Soru: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ çemberinin üzerindeki $P(x_0, y_0)$ noktasındaki teğet doğrusunun denkleminin

$$(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-y_0)=r^2$$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Merkez $C(h,k)$ ve $m_{CP}=\frac{y_0-k}{x_0-h}$ olup, teğet doğru, yarıçapa (normal doğrusuna) dik olduğundan

$m_{teğet}=m_t=-\frac{x_0-h}{y_0-k}$ dır. Eğim-nokta denkleminden

$y-y_0=m_t(x-x_0) \Rightarrow y-y_0=-\frac{x_0-h}{y_0-k}(x-x_0)$ dan

$(x_0-h)(x-x_0)+(y_0-k)(y-y_0)=0$ dır. Bu son eşitliğin

iki yanına $-(x_0-h)h-(y_0-k)k$ eklenirse

$$(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)-(x_0-h)x_0-(y_0-k)y_0=-(x_0-h)h-(y_0-k)k$$

$$(x_0-h)(x-x_0)+(y_0-k)(y-k)=(x_0-h)(x_0-h)+(y_0-k)(y_0-k)$$
$$=(x_0-h)^2+(y_0-k)^2$$
$$=r^2$$ olup

$$\boxed{(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)=r^2}$$ teğet doğrunun denklemidir.

NOT: Teğet doğrunun eğimi kapalı fonksiyonlardaki türev kuralından

$$(x-h)^2+(y-k)^2-r^2=0 \Rightarrow y'=-\frac{x-h}{y-k} \text{ ve } m_t=y'\Big)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=-\frac{x_0-h}{y_0-k}$$

olarak da bulunabilir!

Soru: $x^2+y^2+2x-2y-23=0$ çemberinin üzerindeki $P(3,4)$ noktasından çizilen teğet doğrunun denklemini bulunuz

Çözüm: $(x^2+2x+1)+(y^2-2y+1)=23+1+1 \Rightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=5^2$

standart çember denkleminde merkez $C(-1,1)$ ve yarıçap $r=5$ br.

olup $m_{CP}=\frac{4-1}{3-(-1)}=\frac{3}{4}$ ve $m_{teğet}=m_t=-\frac{1}{m_{CP}}=-\frac{4}{3}$ dür.

$y-y_1=m_t(x-x_1)$ den $y-4=-\frac{4}{3}(x-3) \Rightarrow 3y-12=-4x+12$

den $\boxed{4x+3y-24=0}$ bulunur.

Not: Burada denklemi bulunuz denilmektedir. Eğer teğet doğrunun denklemini yazınız denilmiş olsaydı o zaman $(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)=r^2$ formülü kullanılabilirdi!

Soru: $x^2+y^2+2x-2y-23=0$ çemberi ile $7x-y-17=0$ doğrusunun (varsa) kesim noktalarını bulunuz.

Çözüm: Verilen çember ve doğru denklemlerinin ortak çözümü yapılırsa; bunun için $y=7x-17$ çember denkleminde yerlerine yazılmakla

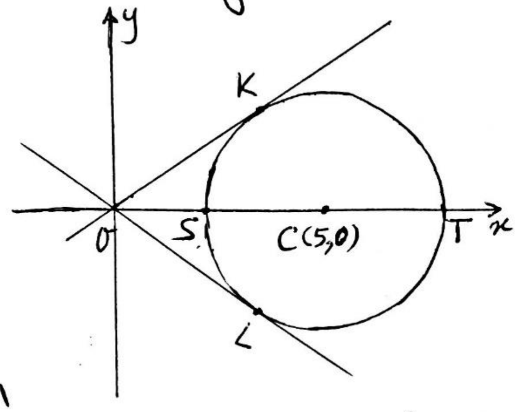
$$x^2+(7x-17)^2+2x-2(7x-17)-23=0$$

$$x^2+49x^2-238x+289+2x-14x+34-23=0 \Rightarrow 50x^2-250x+300=0 \text{ dan}$$

$$x^2-5x+6=0 \Rightarrow (x-2)(x-3)=0 \Rightarrow x_1=2 \text{ ve } x_2=3$$ bize kesim noktalarının apsislerini verir. Bunları $y=7x-17$ de yerlerine yazmakla

$$\left.\begin{array}{lll} x_1=2 \text{ için } y=7.2-17=-3 & \Rightarrow & A(2,-3) \\ x_2=3 \text{ için } y=7.3-17=4 & \Rightarrow & B(3,4) \end{array}\right\}$$ çember ile doğrunun kesim noktalarıdır.

Soru: $(x-5)^2+y^2=9$ çemberine teğet olan ve orijinden geçen doğruların denklemlerini bulunuz.



Çözüm: Aranılan OK ve OL doğrularının denklemi $y=mx$ olsun. Bu doğru ile çemberin ortak denklemi olan

$(x-5)^2+(mx)^2=9$ denkleminin

Δ diskriminantı sıfır olursa; doğru çembere teğet olmuş olur.

O halde $(m^2+1)x^2-10x+25-9=0 \Rightarrow (m^2+1)x^2-10x+16=0$

denkleminden $\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4.(m^2+1).16=100-64m^2-64$ den

$\Delta=0 \Leftrightarrow 36-64m^2=0 \Rightarrow 64m^2=36 \Rightarrow m^2=\frac{36}{64}$ den

$m=\mp\frac{6}{8}=\mp\frac{3}{4}$ dür. O halde $\boxed{y=\mp\frac{3}{4}x}$ doğruları

aranan teğet doğrularıdır.

Yani $y=\frac{3}{4}.x \Rightarrow \boxed{3x-4y=0}$ ve $y=-\frac{3}{4}x \Rightarrow \boxed{3x+4y=0}$

Not: Çember denkleminden $S(2,0)$, $T(8,0)$ ve $|KT|=r=3$ br

olup $\overset{\triangle}{KOC}$ üçgeninde Pisagordan $|OK|=5^2-3^2=4^2$ den $|OK|=4$

olup $\tan\alpha=\tan(\widehat{KOC})=\frac{3}{4}=m_{OK}$ ve de $m_{OL}=-\frac{3}{4}$ olur.

Böylece aranılan denklemler $y=\frac{3}{4}x$ ve $y=-\frac{3}{4}x$ dir.

Ancak bu çözüm yolu analitik geometri yolu değildir. Biraz sentetik geometriden (koordinatsız geometriden) yararlanılmıştır.

Soru: $\sin x . \sin 2x . \sin 3x$ çarpımını bir toplam olarak yazınız (Kam-Kar Syf 64-65)

Çözüm: $\sin x . \sin 2x . \sin 3x = (\sin 3x . \sin x) . \sin 2x$ olup

$$\sin 3x . \sin x = -\frac{1}{2}\left[\cos(3x+x) - \cos(3x-x)\right] = -\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 2x)$$

olup

$$\sin x . \sin 2x . \sin 3x = (\sin 3x . \sin x)\sin 2x = -\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 2x)\sin 2x$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 4x . \sin 2x + \frac{1}{2}\underbrace{\sin 2x . \cos 2x}_{\frac{1}{2}\sin 4x} \quad \text{den}$$

$$\sin x . \sin 2x . \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{2}\cos 4x . \sin 2x \quad \text{olup burada da}$$

$$\cos 4x . \sin 2x = \frac{1}{2}\left[\sin(4x+2x) - \sin(4x-2x)\right] = \frac{1}{2}(\sin 6x - \sin 2x)$$

olduğundan

$$\sin x . \sin 2x . \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{2} . \frac{1}{2}(\sin 6x - \sin 2x)$$

$$= \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x \quad \text{dır Yani}$$

$$\sin x . \sin 2x . \sin 3x = \frac{1}{4}(\sin 2x + \sin 4x - \sin 6x)$$

biçiminde toplam olarak yazılır!

Soru: $\cos 3x - \cos 2x + \cos x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $\cos 3x + \cos x = 2\cos\frac{3x+x}{2}\cdot\cos\frac{3x-x}{2} = 2\cos 2x\cdot\cos x$ olup

$(\cos 3x + \cos x) - \cos 2x = 2\cos 2x\cdot\cos x - \cos 2x = 2\cos 2x\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0$ dan

(Bir çarpımın sıfır olması için çarpanlardan en az biri sıfır olmalıdır.)

$\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \cos\left(\mp\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 2x = \mp\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ den

$\boxed{x = \mp\frac{\pi}{4} + k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}$

ve $\cos x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \cos x = \cos\left(\mp\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = \mp\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ den

$\boxed{x = \mp\frac{\pi}{3} + 2k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}$ dir. Böylece çözüm kümesi

$$Ç.K. = \left\{x\in\mathbb{R} : x = \mp\frac{\pi}{4} + k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x\in\mathbb{R} : x = \mp\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Soru: $2\cos x + 3 = 4\cos\frac{x}{2}$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$ olup $2\cos x = 4\cos^2\frac{x}{2} - 2$ dir. O halde

$2\cos x + 3 = 4\cos^2\frac{x}{2} \Rightarrow 4\cos^2\frac{x}{2} - 2 + 3 = 4\cos\frac{x}{2} \Rightarrow 4\cos^2\frac{x}{2} - 4\cos\frac{x}{2} + 1 = 0$

Buradan $\left(2\cos\frac{x}{2} - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow 2\cos\frac{x}{2} - 1 = 0 \Rightarrow \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ den

$\cos\frac{x}{2} = \cos\left(\mp\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\mp\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$ den

$\boxed{\frac{x}{2} = \mp\frac{\pi}{3} + 2k\pi}$, $k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{2\pi}{3} + 4k\pi}$ veya $\boxed{x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Soru: $\sin 3x$ in açılımından yararlanarak $\sin^3 x$ in $\sin x$ ve $\sin 3x$ türünden özdeşini bulunuz

Çözüm: $\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x . \cos x + \cos 2x . \sin x =$

$= (2\sin x . \cos x) . \cos x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x = 2\sin x . \cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x$

$= 2\sin x(1-\sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ dir. Yani

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ olup

$4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x \Rightarrow \boxed{\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x}$ dir.

Not: Benzer şekilde $\cos^3 x$ in de $\cos x$ ve $\cos 3x$ cinsinden özdeşi ise $\boxed{\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos x}$ dir. (Kontrol ediniz!)

Soru: $0 \le \arctan x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\arctan x$ in arksinüslü özdeşini bulunuz (Kam-Kar, Syf 77)

Çözüm

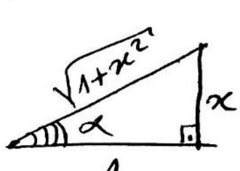
$\arctan x = \alpha$ denilirse $\tan\alpha = x = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \tan\alpha . \cos\alpha$ olup

$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$ dir.

O halde $\sin\alpha = \tan\alpha . \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \Rightarrow \sin(\arctan x) = x . \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ den

$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \arctan x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ dir.

Not: $\arctan x = \alpha$ denilirse $\tan\alpha = x$ olup $\Rightarrow$



den $\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\arctan x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ bulunur.

Soru: $\arcsin(x+3)=\frac{\pi}{3}$ denkleminden x i bulunuz

Çözüm: $\arcsin(x+3)=\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x+3=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ den $\boxed{x=\frac{\sqrt{3}}{2}-3}$

Soru: $\arctan(x^2-1)=0$ denklemini çözünüz

Çözüm: $\arctan(x^2-1)=0 \Rightarrow x^2-1=\tan 0=0 \Rightarrow x^2-1=0$ dan

$(x+1)(x-1)=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$; $x-1=0$ ~~ise~~ $x_2=1$ olup

Ç.K. $=\{-1,1\}$ dir.

Soru: $\cos(2\arccos x)$ in x türünden özdeşini bulunuz

Çözüm

$\arccos x=\alpha$ denilirse $\cos\alpha=x$ dır.

$2\arccos x=2\alpha$ olup $\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1=\underline{\underline{2x^2-1}}$ bulunur

O halde her $x\in[-1,1]$ için $\boxed{\cos(2\arccos x)=2x^2-1}$ dir

---

Soru: $\cos x=\frac{1}{2}$ denklemini çözünüz

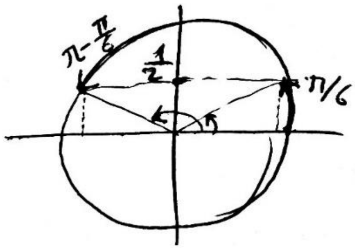
Çözüm $\cos x=\cos\frac{\pi}{3}$ olup $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ veya $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ dır. $k\in\mathbb{Z}$.

Soru: $\sin x=\frac{1}{2}$ denklemini çözünüz

Çözüm: $\sin x=\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ veya $x=(\pi-\frac{\pi}{6})+2k\pi$ dır. $k\in\mathbb{Z}$

yani $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ veya $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$ dır

Not: $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ ve $\sin(\pi-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$ dır



Soru: $\sinh x = -1$ denklemini çözünüz

Çözüm: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ old. $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -1 \Rightarrow e^x - e^{-x} = -2$;

$e^x(e^x - e^{-x}) = -2.e^x$ den $e^{2x} - 1 = -2e^x$, $(e^x)^2 + 2e^x - 1 = 0$ olup

$e^x = t$ denilirse $t^2 + 2t - 1 = 0$ dan $t_{1,2} = \frac{-2 \mp \sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2 \mp \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \mp 2\sqrt{2}}{2}$

$t_{1,2} = -1 \mp \sqrt{2}$ ↗ $t_1 = -1 - \sqrt{2} = e^x$ anlamsız! (üstel ifade neg. veya sıfır olamaz!)

↘ $t_2 = -1 + \sqrt{2} = e^x$ anlamlı buradan $\boxed{x = \ln(-1+\sqrt{2})}$

denklemin tek köküdür.

Soru: $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ özdeşliğinin doğruluğunu kontrol ediniz

Çözüm: $\cosh 2x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x)^2 + (e^{-x})^2}{2}$ olup, öte yandan

$e^x = \cosh x + \sinh x$; $e^{-x} = \cosh x - \sinh x$ olduğundan

$$\cosh 2x = \frac{(\cosh x + \sinh x)^2 + (\cosh x - \sinh x)^2}{2} =$$

$$= \frac{\cosh^2 x + \cancel{2\cosh x \sinh x} + \sinh^2 x + \cosh^2 x - \cancel{2\cosh x \sinh x} + \sinh^2 x}{2}$$

$$= \frac{2\cosh^2 x + 2\sinh^2 x}{2} = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$ dır. Yani

$\boxed{\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x}$ dır.

Soru: $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ olduğunu gösteriniz

Çözüm: $\forall \varepsilon>0$ sayısına karşılık bir $\delta(\varepsilon)>0$ reel sayısı bulunabilir mi? Öyleki $0<|x-2|<\delta(\varepsilon)$ iken $|x^2-4|<\varepsilon$ olsun.

$|x^2-4|<\varepsilon$ dan hareketle

$|x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2|\,|x+2| = |x-2|\,|(x-2)+4| \leq |x-2|(|x-2|+4)$ de

$|x-2|<\delta$ olması istendiğinden

$|x-2|(|x-2|+4) < \delta(\delta+4) = \varepsilon$ denilirse

$$\delta^2+4\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta^2+4\delta+4 = 4+\varepsilon \Rightarrow (\delta+2)^2 = 4+\varepsilon$$

$$\Rightarrow |\delta+2| = \sqrt{4+\varepsilon} \Rightarrow \delta+2 = \sqrt{4+\varepsilon} \Rightarrow \delta = \sqrt{4+\varepsilon}-2$$

bulunur. Yani her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık bir $\delta(\varepsilon) = \sqrt{4+\varepsilon}-2$ bulunabiliyor ve

$|x-2| < \delta(\varepsilon)$ iken $|x^2-4|<\varepsilon$ dur.

O halde $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ dür.

II. yol: 6. Fonksiyonlarda limit 130617 ders notu syf 28.

III. yol: Thomas Calculus (Türkçe) kitap sayfası 96.