Mutlak Değer ile ilgili örnekler

Örnek 1 $|x+5|+|x-3|$ ifadesinin en küçük değerini aldığı aralık nedir?

Çözüm: $x+5=0 \Rightarrow x_1=-5$; $x-3=0 \Rightarrow x_2=3$ olup

x		-5		3	
$x+5$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$\lvert x+5\rvert+\lvert x-3\rvert$	$\underbrace{\underbrace{-(x+5)-(x+3)}_{-2x-2}}_{>8}$	8	$\underbrace{x+5-(x-3)}_{8}$	8	$\underbrace{\underbrace{x+5+x-3}_{2x+2}}_{>8}$

Tablodan, verilen ifadeye göre $-5\leq x\leq 3$ koşulunu sağlayan x'ler için verilen ifade sabit 8 değerini alır. Yani $Ç=\{x\in\mathbb{R} : -5\leq x\leq 3\}=[-5,3]$ aralığında verilen ifadenin en küçük değeri 8 dir.

Örnek 2 $|x+2|<|x-3|$ eşitsizliğinin çözüm kümesi?

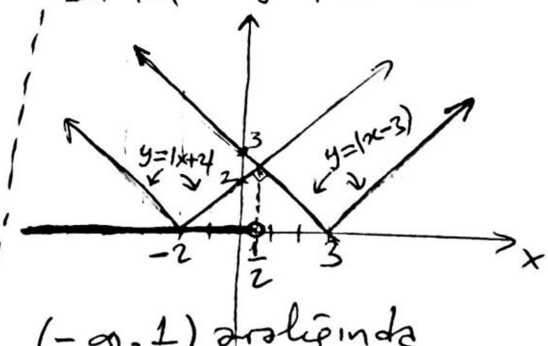
Çözüm: $x+2=0 \Rightarrow x=-2$; $x+3=0 \Rightarrow x=3$ olup $|x+2|<|x-3| \Rightarrow |x+2|-|x-3|<0$ dır.

x		-2		3	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$\lvert x+2\rvert-\lvert x-3\rvert$	$\underbrace{-x-2-(3-x)}_{-5}$ olup $-5<0$ dır! Anlamlı		$\underbrace{x+2-(3-x)}_{2x-1}$ $\downarrow$		$\underbrace{(x+2)-(x-3)}_{5}$ olup $5<0$ anlamsız

$x+2-(3-x)=2x-1$
$2x-1<0$ için
$x<\frac{1}{2}$ dir.
O halde $-2<x<\frac{1}{2}$ için
$|x+2|-|3-x|<0$ dır.
anlamlı!

O halde $x\in(-\infty,\frac{1}{2})$ için $|x+2|<|x-3|$ dır.

II. Yol grafik ile:



$(-\infty,\frac{1}{2})$ aralığında $|x+2|<|x-3|$ dür.

Örnek (3) $4 \le |2x-5| < 7$ eşitsizliğinin çözüm kümesi?

Çözüm:

$|2x-5|$ in mutlak değersiz ifadesi için $2x-5=0 \Rightarrow x_0=\frac{5}{2}$ olup $x_0=\frac{5}{2}$ den önce mutlak değer içi negatif, $x_0=\frac{5}{2}$ den sonra pozitiftir.

x	$-\infty$	$5/2$	$+\infty$
$\lvert 2x-5\rvert$	$5-2x$	0	$2x-5$

i) $x<\frac{5}{2}$ için $4\le|2x-5|<7 \Rightarrow 4\le 5-2x<7$ den

$-1\le -2x<2 \Rightarrow \frac{-1}{-2} \geqslant x \geqslant \frac{2}{-2} \Rightarrow -1 \le x < \frac{1}{2}$ dir.

Yani $x<\frac{5}{2}$ olmak üzere $\boxed{-1<x\le\frac{1}{2}}$ için $4\le|2x-5|<7$ dir.

ii) $x\geqslant\frac{5}{2}$ için $4|2x-5|<7 \Rightarrow 4\le 2x-5<7 \Rightarrow 9\le 2x<12$ den

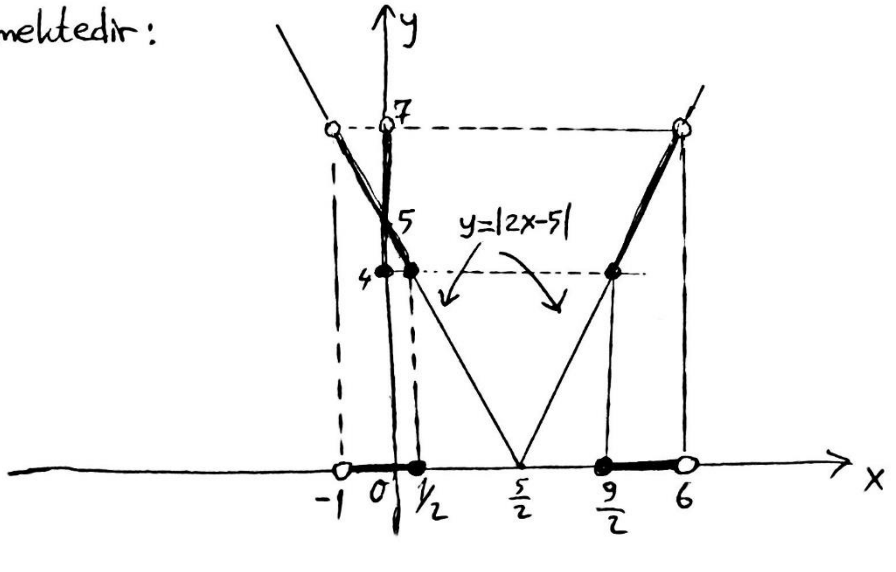
$\frac{9}{2}\le x<6$ dır. Yani $x\geqslant\frac{5}{2}$ olmak üzere $\boxed{\frac{9}{2}\le x<6}$ için de

$4\le|2x-5|<7$ dır

O halde verilen eşitsizliğin çözüm kümesi

$$Ç=\left(-1,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{9}{2},6\right) \text{ dır.}$$

Bu sonuç aşağıdaki $y=f(x)=|2x-5|$ fo.nunun grafiğinden de görülmektedir:



Örnek (4) $|x-1|=|2x|$ denkleminin çözüm kümesi?

Çözüm: i) $x<0$ iken $|\overset{(-)}{x-1}|=1-x$, $|\overset{(-)}{2x}|=-2x$ olup

$1-x=-2x \Rightarrow 1=-x \Rightarrow x_1=-1$ anlamlı!

ii) $0<x<1$ iken $|\overset{(-)}{x-1}|=1-x$; $|\overset{(+)}{2x}|=2x \Rightarrow 1-x=2x \Rightarrow x=\frac{1}{3}$ anlamlı!

iii) $1<x$ için $|x-1|=|2x| \Rightarrow x-1=2x \Rightarrow x=-1$ anlamsız!

O halde çözüm kümesi $Ç=\{-1, \frac{1}{3}\}$ dür.

Ayrıca $x=0$ ve $x=1$ için denklem sağlanmaz!

II. YOL: $|a|=\sqrt{a^2}$ olduğundan

$|x-1|=|2x| \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2}=\sqrt{(2x)^2} \Rightarrow (x-1)^2=(2x)^2$ den

$x^2-2x+1=4x^2 \Rightarrow 0=3x^2+2x-1 \Rightarrow 3x^2+2x-1=0$

3 1   -1 +1 den

$(3x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-1$ olup $Ç=\{-1, \frac{1}{3}\}$ dür.

Örnek (5) $x^2-|x|-6=0$ denkleminin çözüm kümesi?

Çözüm: $|x|=\sqrt{x^2} \Rightarrow |x|^2=(\sqrt{x^2})^2 \Rightarrow |x|^2=x^2$ olduğundan

$x^2-|x|-6=0 \Rightarrow |x|^2-|x|-6=0 \Rightarrow (|x|-3)(|x|+2)=0$

$|x|$ $|x|$ -3 2

$\Rightarrow |x|-3=0 \Rightarrow |x|=3 \Rightarrow x_1=3$ ve $x_2=-3$ dür.

$|x|+2=0 \Rightarrow |x|=-2$ anlamsız! Zira mutlak değer negatif olmayan (poz. veya sıfır olan) bir reel sayıdır.

O halde denklemin çözüm kümesi $Ç=\{-3, 3\}$ dür.