Bir fonksiyonun diferansiyeli: $y=f(x)$ fonksiyonunun türevi $y'=f'(x)$ olduğuna göre $f'(x).\Delta x$ ifadesine y fonunun diferansiyeli denir ve dy ile gösterilir. Böylece $\boxed{dy=f'(x).\Delta x}$ .... (1) yazılabilir.

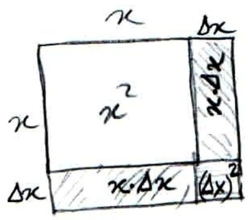
Öte yandan $y=f(x)=x$ özdeşlik fonu için $dy=df(x)=dx=1.\Delta x$ olduğundan her zaman $\boxed{\Delta x=dx}$ dir. Böylece bir $y=f(x)$ fonksiyonunun diferansiyeli $\boxed{dy=f'(x).dx}$ -------- (2) olarak da yazılabilir.

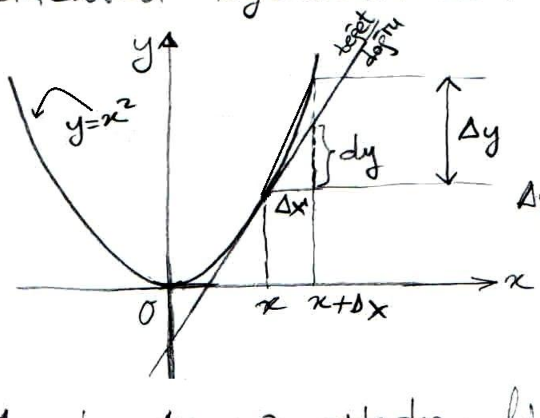
Δx her zaman dx olmasına karşın, Δy ise genel olarak dy demek değildir. Meselâ $y=f(x)=x^2$ fonksiyonu için Δy fonksiyon farkı ve dy fonksiyon diferansiyeli hesaplanırsa;

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 \quad --- (3)$$

ve $dy = f'(x).\Delta x = 2x.\Delta x$ -------------- (4)

olup, gerçekten $\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \neq 2x\,\Delta x = dy$ dir.





$\Delta y \neq dy$ dir. Fakat Δx oldukça küçük ise $\Delta y \approx dy$ dir. Gerçekten

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ in $\Delta x \to 0$ giderken limiti $\dfrac{dy}{dx}$ olup, $|x|$ sayısına göre $|\Delta x|$ yeterince küçük ise $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \approx \dfrac{dy}{dx}$ olup

$$\cancel{\Delta x}\cdot\frac{\Delta y}{\cancel{\Delta x}} \approx \frac{dy}{\cancel{dx}}\cdot\cancel{\Delta x} \Rightarrow \Delta y \approx dy$$ dir. Yani

"yaklaşık hesaplama formülü" denilen $\boxed{f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x).\Delta x}$ ---- (5)

Ya da $\boxed{f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x).\Delta x}$ ---- (6) dir.

(6) numaralı formül bazı kitaplarda $\boxed{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)}$ ...(7)
biçiminde de verilmektedir.

Örnek: $\sqrt{1,22}$ nin yaklaşık bir değerini bulunuz.

Çözüm: $f(x) = \sqrt{x}$ denilirse $x = 1,21$ seçildiğinde $\Delta x = 0,01$ olup

$\Delta y \approx dy \Leftrightarrow f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x).\Delta x$ veya buradan

$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x).\Delta x$ olup $x = 1,21$; $\Delta x = 0,01$ için

$f(1,21+0,01) \approx f(1,21) + f'(1,21)\cdot 0,01$ dir. $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\underbrace{\sqrt{1,21+0,01}} \approx \sqrt{1,21} + \frac{1}{2\sqrt{1,21}}\cdot 0,01$ den

$\sqrt{1,22} \approx 1,1 + \frac{0,01}{2\cdot(1,1)} = 1,1 + \frac{0,01}{2,2} = 1,1 + \frac{1}{220} = \underline{\underline{\frac{243}{220}}}$ // bulunur.

Not: $\frac{243}{220} = 1,10\overline{45}$ dir. Yani $\sqrt{1,22} \approx 1,10\overline{45}$ dir. Bu sayının hesap makinası ile bulunan sonucu ise $\sqrt{1,22} = 1,104536101718726$ dır.

Örnek: $\sin 29°$ nin yaklaşık bir değerini $\Delta y \approx dy$ yaklaşık hesaplama formülü ile bulunuz.

Çözüm: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$ den $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x).\Delta x$ dır.
Burada $f(x) = \sin x$ olmak üzere $f'(x) = \cos x$ ve $x = 30° = \frac{\pi}{6}$ radyan

$\Delta x = 1° = \frac{\pi}{180}$ rad $\cong 0,0174$ radyan alınırsa $f(29°) \approx f(30°) + f'(30°).(-\frac{\pi}{180})$ den

$f(29) = f(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}) \approx f(\frac{\pi}{6}) + f'(\frac{\pi}{6})\cdot(-\frac{\pi}{180})$ den

$\sin 29° = \sin(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}) \approx \sin\frac{\pi}{6} + (\cos\frac{\pi}{6})(-\frac{\pi}{180}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}$ dan

$\frac{\pi}{180} \cong 0,0174$ olup $\sin 29° \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0,0174 \cong \frac{1}{2} - \frac{1,73}{2}\cdot 0,0174$ den

$\sin 29° \approx 0,5 - 0,015 = \underline{\underline{0,485}}$ // bulunur

Örnek: Arctan(0,98) nin yaklaşık bir değerini bulunuz

Çözüm: $\Delta y \approx dy \Leftrightarrow f(x+\Delta x)-f(x) \approx f'(x).\Delta x$ olup burada

$f(x)=\text{Arctan}x$ seçilirse, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ olup $x=1$ ve $\Delta x=-0{,}02$ için

$$\text{Arctan}(1+(-0{,}02))-\text{Arctan}1 \approx \frac{1}{1+1^2}\cdot(-0{,}02) \text{ den}$$

$$\text{Arctan}(0{,}98)-\frac{\pi}{4} \approx -\frac{0{,}02}{2} \Rightarrow \text{Arctan}(0{,}98) \approx \frac{\pi}{4}-0{,}01$$

$$\Rightarrow \text{Arctan}(0{,}98) \approx \frac{3{,}1416}{4}-0{,}01 = 0{,}7854-0{,}01 = \underline{0{,}7754} \text{ dür}$$

Örnek: Yüksekliği h, yarıçapı r olan dik dairesel silindirin r yarıçapı Δr kadar değiştiğinde, V hacmindeki ΔV değişimini yaklaşık olarak bulunuz.

Çözüm: $\Delta V \approx dV$ yaklaşık hesaplama formülünden

$V(r)=\pi r^2 h$, $V'(r)=2\pi r h$, $dV=V'(r).\Delta r=2\pi r h.\Delta r$ olup

$\Delta V \approx dV = \underline{2\pi r h.\Delta r}$ dır. Yani $\Delta V \approx \underline{2\pi r h.\Delta r}$ dır.

Gerçekten $\Delta V=\pi(r+\Delta r)^2 h-\pi r^2 h = 2\pi r h.\Delta r+\pi h(\Delta r)^2 \approx 2\pi r h\,\Delta r = dV$ dır.

Örnek: Bir kenarı 5 cm olan bakır kübün her kenarı Δx kadar taşlandığında, ağırlığı 0,96 gr azalmıştır. Bakırın özgül ağırlığını $\rho=8$ gr/cm^3 kabul edip, Δx'i bulunuz.

Çözüm: Ağırlık =(Özgül ağırlık)x(Hacim) olduğundan $f(x)=\rho.V=8.x^3$ tür.

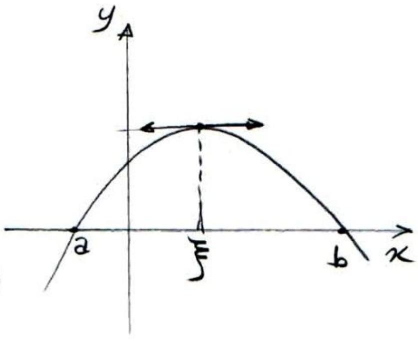
$f'(x)=24.x^2$ dır. $\Delta f \approx df$ den $8(5+\Delta x)^3-8.5^3 \approx 24.5^2.\Delta x=-0{,}96$ gr

olup $24.25.\Delta x=-0{,}96 \Rightarrow \Delta x=-\dfrac{0{,}96}{24.25}=-\dfrac{0{,}04}{25}=-\dfrac{0{,}16}{100}$ den

$\boxed{\Delta x=-0{,}0016}$ bulunur.

Diferansiyel Hesabın Temel Teoremleri

Rolle Teoremi:



$[a,b]$ kapalı aralığında sürekli, (a,b) açık aralığında türevli ve aralığın uç noktalarında aynı değeri alan $y=f(x)$ fonu için en az bir $\xi \in (a,b)$ için

$$f'(\xi)=0 \quad \text{dır}, \ (a<\xi<b)$$

Örnek: $y=f(x)=3.\sqrt[3]{x^4}$ fonksiyonuna $[-1,1]$ aralığında Rolle teoremi uygulanabiliyorsa, uygun $\xi \in (-1,1)$ sayısını bulunuz.

$f(x)=3.\sqrt[3]{x^4}=3.x^{4/3} \Rightarrow f'(x)=3.\frac{1}{3}.x^{\frac{4}{3}-1}=x^{1/3}$ olup

$[-1,1]$ de $f(x)=3.\sqrt[3]{x^4}$ fonu süreklidir.

$(-1,1)$ de $f'(x)=\sqrt[3]{x}$ türevi vardır.

$f(-1)=3.\sqrt[3]{(-1)^4}=3.\sqrt[3]{1^4}=f(1)$ dır.

Rolle teoreminin üç şartı da sağlandığından Rolle teoremi gereği en az bir $\xi \in (-1,1)$ için $f'(\xi)=\sqrt[3]{\xi}=0$ dır. Buradan

$\sqrt[3]{\xi}=0 \Rightarrow \xi=0^3=0 \in (-1,1)$ dir.

Örnek: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{2}}-\sin\frac{\pi x}{4}$ fonksiyonuna $[0,1]$ kapalı aralığında Rolle teoremi uygulanabilirse, uygun $\xi \in (0,1)$ sayısını bulunuz.

Çözüm: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{2}}-\sin\frac{\pi x}{4}$ fonu $[0,1]$ de sürekli, $(0,1)$ de $f'(x)$ türevi var $\left(f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi x}{4}\right)$, $f(0)=f(1)=0$ dır. Dolayısıyla Rolle teoremini uygulayabiliriz: $f'(\xi)=0$, $0<\xi<1$ den

$f'(\xi)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi\xi}{4}=0 \Rightarrow \cos\frac{\pi\xi}{4}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\approx 0{,}9 \Rightarrow \frac{\pi\xi}{4}\cong \operatorname{Arccos} 0{,}9 \cong 0{,}45$ den

$\xi \cong \frac{4}{\pi}0{,}45 \cong 0{,}57334 \in (0,1)$ dır $\left(\xi \cong 0{,}57334^{rd} \cong (32{,}84)^{\circ}\right.$ dır.$\left.\right)$

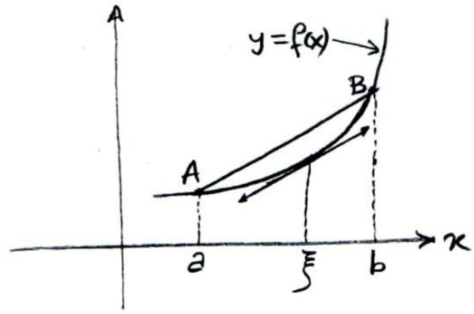
Örnek: $f(x)=|\ln x|$ fonksiyonuna $[\frac{1}{e}, e]$ aralığında Rolle teoremi uygulanabilir mi? Uygulanabilirse uygun $\xi \in (\frac{1}{e}, e)$ sayısını bulunuz.

Çözüm: Fonksiyonun $x_0=1 \in (\frac{1}{e}, e)$ noktasında türevi olmadığından (Diğer iki koşul sağlandığı halde) Rolle teoremi uygulanamaz.

Lagrange (Ortalama Değer) Teoremi: $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli, (a,b) açık aralığında türevli olan bir $f(x)$ fonksiyonu için öyle bir $\xi \in (a,b)$ noktası vardır ki

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \quad \text{.........} (1)$$

dir $(a<\xi<b)$.



Örnek: $f(x)=\ln x$ fonksiyonu $[1,e]$ aralığında Lagrange teoremini sağlar mı? Sağlarsa uygun $\xi \in (1,e)$ sayısını bulunuz.

Çözüm: $[1,e]$ de $f(x)=\ln x$ fo.nu süreklidir. $(1,e)$ de $f'(x)=\frac{1}{x}$ türevi vardır. Dolayısıyle Lagrange teoremi (ortalama değer teoremi) koşulları sağlanır. O halde en az bir $\xi \in (1,e)$ için

$$\frac{f(e)-f(1)}{e-1} = f'(\xi) \text{ dir. Yani } \frac{\ln e - \ln 1}{e-1} = \frac{1}{\xi}, \quad (1<\xi<e) \text{ dir.}$$

Buradan $\frac{1-0}{e-1} = \frac{1}{\xi} \Rightarrow \xi = e-1 \in (1,e)$ dir.

Örnek: $y=f(x)=(x-1)^{2/3}$ fonksiyonuna $[1,2]$ kapalı aralığında Lagrange teoremi uygulanabiliyorsa, uygun $\xi \in (1,2)$ noktasını bulunuz.

Çözüm: $f(x)=(x-1)^{2/3}$; $f'(x)=\frac{2}{3}(x-1)^{-1/3} = \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x-1}}$ olup $[1,2]$ kapalı aralığında fo. süreklidir ve $(1,2)$ de $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$ türevi vardır. Dolayısıyle Lagrange teoreminin iki koşulu da sağlanır ve teorem gereği

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f'(\xi), \ (1<\xi<2) \Rightarrow \frac{(2-1)^{2/3}-(1-1)^{2/3}}{2-1} = \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{\xi-1}} \Rightarrow \frac{1-0}{1} = \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{\xi-1}} \text{ den}$$

$$\sqrt[3]{\xi-1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \xi-1 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow \xi = \frac{8}{27}+1 = \frac{35}{27} \in (1,2) \text{ dir.}$$

Uyarı: Lagrange teoremindeki (1) formülüne Lagrange formülü denir. Bu formül $\boxed{f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)}$, $(a<\xi<b)$ şeklinde de yazılabilir.

Hatta $a<\xi<b$ den $a-a<\xi-a<b-a \Rightarrow 0<\xi-a<b-a$ dan

$$\frac{0}{b-a}<\frac{\xi-a}{b-a}<\frac{b-a}{b-a} \Rightarrow 0<\frac{\xi-a}{b-a}<1$$ olup $\frac{\xi-a}{b-a}=\theta$ denilirse

$0<\theta<1$ ve $\xi-a=\theta(b-a) \Rightarrow \xi=a+\theta(b-a)$ değeri yukarıdaki Lagrange formülünde yerine yazılırsa

$$\boxed{f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))\cdot(b-a)} \quad ,(0<\theta<1) \quad \text{-----}(2)$$

Lagrange formülü veya sonlu artmalar formülü elde edilir.
Hatta a yerine x ve b yerine $x+\Delta x$ alınırsa

$$\boxed{f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x} \quad ,\ (0<\theta<1) \quad \text{-----}(3)$$

Sonlu artmalar formülü elde edilir. Bu son formülde $|x|$'e göre $|\Delta x|$ çok küçük ise $\theta\cdot\Delta x$ ihmal edilirse

$$\boxed{\underbrace{f(x+\Delta x)-f(x)}_{\Delta y} \approx \underbrace{f'(x)\cdot\Delta x}_{dy}} \quad \text{--------} \quad (4)$$

Yaklaşık hesaplama formülü Lagrange teoreminden elde edilmiş olur.

Örnek: $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$, $(0<a<b)$ eşitsizliğinin doğruluğunu Lagrange teoremine dayanarak gösteriniz.

Çözüm: $y=f(x)=\ln x$ f.nu göz önüne alınsın. $[a,b]$ de $f(x)=\ln x$ f.nu sürekli (a,b) de $f'(x)=\frac{1}{\xi}$ türevi var. O halde Lagrange teoreminden

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$,$(a<\xi<b)$ dır. Yani $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{\xi}$, $a<\xi<b$ dır

Öte yandan $a<\xi<b \Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{a}$ olup $\frac{1}{\xi}$ yerine yukarıda eşitlikten $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$ yazılırsa $\frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a} \Rightarrow \frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$ bulunur

Örnek: Her $x>0$ için $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $[0,x]$ kapalı aralığı ve $f(x)=\ln(1+x)$ f.nu gözönüne alınsın. $f(x)=\ln(1+x)$ f.nu $[0,x]$ de süreklidir ve $(0,x)$ açık aralığında $f'(x)=\frac{1}{1+x}$ türevi vardır. O halde en az bir $\xi\in(0,x)$ için $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)$, $(0<\xi<x) \Rightarrow \frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x-0}=\frac{1}{1+\xi}$, $(0<\xi<x)$

dir. $0<\xi<x$ den $0+1<1+\xi<1+x \Rightarrow \frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}<\frac{1}{0+1}$

$$\frac{1}{1+x}<\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x-0}<\frac{1}{1} \text{ den}$$

$\forall x>0$ için $\boxed{\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x}$ elde edilir.

Örnek: $x>0$ için $\frac{x}{1+x^2}<\mathrm{Arctan}\,x<x$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm Önce $[0,x]$ kapalı aralığında $f(x)=\mathrm{Arctan}\,x$ fonksiyonuna Lagrange teoremi uygulanabilir mi? Buna bakalım. $[0,x]$ de $f(x)=\mathrm{Arctan}\,x$ f.nu sürekli, $(0,x)$ de $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ türevi vardır. Dolayısıyla en az bir $\xi\in(0,x)$ için $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)$ dır. Yani

$$\frac{\mathrm{Arctan}\,x-\mathrm{Arctan}\,0}{x-0}=\frac{1}{1+\xi^2} \quad ,(0<\xi<x) \quad ; \quad \frac{\mathrm{Arctan}\,x}{x}=\frac{1}{1+\xi^2} \,,0<\xi<x$$

olup $0<\xi<x$ den $0^2<\xi^2<x^2 \Rightarrow 1+0^2<1+\xi^2<1+x^2 \Rightarrow$

$\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{1+\xi^2}<\frac{1}{1}$ de $\frac{1}{1+\xi^2}$ yerine eşidi olan $\frac{\mathrm{Arctan}\,x}{x}$ yazılırsa

$\frac{1}{1+x^2}<\frac{\mathrm{Arctan}\,x}{x}<1$ de her bir yan x ile $(x>0)$ çarpılırsa

eşitsizlik yön değiştirmez ve $\frac{x}{1+x^2}<\mathrm{Arctan}\,x<x$ bulunur.

Cauchy Teoremi: $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli, (a,b) açık aralığında türevli $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları ($x\in(a,b)$ için $g'(x)\neq 0$) için öyle bir $\xi\in(a,b)$ noktası vardır ki $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ dır.

Örnek: $f(x)=x^2$ ve $g(x)=\ln x$ fonksiyonları $[1,e]$ aralığında Cauchy teoremini sağlıyorsa, uygun $\xi\in(1,e)$ noktasını bulunuz.

Çözüm: $[1,e]$ de $f(x)$ ve $g(x)$ fo. ları süreklidir. $(1,e)$ de $f'(x)=2x$ ve $g'(x)=\dfrac{1}{x}$ türevleri vardır. O halde en az bir $\xi\in(1,e)$ değeri için $\dfrac{f(e)-f(1)}{g(e)-g(1)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, $(1<\xi<e)$ dir. Buradan

$$\frac{e^2-1^2}{\ln e-\ln 1}=\frac{2\xi}{\frac{1}{\xi}}\Rightarrow\frac{e^2-1}{1-0}=2\xi^2\Rightarrow\xi^2=\frac{\sqrt{e^2-1}}{2}\cong\frac{\sqrt{7,39-1}}{2}$$

$\xi=\mp\dfrac{\sqrt{6,39}}{2}$ olup $\xi_1\cong\dfrac{\sqrt{6,39}}{2}\in(1,e)$ dir $\left(\xi_2\cong-\dfrac{\sqrt{6,39}}{2}\notin(1,e)\text{ dir}\right)$

Teorem (L'Hospital Kuralı): $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ limiti $\dfrac{0}{0}$ veya $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerinden biri ise

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\quad\text{dir.}$$

Eğer yukarıdaki limitin sonucu hâlâ $\dfrac{0}{0}$ (veya $\dfrac{\infty}{\infty}$ ise) L'Hospital kuralı tekrar uygulanır.

Yani $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}\overset{0/0}{=}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\overset{0/0}{=}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}\ \ldots$ dir.

Örnek: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x^2}$ limitini hesaplayınız

Çözüm: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2} \overset{0/0}{\underset{L'Hsp}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}-\frac{1}{2}}{2x} \overset{0/0}{\underset{L'Hsp}{=}}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}-0}{2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\frac{1}{4}}{2\cdot\sqrt[3]{(1+x)^2}}\right) = -\frac{1}{8}$

Örnek: $\lim_{x\to 1} (1-x)\cdot\tan\frac{\pi x}{2}$ limitini hesaplayınız

Çözüm: $\lim_{x\to 1} (1-x)\cdot\tan\frac{\pi x}{2} \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 1} (1-x)\cdot\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}} = \underbrace{\lim_{x\to 1} \sin\frac{\pi x}{2}}_{=1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}} =$

$= 1\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}} \overset{0/0}{\underset{L'Hsp}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2}} = \frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\cdot 1} = \frac{2}{\pi}$ dır.

Örnek: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x} \overset{0/0}{\underset{L'Hsp}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1\cdot\sin x + x\cdot\cos x} =$

$\overset{0/0}{\underset{L'Hsp}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{+\sin x}{\cos x + 1\cdot\cos x - x\cdot\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x - x\cdot\sin x} = \frac{0}{2\cdot 1-0} = \frac{0}{2} = 0$ bulunur

---

Örnek: $\lim_{x\to 1^+} \ln x\cdot\ln(x-1)$ limitini hesaplayınız.

$\lim_{x\to 1^+} \ln x\cdot\ln(x-1) \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} \overset{\infty/\infty}{\underset{L'Hsp}{=}} \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x\cdot\ln^2 x}} \overset{\infty/\infty}{=}$

$= -\lim_{x\to 1^+}\frac{x\cdot\ln^2 x}{x-1} \overset{0/0}{\underset{L'Hsp}{=}} -\lim_{x\to 1^+}\frac{1\cdot\ln^2 x + x\cdot\frac{2}{x}\cdot\ln x}{1} = -\lim_{x\to 1^+}(\ln^2 x + 2\ln x) = 0$ dır.

NOT : Bu kısa ders notunun hazırlanmasında Piskunov'un kitabından ve Literatür yayını mavi kitaptan yararlanılmıştır. 30.11.2014