Wiskundig optimalisatiemodel Runningdinnerprobleem

De volgende wiskundige definities **kunnen** gebruikt worden bij het implementeren van een heuristiek of bij het formuleren van pseudocode. Als groep ben je vrij om hieraan je eigen definities toe te voegen of bepaalde notatie/definities te veranderen. Doe dat in dit geval expliciet in je verantwoording.

Verzamelingen en indices

$A \triangleq$ verzameling van alle **huisadressen**, met indices $a, a_1, a_2 \in A$.

$D \triangleq$ verzameling van alle **deelnemers**, met indices $d, d_1, d_2 \in D$.

$E \triangleq$ verzameling van deelverzamelingen van enkele deelnemers die het gehele Running Dinner bij elkaar aan tafel zitten, met indices $e_1, e_2 \in E$. Element $e \in E$ is een deelverzameling van verzameling D (bijvoorbeeld: $e_1 = \{d_1, d_2\} \subseteq D$).

$G \triangleq$ verzameling $\{'\text{Voor}', '\text{Hoofd}', '\text{Na}'\}$, de **gangen** die gegeten zullen worden, met index $g \in G$.

Parameters

$k_a \triangleq 1$ als de deelnemer(s) wonend op huisadres $a \in A$ een gang moet(en) koken en dus niet vrijgesteld zijn van koken, 0 anders.

$l_a \triangleq$ minimaal aantal deelnemers (tafelgenoten) op huisadres $a \in A$.

$u_a \triangleq$ maximaal aantal deelnemers (tafelgenoten) op huisadres $a \in A$.

$h_{a,d} \triangleq 1$ als deelnemer $d \in D$ op huisadres $a \in A$ woont, 0 anders.

$v_{a,g} \triangleq 1$ als de deelnemer wonend op huisadres $a \in A$ een **voorkeur** heeft voor gang $g \in G$, 0 anders.

$vg_{a,g} \triangleq 1$ als op huisadres $a \in A$ in het vorige jaar gang $g \in G$ werd bereid, 0 anders.

$vt_{d_1,d_2} \triangleq 1$ als twee verschillende deelnemers $d_1, d_2 \in D$ $(d_1 \neq d_2)$ vorig jaar **tafelgenoot** waren, 0 anders.

$b_{d_1,d_2} \triangleq 1$ als twee verschillende deelnemers $d_1, d_2 \in D$ $(d_1 \neq d_2)$ elkaars **directe buren** zijn, 0 anders.

Er moet gelden dat

- $\sum_{a \in A} h_{a,d} = 1 \ \ \forall d \in D$: elke deelnemer woont op precies één adres.
- $\sum_{g \in G} v_{a,g} \leq 1 \ \ \forall a \in A$: elk huisadres heeft hoogstens één voorkeursgang.
- $\sum_{g \in G} vg_{a,g} \leq 1 \ \ \forall a \in A$: elk huisadres heeft vorig jaar hoogstens één gang bereid.
- $l_a \leq u_a \ \ \forall a \in A$: voor elk huisadres zijn l en u correcte onder- en bovengrenzen op het aantal tafelgenoten.

Beslisvariabelen

$x_{a,d,g} \triangleq 1$ als deelnemer $d \in D$ gang $g \in D$ eet op huisadres $a \in A$, 0 anders.

$y_{a,g} \triangleq 1$ als op huisadres $a \in A$ gang $g \in G$ bereid wordt, 0 anders.

Eisen aan de planning van het Running Dinner (Hard Constraints)

$$\sum_{a \in A} x_{a,d,g} = 1 \qquad \forall d \in D \ \forall g \in G \quad (1)$$

Door voorwaarden (1) wordt afgedwongen dat elke deelnemer elke gang eet, en wel precies één keer. Deze voorwaarden zorgen ervoor dat elke deelnemer d voor elke gang g wordt toegewezen aan precies één adres.

$$\sum_{g \in G} y_{a,g} = k_a \qquad \forall a \in A \quad (2)$$

Wanneer de bewoners van huisadres a moeten koken is de parameter k_a gelijk aan 1, anders 0. Voorwaarden (2) zorgen er op deze manier voor dat een huishouden dat een gang moet koken, precies één gang toegewezen krijgt. Aangezien elk adres maximaal één gang toegewezen krijgt, zorgt dit er automatisch voor dat bij voorwaarde (1) elke deelnemer elke gang op een ander adres nuttigt.

$$x_{a,d,g} \geq y_{a,g} \cdot h_{a,d} \qquad \forall a \in A \ \forall d \in D \ \ \forall g \in G \quad (3)$$

Elke gastheer en/of gastvrouw moeten gedurende de gang die zij bereiden aanwezig zijn op hun eigen huisadres. Wanneer de variabelen $y_{a,g}$ de waarde 1 heeft, betekent dit dat we afdwingen dat deze specifieke gang g geserveerd wordt op huisadres a. Wanneer bovendien de parameter $h_{a,d}$ gelijk is aan 1, weten we dat deelnemer d bewoner is van huisadres a. We willen dus voor deze deelnemer d afdwingen dat die op diens adres a aanwezig is voor het serveren en nuttigen van gang g. De bij deze specifieke a, d en g behorende voorwaarde (3) zorgt ervoor dat variabele $x_{a,d,g}$ in dit geval gelijk is aan 1.

In het geval dat ofwel $y_{a,g} = 0$ ofwel $p_{a,d} = 0$, hebben voorwaarden (3) geen invloed op de gekozen waarde van $x_{a,d,g}$.

$$\sum_{d \in D} x_{a,d,g} \geq l_a \cdot y_{a,g} \qquad \forall a \in A \ \ \forall g \in G \quad (4a)$$
$$\sum_{d \in D} x_{a,d,g} \leq u_a \cdot y_{a,g} \qquad \forall a \in A \ \ \forall g \in G \quad (4b)$$

Voor elk huisadres geldt een minimaal en maximaal aantal tafelgenoten. De term $\sum_{d \in D} x_{a,d,g}$ is gelijk aan het tafelgenoten voor gang g op adres a. De uitkomst moet van boven en onder begrensd zijn door respectievelijk u_a en l_a. Uiteraard is het alleen mogelijk om deelnemers in te delen bij een specifiek huisadres a voor een specifieke gang g wanneer er ook daadwerkelijk gekookt wordt op dit huisadres voor deze gang. Dit wordt bepaald aan de hand van de variabele $y_{a,g}$. Wanneer deze gelijk is aan 1, kunnen deelnemers voor de gang g op adres a gepland worden, wanneer deze gelijk is aan 0 dan kan dat niet.

$$x_{a,d_1,g} = x_{a,d_2,g} \qquad \forall e \in E \;\; \forall\, d_1, d_2 \in e \quad \forall a \in A \quad \forall\, g \in G \quad (5)$$

Als laatste moeten we rekening houden met de een of meer duo's die het gehele Running Dinner bij elkaar zitten. Zo'n duo wordt gerepresenteerd door een element e van E; bijvoorbeeld $e = \{d_1, d_2\}$. Voor deze deelnemers d_1 en d_2 uit $e \in E$ zorgen voorwaarden (5) er voor dat zij voor elke gang aan hetzelfde adres zijn toegewezen.

Wensen van het Running Dinner (Soft Constraints)

$$\sum_{g \in G} x_{a_1,d_1,g} + x_{a_1,d_2,g} + x_{a_2,d_1,g} + x_{a_2,d_2,g} \leq 3 \qquad \forall a_1, a_2 \in A{:}\, a_1 \neq a_2 \quad \forall d_1, d_2 \in D \backslash E{:}\, d_1 \neq d_2 \quad (1)$$

Bij deze eerste wens kijken we naar twee verschillende huisadressen a_1 en a_2 en twee verschillende deelnemers d_1 en d_2. We willen voorkomen dat beide deelnemers meer dan één keer met elkaar aan tafel zitten. Wanneer beide deelnemers d_1 en d_2 aan huisadres a_1 zijn toegewezen dan geldt $x_{a,d,g} = x_{a,k,g} = 1$ voor een bepaalde gang g. In dat geval mag het dus niet voorkomen dat deelnemers d_1 en d_2 óók beiden zijn toegewezen aan een ander huisadres a_2 voor een willekeurige andere gang. Voorwaarden (1) zorgen er voor dat hooguit één van de deelnemers d_1 en d_2 in dat geval mag eten op adres a_2. Uiteraard geldt deze voorwaarde niet voor de specifieke groep deelnemers die het hele Running Dinner bij elkaar aan tafel moeten worden ingedeeld (deelverzameling E).

$$y_{a,'Hoofd'} \cdot vg_{a,'Hoofd'} = 0 \qquad \forall a \in A \quad (2)$$

Wanneer de bewoners van huisadres a vorig jaar een hoofdgerecht hebben geserveerd, willen we voorkomen dat ze dit jaar wederom een hoofdgerecht moeten serveren. Wanneer $vg_{a,g} = 1$ voor $g = $ 'Hoofd' zorgt voorwaarde (2) ervoor dat $y_{a,g} = 0$.

$$y_{a,g} \geq v_{a,g} \qquad \forall a \in A \quad \forall g \in G \quad (3)$$

Alleen wanneer $v_{a,g} = 1$ heeft voorwaarde (3) invloed op de beslisvariabelen $y_{a,g}$. In dat geval heeft huisadres a een voorkeur voor het bereiden van gang g, voor één specifieke a en g. Voorwaarde (3) zorgt er voor dat deze gang g ook daadwerkelijk wordt toegewezen aan het huisadres a.

$$(x_{a,d_1,g} + x_{a,d_2,g}) \cdot b_{d_1,d_2} \leq 1 \qquad \forall a \in A \quad \forall d_1, d_2 \in D{:}\, d_1 \neq d_2 \quad \forall g \in G \quad (4)$$

Voorwaarden (4) zorgen er voor dat twee verschillende deelnemers d_1 en d_2 die elkaars directe buren zijn ($b_{d_1,d_2} = 1$) niet aan hetzelfde huisadres worden toegewezen voor dezelfde gang. In dat geval moet gelden dat $x_{a,d_1,g} + x_{a,d_2,g} \leq 1$; daardoor kan maximaal één van de twee directe buren worden toegewezen aan huisadres a voor gang g.

Als deelnemers niet elkaars directe buren zijn ($b_{d_1,d_2} = 0$) dan geven deze voorwaarden geen beperkingen aan de beslisvariabelen $x_{a,d_1,g}$ en $x_{a,d_2,g}$.

$$(x_{a,d_1,g} + x_{a,d_2,g}) \cdot vt_{d_1,d_2} \leq 1 + h_{a,d_1} \cdot h_{a,d\_2} \qquad \forall a \in A, \forall d_1, d_2 \in D: d_1 \neq d_2, \forall g \in G \quad (5)$$

We kijken weer naar twee verschillende deelnemers d_1 en d_2 maar in dit geval naar deelnemers die vorig jaar met elkaar aan tafel zaten ($vt_{d_1,d_2} = 1$). In dat geval willen we dat, net als in voorwaarden (4), maximaal één van beide deelnemers wordt toegewezen aan huisadres a voor gang g. De enige uitzondering is wanneer deelnemer d_1 en d_2 beiden op huisadres a wonen ($h_{a,d_1} = h_{a,d_2} = 1$). In dit geval vormen zij een huishouden en mogen zij uiteraard wel samen een gang bereiden en eten op hun eigen adres.