega_0)n}\, d\Omega \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} U(e^{j\Omega})\, H\left\{e^{j(k\Omega_0)n}\right\} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} U(e^{j\Omega})\, H(e^{j\Omega})\, e^{j(k\Omega_0)n}\, d\Omega$$

A condição para que estas duas últimas expressões sejam idênticas ponto a ponto é que:

$$y(n) = h(n) * u(n) \quad \Rightarrow \quad Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})\, U(e^{j\Omega})$$

Então, a Transformada de Fourier Discreta de um sinal de saída discreto e não-periódico de um SLIT pode ser representada pela expressão acima ou por sua própria definição, qual seja:

$$Y(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j(k\,w_0)t}\, dt$$

Análise dos resultados:

➔ ***Convolução***, no domínio do tempo, produz ***Modulação*** no domínio da freqüência.

➔ *y(n)* é um sinal no domínio do tempo:

- Continuidade: é um sinal discreto;
- Periodicidade: é um sinal não-periódico;

➔ $Y(e^{j\Omega})$ é um sinal no domínio da freqüência:

- Continuidade: é um sinal contínuo na variável independente $\Omega \in \Re$;
- Periodicidade: é um sinal periódico, pois $e^{-j(k\Omega_0)}$ é uma função periódica de período ***N.***

Exemplos:

II.6 – Transformada de Fourier de Sinais Contínuos

II.6.1 - Definição

Um sinal periódico e contínuo no domínio do tempo $\bar{x}(t)$ pode ser representado pela Série de Fourier Contínua (SFC) como:

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{X}(k)\ e^{j\,k\,w_o\,t} \\ \bar{X}(k) = \dfrac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \bar{x}(t)\ e^{-j\,k\,w_o\,t}\ dt \end{cases}$$

Um sinal não-periódico e contínuo no domínio do tempo $x(t)$ pode ser escrito por uma função aproximada e constituída por um único período de um sinal contínuo e periódico $\bar{x}(t)$ e definido da seguinte forma:

$$x(t) = \begin{cases} \bar{x}(t); & |t| \le \langle T \rangle \\ 0; & |t| > \langle T \rangle \end{cases}$$

Ou alternativamente por:

$$x(t) = \lim_{T \to \infty} \bar{x}(t)$$

A figura a seguir ilustra esta consideração.

Figura II. xx

A partir destas hipóteses pode-se fazer o seguinte desenvolvimento matemático:

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} \bar{x}(t) = \lim_{T\to\infty}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{X}(k)\ e^{j(k\,w_0)\,t}\right\} = \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[T\,\bar{X}(k)\right] e^{j(k\,w_0)\,t}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\lim_{w_0\to 0}\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jw)\ e^{j(k\,w_0)\,t}\ w_0\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\ e^{j(k\,w_0)\,t}\ dw$$

Onde:

$$\begin{cases} T\to\infty \\ ou \\ w_0\to 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} w_0 \to dw \\ \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} w_0 \ \to \int_{-\infty}^{\infty} dw \\ \displaystyle\lim_{T\to\infty}\left\{T\,\bar{X}(k)\right\} = X(jw) \end{cases}$$

Desenvolvimento matemático análogo será feito para a representação do sinal no domínio da freqüência:

$$X(jw) = \lim_{T\to\infty}\left\{T\,\bar{X}(k)\right\} = \lim_{T\to\infty}\left\{\int_{\langle T\rangle} \bar{x}(t)\ e^{-j(k\,w_0)\,t}\ dt\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ e^{-j(k\,w_0)\,t}\ dt$$

A representação de Fourier para sinais contínuos e não-periódicos no domínio do tempo, definida como Transformada de Fourier Contínua (TFC), é descrita escrita pelas seguintes expressões:

$$x(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(jw)$$

$$\Updownarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\ e^{j(k\,w_0)\,t}\ dw \quad \Leftrightarrow \quad X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ e^{-j(k\,w_0)\,t}\ dt$$

➔ O sinal $x(t)$ por definição:

- Periodicidade: é um sinal não-periódico;

- Continuidade: é um sinal contínuo no tempo na variável independente *t*;

➔ $X(jw)$, pela expressão acima, é um sinal no domínio da freqüência:

- Continuidade: é um sinal contínuo na variável independente $w \in \Re$;
- Periodicidade: é um sinal não-periódico, pois a integral calculada é, em princípio, diferente em cada instante;

➔ A existência da representação em TFC é condicionada á integrabilidade do sinal $x(t)$, ou seja: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \; dt < \infty$.

Exemplos:

II.6.2 - Aplicação da Transformada de Fourier em SLIT' s Contínuos

O objetivo deste item é desenvolver a relação entrada-saída de um SLIT, quando este sistema é excitado por um sinal contínuo e não-periódico no domínio do tempo. Neste caso, o sinal de excitação ou entrada do sistema pode ser expresso pela TFC, ou seja:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(jw)\, e^{jwt} \; dw$$

E o sinal de saída terá a seguinte expressão:

$$y(t) = H\{u(t)\} = h(t) * u(t)$$

Como o sinal de saída é a resultante da convolução entre o sinal de entrada, que é não-periódico, e a resposta ao impulso do SLIT, naturalmente também não periódica, então *y(t)* será um sinal não-periódico e, portanto, também poderá ser expresso pela TFC, ou seja:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(jw)\, e^{jwt}\, dw$$

A expressão do sinal de saída também pode ser desenvolvida utilizando a definição da resposta em frequência, ou seja:

$$y(t) = H\{u(t)\} = H\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(jw)\, e^{jkw_0 t}\, dw \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(jw)\, H\{e^{jkw_0 t}\}\, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(jw)\, H(jw)\, e^{jkw_0 t}\, dw$$

A condição para que estas duas últimas expressões sejam idênticas ponto a ponto é que:

$$y(t) = h(t) * u(t) \quad \Rightarrow \quad Y(jw) = H(jw)\, U(jw)$$

Então, a Transformada de Fourier Contínua de um sinal de saída contínuo e não-periódico no tempo de um SLIT pode ser representada pela expressão acima ou por sua própria definição, qual seja:

$$Y(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-jwt}\, dt$$

Análise dos resultados:

➔ ***Convolução***, no domínio do tempo, produz ***Modulação*** no domínio da freqüência.

➔ *y(t)* é um sinal no domínio do tempo:

- Continuidade: é um sinal contínuo;
- Periodicidade: é um sinal não-periódico;

➔ $Y(jw)$ é um sinal no domínio da freqüência:

- Continuidade: é um sinal contínuo na variável independente $w \in \Re$;

- Periodicidade: é um sinal não-periódico, pois a integral calculada é, em princípio, diferente em cada instante;

Exemplos:

II.7– Relação entre Transformadas e Séries

A Transformada de Fourier (TF) é uma representação de sinais genéricos no tempo, em princípio não-periódicos, enquanto a Série de Fourier (SF) é uma representação apenas de sinais periódicos no tempo.

Neste item serão estabelecidas as relações existentes entre a TF e a ST, ou seja, como representar sinais periódicos no tempo pela TF ?.

II.7.1 - Sinais Discretos no Tempo

Inicialmente será feita a análise para sinais discretos no tempo.

A Transformada de Fourier Discreta é dada pelas expressões:

$$\begin{cases} x(n) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\langle 2\pi \rangle} X(e^{j\Omega})\ e^{j\,\Omega\,n}\ d\Omega \\ X(e^{j\Omega}) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\ e^{-j\,\Omega\,n} \end{cases}$$

Sejam os seguintes exemplos:

$$\begin{cases} X(e^{j\Omega}) = 2\pi\,\delta(\Omega) & \Rightarrow \quad x(n) = 1 \\ X(e^{j\Omega}) = 2\pi\,\delta(\Omega - \Omega_0) & \Rightarrow \quad x(n) = e^{j\,\Omega_0\,n} \end{cases}$$

A partir do princípio da linearidade, pode-se também deduzir que:

$$X(e^{j\Omega}) = 2\pi\left\{\alpha_0\,\delta(\Omega) + \alpha_1\,\delta(\Omega - \Omega_0)\right\} \quad \Rightarrow \quad x(n) = \alpha_0 + \alpha_1\,e^{j\,\Omega_0\,n}$$

Então, pela generalização desta expressão tem-se que:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\,e^{j\,k\,\Omega_0\,n} \qquad \Rightarrow \qquad X(e^{j\Omega}) = 2\,\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\,\delta(\Omega - k\,\Omega_0)$$

Através das análises já realizadas neste item e considerando que:

- A expressão anterior generalizada;
- O objetivo é representar sinais periódicos no tempo através da Transformada de Fourier;
- A representação de sinais periódicos é feita através da Série de Fourier pela seguinte expressão:

$$x(n) = \sum_{k=\langle N\rangle} X(k)\,e^{j\,k\,\Omega_o\,n} \qquad \Leftrightarrow \qquad X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x(n)\,e^{-j\,(k\,\Omega_0)\,n} \quad ;$$

O problema a ser resolvido pode ser formulado da seguinte maneira:

"Dada a relação $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\,e^{j\,k\,\Omega_0\,n} \quad \Rightarrow \quad X(e^{j\Omega}) = 2\,\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\,\delta(\Omega - k\,\Omega_0)$, calcule a expressão da Transformada de Fourier de $x(n)$ que relacione $X(e^{j\Omega})$ com $X(k)$ "

A partir das considerações apresentadas anteriormente e comparando as expressões de $x(n)$ dadas pela Série de Fourier e pela combinação linear de termos em $e^{j\,k\,\Omega_0\,n}$, deduz-se que $\alpha_k \equiv X(k)$. Então a Transformada de Fourier de um ***Sinal Periódico no Tempo Discreto*** será dada por:

$$\begin{cases} x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)\ e^{j\,k\,\Omega_0\,n} \\ X(e^{j\Omega}) = 2\,\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)\ \delta(\Omega - k\ \Omega_0) \end{cases}$$

A TFD de um ***Sinal Periódico e Discreto no Tempo*** é um ***Sinal Periódico e Discreto na Freqüência.***

Exemplos:

II.7.2 - Sinais Contínuos no Tempo:

A Transformada de Fourier Contínua é dada pela expressão:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(\,jw)\, e^{j\,k\ w_o\,t}\ dw \\ X(\,jw) = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\,k\,w_o\,t}\ dt \end{cases}$$

Calculando-se a TFC inversa de um pulso, como no item anterior, tem-se que:

$$X(\,jw) = 2\,\pi\ \delta(w - w_0) \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{j\,w_0\,t}$$

Então, a generalização deste cálculo através da aplicação do princípio da superposição é dada por:

$$X(\,jw) = 2\,\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\ \delta(w - w_0) \quad \Rightarrow \quad x(t) = ?$$

Sabendo-se que a Série de Fourier de um sinal contínuo e periódico no domínio do tempo é dada por:

$$\begin{cases} x(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)\, e^{j k w_o t} \\ X(k) = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{\langle T \rangle} x(t)\ e^{-j k w_0 t}\ dt \end{cases}$$

O problema a ser resolvido pode então ser formulado da seguinte maneira:

“Dada a relação $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\, e^{j k \Omega_0 t} \quad \Rightarrow \quad X(jw) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\, \delta(w - k\, w_0)$, calcule a expressão da Transformada de Fourier de $x(t)$ que relacione $X(jw)$ com $X(k)$ ”

Após algumas deduções tem-se que a Transformada de Fourier de um ***Sinal Periódico no Tempo Contínuo***, será dada por:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{j k w_o t} \quad \Rightarrow \quad X(jw) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)\ \delta(w - k\, w_0)$$

A Transformada de Fourier de um ***Sinal Periódico e Contínuo no Tempo*** é um ***Sinal Não-Periódico e Discreto na Freqüência.***

Exemplos:

II.8 – Propriedades das Representações de Fourier

Todas as propriedades aplicáveis a funções lineares são válidas para as representações de Fourier. Neste item serão destacadas algumas das propriedades mais importantes, no sentido de consolidar os conceitos envolvidos no estabelecimento das representações de Fourier.

Várias das propriedades que serão exploradas neste item são comuns às 4 representações então, será usada a seguinte metodologia:

- Analisar a propriedade utilizando uma nomenclatura genérica assim definida:

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}\{x(t,\ n)\} = X(k,\ jw,\ e^{j\Omega}) \\ \\ \boldsymbol{F^{-1}}\{X(k,\ jw,\ e^{j\Omega})\} = x(t,\ n) \end{cases}$$

- Analisar a propriedade para uma das representações e generalizar para as demais quando todas as representações tiverem a mesma dedução;
- No caso das deduções não ser comuns às quatro representações, as análises serão feitas individualmente para cada uma delas.

II.8.1 – Linearidade

A propriedade "Linearidade" é inerente às próprias hipóteses que servem de base para as deduções das representações de Fourier e, portanto, é comum a todas elas:

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}\{\alpha\, x_1(t,n) + x_2(t;n)\} = \alpha\, X_1(k,\ jw,\ e^{j\Omega}) + X_2(k,\ jw,\ e^{j\Omega}) \\ \\ \boldsymbol{F^{-1}}\{\alpha\, X_1(k,\ jw,\ e^{j\Omega}) + X_2(k,\ jw,\ e^{j\Omega})\} = \alpha\, x_1(t,n) + x_2(t;n) \end{cases}$$

Esta propriedade é utilizada na solução de funções complexas, quando estas são fracionadas em funções mais simples. Este método é conhecido como fatoração em frações parciais. Deve-se observar, entretanto, que no caso de funções periódicas, o pré-suposto básico é de que as funções parciais possuam o mesmo período fundamental.

Embora esta técnica poça ser aplicada nas 4 representações de Fourier, será apresentado o desenvolvimento somente para as *Transformada de Fourier*, que são os casos mais comuns aplicados a sistemas físicos.

A aplicação desta propriedade será realizada através do cálculo da função no tempo a partir de sua equivalente no domínio da freqüência, também conhecida por *Transformada Inversa de Fourier*, ou seja, dado:

$$X(jw,\, e^{j\Omega})$$

Calcule:

$$x(t,\, n) = \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{-1}}\left\{X(jw,\, e^{j\Omega})\right\} = ?$$

Antes de apresentar as regras básicas de cálculo das Transformadas Inversas de Fourier, será apresentado um exemplo para ilustrar esta operação.

Sejam dadas as seguintes relações de um par de transformadas contínuas:

$$\begin{cases} X_1(jw) = \dfrac{1}{jw+1} & \Rightarrow \quad x_1(t) = e^{-jt}\, u_d(t) \\ X_2(jw) = \dfrac{1}{jw+2} & \Rightarrow \quad x_2(t) = e^{-j2t}\, u_d(t) \end{cases}$$

Então calcule $x(t)$ dado que $X(jw) = \dfrac{1}{(jw+1)(jw+2)}$. O cálculo será feito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x(t) &= \boldsymbol{F}^{-1}\{X(jw)\} = \boldsymbol{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(jw+1)(jw+2)}\right\} = \boldsymbol{F}^{-1}\left\{\frac{1}{jw+1} - \frac{1}{jw+2}\right\} \\ &= \boldsymbol{F}^{-1}\left\{\frac{1}{jw+1}\right\} - \boldsymbol{F}^{-1}\left\{\frac{1}{jw+2}\right\} \\ &= \left\{e^{-j\,t} - e^{-j2\,t}\right\} u_d(t) \end{aligned}$$

A técnica de fatoração de uma função no domínio da freqüência é realizada, normalmente, com base na natureza das raízes do polinômio-denominador desta função. O desenvolvimento desta técnica será apresentado separadamente para sinais contínuos e discretos no tempo.

a) Sinais Contínuos no Tempo

Seja a função racional no domínio da freqüência dada por:

$$X(jw)=\frac{B(jw)}{A(jw)}=\frac{b_{\mathrm{m}}\,(jw)^{\mathrm{m}}+b_{\mathrm{m-1}}\,(jw)^{\mathrm{m-1}}+\cdots+b_1\,(jw)+b_0}{(jw)^{\mathrm{r}}+a_{\mathrm{r-1}}\,(jw)^{\mathrm{r-1}}+\cdots+a_1\,(jw)+a_0}$$
$$=\frac{B(jw)}{\prod_{i=1}^{\mathrm{r}}(jw+d_i)}=\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{r}}\frac{\alpha_i}{(jw+d_i)}$$

Onde:

- *X(jw)* é uma função racional estritamente própria (r > m);
- d_i é uma das r raizes do polinômio *A(jw)*;
- α_i é o coeficiente (resíduo) relacionado à raiz d_i;
- *x(t)* é uma função integrável, ou seja $d_i > 0$.

O método de cálculo dos coeficientes α_i irá depender da natureza das raízes d_i do polinômio *A(jw)*, onde pode-se classificá-las em dois tipos distintos:

- d_i são raízes distintas;
- d_i são raízes múltiplas.

As **raízes distintas** podem ser puramente reais ou complexas conjugadas e neste caso, o cálculo de *x(t)* pode ser realizado da seguinte forma:

$$x(t)=\boldsymbol{F}^{-1}\{X(jw)\}=\boldsymbol{F}^{-1}\left\{\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{r}}\frac{\alpha_i}{(jw+d_i)}\right\}$$
$$=\alpha_1\,\boldsymbol{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(jw+d_1)}\right\}+\alpha_2\,\boldsymbol{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(jw+d_2)}\right\}+\cdots+\alpha_{\mathrm{r}}\,\boldsymbol{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(jw+d_{\mathrm{r}})}\right\}$$
$$=\alpha_1\,\boldsymbol{F}^{-1}\{X_1(jw)\}+\alpha_2\,\boldsymbol{F}^{-1}\{X_2(jw)\}+\cdots+\alpha_{\mathrm{r}}\,\boldsymbol{F}^{-1}\{X_r(jw)\}$$
$$=\left\{\alpha_1\,e^{-d_1 t}+\alpha_2\,e^{-d_2 t}+\cdots+\alpha_r\,e^{-d_r t}\right\}u_d(t)$$

Onde o cálculo dos resíduos é realizado pela seguinte expressão:

$$\alpha_i=\left[X_i(jw)\right]^{-1}\left[X(jw)\right]\Big|_{X_i(jw)=\infty}=\left[jw+d_i\right]\left[X(jw)\right]\Big|_{jw=-d_i}$$

Exemplos:

1) Caso em que as raízes de $A(jw)$ são distintas e puramente reais:

2) Caso em que as raízes de $A(jw)$ são complexas conjugadas:

Utilizando-se o método de cálculo de raízes distintas apresentado anteriormente, será calculada a seguinte função: $F(jw) = \dfrac{2\,jw + 12}{(jw)^2 + 2\,jw + 2}$

i) Fatora-se a função $F(jw)$ *:*

$$F(jw) = \frac{2\,jw+12}{(jw)^2 + 2\,jw + 2} = \frac{2\,jw+12}{(jw+1+j)(jw+1-j)} = \alpha_1 \frac{1}{(jw+1+j)} + \alpha_2 \frac{1}{(jw+1-j)}$$

Como esta função é convergente, existe a Transformada de Fourier.

ii) Calcula-se a função inversa no tempo *f(t):*

$$f(t) = \left\{ \alpha_1\, e^{-(1+j)t} + \alpha_2\, e^{-(1-j)t} \right\} u_d(t)$$

II) Calculam-se os coeficientes ou resíduos:

$$\begin{cases} \alpha_1 = (jw+1+j)\,F(jw)\Big|_{jw=-1-j} = \left.\dfrac{2\,jw+12}{(jw+1-j)}\right|_{jw=-1-j} = 1 - \dfrac{5}{j} \\ \alpha_2 = (jw+1-j)\,F(jw)\Big|_{jw=-1+j} = \left.\dfrac{2\,jw+12}{(jw+1+j)}\right|_{jw=-1+j} = 1 + \dfrac{5}{j} \end{cases}$$

É importante observar que os coeficientes também são complexos conjugados.

iv) Calcula-se então a solução final:

$$f(t) = \left\{ \alpha_1\, e^{-(1+j)t} + \alpha_2\, e^{-(1-j)t} \right\} u_d(t) = \left\{ e^{-t} \left[2\cos t + 10\, sen\, t \right] \right\} u_d(t)$$

No caso de **raízes múltiplas**, o cálculo de *x(t)* é realizado pela fatoração de $X(jw)$ em função da multiplicidade das raízes da seguinte forma:

$$X(jw)=\frac{B(jw)}{A(jw)}=\alpha_1\frac{1}{(jw+d)}+\alpha_2\frac{1}{(jw+d)^2}+\cdots+\alpha_r\frac{\alpha_r}{(jw+d)^r}=\sum_{i=1}^{r}\frac{\alpha_i}{(jw+d)^i}$$

Onde a condição necessária para a existência da Transformada Inversa é garantir a convergência do sinal $x(t)$, ou seja:

- A componente exponencial seja convergente, $d>0$;
- A multiplicidade das raízes de $A(jw)$ seja limitada a r = 2.

Seja dada a função racional $X(jw)$ por:

$$X(jw)=\frac{B(jw)}{A(jw)}=\frac{B(jw)}{(jw+d)^2}$$

A tabela a seguir mostra as funções relacionadas pela Transformada de Fourier a serem utilizadas no exemplo ilustrativo.

$x(t) \quad \forall \; t\geq 0$	$X(s)$
e^{-dt}	$\frac{1}{jw+d}$
$t\,e^{-dt}$	$\frac{1}{(jw+d)^2}$

Fatorando-se agora a função $X(jw)$:

$$X(jw)=\frac{B(jw)}{(jw+d)^2}=\alpha_1\left\{\frac{1}{(jw+d)}\right\}+\alpha_2\left\{\frac{1}{(jw+d)^2}\right\}=\alpha_1\{X_1(jw)\}+\alpha_2\{X_2(jw)\}$$

O cálculo da transformada inversa será então dado por:

$$x(t) = \alpha_1 \boldsymbol{F^{-1}}\left\{\frac{1}{(jw+d)}\right\} + \alpha_2 \boldsymbol{F^{-1}}\left\{\frac{1}{(jw+d)^2}\right\}$$

$$= \left\{ \alpha_1 e^{-d\,t} + \alpha_2\, t\, e^{-d\,t} \right\} u_d(t)$$

Onde os coeficientes serão calculados pelas seguintes expressões:

$$\alpha_2 = \left[X_2(jw)\right]^{-1}\left[X(jw)\right]\Big|_{X_2(jw)=\infty} = (jw+d)^2 X(jw)\Big|_{jw=-d} = B(jw)\Big|_{jw=-d}$$

$$\alpha_1 = \left.\frac{d\left\{\left[X_2(jw)\right]^{-1}\left[X(jw)\right]\right\}}{d(jw)}\right|_{X_2(jw)=\infty} = \left.\frac{d\left\{B(jw)\right\}}{d(jw)}\right|_{jw=-d}$$

Exemplos:

De uma maneira geral, pode-se fazer ainda as seguintes considerações:

- Os coeficientes (resíduos) α_i associados às raízes d_i reais são reais;
- Os coeficientes (resíduos) α_i associados os pares de raízes complexas conjugadas são também complexos conjugados;
- No caso de raízes complexas conjugadas, existe ainda um outro método alternativo de cálculo que será visto posteriormente;
- Quando a função $X(jw)$ não for estritamente própria (r ≤ m), serão utilizadas TF inversas que irão corresponder no tempo a funções impulso e suas respectivas diferenciações.

b) Sinais Discretos no Tempo

Sela a função racional no domínio da freqüência dada por:

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{B(e^{j\Omega})}{A(e^{j\Omega})} = \frac{b_m\,(e^{-j\Omega})^m + b_{m-1}\,(e^{-j\Omega})^{m-1} + \cdots + b_1\,e^{-j\Omega} + b_0}{(jw)^r + a_{r-1}\,(jw)^{r-1} + \cdots + a_1\,(jw) + a_0}$$

$$= \frac{B(e^{j\Omega})}{\prod_{i=1}^{r}(1 + a_i\ e^{-j\Omega})} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i}{(1 + a_i\,e^{-j\Omega})}$$

Onde:

- $X(e^{j\Omega})$ é uma função racional estritamente própria em $e^{-j\Omega}$ ou (r > m);
- a_i é a raiz do polinômio $A(e^{j\Omega})$;
- α_i é o coeficiente (resíduo) relacionado à raiz a_i;
- $x(n)$ é uma função integrável ou seja $|a_i| < 1$.

O método de cálculo dos coeficientes α_i irá depender da natureza das raízes a_i do polinômio $A(e^{j\Omega})$, onde pode-se classificá-las em dois tipos distintos:

- a_i são raízes distintas;
- a_i são raízes múltiplas.

Raízes distintas podem ser puramente reais ou complexas conjugadas e neste caso, o cálculo de *x(n)* pode ser realizado da seguinte forma:

$$x(n) = \boldsymbol{F^{-1}}\left\{X(e^{j\Omega})\right\} = \boldsymbol{F^{-1}}\left\{\sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i}{(1 + a_i\, e^{-j\Omega})}\right\}$$

$$= \alpha_1\, \boldsymbol{F^{-1}}\left\{\frac{1}{(1 + a_1\, e^{-j\Omega})}\right\} + \alpha_2\, \boldsymbol{F^{-1}}\left\{\frac{1}{(1 + a_2\, e^{-j\Omega})}\right\} + \cdots + \alpha_r\, \boldsymbol{F^{-1}}\left\{\frac{1}{(1 + a_r\, e^{-j\Omega})}\right\}$$

$$= \alpha_1\, \boldsymbol{F^{-1}}\left\{X_1(jw)\right\} + \alpha_2\, \boldsymbol{F^{-1}}\left\{X_2(jw)\right\} + \cdots + \alpha_r\, \boldsymbol{F^{-1}}\left\{X_r(jw)\right\}$$

$$= \left\{\alpha_1\,(-a_1)^n + \alpha_2\,(-a_2)^n + \cdots + \alpha_r\,(-a_r)^n\right\} u_d(n)$$

Onde os coeficientes ou resíduos são calculados pela seguinte expressão:

$$\alpha_i = \left[X_i(e^{j\Omega})\right]^{-1} \left[X(e^{j\Omega})\right]\Big|_{X_i(e^{j\Omega})=\infty} = (1 + a_i\, e^{-j\Omega})\; X(e^{j\Omega})\Big|_{e^{-j\Omega}=-1/a_i}$$

Exemplos:

No caso das **raízes de** $A(e^{j\Omega})$ **serem múltiplas**, a função $X(e^{j\Omega})$ pode ser fatorada da seguinte forma:

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{B(e^{j\Omega})}{A(e^{j\Omega})} == \alpha_1 \frac{1}{(1+a\,e^{-j\Omega})} + \alpha_2 \frac{1}{(1+a\,e^{-j\Omega})^2} + \cdots + \alpha_r \frac{1}{(1+a\,e^{-j\Omega})^{r}}$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i}{(1+a\;e^{-j\Omega})^i}$$

Onde a condição necessária para a existência da Transformada Inversa é garantir a convergência do sinal $x(n)$, ou seja:

- A componente exponencial seja convergente, $|a| < 1$;
- A multiplicidade das raízes de $A(e^{j\Omega})$ seja limitada a r = 2.

Seja dada a função racional $X(e^{j\Omega})$ por:

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{B(e^{j\Omega})}{A(e^{j\Omega})} = \frac{B(e^{j\Omega})}{(1+a\,e^{-j\Omega})^2}$$

A tabela a seguir mostra as funções relacionadas pela Transformada de Fourier a serem utilizadas no exemplo ilustrativo.

$x(n) \quad \forall \; n \geq 0$	$X(e^{j\Omega})$
$a^n\, u_d(n); \quad \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1}{1+a\,e^{-j\Omega}}$
$(n+1)\,a^n\, u_d(n); \quad \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1}{(1+a\,e^{-j\Omega})^2}$

Observe que as funções obtidas nesta tabela buscam uma estreita semelhança com aquelas obtidas para a Transformada de Fourier Contínua.

Fatorando-se agora a função $X(e^{j\Omega})$:

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{B(e^{j\Omega})}{(1+a\,e^{-j\Omega})^2} = \alpha_1 \left\{ \frac{1}{(1+a\,e^{-j\Omega})} \right\} + \alpha_2 \left\{ \frac{1}{(1+a\,e^{-j\Omega})^2} \right\}$$
$$= \alpha_1 \left\{ X_1(e^{j\Omega}) \right\} + \alpha_2 \left\{ X_2(e^{j\Omega}) \right\}$$

O cálculo da transformada inversa será então dado por:

$$x(n) = \alpha_1 \boldsymbol{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(1+a\,e^{-j\Omega})} \right\} + \alpha_2 \boldsymbol{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(1+a\,e^{-j\Omega})^2} \right\}$$

$$= \left\{ \alpha_1 (-a)^n + \alpha_2 \; (n+1)(-a)^n \right\} u_d(n)$$

Os coeficientes serão calculados pelo mesmo método utilizado anteriormente para a Transformada Inversa de Fourier Contínua com raízes múltiplas no denominador da função $X(e^{j\Omega})$, ou seja[1]:

$$\begin{cases} \alpha_2 = \left[(1+a\,e^{-j\Omega})^2 \, X(e^{j\Omega}) \right]_{e^{-j\Omega}=-1/a} \\ \\ \alpha_1 = (1/a) \left[\dfrac{\mathbf{d} \left\{ (1+a\,e^{-j\Omega})^2 \, X(e^{j\Omega}) \right\}}{\mathbf{d} \; e^{-j\Omega}} \right]_{e^{-j\Omega}=-1/a} \end{cases}$$

Uma maneira interessante de facilitar o cálculo desta expressão é fazer a seguinte mudança de variável $v = e^{-j\Omega}$.

Exemplos:

[1] A dedução da expressão do cálculo dos coeficientes é apresentada no apêndice A II.1 desde capítulo.

De uma maneira geral pode-se fazer ainda as seguintes considerações:

- Os coeficientes (resíduos) α_i associados às raízes reais são reais;
- Os coeficientes (resíduos) α_i associados aos pares de raízes complexas conjugadas são também complexos conjugados;
- No caso de raízes complexas conjugadas, existe ainda um outro método alternativo de cálculo que será visto posteriormente;
- Quando a função $A(e^{j\Omega})$ é compostas de raízes distintas e múltiplas, aplica-se a associação de ambas as técnicas de cálculo desenvolvidas anteriormente;
- Quando a função $X(e^{j\Omega})$ não for estritamente própria (r ≤ m), serão utilizadas TF inversas que irão corresponder no tempo a funções impulso deslocadas no tempo.

Exemplo:

II.8.2 – Periodicidade e Continuidade das Funções

Nos itens relacionados com o desenvolvimento das representações de Fourier foram bastante exploradas as características de periodicidade e continuidade das funções, sejam no domínio do tempo quanto da freqüência, e as analogias entre estas características. Neste item será feita uma síntese destas características devido à importância conceitual que esta propriedade possui, sobretudo na compreensão e aplicação das representações de Fourier.

<u>Série de Fourier:</u>

$$\begin{cases} x(n) = \displaystyle\sum_{k=\langle N\rangle} X(k)\, e^{jk\Omega_o n} \\ \bullet\ \textit{Discreto} \\ \bullet\ \textit{Periódico} \end{cases} \quad \Leftarrow SFD \Rightarrow \quad \begin{cases} X(k) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{n=\langle N\rangle} x(n)\, e^{-jk\Omega_0 n} \\ \bullet\ \textit{Periódico} \\ \bullet\ \textit{Discreto} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \displaystyle\sum_{=-\infty}^{\infty} X(n).e^{j.n.w_o.t} \\ \bullet\ \textit{Contínuo} \\ \bullet\ \textit{Periódico} \end{cases} \quad \Leftarrow SFC \Rightarrow \quad \begin{cases} X(n) = \dfrac{1}{T}. \displaystyle\int_{\langle T\rangle} x(t).e^{-j.n.w_0.t}.dt \\ \bullet\ \textit{Não} - \textit{periódico} \\ \bullet\ \textit{Discreto} \end{cases}$$

<u>Transformada de Fourier:</u>

$$\begin{cases} x(n) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\langle 2\pi\rangle} \left[X(e^{j\Omega})\right] e^{-j\Omega.n}\, d\Omega \\ \bullet\ \textit{Discreto} \\ \bullet\ \textit{Não} - \textit{periódico} \end{cases} \quad \Leftarrow TFD \Rightarrow \quad \begin{cases} X(e^{j\Omega}) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\Omega n} \\ \bullet\ \textit{Periódico} \\ \bullet\ \textit{Contínuo} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw \\ \bullet\ Contínuo \\ \bullet\ Não-periódico \end{cases} \Leftarrow TFC \Rightarrow \begin{cases} X(jw) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt \\ \bullet\ Não-periódico \\ \bullet\ Contínuo \end{cases}$$

Verifica-se, portanto, a analogia entre *Continuidade* e *Periodicidade* entre as representações de Fourier, independente do seu tipo, ou seja:

$$\begin{cases} \overbrace{\qquad\qquad TEMPO \qquad\qquad}^{} & & \overbrace{\qquad\qquad FREQUÊNCIA \qquad\qquad}^{} \\ Continuidade \begin{cases} Discreto \\ Contínuo \end{cases} & \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \end{matrix} & \left. \begin{matrix} Periódico \\ Não periódico \end{matrix} \right\} Periodicidade \\ \\ Periodicidade \begin{cases} Periódico \\ Não periódico \end{cases} & \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \end{matrix} & \left. \begin{matrix} Discreto \\ Contínuo \end{matrix} \right\} Continuidade \end{cases}$$

Considerações Finais:

- Estas análises também se aplicam às Transformadas de Fourier de sinais periódicos no tempo;
- Observa-se que esta propriedade está relacionada com a natureza do sinal, da mesma maneira que o tipo de representação de Fourier também está relacionado com a natureza do sinal;
- Esta propriedade permite se ter uma análise qualitativa da função, seja qual for o domínio, evitando assim um trabalho quantitativo exaustivo e, às vezes, desnecessário.

II.8.2 – Simetria

Esta propriedade é comum às 4 representações de Fourier e sua análise será aplicada apenas à Transformada de Fourier Contínua, cuja definição é dada pela expressão:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw$$

Além do mais, no desenvolvimento desta propriedade será utilizado o fato de que uma função racional qualquer $X(jw)$ pode ser assim expressa:

$$\begin{aligned} X(jw) &= Re\{X(jw)\} + j\, Im\{X(jw)\} \\ &= |X(jw)|\, e^{j\theta} \end{aligned}$$

Onde:

$$\begin{cases} |X(jw)| = \sqrt{[Real\{X(jw)\}]^2 + [Img\{X(jw)\}]^2} \\ \theta = arctg\left\{\dfrac{Img\{X(jw)\}}{Real\{X(jw)\}}\right\} \end{cases}$$

O desenvolvimento desta propriedade será feito nos seguintes casos:

- O sinal *x(t)* é puramente real;
- O sinal *x(t)* é puramente imaginário.

A análise do caso em que o sinal *x(t)* é complexo ficará por conta do leitor.

a) Sinal *x(t)* é real puro

Neste caso tem-se que $x(t) = x^*(t)$, sendo $x^*(t)$ o complexo conjugado de $x(t)$, em que:

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw \right\}^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(jw)\, e^{-jwt}\, dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(-jw)\, e^{jwt}\, dw \end{aligned}$$

A partir desta última expressão e pelo fato de $x(t) = x^*(t)$, tendo em vista as restrições impostas a estes sinais, deduz-se que:

$$X(jw) = X^*(-jw) \quad ou \quad X^*(jw) = X(-jw)$$

Ou seja, $X(jw)$ é a uma função racional conjugada simétrica.

Dando continuidade às deduções, as funções *X(jw)* e *X*(-jw)* podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{cases} X(jw) = Re\{X(jw)\} + j\, Im\{X(jw)\} \\ \\ X^*(-jw) = Re\{X^*(-jw)\} + j\, Im\{X^*(-jw)\} \\ \qquad\qquad = Re\{X(-jw)\} - j\, Im\{X(-jw)\} \end{cases}$$

Entretanto, foi estabelecido anteriormente que:

$$X(jw) = X^*(-jw)$$

A partir destas duas últimas expressões conclui-se que:

$$\begin{cases} Re\{X(jw)\} : \text{é uma função par} \\ \\ Im\{X(jw)\} : \text{é uma função impar} \end{cases}$$

Além do mais, tendo em vista as expressões estabelecidas para módulo e fase de $X(jw)$ e as relações deduzidas no apêndice AII.2 deste capítulo[2], tem-se que:

$$\begin{cases} |X(jw)| = \sqrt{[Real\{X(jw)\}]^2 + [Img\{X(jw)\}]^2} : \text{função par} \\ \\ \theta = arctg\left\{\dfrac{Img\{X(jw)\}}{Real\{X(jw)\}}\right\} : \text{função impar} \end{cases}$$

[2] No apêndice AII.2 são estabelecidas as resultantes entre operações de funções pares e ímpares

Exemplo:

Seja $x(t) = e^{-at}\, u_d(t) \quad \Leftarrow TFC \Rightarrow \quad X(jw) = \dfrac{1}{jw + a}$

Então:

$$X^{*}(jw) = \frac{1}{-jw + a} \quad \Rightarrow \quad X^{*}(-jw) = \frac{1}{jw + a} = X(jw)$$

b) O sinal *x(t)* é real e par

Neste caso tem-se que $x(t) = x^*(t) = x(-t)$, o que corresponde, no domínio da freqüência, à seguinte condição:

$$X(jw) = X^*(-jw) = X(-jw)$$

Para satisfazer esta condição é necessário que:

$$\begin{cases} Re\{X(jw)\} : \text{é uma função par} \\ \\ Im\{X(jw)\} = 0 \end{cases}$$

Além do mais, tendo em vista as expressões estabelecidas para módulo e fase de $X(jw)$ e as relações deduzidas no apêndice AII.2 deste capítulo, tem-se que:

$$|X(jw)| = \sqrt{[Real\{X(jw)\}]^2 + [Img\{X(jw)\}]^2} : \text{função par}$$

Exemplo:

c) O sinal *x(t)* é real e impar

Neste caso tem-se que $x(t) = x^*(t) = -x(-t)$, o que corresponde, no domínio da freqüência, à seguinte condição:

$$X(jw) = X^*(-jw) = -X(-jw)$$

Para satisfazer esta condição é necessário que:

$$\begin{cases} Re\{X(jw)\} = 0 \\ \\ Im\{X(jw)\} : \acute{e}\, uma\ função\ impar \end{cases}$$

Além do mais, tendo em vista as expressões estabelecidas para módulo e fase de $X(jw)$ e as relações deduzidas no apêndice AII.2 deste capítulo, tem-se que:

$$\theta = arctg\left\{\frac{Img\{X(jw)\}}{Real\{X(jw)\}}\right\} : \ função\ impar$$

Exemplo:

d) Sinal *x(t)* é imaginário

Neste caso tem-se que $x(t) = -x^*(t)$, sendo $x^*(t)$ o complexo conjugado de $x(t)$. Então, dado que:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\ dw$$

Deduz-se $-x^*(t)$, em que:

$$-x^*(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(jw)\, e^{-jwt}\ dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[-X^*(-jw)\right]e^{jwt}\ dw$$

Como por definição $x(t) = -x^*(t)$, então:

$$X(jw) = -X^*(-jw) \quad ou \quad X^*(jw) = -X(-jw)$$

Dando continuidade às deduções, as funções *X(jω)* e *X*(-jω)* podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{cases} X(jw) = Re\{X(jw)\} + j\, Im\{X(jw)\} \\ \\ -X^*(-jw) = -Re\{X^*(-jw)\} - j\, Im\{X^*(-jw)\} \\ \qquad = -Re\{X(-jw)\} + j\, Im\{X(-jw)\} \end{cases}$$

Entretanto, foi estabelecido anteriormente que:

$$X(jw) = -X^*(-jw)$$

A partir destas duas últimas expressões conclui-se que:

$$\begin{cases} Re\{X(jw)\}: \text{é uma função impar} \\ \\ Im\{X(jw)\}: \text{é uma função par} \end{cases}$$

Além do mais, tendo em vista as expressões estabelecidas para módulo e fase de $X(jw)$ e as relações deduzidas no apêndice AII.2 deste capítulo, tem-se que:

$$\begin{cases} |X(jw)| = \sqrt{[Real\{X(jw)\}]^2 + [Img\{X(jw)\}]^2} : \text{função par} \\ \\ \theta = arctg\left\{\dfrac{Img\{X(jw)\}}{Real\{X(jw)\}}\right\}: \text{função impar} \end{cases}$$

II.8.3 – Deslocamento no Tempo

Esta propriedade é comum às 4 representações de Fourier e sua análise será aplicada apenas à Transformada de Fourier Contínua. O procedimento para o cálculo da aplicação desta propriedade às demais representações é análogo.

O problema a ser resolvido pode ser colocado da seguinte maneira:

"Sendo a TFC de x(t) dada por $x(t) \Leftarrow TFC \Rightarrow X(jw) = |X(jw)|\, e^{j.\theta}$ *, então qual será a TFC do sinal* $x(t-t_0)$ *?"*

Seja a TFC do sinal *x(t)* dada por:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw$$

Fazendo a mudança de variável *(t)* por *(t-t₀)*, tem-se que:

$$x(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jw(t-t_0)}\, dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{-jwt_0}\ X(jw) \right\} e^{jwt}\, dw$$

E com isto, dado que:

$$x(t) \quad \Leftarrow TFC \Rightarrow \quad X(jw) = \left| X(jw) \right| e^{j.\theta}$$

Então:

$$x(t - t_0) \quad \Leftarrow TFC \Rightarrow \quad \left\{ e^{-jwt_0}\ X(jw) \right\} = \left| X(jw) \right| e^{j(\theta - w\,t_0)}$$

Ou seja, o deslocamento de um sinal no tempo equivale, no domínio da freqüência, a um deslocamento na fase da TFC deste sinal. Observa-se que a amplitude deste sinal permanece inalterada.

Simetria real / complexa;

Deslocamento no tempo e na freqüência;

Mudança de escala de tempo;

Convolução e Modulação;

Analogia *Tempo x Freqüência*.

Apêndice do Capítulo II

A II.1 - Cálculo dos coeficientes ou resíduos da fatoração de uma função racional com raízes de multiplicidade 2 no seu denominador

Seja $X(e^{j\Omega})$ dada por

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{B(e^{j\Omega})}{(1+a\,e^{-j\Omega})^2} = \alpha_1 \left\{ \frac{1}{(1+a\,e^{-j\Omega})} \right\} + \alpha_2 \left\{ \frac{1}{(1+a\,e^{-j\Omega})^2} \right\}$$

Manipulando-se esta expressão tem-se que:

$$\begin{cases} \left\{(1+a\,e^{-j\Omega})^2\, X(e^{j\Omega})\right\} = \alpha_1\,(1+a\,e^{-j\Omega}) + \alpha_2 \\ \dfrac{\mathbf{d}\left\{(1+a\,e^{-j\Omega})^2\, X(e^{j\Omega})\right\}}{\mathbf{d}\ e^{-j\Omega}} = a\,\alpha_1; \quad \mathbf{d:derivada} \end{cases}$$

A partir desta expressão pode-se deduzir os valores dos coeficientes, quais sejam:

$$\begin{cases} \alpha_2 = \left[(1+a\,e^{-j\Omega})^2\, X(e^{j\Omega})\right]_{e^{-j\Omega}=-1/a} \\ \alpha_1 = (1/a)\left[\dfrac{\mathbf{d}\left\{(1+a\,e^{-j\Omega})^2\, X(e^{j\Omega})\right\}}{\mathbf{d}\ e^{-j\Omega}}\right]_{e^{-j\Omega}=-1/a} \end{cases}$$

A II.2 – Operações entre funções Peres e Ímpares

Considerando as definições de funções pares e ímpares dadas no capítulo I, pode se deduzir que:

- O produto de duas funções pares é uma função par:

Se $$f(t) = x_p(t).x_p(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_p(t) = f(t) \\ f_{ip}(t) = 0 \end{cases}$$

- O produto de duas funções impares é uma função par:

Se $$f(t) = x_{ip}(t).x_{ip}(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_p(t) = f(t) \\ f_{ip}(t) = 0 \end{cases}$$

- O produto de uma função par por uma função impar é uma função impar:

Se $$f(t) = x_p(t).x_{ip}(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_p(t) = 0 \\ f_{ip}(t) = f(t) \end{cases}$$

- A soma de uma função par com uma função impar é uma função mista;

Se $$f(t) = x_p(t) \pm x_{ip}(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_p(t) \neq 0 \\ f_{ip}(t) \neq 0 \end{cases}$$

Considerando-se que uma função racional qualquer $X(jw)$ pode ser assim expressa:

$$\begin{aligned} X(jw) &= Re\{X(jw)\} + j\ Im\{X(jw)\} \\ &= |X(jw)|\ e^{j\theta} \end{aligned}$$

Onde:

$$\begin{cases} |X(jw)| = \sqrt{[Real\{X(jw)\}]^2 + [Img\{X(jw)\}]^2} \\ \theta = arctg\left\{\dfrac{Img\{X(jw)\}}{Real\{X(jw)\}}\right\} \end{cases}$$

Pode-se estendendo a análise de funções pares-ímpares para o módulo e a fase de $X(jw)$, utilizando-se as relações anteriormente obtidas neste apêndice, qual seja;

- Qualquer que seja o tipo da função $x(t)$, a fase de $X(jw)$ sempre será uma função impar;
- O módulo de $X(jw)$ será sempre uma função par somente nos casos em que $x(t)$ for uma função puramente real ou puramente imaginária.