从零开始的 IMU 状态模型推导

2016-11-20

目录

提示：请使用 Firefox，Chrome，Edge 等较新的浏览器阅读，以获得完整的公式排版。IE 请使用 IE 11。

本文已授权「泡泡机器人 SLAM」微信公众号（paopaorobot_slam）发表。

0. 总览

IMU 是移动机器人、移动智能设备上常见的传感器。常见的 IMU 为六轴传感器，配备输出三轴加速度的加速度计和输出三轴角速度的陀螺仪。九轴 IMU 还会配备输出三轴姿态角的磁力计。我们这里只讨论六轴 IMU。

IMU 的状态量通常表示为：

$$\mathbf{X}_{IMU} = [{}^I_G\bar{q}^T \quad \mathbf{b}_g^T \quad {}^G\mathbf{v}_I^T \quad \mathbf{b}_a^T \quad {}^G\mathbf{p}_I^T] \tag{0.0}$$

这里我们使用和 MSCKF [1] 一样的 notation。用 {I} 表示 IMU 坐标系，{G} 表示参考坐标系。IMU 的姿态由旋转量 ${}^I_G\bar{q}$ 和平移量 ${}^G\mathbf{p}_I$ 表示。更具体来说，前者为将任意向量从 {G} 坐标映射到 {I} 坐标的旋转量，用单位四元数表示；后者为 IMU 在 {G} 下的三维位置。${}^G\mathbf{v}_I$ 表示 IMU 在 {G} 下的平移速度。另外两个量 $\mathbf{b}_g$ 和 $\mathbf{b}_a$ 表示陀螺仪（角速度计）和加速度计的 bias。可以注意一下这里除了 bias 之外的状态量的时间维度：平移量表达到速度（p 和 v，对时间的一阶导），因为 IMU 只提供到加速度（对时间的二阶导）的测量；旋转量只表达姿态量（对时间的零阶导），因为 IMU 提供到角速度（对时间的一阶导）。状态量的估计可以由 IMU 测量积分得到。

对于 IMU 状态估计问题，需要提供运动模型、观测（噪声）模型、估计误差模型：

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \tag{0.1}$$

$$\mathbf{z} = g(\mathbf{x}) + \mathbf{n} \tag{0.2}$$

$$\delta\mathbf{x} = e(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \tag{0.3}$$

这是一个通用模型，我们用 $\mathbf{x}$ 表示真实状态量（待估计，不可知），用 $\mathbf{z}$ 表示观测量，$\mathbf{n}$ 表示观测噪声，$\hat{\mathbf{x}}$ 表示当前的状态估计量。这篇小文主要讲 IMU （即 $\mathbf{x} := \mathbf{X}_{IMU}$ 时）这三个模型的推导。

1. IMU 运动模型

1-1. 前置(1)： 旋转量求导

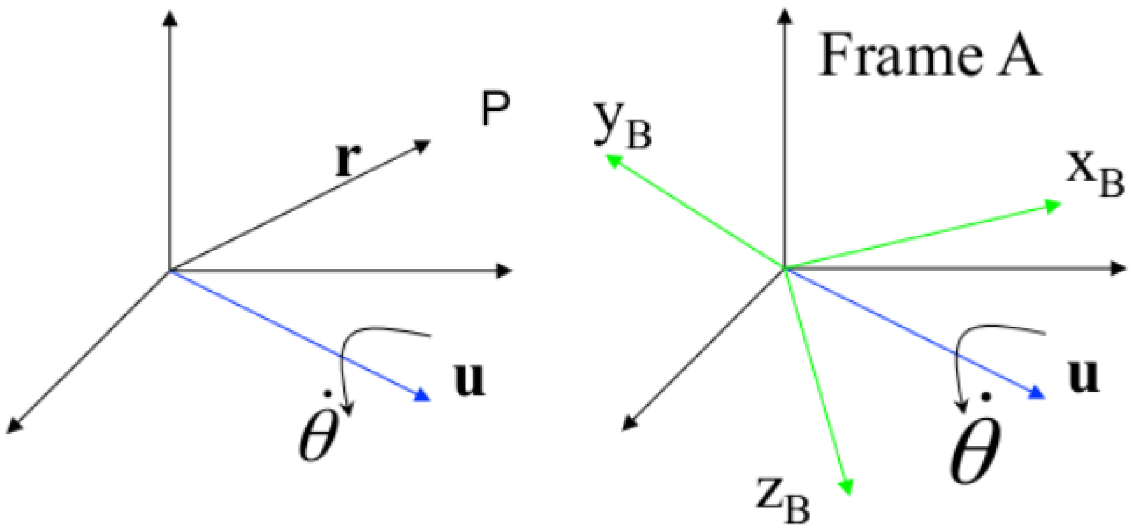
这部分讲刚体动力学相关的前置知识，熟悉的读者可以跳过。

众所周知，一个刚体在同一个惯性坐标系下进行平移运动，其平移量对时间的一阶导和二阶导即速度和加速度：

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}$$

对于旋转量以及非惯性系参考坐标系，情况稍微复杂些。

首先，如下图（左）所示，考虑一个从原点出发的向量 $\mathbf{r}$ 绕单位轴 $\mathbf{u}$ 旋转，角速度大小为 $\dot{\theta}$。



角速度矢量可以表示为 $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{u}$。易得向量 $\mathbf{r}$ 末端点 P 的速度矢量，即 $\mathbf{r}$的时间一阶导为

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

现在考虑上图（右），坐标系 {B} 绕单位轴 $\mathbf{u}$ 旋转，如上所述，其三个轴的时间一阶导同样为

$$\frac{d\mathbf{i}_B}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}_B, \frac{d\mathbf{j}_B}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}_B, \frac{d\mathbf{k}_B}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_B$$

我们知道，$[\mathbf{i}_B \quad \mathbf{j}_B \quad \mathbf{k}_B]$ 实际上就是坐标系 {B} 相对于参考坐标系的旋转矩阵 $\mathbf{R}$。所以 $\mathbf{R}$ 的时间一阶导为

$$\dot{\mathbf{R}} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}_B \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}_B \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_B] = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \tag{1.0}$$

我们知道上面的叉乘运算可以转化为负对称矩阵的乘法:

$$\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega}^\wedge \mathbf{R} \tag{1.1}$$

其中负对称矩阵为

$$\boldsymbol{\omega}^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

注意这里的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 是在参考坐标系下表达的。角速度也经常表达在体坐标系 {B} 下，记为 ${}^B\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}^T\boldsymbol{\omega}$，即 $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}^B\boldsymbol{\omega}$，于是 (1.1) 可以写作

$$\dot{\mathbf{R}} = (\mathbf{R}^B\boldsymbol{\omega})^\wedge\mathbf{R} \tag{1.2}$$

这里我们要利用负对称矩阵的一个很好的性质：对任意旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 和三维向量 $\mathbf{v}$，都有 $(\mathbf{R}\mathbf{v})^\wedge = \mathbf{R}\mathbf{v}^\wedge\mathbf{R}^T$（参看《(Rv)^ = Rv^R’ 的简单证明》），于是 (1.2) 可以写成

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}({}^B\boldsymbol{\omega})^\wedge \tag{1.3}$$

比较一下 (1.1) 和 (1.3)，可以发现一个很有趣的事实，角速度如果表达在参考坐标系下，负对称矩阵写在左边；如果表达在体坐标系下，负对称矩阵写在右边。这点微小的区别，读者在阅读文献时可以特别留意。

1-2. 前置(2)：四元数

这部分讲四元数如何表示旋转的前置知识，熟悉的读者可以跳过。

用旋转矩阵来表示旋转很直观，但过于冗余，因为旋转只有三个自由度，而旋转矩阵有九个量。表征旋转还可以用欧拉角，但有万向锁问题，而且计算也不方便。旋转向量（即李代数 so(3)）和四元数是更常用的表征方法，在惯性导航中四元数似乎更普遍些。这里采用四元数。

一个四元数由一个实部和三个虚部构成，书写顺序各家不同，这里和 MSCKF [1] 一样，虚部在前实部在后：

$$\mathbf{q} = q_1 i + q_2 j + q_3 k + q_4 = [\boldsymbol{v}^T \quad q_4]^T$$

虚部 $\boldsymbol{v} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$。虚部三个基 i, j, k 满足 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$。四元数仍是一种冗余表达法，为了更紧凑，通常使用使用单元四元数 $\bar{\mathbf{q}}$，通过将四元数的模直为 1 得到。

四元数和旋转向量有很直接的转换关系。绕单位轴 $\mathbf{u}$ 转了 θ 角度，用四元数表达为

$$\mathbf{q} = [\mathbf{u}\sin\frac{\theta}{2} \quad \cos\frac{\theta}{2}] \tag{1.4}$$

四元数乘法 $\otimes$ 为类似于多项式乘法的逐项相乘：

$$\begin{aligned}\mathbf{q}\otimes\mathbf{p} =& (q_1 i + q_2 j + q_3 k + q_4)(p_1 i + p_2 j + p_3 k + p_4)\\ =& (q_1p_4 + q_2p_3 - q_3p_2 + q_4p_1)i + (-q_1p_3 + q_2p_4 + q_3p_1 + q_4p_2)j +\\ & (q_1p_2 - q_2p_1 + q_3p_4 + q_4p_3)k + (-q_1p_1 - q_2p_2 - q_3p_3 + q_4p_4)\end{aligned}$$

这个计算结果可以表达为多种形式：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q} \otimes \mathbf{p} &= \begin{bmatrix} q_4 \mathbf{I}_3 + \boldsymbol{v}_q^{\wedge} & \boldsymbol{v}_q \\ -\boldsymbol{v}_q^T & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_p \\ p_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p_4 \mathbf{I}_3 - \boldsymbol{v}_p^{\wedge} & \boldsymbol{v}_p \\ -\boldsymbol{v}_p^T & p_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_q \\ q_4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

四元数乘法和其对应的两个旋转矩阵相乘物理意义是一样的，即 $\mathbf{R}(\mathbf{q} \otimes \mathbf{p}) = \mathbf{R}(\mathbf{q})\mathbf{R}(\mathbf{p})$。四元数对应的旋转矩阵为：

$$
\mathbf{R}(\mathbf{q}) = (2q_4^2 - 1)\mathbf{I}_3 + 2q_4 \boldsymbol{v}^{\wedge} + 2\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T \tag{1.5}
$$

四元数的逆为 $\mathbf{q}^{-1} = [-\boldsymbol{v}^T \quad q_4]^T$。易得 $\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^{-1} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T := \mathbf{q}_I$，故 $\mathbf{q}_I$ 表示旋转量为零。

四元数对时间一阶导为

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^{\wedge} & \boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q} := \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{q} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_4 \mathbf{I}_3 - \boldsymbol{v}^{\wedge} \\ -\boldsymbol{v}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

读者可能注意到了 (1.6) 和 (1.1) 形式上的相似。这里 $\boldsymbol{\omega}$ 的意义也是一样的。(1.6) 的推导可以参考 [2]，这里不赘述。

1-3. IMU 运动模型

有了前置知识的铺垫之后，我们可以给出 IMU 的运动模型：

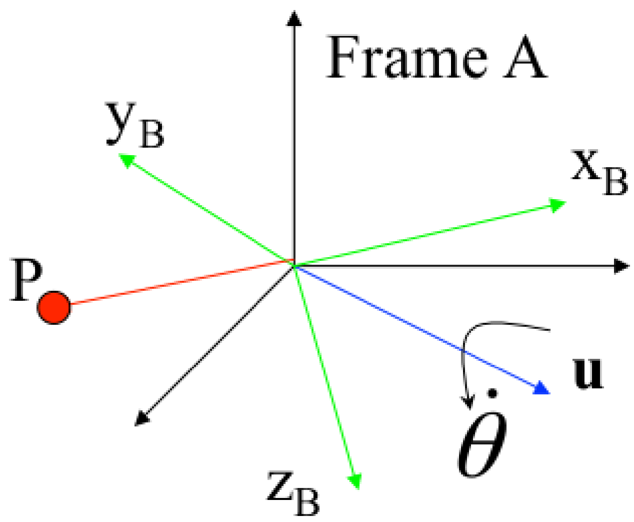
$$
\begin{aligned}
{}^I_G\dot{\bar{q}} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) {}^I_G\bar{q} \\
\dot{\mathbf{b}}_g &= \mathbf{n}_{wg} \\
{}^G\dot{\mathbf{v}}_I &= {}^G\mathbf{a} \\
\dot{\mathbf{b}}_a &= \mathbf{n}_{wa} \\
{}^G\dot{\mathbf{p}}_I &= {}^G\mathbf{v}_I
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

${}^I_G\dot{\bar{q}}$ 由 (1.6) 直接得到。注意这里角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 是在体坐标系 {I} 下表达的，与 (1.1) 处相反。原因是 ${}^I_G\bar{q}$ 表示的旋转方向与 (1.1) 处的 $\mathbf{R}$ 是相反的。其他的四项，速度和加速度都很简单，bias 两项在下面观测模型部分讲。

2. IMU 观测和噪声模型

2-1 前置(1)：科氏加速度

这部分在 1-1 的基础上，讨论参考坐标系不是惯性系的情况，熟悉科氏加速度的读者可以跳过。我们仍利用 1-1 中的图，但这次把绕惯性系 {A} 中固定单位轴 $\mathbf{u}$ 旋转的 {B} 作为参考坐标系。考虑下图， 点 P 相对于 {B} 运动，记 ${}^{B}\mathbf{r}$ 分别为 P 在 {B} 下的坐标，$\mathbf{r}$ 为 P 的绝对坐标（即 {A} 下坐标）， $\mathbf{R}$ 仍为 {B} 相对于 {A} 的旋转矩阵，易知 $\mathbf{r} = \mathbf{R}^{B}\mathbf{r}$ 。



求一阶时间导，并利用公式 (1.1)：

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}}^{B}\mathbf{r} + \mathbf{R}^{B}\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega}^{\wedge}\mathbf{R}^{B}\mathbf{r} + \mathbf{R}^{B}\dot{\mathbf{r}}$$

记 P 在 {B} 下速度为 ${}^{B}\mathbf{v}$，于是

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \boldsymbol{\omega}^{\wedge}\mathbf{r} + \mathbf{R}^{B}\mathbf{v} \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r \end{aligned} \tag{2.0}$$

请注意，这里用 $\mathbf{v}_r$ 来表达「相对速度」的概念，准确定义为 P 相对于 {B} 的速度，在惯性系 {A} 下的表达。请分清 $\mathbf{v}_r$、$\mathbf{v}$ 以及 ${}^{B}\mathbf{v}$ 三者之间的区别和联系。

再对 (2.0) 求时间导：

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{R}}^{B}\mathbf{v} + \mathbf{R}^{B}\dot{\mathbf{v}} \\ &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times （\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r） + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}^{B}\mathbf{v} + \mathbf{R}^{B}\mathbf{a} \\ &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \mathbf{a}_r \end{aligned} \tag{2.1}$$

我们来逐项分析上面这个式子。第一项中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 {B} 的角加速度，所以第一项的物理意义是 {B} 旋转所造成的 P 的切向加速度。第二项是 {B} 旋转所造成的向心加速度。第四项为 P 相对于 {B} 的加速度，但在惯性系 {A} 下表达——类似于 $\mathbf{v}_r$，定义相对加速度 $\mathbf{a}_r$。第三项比较特殊，为 {B} 的旋转运动与 P 相对 {B} 的平移运动耦合产生的加速度，称为「科氏加速度」。可以看到，除了第四项外，另外三项都和 {B} 的旋转有关。

2-2 前置(2)：惯性导航相关坐标系定义

这部分讲惯性导航中经常出现的几个坐标系的定义 [5]。

Earth-Centered-Earth-Fixed (ECEF) Frame：地心地固坐标系 ECEF。以地心为坐标原点，向北为 z 轴，x-y 平面为赤道平面，x 轴指向经纬度 (0,0) 点。ECI 固连在地球上，跟随地球自转，非惯性坐标系。MSCKF 一代 [1] 使用 ECEF 为参考坐标系 {G}。

Earth-Centered-Inertial (ECI) Frame：地心惯性坐标系 ECI。以地心为坐标原点，向北为 z 轴，x-y 平面为赤道平面，x 轴指向春分点（vernal equinox point，即每年春分时日心-地心连线与赤道的交点）。ECI 不跟随地球自转，在惯性导航中视为惯性坐标系。MSCKF 二代 [3] 使用 ECI 为参考坐标系 {G}。

Body Frame：体坐标系。原点在导航体的质心，固连在导航体上，用来表示导航体的姿态。在本文前置推导部分为 {B}，在 MSCKF 中为 {I}。

2-3 前置(3)：高斯白噪声与随机游走

这部分讲高斯白噪声和随机游走(random walk)模型，及其离散化。这部分在kalibr 库中的 IMU noise model [4] 有简单的介绍，这里在其基础上添加了离散化的推导，因为离散化中部分内容还是有些令人疑惑的。离散化的推导部分参考自 [5]。

先讲高斯白噪声。一个连续时间的高斯白噪声 $n(t)$，满足以下两个条件

$$E[n(t)] = 0$$
$$E[n(t_1)n(t_2)] = \sigma_g^2\delta(t_1 - t_2)$$

其中 $\delta()$ 表示狄拉克函数。可以看出，不同时刻的高斯白噪声相互独立。σ_g^2 为方差，值越大，表示噪声程度越大。

将高斯白噪声离散化，可得到：

$$n_d[k] = \sigma_{gd} w[k]$$

其中

$$w[k] \sim \mathcal{N}(0, 1)$$
$$\sigma_{gd} = \frac{\sigma_g}{\sqrt{\Delta t}}$$

其中 Δt 为采样时间。为什么离散化后分母会多出 $\sqrt{\Delta t}$ 这一项呢？我们假定在一个采样周期内 $n(t)$ 为常数，于是

$$n_d[k] \triangleq n(t_0 + \Delta t) \simeq \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n(\tau)dt$$

$$\begin{aligned} E(n_d[k]^2) &= E(\frac{1}{\Delta t^2} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n(\tau)n(t)d\tau dt) \\ &= E(\frac{\sigma_g^2}{\Delta t^2} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \delta(t-\tau)d\tau dt) \\ &= E(\frac{\sigma_g^2}{\Delta t}) \end{aligned}$$

所以有 $\sigma_{gd}^2 = \frac{\sigma_g^2}{\Delta t}$，即 $\sigma_{gd} = \frac{\sigma_g}{\sqrt{\Delta t}}$。

接下来讨论随机游走模型。准确地讲，随机游走其实是一个离散模型，其连续模型称为维纳过程（Wiener Process）。维纳模型是高斯白噪声的积分:

$$\dot{b}_g(t) = n(t) = \sigma_{bg} w(t)$$

其中 w 为单位高斯白噪声。将其离散化后得到随机游走模型:

$$b_d[k] = b_d[k-1] + \sigma_{bgd} w[k]$$

其中

$$\begin{aligned} w[k] &\sim \mathcal{N}(0,1) \\ \sigma_{gd} &= \sigma_{bg}\sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

这里多出来的 $\sqrt{\Delta t}$ 又是哪来的呢？仍假定一个采样周期内高斯白噪声为常数，有:

$$b_d[k] \triangleq b(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n(t)dt$$

$$\begin{aligned} E((b_d[k] - b_d[k-1])^2) &= E(\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} n(t)n(\tau)d\tau dt) \\ &= E(\sigma_{bg}^2 \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \delta(t-\tau)d\tau dt) \\ &= E(\sigma_{bg}^2 \Delta t) \end{aligned}$$

所以有 $\sigma_{bgd}^2 = \sigma_{bg}^2 \Delta t$，即 $\sigma_{bgd} = \sigma_{bg}\sqrt{\Delta t}$。

于是我们得到随机游走模型的完整表达。实际上，观察离散模型的表达式，可以发现它生动阐释了「随机游走」的含义：每一时刻都是上一个采样时刻加上一个高斯白噪声得

到的，犹如一个游走的粒子，踏出的下一步永远是随机的。在我们前面给出的 IMU 的运动模型中，bias 就设定为服从随机游走模型。

2-4. IMU 观测模型

根据上述前置知识，现在我们可以给出 IMU 的观测模型。需要注意的是，观测在不同参考坐标系下形式不同。

以 ECEF 为参考坐标系：这是 MSCKF 一代 [1] 的做法。因为 ECEF 不是惯性系，需要考虑地球自转，于是加速度模型中将会引入科氏加速度。记 $\boldsymbol{\omega}_G$ 为地球自转角速度，${}^G\mathbf{g}$ 为重力加速度， $\boldsymbol{\omega}_m, \mathbf{a}_m$ 为陀螺仪和加速度计的观测量，观测模型由以下公式给出：

$$\boldsymbol{\omega}_m = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}({}^I_G\bar{q})\boldsymbol{\omega}_G + \mathbf{b}_g + \mathbf{n}_g \tag{2.2}$$

$$\mathbf{a}_m = \mathbf{R}({}^I_G\bar{q})({}^G\mathbf{a} - {}^G\mathbf{g} + 2\boldsymbol{\omega}_G^{\wedge}\,{}^G\mathbf{v}_I + (\boldsymbol{\omega}_G^{\wedge})^2\,{}^G\mathbf{p}_I) + \mathbf{b}_a + \mathbf{n}_a \tag{2.3}$$

观测量都是在体坐标系 {I} 下表达的，所以在参考坐标系 {G} 下表达的量都需要左乘一个旋转矩阵转化到体坐标系。每个观测量的不确定量都用一个随机游走的 bias 和一个高斯白噪声之和来表达。陀螺仪的观测模型是比较易懂的。加速度计的观测模型，我们先将其改写为形如 (2.1) 的形式：

$$\mathbf{R}^T({}^I_G\bar{q})(\mathbf{a}_m - \mathbf{b}_a - \mathbf{n}_a) = (\boldsymbol{\omega}_G^{\wedge})^2\,{}^G\mathbf{p}_I + 2\boldsymbol{\omega}_G^{\wedge}\,{}^G\mathbf{v}_I + {}^G\mathbf{a} - {}^G\mathbf{g}$$

但这还不够，因为各个量只是在 ECEF 坐标系 {G} 下的表达，而 (2.1) 中的量都是表达在惯性坐标系下的。记 $\mathbf{R}_G$ 为将 {G} 下坐标映射到惯性坐标系下坐标的旋转矩阵。由于 ECEF 绕固定的 z 轴匀速转动，易得 $\mathbf{R}_G\boldsymbol{\omega}_G = \boldsymbol{\omega}_G$。于是上式两边左乘 $\mathbf{R}_G$，可得

$$\mathbf{R}_G\mathbf{R}^T({}^I_G\bar{q})(\mathbf{a}_m - \mathbf{b}_a - \mathbf{n}_a) = \boldsymbol{\omega}_G \times (\boldsymbol{\omega}_G \times \mathbf{R}_G\,{}^G\mathbf{p}_I) + 2\boldsymbol{\omega}_G \times (\mathbf{R}_G\,{}^G\mathbf{v}_I) + \mathbf{R}_G({}^G\mathbf{a} - {}^G\mathbf{g})$$

这里我们还利用了 $\mathbf{R}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{R}\mathbf{a} \times \mathbf{R}\mathbf{b}$ 的性质。上式对应到 (2.1) 中各项，左边为绝对加速度 $\mathbf{a}$；因为地球自转是匀速的，故切向加速度项 $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$ 为零。其余各项，依次为向心加速度项 $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$，科氏加速度项 $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$，以及相对加速度项 $\mathbf{a}_r$。

以 ECI 为参考坐标系：这是 MSCKF 二代 [3] 的做法。由于 ECI 为惯性系，不需要考虑地球自转，于是观测模型简单很多：

$$\boldsymbol{\omega}_m = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}({}^I_G\bar{q})\boldsymbol{\omega}_G + \mathbf{b}_g + \mathbf{n}_g \tag{2.4}$$

$$\mathbf{a}_m = \mathbf{R}({}^I_G\bar{q})({}^G\mathbf{a} - {}^G\mathbf{g}) + \mathbf{b}_a + \mathbf{n}_a \tag{2.5}$$

因为比较简单，就不多做解释了。从文献上看，现在移动机器人领域 ECI 用得更多些。

至此，我们推导完了 IMU 的观测模型。

3. IMU 状态估计误差模型

3-1. 前置：四元数误差小量

旋转量是非线性的，不宜像线性量那样使用 $\tilde{\mathbf{x}} = x - \hat{x}$ 来定义误差量。这里我们使用四元数误差小量来定义误差量。根据 (1.4)，四元数可以用旋转向量经简单的转换得到。假定绕单位轴 $\mathbf{u}$ 旋转了一个角度小量 $\delta\theta$，用四元数表达为：

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{q} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}\sin\frac{\delta\theta}{2} \\ \cos\frac{\delta\theta}{2} \end{bmatrix} \\
&\simeq \begin{bmatrix} \mathbf{u}\frac{\delta\theta}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{\delta\theta}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

于是，可以用 $\delta\mathbf{q}$ 来表示旋转的真实值和估计值之间的误差，具体关系为

$$
\mathbf{q} = \delta\mathbf{q} \otimes \hat{\mathbf{q}}
$$

直接使用 $\boldsymbol{\delta\theta}$，可以实现参数最小化，适用于优化问题中的目标函数。

3-2. IMU 状态估计误差模型

我们直接给出和 MSCKF 一样的 IMU 状态估计误差模型：

$$
\tilde{\mathbf{X}}_{IMU} = [\boldsymbol{\delta\theta}_I^T \quad \tilde{\mathbf{b}}_g^T \quad {}^G\tilde{\mathbf{v}}_I^T \quad \tilde{\mathbf{b}}_a^T \quad {}^G\tilde{\mathbf{p}}_I^T] \tag{3.0}
$$

其中旋转量按照四元数误差小量给出，其余直接由真实值和估计值相减得到。

4. 小结

本文从基础出发推导了 IMU 的运动模型(1.7)、观测和噪声模型(2.2) – (2.5)、估计误差模型(3.0)，适用于用 IMU 来做状态估计的场合。至于以上这些模型如何再经过线性化、离散化等处理进入具体状态估计问题的框架中，这里不做赘述，留待读者阅读和探索。

参考文献

[1] Mourikis, Anastasios I., and Stergios I. Roumeliotis. “A multi-state constraint Kalman filter for vision-aided inertial navigation.” Proceedings 2007 IEEE

International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 2007.

[2] Trawny, Nikolas, and Stergios I. Roumeliotis. "Indirect Kalman filter for 3D attitude estimation." University of Minnesota, Dept. of Comp. Sci. & Eng., Tech. Rep 2 (2005): 2005.

[3] Li, Mingyang. "Visual-inertial odometry on resource-constrained systems." (2014).

[4] IMU noise model https://github.com/ethz-asl/kalibr/wiki/IMU-Noise-Model

[5] Crassidis, John L., and John L. Junkins. Optimal estimation of dynamic systems. CRC press, 2011.

标签: robotics VIO

留言请用 Github Issues