Fonksiyonun Grafiğinin (Eğrisinin) Çizimi

$y=f(x)$ fonksiyon kuralı ile verilen bir fonksiyonun eğrisini çizmek için genel olarak aşağıdaki incelemeler yapılır:

1° Fonksiyonun tanım aralığı bulunur. Tanım aralığının uç noktalarında limitler araştırılarak asimtotlar belirlenir.

2° $f'(x)$ türevi hesaplanır. $f'(x)$ türevini sıfır veya tanımsız yapan kritik noktalar belirlenir. Bu türevin işaret tablosu oluşturularak fo.nun artan ve azalan olduğu aralıklar ve (varsa) ekstremumlar bulunur.

3° $f''(x)$ hesaplanır. $f''(x)$ türevini sıfır veya tanımsız yapan kritik noktalar belirlenir, bu türevin işaret tablosuna bakarak fo.nun konveks ve konkav olduğu aralıklar, (varsa) büküm noktaları bulunur.

4° Özel noktalar (eğrinin eksenleri kestiği noktalar, ekstremum ve büküm noktalarının ordinatları bulunur.

5° Gerek duyulduğunda eğri ile asimtotlarının durumu (eğrinin yatay ve eğik asimptotunu kesip kesmediği) incelenir ve bazı dikkate değer noktalardaki teğetler belirlenir.

6° Bu bilgiler bir tabloda toplanır.

7° Tabloya bakarak fonksiyonun grafiği (eğrisi) çizilir.

Not: $f'(x)=0$ yapan x_0 için ekstremum $f''(x)$ in işaretine bakarak da belirlenebilir. $f'(x_0)=0$ iken $f''(x_0)<0$ ise x_0 da maksimum, $f''(x_0)>0$ ise x_0 da bir minimum vardır. $f'(x_0)$ tanımsız iken bu x_0'ın öncesinde ve sonrasında $f'(x)$ türevinin işaretleri farklı ise burası yine bir ekstremumdur. (bkz. $f(x)=|\ln x|$ fonksiyonunun $x_0=1$ deki $f'(1^-)$ ve $f'(1^+)$ türevlerinin işareti.)

Nota devam: Eğer $f''(x_0)=0$ veya $f''(x)=$ tanımsız $(x_0\in A)$ ②
iken $f''(x_0^-)$ ve $f''(x_0^+)$ soldan ve sağdan türevleri farklı işarette ise x_0 noktasında daha doğrusu $(x_0, f(x_0))$ noktasında fonksiyonun bir büküm noktası vardır.

Örnek ① $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ fonksiyonunu inceleyip, grafiğini çiziniz.

1° $f(1)=\dfrac{1}{1-1}=\dfrac{1}{0}=$ tanımsız old. Tanım aralığı $A=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ dur.

$\lim\limits_{x\to\mp\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$ old. $y=1$ yatay asimptot, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\overset{(+)}{x}}{\underset{(-)}{x-1}}=-\infty$

ve $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\overset{(+)}{x}}{\underset{(+)}{x-1}}=+\infty$ olup $x=1$ düşey asimptottur.

2° $f'(x)=\dfrac{1\cdot(x-1)-x\cdot(1)}{(x-1)^2}=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0$ dır $\forall x\in A$ için

Yani fonksiyon daima azalandır. Dolayısıyla ekstremum yoktur.
(Yani $f'(x)=0$ yapan $x\in A$ yoktur. $f'(1)=$ tanımsız, fakat $x_0=1$ tanım aralığında olmadığından ekstremumdan söz edilemez.)

3° $f''(x)=\dfrac{0\cdot(x-1)^2-(-1)\cdot2(x-1)}{(x-1)^4}=\dfrac{+2(x-1)}{(x-1)^4}=\dfrac{2}{(x-1)^3}$ dür.

($f'(x_0)=0$ iken $f''(x_0)=0$ yapan $x_0\in A$ yoktur. $f'(1)=$ tanımsız iken $f''(1)$ de tanımsızdır, fakat $x_0=1\notin A$ olduğundan büküm noktası yoktur.

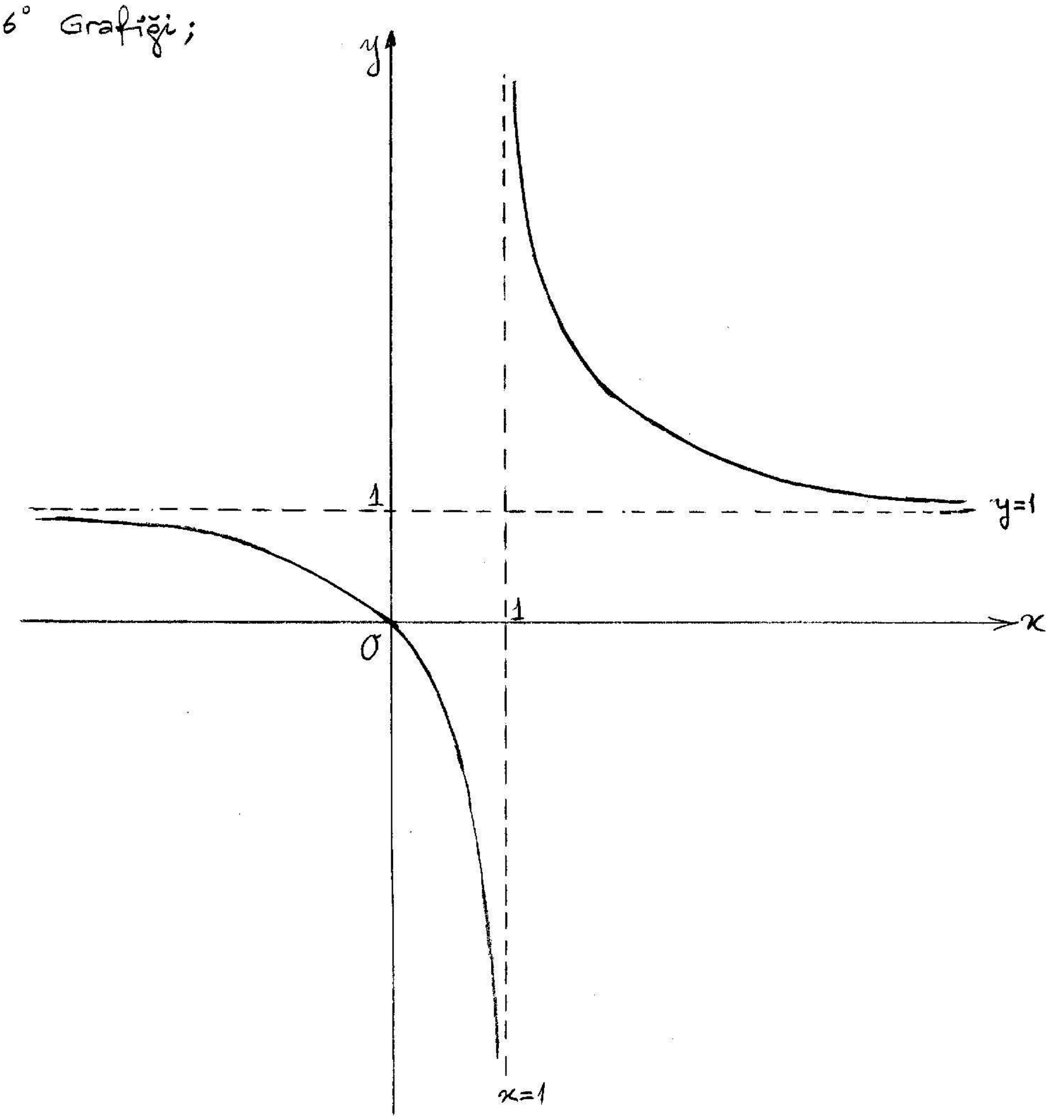
4° Özel noktalar olarak sadece $x=0$ için $f(0)=\dfrac{0}{0-1}=0$ olup eğrimiz $O(0,0)$ başlangıç noktasından geçer.
(Maksimum, minimum, büküm noktaları olmadığından, başka özel noktalar söz konusu değildir)

Örnek (1) devam:

5°

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	‖	$-$	
y''		$-$		$-$	‖	$+$	
y	1	$\searrow$	0	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	1

6° Grafiği;



Örnek 2 $y=f(x)=x.\ln x$ fo.nunu inceleyip grafiğini çiziniz.

1° $f(x)=x.\ln x$ fo.nu $x>0$ için tanımlıdır. $A=(0,+\infty)$ dur.

$$\lim_{x\to 0^+} x.\ln x \overset{0.\infty}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} \underset{L'Hsp}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{x} =$$

$$=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0 \text{ dır.}$$

$\lim_{x\to\infty} x.\ln x = \infty.\infty=\infty$ dur. Eğik asimptot olabilir. m eğimine bakılırsa; $m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}.\ln x}{\cancel{x}}=\lim_{x\to\infty}\ln x=-\infty$ olup eğik asimptot yoktur.

2° $f'(x)=1.\ln x+x.\frac{1}{x}=1+\ln x$ olup $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1+\ln x=0$ dan

$x_0=\frac{1}{e}$ kritik noktadır.

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
		$\searrow$	min	$\nearrow$	

$x_0=\frac{1}{e}\in(0,\infty)$ için bir minimum vardır. $x_0=\frac{1}{e}$ den önce fonksiyon azalan, $x_0=\frac{1}{e}$ den sonra fo. artandır.

3° $f''(x)=(1+\ln x)'=\frac{1}{x}$ olup $\forall x>0$ için $f''(x)=\frac{1}{x}>0$ old. fonksiyon tanım aralığında daima aşağıya konkav (çukur) dır. (Yani eğri aşağıya doğru torbalanmaktadır, şişkinlik aşağıya doğrudur, yani kollar yukarıya doğrudur.)

4° Özel noktalar; $x=0^+$ için $y=0^-$ dir (bkz (1°) maddesi)

$x=\frac{1}{e}$ için $f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}.\ln\frac{1}{e}=\frac{1}{e}.(-1)=-\frac{1}{e}$ dir.

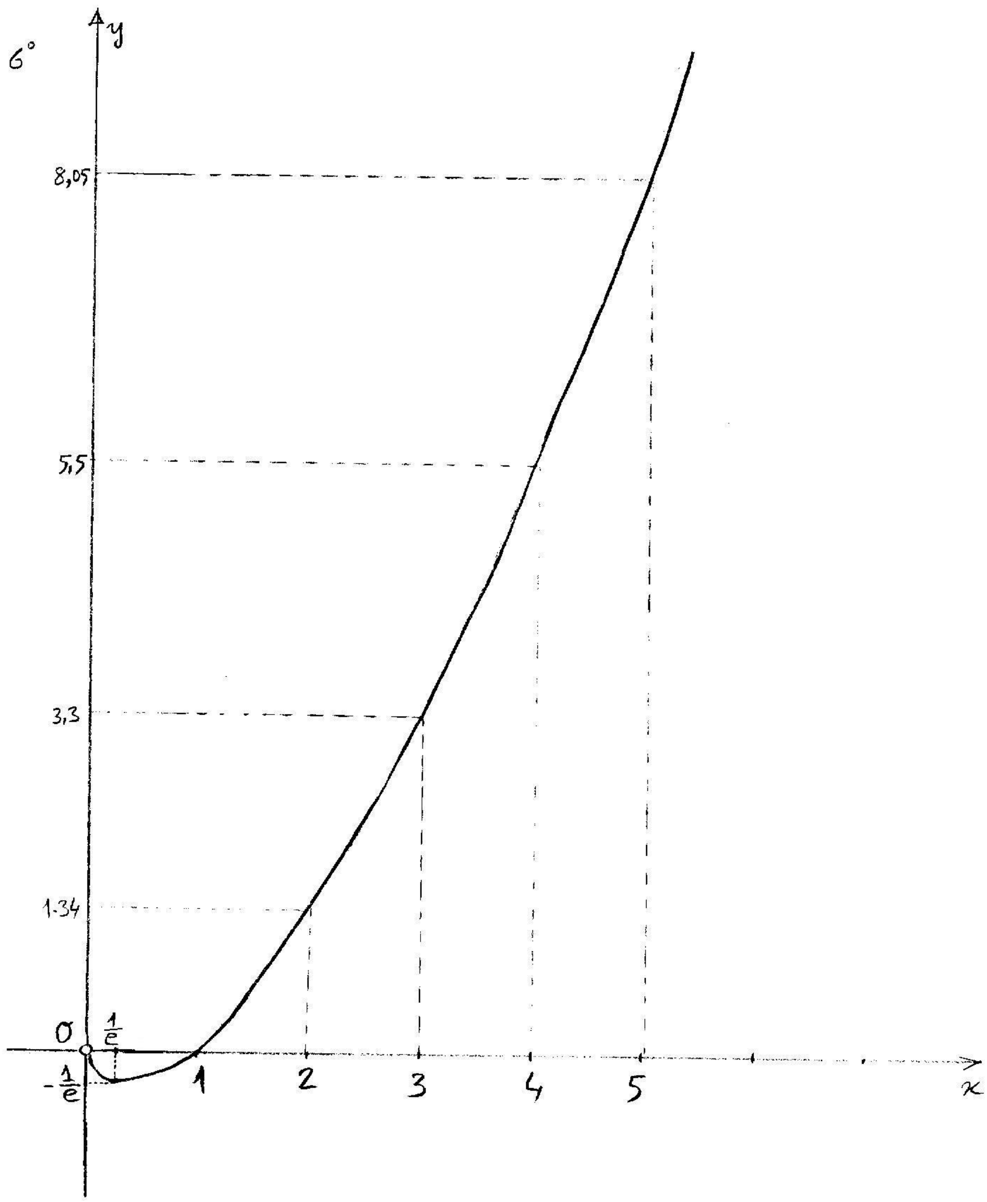
Ayrıca Ox-eksenini kestiği noktada $y=0$ olacağından $y=0$ için $0=x.\ln x \Rightarrow 0=\ln x^x \Rightarrow x^x=1$ olmalıdır. Yani $1^1=1$ den $x=1$ de eğri Ox-eksenini keser.

örnek 2 ye devam:

5°

x	0^+		$1/e$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	
y''		$+$		$+$		$+$	
y	-0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$ min.	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6°



Örnek 3 $f(x)=x\cdot e^{-\frac{1}{x}}$ fo.nunu inceleyip grafiğini çiziniz

1° Tanım aralığı $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ dur.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^{-\frac{1}{x}}=-\infty$ ve $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot e^{-\frac{1}{x}}=+\infty$ olup eğik asimptot olabilir.

$$m=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x\cdot e^{-\frac{1}{x}}}{x}=e^{0}=1$$ dir. (Eğik asimp. eğimi $m=1$ dir.)

$$n=\lim_{x\to\mp\infty}(y-mx)=\lim_{x\to\mp\infty}\left[x\cdot e^{-1/x}-x\right]=\lim_{x\to\mp\infty}x\left(e^{-1/x}-1\right)\overset{\infty\cdot 0}{=}$$

$$=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{x}=t,\ \frac{1}{x}=-t\\ x\to\mp\infty\Rightarrow t=0\end{array}\right\}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{-t}=-1$$ olup

eğik asimptotu $\boxed{y=x-1}$ doğrusudur.

(Not: $e^{u}=1+\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+\cdots+\frac{u^n}{n!}+\cdots$ Maclaurin serisinden $e^{-\frac{1}{x}}=1+\frac{-\frac{1}{x}}{1!}+\frac{(-\frac{1}{x})^2}{2!}+\frac{(-\frac{1}{x})^3}{3!}+\cdots$

olup $y=f(x)=x\cdot\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{6x^3}+-\cdots\right)=x-1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{6x^2}+-\cdots$ dan

$x\to\mp\infty$ için $f(x)=x-1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{6x^2}\approx x-1$ olup eğik

asimptot $y=x-1$ olarak da bulunabilir.)

$$\lim_{x\to0^-}x\cdot e^{-1/x}\overset{0\cdot\infty}{=}\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-1/x}}{1/x}\underset{L'H\ddot{o}p}{\overset{\infty/\infty}{=}}\lim_{x\to0^-}\frac{+\frac{1}{x^2}\cdot e^{-1/x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^-}-e^{-\frac{1}{x}}=-\infty$$

Yani $\lim\limits_{x\to0^-}y=-\infty$ olup $x=0$ düşey asimptot.

$\lim\limits_{x\to0^+}x\cdot e^{-\frac{1}{x}}=0\cdot0=0$ dır.

2° $f'(x)=1\cdot e^{-\frac{1}{x}}+x\cdot\frac{1}{x^2}\cdot e^{-1/x}=\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x}}=\frac{x+1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$ dir.

$x+1=0$ dan $x_0=-1$ için $f'(-1)=0$ olup $x_0=-1$ bir kritik noktadır.
$x=0$ için $f'(0)=$ tanımsız olup $x_1=0$ da bir kritik noktadır. Ancak bu $x_1=0$ noktası tanım aralığında bulunmadığından ekstremumdan söz edilemez. Öte yandan $x_0=-1$ de türevin işareti $\frac{x+1}{x}$ den araştırılır. Zira $e^{-\frac{1}{x}}>0$ dır daima.

Örnek (3) devam:

x	$-\infty$	-1		0		∞
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$	
x	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\nearrow$	0	$-\searrow$	$-\infty \parallel 0^+$	$+\nearrow$	∞
		min		min Yok ($x=0$ da fo. tanımsız.)		

3° $$y''=f''(x)=\left(\frac{x+1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}\right)'=\frac{1\cdot x-(x+1)\cdot 1}{x^2}\cdot e^{-1/x}+\frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\left(\frac{-1}{x^2}+\frac{x+1}{x^3}\right)e^{-1/x}=$$

$$f''(x)=\frac{-x+x+1}{x^3}e^{-1/x}=\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$$ olup $f''(x)=0$ yapan $x\in A$ yok,

$f''(0)=$ tanımsız fakat $x=0$ da fo. tanımsız old. Büküm noktası araştırılamaz.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$\parallel$	$+$

. dır.

4° $y=0$ için $x\cdot e^{-\frac{1}{x}}=0$ dan $x=0^+$ dır (bkz. 1° deki limit) Demekki $x=0$ ın sağında fo. orijin civarındadır. $x=0$ ın solunda ise fo.nun negatif y'lerde $-\infty$'a giden kolu vardır.

$f'(-1)=0$ idi. $f(-1)=(-1)\cdot e^{-\frac{1}{-1}}=-e^1=-e$ olup $(-1,e)$ max. noktasıdır.

$x=0^+$ da $y=0$ olup Ekstremum değil.

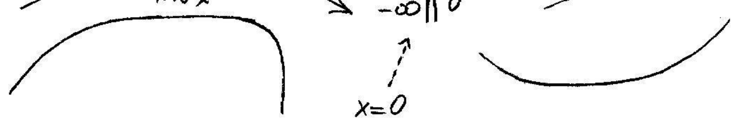
Ayrıca orijinin sağında teğetin eğimi ($x=0^+$ için $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x}\cdot e^{-1/x}=$

$$\overset{\infty\cdot 0}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\frac{1}{x}}{e^{1/x}}\underset{L'Hsp}{\overset{\infty/\infty}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\cancel{\frac{1}{x^2}}}{-\cancel{\frac{1}{x^2}}\cdot e^{1/x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{e^{1/x}}=\lim_{x\to 0}e^{-1/x}=0$$ olup)

$f'(0^+)=0$ dır. Yani sıfırın sağında fo.nun Ox-eksenine yaklaşan (Oy-eksenine yaklaşan değil) bir kolu vardır.

4°

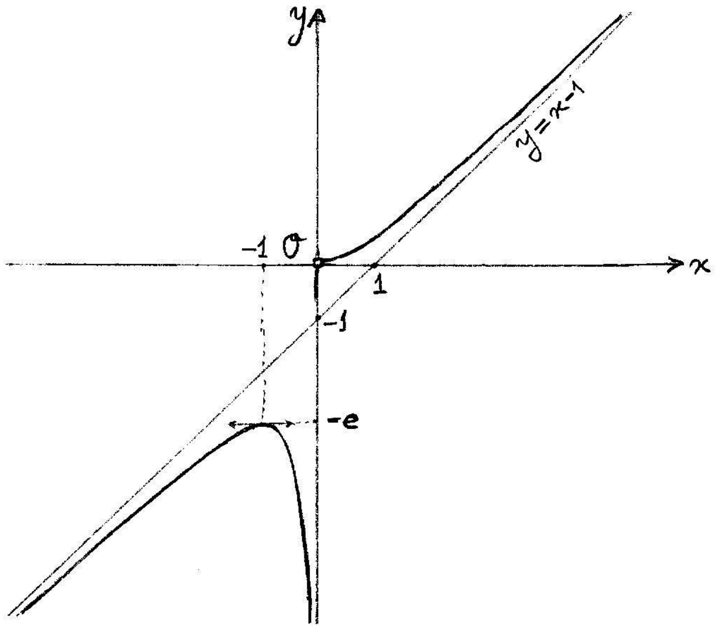
x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	
y''		$-$		$-$	$\parallel$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$ max	$\searrow$	$-\infty \parallel 0^+$	$\nearrow$	$+\infty$



$x=0$
Düşey Asimp.

Örnek (3)'e devam:

5° Grafiği aşağıdaki gibidir:



Örnek (4): $y=f(x)=x\cdot e^{-x}$ fonksiyonunu inceleyip eğrisini çiziniz.

1° Tanım aralığı $A=(-\infty,+\infty)$ dur.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x\cdot e^{-x})=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{x}}=\dfrac{-\infty}{+0}=-\infty$ dur. Eğik asimtot olabilir.

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\cdot e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ olup eğik asimptot yok.

$\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot e^{-x}\overset{\infty\cdot 0}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^{x}}\underset{L'Hsp}{\overset{\infty/\infty}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=0$ olup $\boxed{y=0}$ yatay asimptot.

2° $y'=f'(x)=(x\cdot e^{-x})'=1\cdot e^{-x}+x\cdot(-1)\cdot e^{-x}=(1-x)\cdot e^{-x}$ olup

$f'(x)=0 \Leftrightarrow (1-x)\cdot e^{-x}=0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x_0=1$ kritik noktadır. Türevin işareti;

x		1	
$f'(x)$	$+$ ↗	ϕ max	$-$ ↘

$x_0=1$ de maksimum var.

Örnek 4'e devam:

3° $y''=f''(x) = \left[(1-x)\cdot e^{-x}\right]' = \left[-1+(1-x)(-1)\right]e^{-x} = (x-2)\cdot e^{-x}$ olup

$x_1=2$ için $f''(2)=0$ dır. $f''(x)=(x-2)\cdot e^{-x}$ türevinin işareti

$\forall x\in\mathbb{R}$ için $e^{-x}>0$ old. $(x-2)$ çarpanına bağlıdır.

$f''(2^-)<0$ ve $f''(2^+)>0$ olduğundan $x_1=2$ de fonksiyonun bir büküm noktası vardır.

4° $f(0)=0\cdot e^{-0}=\frac{0}{e^0}=\frac{0}{1}=0$ olup eğri $O(0,0)$ orijininden geçer.

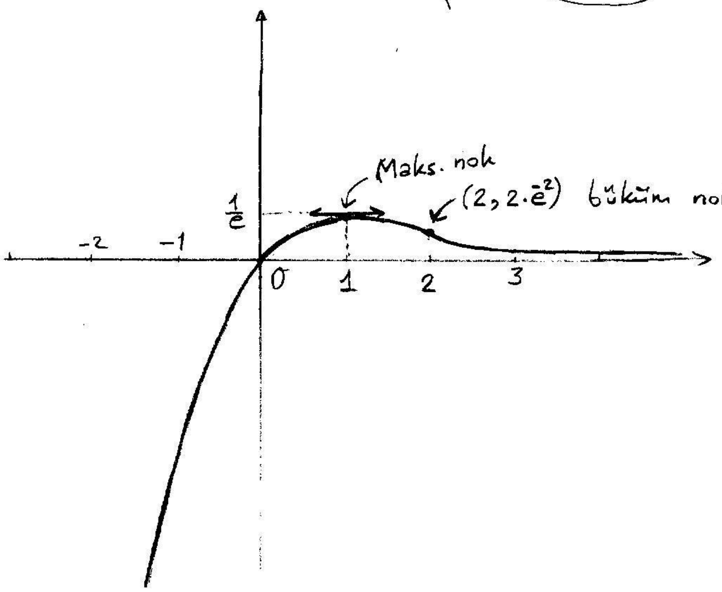
$x_0=1$ de $f'(1)=0$ olup max. vardı. Buradaki maksimum değer $f(1)=1\cdot e^{1}=e$ olup eğri $(1,e)$ de maksimumdan geçer.

Büküm noktası da $f(2)=2\cdot e^{-2}=\frac{2}{e^2}$ olup, $\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$ noktasıdır.

5°

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y''		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$ max	$\searrow$	$\frac{2}{e^2}$ B.N.	$\searrow$	0

6° Grafiği;



Örnek (5) $y=f(x)=\frac{x^3+2}{x}=x^2+\frac{2}{x}$ fonksiyonunu inceleyip eğrisini çiziniz.

1° $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ dur. $\lim\limits_{x\to\mp\infty}\left(x^2+\frac{2}{x}\right)=+\infty$ olup eğik asimtot olabilir. (Aslında pay ile payda arasındaki derece farkı 1 olsaydı eğik asimptot olurdu. Burada eğrisel asimptot yani bu problem için parabolik kol var. Yani sonsuzda f.nun eğrisi ile $y=x^2$ parabolünün kolları birbirine yaklaşıyor.)

$m=\lim\limits_{x\to\mp\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\mp\infty}\frac{x^3+2}{x\cdot x}=\lim\limits_{x\to\mp\infty}\frac{x^3+2}{x^2}=\mp\infty$ olup eğik asimptot yok. $f(x)=\frac{x^3+2}{x}=x^2+\frac{2}{x}$ olup $x\to\mp\infty$ için $\frac{2}{x}$ terimi sıfıra yaklaştığından $f(x)=\frac{x^3+2}{x}\underset{x\to\mp\infty}{\approx}x^2=y$ dir. Yani $y=x^2$ parabolü bu f.nun eğrisinin asimptotik eğrisidir (parabolik koludur.)

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^3+2}{x}=-\infty$ ve $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^3+2}{x}=+\infty$ olduğundan $x=0$ doğrusu (Oy-ekseni) düşey asimptottur.

2° $y'=f'(x)=\left(x^2+\frac{2}{x}\right)'=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2(x^3-1)}{x^2}=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$

olup $f'(x)=0 \Rightarrow x_0=1$ için $f'(1)=0$ dır. Başka kök yoktur. Ayrıca payda $x_1=0$ için sıfır old. $f'(0)$=tanımsızdır. Ancak bu noktada fonksiyon tanımsız olduğundan dikkate alınmaz. Ayrıca $x^2+x+1>0$ dır ($\Delta<0$ olduğundan) payda $x^2>0$ dır ($x\neq 0$ için) Dolayısıyla $f'(x)$ türevinin işareti $(x-1)$ çarpanından kaynaklanır, O halde

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$		$+$	
		↘	‖	↘	min	↗	

$x_0=1$ de fonksiyonun bir minimumu var.

Örnek (5)'e devam : (11)

3° $y'' = f''(x) = \left(2x - \frac{2}{x^2}\right)' = 2 - \frac{-2 \cdot 2x}{x^4} = 2 + \frac{4}{x^3} = \frac{2(x^3+2)}{x^3}$ den

$f''(x) = \frac{2 \cdot (x+\sqrt[3]{2})(x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})}{x^3}$ olup $f''(\sqrt[3]{2}) = 0$ dır. Payın ikinci çarpanından kök gelmez. $f''(x)$ in işaretini $(x+\sqrt[3]{2})$ çarpanı ile x^3 paydası belirler, $x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4} > 0$ dır daima.

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{2}$		0		$+\infty$
$x-\sqrt[3]{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
x^3		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
			Bük. Nok. var		Büküm noktası Değil		

$x=0$ da fonksiyon tanımsız olduğundan bu noktada ekstremum veya büküm noktası araştırılması yapılamaz. $x = -\sqrt[3]{2}$ apsisli $(-\sqrt[3]{2}, 0)$ noktası fo.nun eğrisinin büküm noktasıdır.

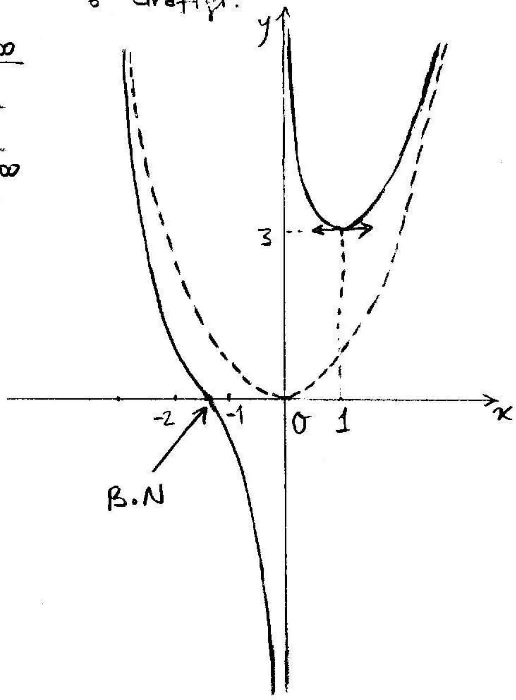
4° $y=0$ için $0 = \frac{x^3+2}{x}$ den $x = -\sqrt[3]{2}$ de eğri Oy-eksenini keser. aynı zamanda $(-\sqrt[3]{2}, 0)$ noktası büküm noktasıdır.

$x_0 = 1$ için $f(1) = \frac{1^3+2}{1} = 3$ olup $(1,3)$ noktasında eğrinin bir yerel minimumu vardır.

5°

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{2}$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
y''		$+$	0	$-$		$+$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0 B.N.	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	3 min.	$\nearrow$	$+\infty$

6° Grafiği:



NOT: Bu notların hazırlanmasında Genel Matematik -I (H.Arıkan-Ö.F.Gözükızıl-İ.Özgür) ve Yüksek Matematik Cilt-I (H. Halilov-A.Alemdaroğlu ve Mehmet Can) kitaplarından yararlanılmıştır.