Analysis I - Vorlesungs-Script

Prof. Dr. Camillo De Lellis

Basisjahr 10 Semester II

Mitschrift:
Simon Hafner

Inhaltsverzeichnis

1 Die reellen Zahlen **1**
1.1 Körperstrukturen 1
1.2 Die Anordnung von $\mathbb{R}$ 2
1.3 Die Vollständigkeit der reellen Zahlen 3
1.4 Supremumseigenschaft, Vollständigkeit 4
1.5 Abzählbarkeit 6

2 Komplexe Zahlen **6**
2.1 Definition 6

3 Funktionen **8**
3.1 Definition 8
3.2 Algebraische Operationen 9
3.3 Zoo 9
3.3.1 Exponentialfunktion 9
3.3.2 Polynome 10

1 Die reellen Zahlen

Beispiel 1. $\mathbb{R}$ ist nicht genug

Satz 1. *Es gibt kein $q \in \mathbb{Q}$ so dass $q^2 = 2$*

Beweis 1. *Falls $q^2 = 2$, dann $(-q)^2 = 2$ OBdA $q \geq 0$ Deswegen $q > 0$. Sei $q > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$ so dass $q^2 = 2$. $q = \frac{m}{n}$ mit $m > 0, > 0$. $GGT(m, n) = 1$ (d.h. falls $r \in \mathbb{N}$ m und n dividiert, dann $r = 1$!).*

$$\begin{aligned} m^2 = 2n^2 &\implies m \text{ ist gerade} && \implies m = 2k \text{ für } k \in \mathbb{N} \\ \{0\} & \\ 4k^2 = 2n^2 &\implies n \text{ ist gerade} && \implies 2|n (2 \text{ dividiert } n) \end{aligned}$$

$\implies$ *Widerspruch! Weil 2 dividiert m und n! (d.h. es gibt <u>keine</u> Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$*

Beispiel 2.

$$\sqrt{2} = 1,414 \cdots$$

Intuitiv:

$$\begin{array}{rrr c rrr} 1,4^2 < & 2 < & 1,5^2 & & 1,4 < & \sqrt{2} < & 1,5 \\ 1,41^2 < & 2 < & 1,42^2 & \implies & 1,41 < & \sqrt{2} < & 1,42 \\ 1,414^2 < & 2 < & 1,415^2 & & 1,414 < & \sqrt{2} < & 1,415 \end{array}$$

Intuitiv

- $\mathbb{Q}$ hat "Lücke"
- $\mathbb{R} = \{$ die reellen Zahlen $\}$ haben "kein Loch".

Konstruktion Die reellen Zahlen kann man "konstruieren". (Dedekindsche Schritte, Cantor "Vervollständigung"). Google knows more. Wir werden "operativ" sein, d.h. wir beschreiben einfach die wichtigsten Eigenschaften von $\mathbb{R}$

1.1 Körperstrukturen

K1 Kommutativgesetz

$$\begin{aligned} a + b = && b + a \\ a \cdot b = && b \cdot a \end{aligned}$$

K2 Assoziativgesetz

$$\begin{aligned} (a + b) + c = && a + (b + c) \\ (a \cdot b) \cdot c = && a \cdot (b \cdot c) \end{aligned}$$

K3 Distributivgesetz

$$(a + b) \cdot c = \qquad a \cdot c + b \cdot c$$

K4

$$\begin{aligned} a + x = && b \\ a \cdot x = && b \text{falls } a \neq 0 \end{aligned}$$

1.2 Die Anordnung von $\mathbb{R}$

A1 $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Relationen:

- $a < 0$
- $a = 0$
- $a > 0$

A2 Falls $a > 0$, $b > 0$, dann $a + b > 0$, $a \cdot b > 0$

A3 Archimedisches Axiom: $\forall a \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$

Übung 1. Beweisen Sie dass $a \cdot b > 0$ falls $a < 0$, $b < 0$

Satz 2. $\forall x > -1$, $x \neq 0$ *und* $\forall n \in \mathbb{N}$
$\{0, 1\}$ *gilt* $(1 + x)^n > (1 + nx)$

Beweis 2.

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + \underbrace{x^2}_{>0} > 1 + 2x$$

weil $x \neq 0$.
Nehmen wir an dass

$$\begin{aligned} (1+x)^n &> & 1 + nx(x > -1, x \neq 0) \\ \underbrace{(1+x)}_{a}\underbrace{(1+x)^n}_{c} &> & \underbrace{(1+nx)}_{d}(1+x)(\textit{weil}(1+x) > 0) \end{aligned}$$

$$c > d \iff c - d > 0 \overset{A2}{\implies} a(c-d) > 0 \overset{K4}{\implies} ac - ad > 0 \overset{A2}{\implies} ac > ad$$

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 = \\ 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{>0} > 1 + (n+1)x \\ \implies (1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x \end{aligned}$$

Vollständige Induktion.

Definition 1. Für $a \in \mathbb{R}$ setzt man

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls} a \geq 0 \\ -a & \text{falls} a < 0 \end{cases}$$

Satz 3. *Es gilt (Dreiecksungleichung):*

$$\begin{aligned} |ab| = & \quad |a||b| \\ |a+b| \leq & \quad |a| + |b| \\ ||a| - |b|| \leq & \quad |a - b| \end{aligned}$$

Beweis 3.

- $|ab| = |a||b|$ *trivial*
-
$$a + b \leq |a| + |b|$$

  ($a > 0$ und $b > 0 \implies a + b = |a| + |b|$ sonst $a + b < |a| + |b|$ weil $x \leq |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$ und die Gleichung gilt).

$$-(a+b) = -a - b \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|$$

  Aber

$$|a+b| = max\,\{a+b, -(a+b)\} \leq |a| + |b|$$

- $$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

  Zuerst:

$$\begin{aligned} |a| = |(a-b)+b| &\leq |a-b| + |b| \\ \implies |a| - |b| &\leq |a-b| \\ |b| = |a + (b-a)| &\leq |a| + |b-a| \\ \implies |b| - |a| \leq |b-a| &= |a-b| \\ \implies (|a| - |b|) &\leq |a-b| \end{aligned}$$

$$||a| - |b|| = max\,\{|a|-|b|, -(|a|-|b|)\} \leq |a-b|$$

Bemerkung 1.

$$|x| = max\,\{-x, x\}$$

1.3 Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

Für $a < b$, $a \in \mathbb{R}$, heisst:

- abgeschlossenes Intervall: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- offenes Intervall: $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- (nach rechts) halboffenes Intervall: $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- (nach links) halboffenes Intervall: $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

Sei $I = [a,b]$ (bzw. $]a,b[\ \ldots$). Dann a, b sind die Randpunkte von I. Die Zahl $|I| = b - a$ ist die Länge von I. $(b - a > 0)$

Definition 2. Eine Intervallschachtelung ist eine Folge $I_1, I_2, \cdots$ geschlossener Intervalle (kurz $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder (I_n)) mit diesen Eigenschaften:

I1 $I_{n+1} \subset I_n$

I2 Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein Intervall I_n so dass $|I_n| < \epsilon$

Beispiel 3. $\sqrt{2}$

$$\begin{array}{rccl} 1,4^2 < & 2 < & 1,5^2 & \\ 1,41^2 < & 2 < & 1,42^2 & \implies \\ 1,414^2 < & 2 < & 1,415^2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} I_1 = [1,4/1,5]|I_1| = 0.1 \\ I_2 = [1,41/1,42]|I_2| = 0.01 \\ I_3 = [1,414,1,415]|I_2| = 0.001 \end{array}$$

Beweis 4. *I1 und I2 sind beide erfüllt.*

Axiom 1. *Zu jeder Intervallschachtelung $\exists x \in \mathbb{R}$ die allen ihren Intervallen angehört.*

Satz 4. *Die Zahl ist eindeutig.*

Beweis 5. *Sei (I_n) eine Intervallschachtelung. Nehmen wir an dass $\exists \alpha < \beta$ so dass $\alpha, \beta \in I_n \forall n$. Dann $|I_n| \geq |\beta - \alpha| > a$. Widerspruch!*

Satz 5. *$\forall a \geq 0, a \in \mathbb{R}$ und $\forall x \in \mathbb{N}$*
$\{0\}$, $\exists$ eine einziges $x \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ s.d. $x^k = a$. Wir nennen $x = \sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}$.
Sei $m, n \in \mathbb{N}$, $a^{m+n} = a^m a^n$ und deswegen $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ für $m \in \mathbb{N}$ (so dass die Regel $a^{m-m} = a^0 = 1$.
$n, m \in \mathbb{N}$
$\{0\}$ n Mal.

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n\ Mal} = a^{\overbrace{m + \cdots + m}^{n\ Mal}} = a^{nm}$$

Und mit $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ stimmt die Regel $(a^m)^n = a^{mn}$ auch $\forall m, n \in \mathbb{Z}$!

Bemerkung 2. $x^k = \left(a^{\frac{1}{k}}\right)^k = a \left(= a^{\frac{1}{k}k} = a^1\right)$

Definition 3. $\forall q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $\forall a > 0$ mit definiertem $a^q = (\sqrt[n]{a})^m$

Beweis 6. *Mit dieser Definition gilt* $a^{q+q_2} = a^q a^{q_2}$ $\forall a > 0$ *und* $\forall q, q_2 \in \mathbb{Q}$.

Satz 6. *Zu jedem* $x > 0$ $(x \in \mathbb{R})$ *und zu jedem* $k \in \mathbb{N}$ *gibt es eine reelle Zahl* $y > 0$ *so dass* $y^k = x$. *In Zeichen:*

$$y = x^{\frac{1}{k}}, y = \sqrt[k]{x}$$

Beweis 7. *oBdA* $x > 1$ *(sonst würden wir* $\frac{1}{x}$ *betrachten). wir konstruieren eine Intervallschachtelung* (I_n) *so dass* $\forall n a_n^k \geq x \geq b_n^k$

$$I_1 := [1, x] I_{n+1} = \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] & \text{falls } x \leq \left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^k \left[\frac{a_n+b_n}{2}, n\right] \end{cases} |I_n| = \frac{1}{2^{n-1}}|I_1|$$

Intervallschachtelungsprinzip $\implies \exists y \in \mathbb{R}$ *s.d.* $y \in I_n \forall n \in \mathbb{N}$

Satz 7. $y^k = x$

Beweis 8. *Man definiert* $J_n = [a_n^k, b_n^k$. *Wir wollen zeigen, dass* J_n *eine Intervallschachtelung ist.*

- $J_{n+1} \subset J_n$ *weil* $I_{n+1} \subset I_n$
- $$|J_n| = b_n^k - a_n^k = \underbrace{(b_n - a_n)}_{|I_n|} \underbrace{(b_n^{k-1} + b_n^{k-2} a_n + \cdots + a_n^{k-1})}_{\leq k b_1^{k-1}}$$

$\implies |J_n| \leq |I_n| k k_1^{k-1}$.
Sei ε *gegeben. Man wähle* N *gross genug, so dass*

$$|I_n| \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{k b_1^{k-1}} \implies |J_n| \leq \varepsilon k b_1^{k-1} = \varepsilon$$

Einerseits

$$y \in [a_n, b_n] \implies y^k \in \left[a_n^k, b_n^k\right] = J_n$$

Andererseits

$$x \in J_n \forall n \in \mathbb{N}$$

Intervallschachtelungsprinzip $\implies x = y^k$

1.4 Supremumseigenschaft, Vollständigkeit

Definition 4. $s \in \mathbb{R}$ heisst obere (untere) Schranke der Menge $M \subset \mathbb{R}$ falls $s \geq x$ $(s \leq x)$ $\forall x \in M$.

Definition 5. $s \in \mathbb{R}$ ist das Supremum der Menge $M \subset \mathbb{R}$ falls es die kleinste obere Schranke ist. D.h.

- s ist die obere Schranke
- falls $s' < s$, dass ist s' keine obere Schranke.

Beispiel 4. $M =]0, 1[$. In diesem Fall $s = \sup M \notin M$

Beispiel 5. $M = [0, 1]$. $\sup M = 1 \in M$

Definition 6. $s \in \mathbb{R}$ heisst Infimum einer Menge M $(s = \inf M)$ falls s die grösste obere Schranke ist.

Definition 7. Falls $s = \sup M \in M$, nennt man s das Maximum von M. Kurz: $s = \max M$. Analog Minimum.

Satz 8. *Falls $M \subset \mathbb{R}$ nach oben (unten) beschränkst ist, dann existiert* $\sup M$ *(*$\inf M$*).*

Beweis 9. *Wir konstruieren eine Intervallschachtelung I_n, so dass b_n eine obere Schranke ist, und a_n keine obere Schranke ist.*

- *$I_1 = [a_1, b_1]$, wobei b_1 eine obere Schranke*
- *a_1 ist keine obere Schranke*

Sei I_n gegeben.

$$I_{n+1} = \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] & \text{Falls } \frac{a_n+b_n}{2} \text{ eine obere Schranke ist-} \\ \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right] & \text{sonst} \end{cases}$$

Also, $\exists s \in I_n \forall n$

Satz 9. *s ist das Supremum von M*

- *Warum ist s eine obere Schranke?*
  Angenommen $\exists x \in M$ so dass $x > s$. Man wähle $|I_n| < x - s$. Daraus folgt

  $$x - s > b_n - a_n \geq b_n - s \implies x > b_n$$

  Widerspruch.
- *Warum ist s die kleinste obere Schranke?*
  Angenommen $\exists s' < s$. Dann wähle n' so dass $I_{n'} < s - s'$.

  $$s - s' > b_{n'} - a_{n'} \geq s - a_{n'} \implies a_{n'} > s'$$

  Widerspruch.

Lemma 1. *Jede nach oben (unten) beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{Z}$ besitzt das grösste (kleinste) Element.*

Beweis 10. *oBdA betrachte nur nach unten beschränkte Mengen $M \subset N$. Angenommen M hat kein kleinstes Element.*

Satz 10.

$$\begin{aligned} \forall n M \cap \{1, \cdots, n\} = \\ n = 1 \\ M \cap \{1\} \end{aligned}$$

Angenommen

$$\begin{aligned} M \cap \{1, \cdots, n\} = \\ M \cap \{1, 2, \cdots, n+1\} = M \cap \{1, \cdots, n\} \cup M \cap \{n+1\} = \\ \implies M \cap \mathbb{N} = \end{aligned}$$

Satz 11. *$\mathbb{Q}$ ist dich in $\mathbb{R}$, bzw. für beliebige zwei $x, y \in \mathbb{R}$, $y > x$, gibt es eine rationelle Zahl $q \in \mathbb{Q}$, so dass $x < q < y$.*

Beweis 11. *Man wähle $n \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{n} < y - x$. Betrachte die Menge $A \subseteq \mathbb{Z}$, so dass $M \in A \implies M > nx$. Lemma $\implies \exists m = \min A$.*

$$x < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < x + y - x = y$$

Also setze $q = \frac{m}{n}$

1.5 Abzählbarkeit

Definition 8. Die Mengen A & B sind gleichmächtig, wenn es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt. A hat grässere Mächtigkeit als B, falls B gleichmächtig wie eine Teilmenge von A ist, aber A zu keiner Teilmenge von B gleichmächtig ist.

Beispiel 6.
- $1, 2$ & $3, 4$ sind gleichächtig.
- $1, 2, \cdots, n$ hat kleinere Mächtigkeit als $1, 2, \cdots, m$, wenn $n < m$ ist.

Definition 9. Eine Menge A ist abzählbar, wenn es eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und A gibt. D.h. $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$.

Lemma 2. *$\mathbb{Z}$ ist abzählbar*

Beweis 12. $\begin{array}{c|cccccc} \mathbb{N} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ \mathbb{Z} & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \dots \end{array}$ *Formal:*

$$f = \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \textit{wenn } n \textit{ gerade} \\ \frac{1-n}{2} & \textit{wenn } n \textit{ ungerade} \end{cases}$$

Satz 12. *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar*

Beweis 13. *Sucht euch die Graphik auf Wikipedia oder sonstwo.*

Satz 13. *$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.*

2 Komplexe Zahlen

Bemerkung 3. $\forall a \in \mathbb{R}$, $a^2 > 0$. Deswegen ist $x^2 = -1$ unlösbar. Die Erfindung von $i^2 = -1$ (die imaginäre Zahl) hat sehr interessante Konsequenzen auch für die üblichen reellen Zahlen.

2.1 Definition

Definition 10. Sei $a, b \in \mathbb{R}$, dann $a + bi \in \mathbb{C}$.

$$(a + bi) + (\alpha + \beta i) = (a + \alpha) + (b + \beta)i(a + bi)(\alpha + \beta i) = (a\alpha - b\beta) + \underbrace{(a\beta + b\alpha)}_{A}$$

Definition 11. Seien A und B zwei Mengen. Dann ist $A \times B$ die Menge der Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Definition 12. $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $+$ und $\cdot$, die wir so definieren:

$$(a, b) + (\alpha, \beta) = (a + \alpha, b + \beta) \ (a, b)(\alpha, \beta) = (a\alpha - b\beta, \underbrace{a\beta + b\alpha}_{A})$$

Bemerkung 4.

$$\mathbb{R} \simeq \{(a, 0), a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}(a, 0) + (\alpha, 0) = (a + \alpha, 0) \ (a, 0)(\alpha, 0) = (a\alpha, 0)$$

Bemerkung 5.

$$(0, a)(0, b) = (-ab, 0)$$

Deswegen falls $-1 \in \mathbb{R}$ ist $(-1, 0)$.

$$\underbrace{(0, 1)}_{\text{Wurzel von -1}} \quad (0, 1) = (-1, 0) \qquad \underbrace{(0, -1)}_{\text{auch eine Wurzel von -1}} \quad (0, -1) = (-1, 0)$$

Definition 13. $i = (0, 1)$ und wir schreiben (a, b) für $a + bi$.

Bemerkung 6. $0 = (0,0) = 0 + 0i$. $\xi \in \mathbb{C}$

$$0\xi = 0$$
$$0 + \xi = \xi$$

Satz 14. *Alle Körperaxiome (K1-K4) gelten.*

Beweis 14. *K1 Kommultativität*

K2 Assoziativität

K3 Distributivität

K4 Seien $\xi, \zeta \in \mathbb{C}$.

$$\exists \omega \in \mathbb{C} \xi + \omega = \zeta \tag{1}$$
$$\xi \neq 0 \exists \omega \xi \omega = \zeta \tag{2}$$

Beweis 15.

$$\xi = a + bi\zeta = c + di\omega = x + yi$$
$$\xi + \omega = (a + x) + (b + y)i = \xi = c + di$$

Sei $x := c - a$, $y := d - b$. *Dann* $\xi + \omega = \zeta$.

Beweis 16. *Mit derselben Methode.* $i\,[= 1 + 0i\,[= (1,0)]]$ *ist das neutrale Element.*

$$(a + bi)(1 + 0i) = \underbrace{(a1 - b0)}_{a} + \underbrace{(b1 + a0)}_{b} = (a + bi)$$

Sei $\xi \neq 0$ *und suchen wir* α *so dass* $\xi\alpha = 1$. *Dann ist* $\omega = \alpha\xi$ *eine Lösung von (2) (eigentlich DIE Lösung). Falls* $\xi = a + bi$

$$\alpha = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\xi\alpha = \overbrace{\left(\frac{aa}{a^2 + b^2} - \frac{b(-b)}{a^2 + b^2}\right)}\left(\frac{a(-b)}{a^2 + b^2} - \frac{ab}{a^2 + b^2}\right)i = 1$$

Definition 14. Sei $\xi = (x + yi) \in \mathbb{C}$. Dann:

- x ist der reelle Teil von ξ ($\operatorname{Re}\xi = x$)
- y ist der imaginäre Teil von ξ ($\operatorname{Im}\xi = y$)
- $x + yi$ ist die konjugierte Zahl $\left(\overline{\xi} = (= x - yi)\right)$

Beweis 17.

$$\sqrt{\overline{\xi}\xi} = \sqrt{(\operatorname{Re}\xi)^2 + (\operatorname{Im}\xi)^2} =: |\xi|$$

Definition 15. $|\xi|$ ist der Betrag von ξ.

Satz 15. *Es gilt:* $(\forall a, b \in \mathbb{C})$*:*

- –
$$\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}$$
  –
$$\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$$
- –
$$\operatorname{Re} a = \frac{a + \overline{a}}{2}$$
  –
$$(\operatorname{Im} a)i = \frac{a - \overline{a}}{2}$$
- $a = \overline{a}$ *genau dann wenn* $a \in \mathbb{R}$.

- $$a\overline{a} = |a|^2 = \sqrt{(\operatorname{Re} a)^2 + (\mathrm{j}a)^2} \geq 0$$
  (die Gleicheit gilt genau dann wenn $a = 0$)

Bemerkung 7. Sei ω so dass $\xi\omega = 1$ $(\xi \neq 0)$. Man schreibt $\omega\frac{1}{\xi}$ und $\omega = \frac{\overline{\xi}}{|\xi|^2}$

Satz 16. $\forall a, b \in \mathbb{C}$

- $|a| > 0$ *für* $a \neq 0$ *(trivial)*
- $|\overline{a}| = |a|$ *(trivial)*
- $|\operatorname{Re} a| \leq |a|$, $|\operatorname{Im} a| \leq |a|$ *(trivial)*
- $|ab| = |a||b|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$

Beweis 18.

$$|ab|^2 = (ab)\overline{(ab)} = ab\overline{a}\overline{b} = a\overline{a}\overline{b} = |a|^2|b|^2 \implies |ab| = |a||b|$$

$$\begin{aligned}
\iff |a+b|^2 &\leq (|a| + |b|)^2 \\
\underbrace{(a+b)\overline{(a+b)}}_{|a+b|^2 \in \mathbb{R}} &= \\
(a+b)(\overline{a} + \overline{b}) = a\overline{a} + b\overline{b} + a\overline{b} + b\overline{a} &= \\
\underbrace{|a|^2 + |b|^2}_{\in \mathbb{R}} + \left(a\overline{b} + b\overline{a}\right) & \\
\iff \underbrace{a\overline{b} + b\overline{a}} &\leq 2|a||b|
\end{aligned}$$

Nebenbemerkung:

$$b = (\alpha + \beta i)\overline{b} = (\alpha - \beta i)\overline{\overline{b}} = (\alpha - (-\beta)i) = \alpha + \beta i = b$$

$$a\overline{b} + \overline{a}\overline{(\overline{b})}a\overline{b} + \overline{(a\overline{b})} = 2\operatorname{Re}(a + \overline{b}) = \operatorname{Re}(2(a\overline{b})) \leq |2a\overline{b}| = 2|a||\overline{b}| = 2|a||b|$$

3 Funktionen

3.1 Definition

Definition 16. Seien A und B zwei Mengen. Eine Funktion $f : A \to B$ ist eine Vorschrift die jedem Element $a \in A$ ein eindeutiges Element $f(a) \in B$ zuordnet.

Beispiel 7. $A \subset \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

$$f(x) = x^2$$

Definition 17. A ist der <u>Definitionsbereich</u>.

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

ist der Wertbereich

Bemerkung 8. Wertbereich von x^2

$$\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$$

Definition 18. Der Graph einer Funktion $f : A \to B$ ist

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\}$$

Beispiel 8. Verboten: zwei Werte für die Stelle x.

Beispiel 9. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = |x|$

3.2 Algebraische Operationen

Wenn $B = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Seien f, g zwei Funktionen mit gleichem Definitionsbereich.

- $f + g$ ist die Funktion h so dass $h : A \to B$
$$h(x) = f(x) + g(x)$$
- Die Funktion fg $k : A \to B$
$$k(x) = f(x)g(x)$$
- $\frac{f}{g}$ falls der Wertebereich von g in $B \setminus \{0\}$ enthalten ist.
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Falls $B = \mathbb{C}$, kann man auch $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $\overline{f}$.

Definition 19. Sei $f : A \to B$, $f : B \to C$. Die Komposition $g \circ f : A \to C$.
$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Bemerkung 9. $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$
$$\Xi : A \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$\Xi(a) = (f(a), g(a))$$
$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\Phi(x, y) = xy$$
$$\Phi \circ \Xi(a) = \Phi(\Xi(a)) = \Phi\left((f(a)), g(a)\right) = f(a)g(a)$$

Also: die “algebraischen Operationen” sind “Kompositionen”.

Definition 20.
- Wenn $f : A \to B$ und $f(A) = B$ dann ist f surjektiv.
- Wenn $f : A \to B$ und die folgende Eigenschaft hat:
$$f(x) \neq f(y) \forall x \neq y \in A$$
dann ist f injektiv.
- Falls f surjektiv und injektiv ist, dann sagen wir, dass f bijektiv ist.

Bemerkung 10. Die bijektiven Funktionen sind umkehrbar. Sei $f : A \to B$ bijektiv. $\forall b \exists a : f(a) = b$ (surjektiv), a ist eindeutig (injektiv). $\exists! a : f(a) = b$. Dann $g(b) = a$ ist eine “wohldefinierte Funktion”, $g : B \to A$.

Definition 21. g wird Umkehrfunktion genannt. $f : A \to B$, $g : B \to A$, $f \circ g : B \to B$, $g \circ f : A \to A$, $f \circ g(b) = b$, $g \circ f(a) = a$

Definition 22. Die “dumme Funktion” $h : A \to A$ mit $h(a) = a \forall a \in A$ heisst Identitätsfunktion (Id $f \circ g = 1$).

3.3 Zoo

3.3.1 Exponentialfunktion

Wertebereich: $a \in \mathbb{R}, a > 0$
$$\operatorname{Exp}_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$
$$\operatorname{Exp}_a(n) = a^n (= 1 \text{ falls } n = 0$$
$$\operatorname{Exp}_a(-n) = \frac{1}{a^n}$$
$$\operatorname{Exp}_a\left(\frac{m}{n})\right) = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Exp_a ist die einzige Funktion $\Phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $\Phi(1) = a$
- $\Phi(q + r) = \Phi(q)\Phi(r)\ \forall q, r \in \mathbb{Q}$

Bemerkung 11. Später werden wir Exp_a auf $\mathbb{R}$ fortsetzen.

3.3.2 Polynome

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}(\mathbb{R})$$

Produkt von Polynomen $x \mapsto f(x)g(x)$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) = (a_n x^n + \cdots + a_0)\,(b_m x^m + \cdots + b_0) = \\ b_m a_n x^{n+m} + b_n a_{n-1} x^{n-1+m} + \cdots = \\ b_m a_n x^{n+m} + (b_m a_{n-1} + b_{m-1}a_n)\, x^{n+m-1} + \cdots + a_0 b_0 = \\ c_{m+n} x^{m+n} + \cdots + c_0 \end{aligned}$$

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Definition 23. Der Grad von $a_n x^n + \cdots + a_0$ ist n wenn $a_n \neq 0$

Satz 17. *Sei $g \neq 0$ ein Polynom. Dann gibt es zu jedem Polynom f zwei Polynome q und r so dass*

$$g = qf + r$$

$$\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} f$$

Beweis 19. *http://de.wikipedia.org/wiki/Polynomdivision*

Bemerkung 12. Sei $g = x - x_0$. Sei f mit Grad ≥ 1, Satz 2 $\implies f = gq + r = gq + c_0$ und Grad von $r < 1$. r ist eine Konstante $r = c_0$.

$$f(x) = q(x)(x - x_0) + c_0$$

$$f(x_0) = q(x_0)0 + c_0$$

Korollar 1. *Falls f ein Polynom ist und $f(x_0) = 0$, dann $\exists q$ Polynom so dass $f = q(x - x_0)$*

Korollar 2. *Ein Polynom hat höchstens* $\operatorname{grad} f$ *Nullstellen falls $f \neq 0$.*

Korollar 3. *Falls $f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, dann ist f das Trivialpolynom.*

Korollar 4. *Falls f, g Polynome sind und $f(x) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ dann sind die Koeffizienten von f und g gleich.*

Beweis 20. *$f - g$ ist ein Polynom mit $(fg)(x) = 0\ \forall x$. Das ist ein Trivialpolynom.*

Definition 24. Seien f, g Polynome. Dann ist $\frac{f}{g}$ eine rationale Funktion.