azalan $y = \text{Arc}\cos x$ fonksiyonudur.

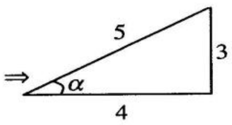
Analizde göz önüne alınan iki büyük problemden birisi,

biri diğerine bağımlı iki sonsuz küçüğün oranının limitini bulmak (bu türevler teorisinin konusu ve amacıdır). Diğeri sayısı sonsuz olarak artan sonsuz küçüklerin toplamını bulmaktır (bu integral hesabın konusu ve amacıdır).

ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

1. $\underbrace{\text{Arc}\sin\frac{3}{5}}_{\alpha} + \underbrace{\text{Arc}\tan\frac{1}{7}}_{\beta} = ?$

Çözüm: $\text{Arc}\sin\frac{3}{5} = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow$



den $\tan\alpha = \frac{3}{4}$

$\text{Arc}\tan\frac{1}{7} = \beta \Rightarrow \tan\beta = \frac{1}{7}$ olup

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}} = \frac{21+4}{28-3} = \frac{25}{25} = 1 \Rightarrow$$

$$\tan(\alpha+\beta) = 1 \quad \Rightarrow \alpha+\beta = \text{Arc}\tan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \text{Arc}\sin\frac{3}{5} + \text{Arc}\tan\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$$ bulunur.

2. $K = 2\,\text{Arc}\tan\frac{1}{3} + \text{Arc}\tan\frac{1}{7}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm: $K = 2\,\text{Arc}\tan\frac{1}{3} + \text{Arc}\tan\frac{1}{7} = \text{Arc}\tan\frac{1}{3} + (\text{Arc}\tan\frac{1}{3} + \text{Arc}\tan\frac{1}{7})$

$$= \text{Arc}\tan\frac{1}{3} + \text{Arc}\tan\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}} = \text{Arc}\tan\frac{1}{3} + \text{Arc}\tan\frac{10/21}{20/21} =$$

$$= \text{Arc}\tan\frac{1}{3} + \text{Arc}\tan\frac{1}{2} = \text{Arc}\tan\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \text{Arc}\tan\frac{5/6}{5/6} = \text{Arc}\tan 1 = \frac{\pi}{4}$$

bulunur. O halde $K = \frac{\pi}{4}$ tür.

3. $K = \text{Arc}\cos\left(\frac{3}{2\pi}\cdot\text{Arc}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

Çözüm: $K = \text{Arc}\cos\left(\frac{3}{2\pi}\cdot\text{Arc}\sin\right)$ ifadesinde $\text{Arc}\sin\frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha$ denilirse

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ den $\alpha = \frac{\pi}{3}$ dür. Böylece $\text{Arc}\sin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ olup,

$$K = \text{Arc}\cos\left(\frac{3}{2\pi}\cdot\text{Arc}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \text{Arc}\cos\left(\frac{3}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{3}\right) = \text{Arc}\cos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

bulunur.

4. $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x}} + \ln(4-x^2)$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.

Çözüm: $f_1(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x}} \Rightarrow \frac{x-3}{x} \geq$

x		0		3	
$\frac{x-3}{x}$	+		−		+

$A_1 = (-\infty, 0) \cup [3, +\infty)$

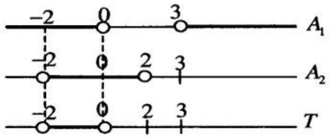
$f_2(x) = \ln(4-x^2) \Rightarrow 4-x^2 > 0$

x		−2		2	
$4-x^2$	−		+		−

$$-2 < X < 2$$

$$A_2 = (-2, 2)$$

$T.A. = A = A_1 \cap A_2 = (-2, 0)$



5. $f(x) = \operatorname{Arccos}\dfrac{3}{x}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.

Çözüm: Arcsin ve Arccos fonksiyonları $[-1,1]$ aralığında tanımlı olduklarından f fonksiyonu $-1 \le \dfrac{3}{x} \le 1$ için $(x \ne 0)$ tanımlıdır.

Buradan $-1 \le \dfrac{3}{x}$ veya $\dfrac{3}{x} \le 1$ için ayrı ayrı işaret incelemesi yapılabilir.

$-1 \le \dfrac{3}{x}$ için $0 \le \dfrac{3}{x} + 1$ den $0 \le \dfrac{x+3}{x}$ olup

x		-3		0	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x+3}{x}$	$+$	0	$-$	‖	$+$

$-\infty < x \le -3$ veya $0 < x < +\infty$ olmalıdır.

Yani $A_1 = (-\infty, -3] \cup (0, +\infty)$ dur.

$\dfrac{3}{x} \le 1$ için $\dfrac{3}{x} - 1 \le 0$ dan $\dfrac{3-x}{x} \le 0$ olup

x		0		3	
$3-x$	$+$		$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{3-x}{x}$	$-$	‖	$+$	0	$-$

$-\infty < x < 0$ veya $3 \le x \le +\infty$ olmalıdır.

Yani $A_2 = (-\infty, 0) \cup [3, +\infty)$ dur.

f fonksiyonunun tanım aralığı ise,

$T.A. = A = A_1 \cap A_2 = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

6. $f(x) = \ln(x^2 - 1) + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} + \sqrt[3]{1-x}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.

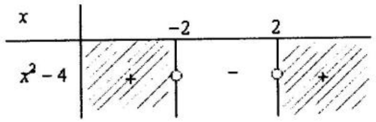
Çözüm: $f(x) = \underbrace{\ln(x^2-1)}_{f_1(x)} + \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}}_{f_2(x)} + \underbrace{\sqrt[3]{1-x}}_{f_3(x)}$

f_1 fonksiyonu için $x^2 - 1 > 0$ olmalı.

x		-1		$+1$	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

$T.A_1=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

f_2 fonksiyonu için $x^2-4>0$ olmalı.



$T.A_2=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

f_3 fonksiyonunun $T.A_3=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ dur.

f fonksiyonunun tanım aralığı bu üç tanım aralığının ara kesitidir.

$T.A.=T.A_1\cap T.A_2\cap T.A_3=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ dur.

7. $f(x)=\operatorname{Arc}\sin\frac{2x}{1+x^2}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.

Çözüm: $f(x)=\operatorname{Arc}\sin\frac{2x}{1+x^2}$ fonksiyonunun tanım aralığı

$-1\le\frac{2x}{1+x^2}\le 1$ eşitsizliğini sağlayan x'lerden oluşur. Buradan

$-1\le\frac{2x}{1+x^2}$ veya $\frac{2x}{1+x^2}\le 1$ eşitsizlikleri ayrı ayrı incelenmelidir.

$$-\le\frac{2x}{1+x^2}\Rightarrow 0\le 1+\frac{2x}{1+x^2} \text{ den } 0\le\frac{1+x^2+2x}{1+x^2}=\frac{(1+x)^2}{1+x^2}$$

olup $0\le\frac{(1+x)^2}{1+x^2}$ eşitsizliğinde kesrin paydası her zaman pozitif payı da $x=-1$ için sıfır, bunun dışında her zaman pozitif olduğundan bu

eşitsizlik her x reel sayısı için gerçeklenir. Yani $A_1=R^1=(-\infty,+\infty)$ dur.

Öte yandan $\frac{2x}{1+x^2}\le 1 \Rightarrow \frac{2x}{1+x^2}-1\le 0$ dan

$$\frac{2x-(1+x^2)}{1+x^2}\le 0 \text{ dan } \frac{-(1-x)^2}{1+x^2}\le 0 \text{ veya } \frac{(1-x)^2}{1+x^2}\ge 0 \text{ dan}$$

her x reel sayısı için payda pozitif, payı da $x=1$ için sıfır, bunun dışında pozitif olduğundan bu eşitsizlikte her $x\in\mathbb{R}$ için sağlanır. Yani $A_2=R^1=(-\infty,+\infty)$ dur.

Dolayısıyla verilen fonksiyonun tanım aralığı

$T.A.=A=A_1\cap A_2=R^1=(-\infty,+\infty)$ dur.

8. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: Her $x\in\mathbb{R}$ için $\sin x=\sin(\pi-x)$ yazılabileceğinden $\pi-x=t$ dönüşümü ile $x\to\pi$ için $t\to 0$ olduğundan

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin(\pi-x)}{\pi-x}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t}=-\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}_{\text{(özel limit)}}=-1 \quad \text{dir.}$$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{Arc}\sin(2\tan x)}{\ln(1+3x)}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\text{Arc}\sin(2\tan x)}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\text{Arc}\sin(2\tan x)}{2\tan x}\cdot\dfrac{2\tan x}{3x}\cdot\dfrac{3x}{\ln(1+3x)}=$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\text{Arc}\sin(2\tan x)}{2\tan x}\right)\cdot\frac{2}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\ln(1+3x)}\right)=1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1=\frac{2}{3}$$

bulunur.

10. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{=1}=1\cdot 1=1 \text{ dir.}$$

11. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+(x-1))}{x-1}$ yazılabilir. Burada $x-1=u$ değişken dönüşümü yapılırsa; $x\to 1$ için $u\to 0$ olup

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+(x-1))}{x-1}=\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1 \text{ dir (özel limit).}$$

12. **a)** $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\infty-\infty$

$$\lim_{x\to a}\frac{x\left(x^2+1-x^2\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{x}{|x|}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{|x|}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{x}{|x|}}=\frac{1}{2}$$

b) $\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}\overset{1^\infty}{=}A$ olsun.

$$\ln A=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{1+x^2}\overset{0^-}{=}\ln A$$

$\ln A=0\to A=e^0=1$ bulunur.

13. **a)** $\lim_{x\to-\infty}(3x+4+\sqrt{9x^2-6x+8}=?$ **b)** $\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{2/x}=?$

Çözüm: **a)** $\lim_{x\to-\infty}\left(3x+4+\sqrt{9x^2-6x+8}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to-\infty}\left(3x+4+\sqrt{9x^2-6x+1}\right)=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(3x+4+\sqrt{(3x-1)^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(3x+4+|3x-1|\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[(3x+4)-(3x-1)\right]=\lim_{x\to-\infty}(4+1)=\lim_{x\to-\infty}5=5 \text{ bulunur.}$$

b) $\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{2/x}=\lim_{x\to 0}\left[(1-\sin x)^{\frac{1}{-\sin x}}\right]^{(-\sin x)\frac{2}{x}}=$

$=\lim_{x\to 0}\left[(1-\sin x)^{\frac{1}{-\sin x}}\right]^{\frac{-2\sin x}{x}}$ olup, burada

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{-\sin x}} = e \quad \text{ve}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}(-2)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = (-2)\cdot 1 = -2$$

olduğundan aranan limit $e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$ dir.

14. **a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x^4-2x^2+5}\right) = ?$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3} = ?$

Çözüm: **a)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x^4-2x^2+5}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2-(x^2-1)\right] = 1$ bulunur.

(Burada $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^4-2x^2+5} = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^4-2x^2+1} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\sqrt{\left(x^2-1\right)^2} = \lim_{x\to\infty}\left|x^2-1\right| = \lim_{x\to\infty}\left(x^2-1\right) \quad \text{dir.)}$$

b)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(1-\cos^2 x\right)}{x^3\cdot\cos x\cdot(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^3\cdot\cos x\cdot(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x\cdot(1+\cos x)} = \frac{1}{2}$$

(Burada $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3 = \left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\right)^3 = 1^3 = 1$ özel limitinden yararlanılmıştır.)

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\ln\dfrac{2+x}{2-x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm:
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{2+x}{2-x} \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{1/x} = \ln\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{1/x}\right] =$$

$$= \ln\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{2-x}\right)^{1/x}\right] = \ln\left[\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{2x}{2-x}\right)^{\frac{2-x}{2x}}\right]^{\frac{2x}{2-x}\cdot\frac{1}{x}}\right] =$$

$$= \ln\left[\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{2x}{2-x}\right)^{\frac{2-x}{2x}}\right]^{\frac{2}{2-x}}\right] = \ln e = 1 \quad \text{bulunur.}$$

(Burada $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2x}{2-x}\right)^{\frac{2-x}{2x}} \overset{1^\infty}{=} e$ (özel limit) dir.)

16. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 4x)\cdot\ln\left(1+x^2\right)}{x\cdot\left(e^{3x}-1\right)\cdot\operatorname{Arc}\tan 2x} = ?$, **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{x^2+5} = ?$

Çözüm: **a)**
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 4x)\cdot\ln\left(1+x^2\right)}{x\cdot\left(e^{3x}-1\right)\cdot\operatorname{Arc}\tan 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x\cdot\ln\left(1+x^2\right)}{x\cdot\left(e^{3x}-1\right)\cdot\operatorname{Arc}\tan 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(2\cdot\dfrac{\sin^2 2x}{4x^2}\cdot 4x^2\right)\cdot\left(\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot x^2\right)}{x\cdot\left(\dfrac{e^{3x}-1}{3x}\cdot 3x\right)\cdot\left(\dfrac{\operatorname{Arc}\tan 2x}{2x}\cdot 2x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 \cdot 8x^2 \left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right)\cdot x^2}{3\cdot\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\right)\cdot\left(\frac{\operatorname{Arc}\tan 2x}{2x}\right)\cdot 2x} =$$

$$= \frac{\overbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)}^{=1} \cdot \overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}^{=1}}{\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Arc}\tan 2x}{2x}}_{=1}} \cdot \lim_{x\to 0}\frac{8x^4}{6x^3} =$$

$$= \frac{1\cdot 1}{1\cdot 1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{8x}{6} = 0 \quad \text{bulunur.}$$

b) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{x^2+5} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x^2-1}\right)^{x^2+5} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{2x^2-1}\right)^{\frac{2x^2-1}{4}}\right]^{\frac{4}{2x^2-1}\cdot(x^2+5)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{4}}\right]^{\frac{4x^2+20}{2x^2-1}} = e^2$$

bulunur. (Zira $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{4}} = e$ (özel limit) ve

$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+20}{2x^2-1} = \frac{4}{2} = 2$ dir.)

17. **a)** $\lim_{x\to 0} x\cdot\operatorname{cotan} x \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x}{\sin x} =$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\cos x}_{=1} = 1\cdot 1 = 1 \quad \text{bulunur.}$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1+2}{2x-1}\right)^{3x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{3x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{2x-1}}_{e^2}\right]^{\frac{3x+2}{2x-1}} = \left(e^2\right)^{3/2} = e^3 \quad \text{bulunur.}$$

18. **a)** $\lim_{x\to\infty} x^2\left(\cosh\frac{1}{x}-1\right) = ?$, **b)** $\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = ?$

Çözüm: **a)** $\lim_{x\to\infty} x^2\cdot\left[\operatorname{ch}\frac{1}{x}-1\right] = \lim_{x\to\infty} x^2\cdot 2\operatorname{sh}^2\frac{1}{2x} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2\sinh^2\frac{1}{2x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\sinh^2\frac{1}{2x}}{4\cdot\left(\frac{1}{2x}\right)^2} =$$

özel limit

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

b) $\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = 0^0$ belirsiz hali, $y = x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$ den

$$\ln y = \frac{1}{\ln(e^x-1)}\cdot\ln x = \frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln y}{\ln\left(e^x-1\right)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x\cdot e^x}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}}_{=1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\ln\left(\lim_{x\to 0}y\right)=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}y=e^1=e \text{ dir.}$$

19. $f(x)=\dfrac{\left|\ln(1+x)\right|}{x}$ fonksiyonunun $x=0$ noktasında limitini araştırınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left|\ln(1+x)\right|}{x}=\dfrac{0}{0}$ belirsiz şekli vardır.

Soldan ve sağdan limitlere bakalım;

$h>0$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{h\to 0}f(0-h)=\lim_{h\to 0}\frac{\left|\ln(1+0-h)\right|}{0-h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left|\ln(1-h)\right|}{-h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\ln(1-h)}{-h}=-1\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1-h)}{-h}=-1\cdot 1=-1 \text{ dir.}$$

$h>0$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{h\to 0}f(0+h)=\lim_{h\to 0}\frac{\left|\ln(1+0+h)\right|}{0+h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left|\ln(1+h)\right|}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1 \text{ dir.}$$

20. $f(x)=\dfrac{4+x}{1-2^{\frac{x+3}{x}}}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu iki noktadan biri olan $x=-3$ noktasındaki süreksizliğin cinsini belirtiniz.

Çözüm: $x=-3$ için $f(-3)=\dfrac{4+(-3)}{1-2^{\frac{-3+3}{-3}}}=\dfrac{1}{1-2^0}=\dfrac{1}{1-1}=\dfrac{1}{0}$ tanımsızdır.

Dolayısıyla fonksiyon süreksizdir.

$$\lim_{x\to(-3)^-}f(x)=\lim_{h\to 0}f(-3-h)=\lim_{h\to 0}\frac{4+(-3-h)}{1-2^{\frac{-3-h+3}{-3-h}}}=\lim_{h\to 0}\frac{1-h}{1-2^{\frac{-h}{-3-h}}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1-h}{1-2^{\frac{h}{3+h}}}=\frac{\lim\limits_{h\to 0}(1-h)}{\lim\limits_{h\to 0}\left(1-2^{\frac{h}{3+h}}\right)}=\frac{1}{0-0}=-\infty$$

(Burada $\lim\limits_{h\to 0}2^{\frac{h}{3+h}}=1+0$ dır. Yani 1'den büyük kalarak 1'e yaklaşır, dolayısıyla payda sıfıra negatif taraftan yaklaşır, çünkü 1 sayısından 1'den büyük kalarak 1'e yaklaşan sayı çıkmaktadır.)

$$\lim_{x\to(-3)^+}f(x)=\lim_{h\to 0}f(-3+h)=\lim_{h\to 0}\frac{4+(-3+h)}{1+2^{\frac{-3+h+3}{-3+h}}}=\lim_{h\to 0}\frac{1+h}{1+2^{\frac{h}{-3+h}}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1+h}{1+2^{-\frac{h}{3-h}}}=\frac{\lim\limits_{h\to 0}(1+h)}{\lim\limits_{h\to 0}\left(1-2^{-\frac{h}{3-h}}\right)}=\frac{1}{0+0}=+\infty$$

bulunur.

$f(-3-0)=\lim\limits_{x\to(-3)^-}f(x)=-\infty$ ve $f(-3+0)=\lim\limits_{x\to(-3)^+}f(x)=+\infty$

olduğundan fonksiyon $x=-3$ de I. cins sonsuz sıçramalı süreksizliğe sahiptir.

21. $f(x)=\dfrac{1}{1-2^{\frac{x}{x-1}}}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları belirtiniz. Bu noktalardan herhangi birisindeki süreksizlik cinsini belirtiniz.

Çözüm: $x=0$ ve $x=1$ de fonksiyon tanımsız olduğundan bu noktalarda süreksizdir.

$x=0$ daki süreksizliğinin cinsini bulalım:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-2^{\frac{x}{x-1}}}\overset{\substack{x=0-h\\ h>0}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{1}{1-2^{\frac{0-h}{0-h-1}}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{1-2^{\frac{-h}{-h-1}}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{1-2^{\frac{h}{1+h}}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-2^{\frac{x}{x-1}}}\overset{\substack{x=0+h\\ h>0}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{1}{1-2^{\frac{0+h}{0+h-1}}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{1-2^{\frac{h}{h-1}}}=+\infty$$

$x=0$ noktasında I. cins sonsuz sıçramalı süreksizlik vardır.

$x=1$ deki durum:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1-2^{\frac{x}{x-1}}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{1-2^{\frac{1-h}{1-h-1}}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{1-2^{\frac{1-h}{h}}}=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1-2^{\frac{x}{x-1}}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{1-2^{\frac{1+h}{1+h-1}}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{1-2^{\frac{1+h}{h}}}=0 \text{ dır.}$$

$x=1$ de I. cins sonlu(ani) sıçramalı süreksizliğe sahiptir.

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$$

22. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}-1$ fonksiyonunun tanım aralığını bulunuz. Süreksiz olduğu noktayı ve cinsini belirtiniz.

Çözüm: Fonksiyon $1+x\geq 0$ ve $\sqrt{1+x}-1\neq 0$ olan x'ler için tanımlıdır. $1+x\geq 0 \;\Rightarrow\; x\geq -1$ dir. $-1\leq x\leq +\infty$ için karekök içi pozitif veya

sıfırdır. Payda $x=0$ için sıfır olup bu noktada fonksiyon tanımsızdır. Dolayısıyla fonksiyonun tanım aralığı $T.A.=A=[-1,0)\cup(0,+\infty)$ dur.

f fonksiyonu $x=0$ da tanımsız idi. Dolayısıyla bu noktada süreksizdir. Cinsini ise sağdan ve soldan limit ile araştıralım.

$h>0$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{h\to 0}f(0-h)=\lim_{h\to 0}\frac{0-h}{\sqrt{1+(0-h)}-1}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h\cdot\left(\sqrt{1-h}+1\right)}{\left(\sqrt{1-h}-1\right)\left(\sqrt{1-h}+1\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h\cdot\left(\sqrt{1-h}+1\right)}{(1-h)-1}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h\cdot\left(\sqrt{1-h}+1\right)}{-h}=2 \quad \text{dir.}$$

Yine $h>0$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{h\to 0}f(0+h)=\lim_{h\to 0}\frac{0+h}{\sqrt{1+(0+h)}-1}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot\left(\sqrt{1+h}+1\right)}{\left(\sqrt{1+h}-1\right)\left(\sqrt{1+h}+1\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)}{(1+h)-1}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot\left(\sqrt{1+h}+1\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\sqrt{1+h}+1\right)=2 \text{ dir.}$$

Görüldüğü gibi $x=0$ da fonksiyon tanımsız, fakat limitlidir. Bu noktada fonksiyonun kaldırılabilen süreksizliği vardır. Eğer $x=0$ da fonksiyonun değeri, limit değer olan 2 olarak tanımlanırsa, böylece fonksiyonun süreksizliği ortadan kaldırılmış olur.

23. x esas sonsuz küçük olduğuna göre $y = x - \sin x$ fonksiyonu da bir sonsuz küçük ise mertebesini ve esas kısmını bulunuz.

Çözüm: $\lim_{x\to0} y = \lim_{x\to0}(x - \sin x) = 0$ olup y de bir sonsuz küçüktür.

$\lim_{x\to0}\frac{y}{x} = \lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{1} = 0$ olup y, x'e göre daha yüksek mertebeden sonsuz küçüktür.

$$\lim_{x\to0}\frac{y}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2} = 0$$

y, x'e göre ikinci mertebeden daha yüksek sonsuz küçüktür.

$$\lim_{x\to0}\frac{y}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} = A$$

olup y, x'e göre 3. mertebeden sonsuz küçüktür. Esas kısmı ise $\frac{1}{6}x^3$ dür (yani $x - \sin x \approx \frac{x^3}{6}$ dır.).

24. x esas sonsuz küçüğüne göre $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$ fonksiyonu da bir sonsuz küçük ise mertebesini ve esas kısmını bulunuz.

Çözüm: x esas sonsuz küçük $\lim_{x\to0} y = \lim_{x\to0}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right) = 0$ y de sonsuz küçüktür.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^n} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0}\frac{-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{n\cdot x^{n-2}}$$

pay $\not\to 0$ olduğundan $n-2=0 \Rightarrow n=2$ mertebe

$n=2$ için $\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2\cdot x^0} = \frac{1}{2}$ olup,

Esas kısım $= \frac{1}{2}x^2$ dir.

II. Yol: $\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^n} = \lim_{x\to0}\frac{1-(1-x^2)}{x^n\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} = \lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^n\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}$

$$= \lim_{x\to0}\frac{1}{x^{n-2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

pay $\not\to 0$ ve x^{n-2} terimi de paydayı sıfır yapmaktadır. Bundan kurtulmak için $n-2=0$ olmalıdır. Yani $n=2$ dir. Mertebe

$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{1}{x^0\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} = \frac{1}{2}$ ve

Esas kısım $= \frac{1}{2}x^2$ dir.

25. x esas sonsuz küçüğüne göre $y = f(x) = 1 - \cos^3 x$ fonksiyonu da sonsuz küçük ise mertebesini ve esas kısmını bulunuz.

Çözüm: $\lim_{x\to0} y = \lim_{x\to0}\left(1-\cos^3 x\right) = 0$ olup y de bir sonsuz küçüktür.

$$\lim_{x\to0}\frac{y}{x} = \lim_{x\to0}\frac{3\cos^2 x\cdot\sin x}{1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0} 3\cos^2 x\cdot\sin x = 0$$

olup y, x den daha yüksek mertebeden sonsuz küçüktür.

$$\lim_{x\to0}\frac{y}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{3\cos^2 x\cdot\sin x}{2x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{-6\cos x.\sin^2 x+3\cos^3 x}{2}=\frac{3}{2}$$

olup y, x'e göre ikinci mertebeden sonsuz küçüktür. y'nin esas kısmı $\frac{3}{2}x^2$ dir.

26. Aşağıdaki sonsuz küçüklerin eşdeğer sonsuz küçükler olduğunu gösteriniz.

a) $e^{2x}-1\approx 2x$ b) $\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\approx\sqrt{x}$

c) $\sqrt{1+4x}-1\approx 2x$ d) $e^{\tan 3x}-1\approx 3x$

Çözüm: a) $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}1$ olduğundan (özel limit) eşdeğer sonsuz küçüklerdir.

b) $\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}=1$ olduğundan (özel limit), bu iki sonsuz küçük eşdeğer sonsuz küçüktür.

c) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+4x}-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+4x}-1\right)\left(\sqrt{1+4x}+1\right)}{2x\cdot\left(\sqrt{1+4x}+1\right)}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+4x-1}{2x\left(\sqrt{1+4x}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{4x}{2x\left(\sqrt{1+4x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+4x}+1}=\frac{2}{2}=1$$

olduğundan bu iki sonsuz küçük eşdeğer sonsuz küçüktür.

d) $\lim_{x\to0}\frac{e^{\tan 3x}-1}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\tan 3x}-1}{\tan 3x}\cdot\frac{\tan 3x}{3x}=$

$$=\left(\lim_{x\to0}\frac{e^{\tan 3x}-1}{\tan 3x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{3x}\right)=1\cdot1=1$$

olduğundan bu iki sonsuz küçük eşdeğer sonsuz küçüklerdir.

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki ifadelerin x türünden eşitini bulunuz.

a) $\cos(\operatorname{Arc}\tan x)$ **b)** $\tan(\operatorname{Arc}\cos x)$

c) $\sin\left(\operatorname{Arc}\tan\frac{2x}{1-x^2}\right)$ **d)** $\cos\left(\operatorname{Arc}\tan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

2. Aşağıdaki fonksiyonların en geniş tanım aralıklarını bulunuz.

a) $f(x)=\sqrt{1-2\cos x}$ **b)** $f(x)=\frac{x+\ln(x-2)}{\sqrt{4-x^2}}$

c) $f(x)=\sqrt{\cos 2x}$ **d)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+\ln\left[x(x+3)\right]$

e) $f(x)=\operatorname{Arc}\sin\frac{2x}{x+1}+\operatorname{Arc}\tan 3x$ **f)** $f(x)=\operatorname{Are}\operatorname{ch}\frac{3}{x-2}$

3. Aşağıdaki fonksiyonların limitlerini hesaplayınız.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{x}-1\right)\cdot\sin 2x}{\cos x-\cos^{2}x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\left(e^{2x}-1\right)\cdot\mathrm{Arc}\tan 3x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\mathrm{Arc}\sin 3x)\ln(1+2x)}{(\tan x)\cdot\left(e^{5x}-1\right)}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{Arc}\tan 3x}{e^{5x}-e^{2x}}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{3x}-1\right)\cdot\mathrm{Arc}\sin^{2}x}{\left(\cos x-\cos^{3}x\right)\cdot\ln(1-2x)}$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin\pi x}{3-x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

8. $\lim\limits_{x\to\frac{2\pi}{3}}\dfrac{2\pi-3x}{1+2\cos x}$

9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^{3}+5x+1}{3x^{3}+\sqrt{x}}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{2}{x}\right)^{x^{2}}$

12. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{|\sin\pi x|}{x+2}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\mathrm{cotan}\,x$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{\sin 2x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^{2}}$

20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-1}{\sin 3x}$

22. $\lim\limits_{x\to 0^{+}}(\mathrm{cosec}\,x-\mathrm{cotan}\,x)$

23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\mathrm{Arc}\tan\dfrac{1}{x}}$

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{sh}\,3x}{x}$

25. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$

26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{m}-1}{x^{n}-1}\quad(m,n\in N)$

27. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{2}x}{1-x}$

28. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\mathrm{cotan}\,\pi x}$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$

30. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(3+x)-\ln x}{x}$

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\tan 3x}$

33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2}}\cdot\ln(\cos 2x)$

34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\tan x)}{\mathrm{Arc}\sin x}$

35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\mathrm{Aresh}\,3x)^{2}}{1-\mathrm{ch}\,x}$

36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{Arc}\tan^{2}5x}{1-\cos x}$

4. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında yazılı olan noktalarda soldan ve sağdan limitlerini bulunuz.

1. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^{2}-4}$, $x=-2$ ve $x=+2$ noktalarında.

2. $f(x)=x[\![x]\!]$, $x=0$ noktasında.

3. $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$, $x=0$ noktasında.

4. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, $x=2$ noktasında.

5. $f(x)=\begin{cases} x & , \ x\le 1 \ \text{ise} \\ x-1 & , \ x>1 \ \text{ise}\end{cases}$, $x=1$ noktasında.

6. $f(x)=1+3^{\frac{1}{x-2}}$, $x=2$ noktasında.

5. Aşağıdaki fonksiyonların (varsa) süreksiz olduğu noktaları ve bu noktalardaki süreksizliğin cinsini belirtiniz.

1. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

2. $f(x)=\dfrac{3}{1+2^{1/x}}$

3. $f(x)=\dfrac{x}{1-2^{\frac{x-1}{x}}}$

4. $f(x)=\dfrac{1+2^{3x}}{1-2^{\frac{x}{x-1}}}$

5. $f(x)=\dfrac{x+2}{3-3^{\frac{x}{x+1}}}$

6. $f(x)=2^{\frac{1}{x(x-1)}}$

6. x esas sonsuz küçük olduğuna göre (yani $\lim\limits_{x\to 0} x=0$), aşağıdaki fonksiyonlar da birer sonsuz küçük ise, mertebesini ve esas kısmını bulunuz.

1. $y=f(x)=1-\cos 3x$

2. $y=f(x)=e^x-\sin x$

3. $y=f(x)=1-\sqrt{1-x}$

4. $y=f(x)=1-\cos x+\sin x$

5. $y=f(x)=\sqrt{1+x^2}-1$

6. $y=f(x)=e^{\sin 2x}-1$

7. Aşağıdaki sonsuz küçüklerin eşdeğer sonsuz küçükler olduğunu gösteriniz.

1. $\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)\approx\dfrac{x+x^2}{2}\approx\dfrac{x}{2}$

2. $\sin 4x\approx 4x$

3. $\tan\sqrt{x}\approx\sqrt{x}$

4. $\sin\sqrt[3]{x}\approx\sqrt[3]{x}$

5. $\ln(1+3x)\approx 3x$

6. $\operatorname{Arc}\tan\sqrt{x}\approx\sqrt{x}$

7. $1-\cos^3 x\approx\dfrac{3}{2}\sin^2 x \approx \dfrac{3}{2}x^2$

8. $\sqrt[k]{1+x}-1\approx\dfrac{x}{k}$

9. $\operatorname{Aresh} 2x\approx 2x$

10. $e^{\sin 2x}-1\approx 2x$