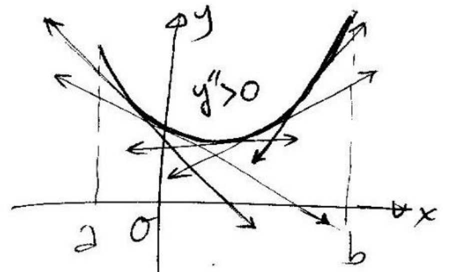
Konkavlık, Konvekslik ve Büküm Noktası

1

konvekslik – konkavlık

$y=f(x)$ fonksiyonunun eğrisinin $[a,b]$ aralığında kolları pozitif y'lere doğru yönelsin Yani konveks olsun



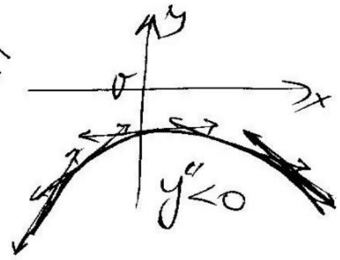
$[a,b]$ de $f'(x)$ türevi daima artan değerler alır. Yani $y'=f'(x)$ türev f.nu artandır.

Artan bir f.nun türevi de pozitif olacağından

$$(y')'=(f'(x))'=f''(x)>0$$ dır.

Sonuç: f.nun konveks olduğu aralıkta $f''(x)\geq 0$ dır.

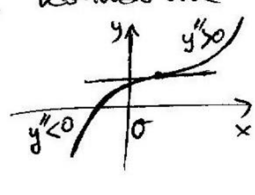
Tersine f.nun ikinci mertebeden türevinin negatif olduğu aralıkta yani $f''(x)<0$ olduğu aralıkta konkavdır denir.



Sonuç: Fo.nun konkav olduğu aralıkta $f''(x)\leq 0$ dır.

Büküm noktası:

Eğer A noktasının solunda ve sağında konkavlık durumu farklı ise yani $f''(x)$ farklı işarette ise eğrinin bu $A(x_0,y_0)$ noktasına büküm noktası denir. Bu noktada teğet eğriye böler (keser)



Örnek $y=f(x)=(x-1)^3$ fonksiyonunun artan-azalan ve konveks-konkav olduğu aralıkları bulunuz, varsa büküm noktalarını belirtiniz.

Çözüm: $f'(x)=3(x-1)^2$, $f''(x)=6(x-1)$ olup

$x_0=1$ de $f'(1)=0$ ve $f''(1)=0$ dır.

$f'(x)$ türevinin işaret tablosu:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+ ↗	0	+ ↗	

(ekstremum yok)

$f''(x)$ in işaret tablosu:

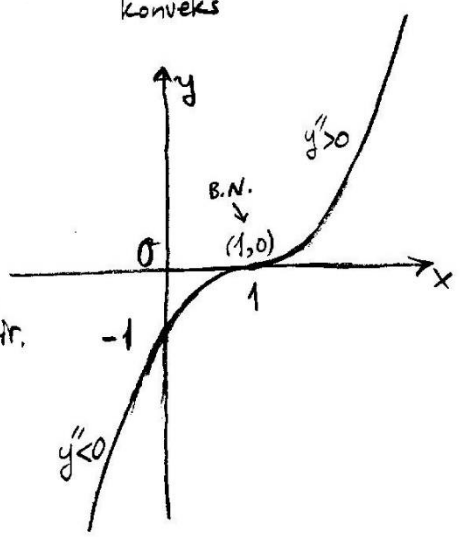
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		—	0	+	
		konkav	B.N.	konveks	

$(-\infty,1)$ ve $(1,+\infty)$ aralıklarında fo. artandır.

$(-\infty,1)$ aralığında konkav (dışbükey)

$(1,+\infty)$ aralığında konveks (içbükey) dir.

$x_0=1$ de fo.nun büküm noktası vardır. Yani $(1,0)$ eğrinin büküm noktasıdır.



Örn $y=\sqrt[3]{x-1}$ için artan-azalanlık, konveks-konkavlık

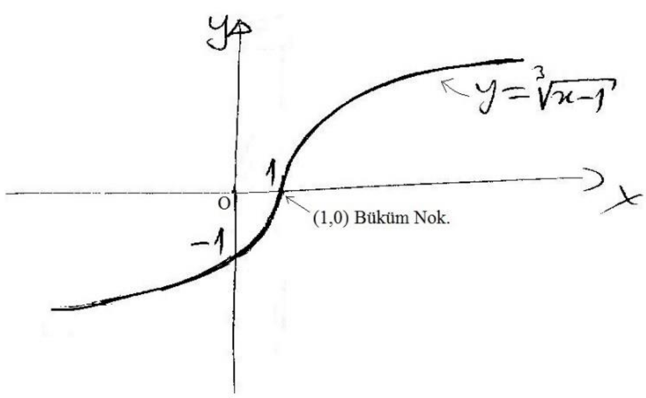
$f(x)=(x-1)^{1/3}$ $\qquad f'(x)=\frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}=\frac{1}{3(x-1)^{2/3}}>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}-\{1\}$

fo. artandır.

$\Big(f'(1)=\frac{1}{0}=$ tanımsız. $\quad x_0=1$ kritik noktanın öncesinde ve sonrasında türevin işareti aynı olduğundan bu noktada ekstremum yok

$$f''(x)=\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(x-1)^{-5/3}=-\frac{2}{9(x-1)^{-5/3}} \quad ; \left(f''(1)=\frac{-2}{0}=\text{tanımsız}\right)$$

x		1	
$f''(x)$	+	‖	−
	konveks	B.N.	konkav



<u>Örnek:</u> $y=f(x)=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}$ fonksiyonunun konveks ve konkav olduğu aralıkları bulunuz ve (varsa) büküm noktasını belirtiniz

<u>Çözüm;</u> $y=f(x)=x+\frac{1}{x}$ fonksiyonu için $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ olup, tanım aralığındaki x'ler için ekstremum veya büküm noktası araştırılabilir.

$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=1-x^{-2}$ olup, bunun tekrar türevi alınırsa

$f''(x)=0-(-2)\cdot x^{-3}=\frac{2}{x^3}$ dür. $f''(x)=0$ yapan $x\in A$ yoktur.

Ancak $x^3=0$ dan $x_0=0$ için $f''(0)=$ tanımsız.

$f''(x)$ in işareti ise

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$\|\|$	$+$
	konkav		konveks

$x_0=0$ da $f''(x)=$ tanımsız ve $x_0=0$ ın öncesinde ve sonrasında $f''(x)$ in işareti farklı fakat $x_0=0$ da fonksiyon tanımlı olmadığından $x_0=0$ fonksiyonun büküm noktası değildir. Yani fo.nun <u>büküm noktası yoktur.</u>

$(-\infty,0)$ da fo. konkav (dışbükey)

$(0,\infty)$ da fo konvex (içbükey)dir.

NOT: ⊛ $f''(x)$ ikinci türevi, $(x_0, f(x_0))$ noktasından geçerken işaret değiştiriyorsa bu nokta $f(x)$ in eğrisi için bir büküm noktasıdır.

⊛ $f(x)$ fo.nunun x_0 noktasında ikinci mertebeden türevi var ve $(x_0, f(x_0))$ onun büküm noktası ise $f''(x_0) = 0$ dır.

Fakat bu sonucun tersi her zaman doğru değildir, yani ikinci mertebe türevin sıfır olduğu bir nokta büküm noktası olmayabilir. Örneğin, $x=0$ noktasında $y=f(x)=x^4$ fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi sıfır olduğu halde bu fonksiyonun tüm tanım aralığında eğrisi konvekstir.

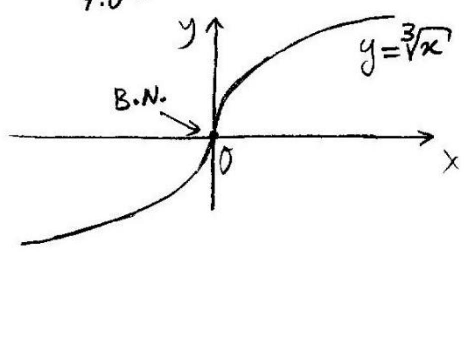
⊛ $f(x)$ fo.nunun tanımlı olduğu bir x_0 noktasında, $f''(x)$ türevi tanımsız olduğu halde (Yani $f''(x_0)$ = tanımsız) x_0 ın öncesinde ve sonrasında $f''(x)$ türevi farklı işarette ise bu x_0 noktasında (yani $(x_0, f(x_0))$ noktasında) fonksiyonun eğrisinin bir büküm noktası vardır.

Örn. $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ fonksiyonunun konkav-konveks olduğu aralıkları ve (varsa) büküm noktalarını bulunuz.

Çözüm: $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$ ve $f''(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) x^{-5/3}$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-2}{9x^{5/3}}$$ olup $$f''(0) = \frac{-2}{9 \cdot 0^{5/3}} = \text{tanımsız}.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	‖	$-$	
		konkav	B.N.	konveks	



Soru

$f(x)=x\cdot e^{-x}$ fonunun artan ve azalan olduğu aralıkları belirtiniz ve (varsa) ekstremum noktasını bulunuz ve cinsini belirtiniz. Konveks ve konkav olduğu aralıkları belirtiniz ve (varsa) büküm noktasını bulunuz.

$$f(x)=x\cdot e^{-x} \Rightarrow f'(x)=1\cdot e^{-x}+x\cdot(-1)\cdot e^{-x}=(1-x)\cdot e^{-x}$$

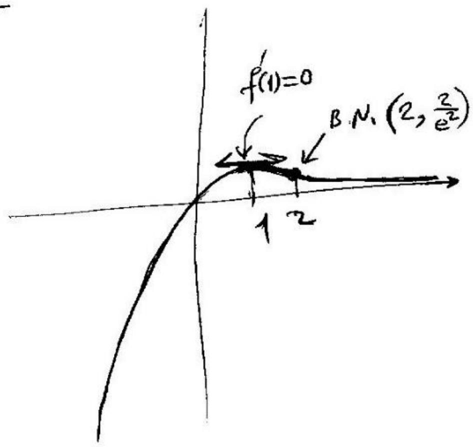
$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (1-x)\cdot e^{-x}=0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x_0=1$$ kritik nokta

x		1	
$f'(x)$	$+$ ↗	0 max.	$-$ ↘

$$f''(x)=(1-x)'\cdot e^{-x}+(1-x)\cdot(e^{-x})'=-1\cdot e^{-x}+(1-x)(-1)\cdot e^{-x}$$ den

$$f''(x)=(x-2)\cdot e^{-x} \qquad f''(x)=0 \Leftrightarrow x_1=2$$ kritik nokta

x		2	
$f''(x)$	$-$ konkav	0 B.N.	$+$ konveks



Örn. $f(x)=2x+3\cdot\sqrt[3]{x^2}$ fo.nunun ekstremumlarını araştırınız

$$f(x)=2x+3\cdot x^{2/3} \Rightarrow f'(x)=2+\cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}x^{-1/3}=2+2\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \text{ den}$$

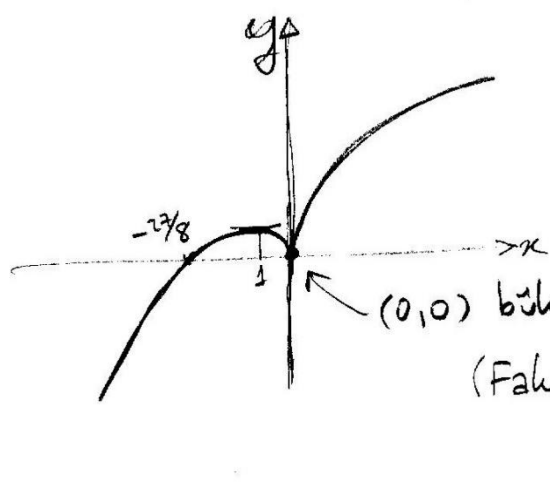
$$f'(x)=\frac{2\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{x}}=\frac{2(\sqrt[3]{x}+1)}{\sqrt[3]{x}} \text{ olup } f'(x)=0 \Rightarrow \sqrt[3]{x}+1=0 \Rightarrow x_0=-1$$ kritik nokta

$f'(x)=$ tanımsız $\Leftrightarrow \sqrt[3]{x}=0 \Rightarrow x_1=0$ kritik nokta

x		-1		0	
$\sqrt[3]{x}+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\sqrt[3]{x}$	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$
	artan	max	azalan	min	artan

Ayrıca $f''(x)=0+2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3}=-\frac{2}{\sqrt[3]{x^4}}<0$, her $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ için

dolayısıyla hep konkav (dışbükey)



(0,0) büküm noktası değil (Fakat yerel minimum nok.)

Örnek: $f(x)=|\ln x|$ fonunun artan-azalan ve konveks-konkav olduğu aralıkları (varsa) ekstremum ve büküm noktalarını bulunuz.

Çözüm:
$$f(x)=|\ln x|=\begin{cases}-\ln x, & 0<x<1\\ 0, & x=1\\ \ln x, & 1<x<+\infty\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, & 0<x<1\\ \text{YOK}, & x=1\\ \dfrac{1}{x}, & 1<x<+\infty\end{cases}$$

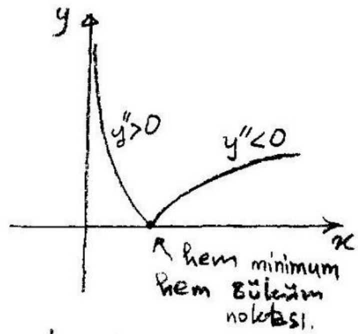
$$\Rightarrow f''(x)=(|\ln x|)''=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & 0<x<1 \text{ ise}\\ \text{YOK}, & x=1 \text{ ise}\\ -\dfrac{1}{x^2}, & 1<x<+\infty \text{ ise}\end{cases}$$ olup

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	
		azalan $\searrow$	min.	$\nearrow$ artan	

$(-\infty,1)$ de fo. azalan ; $(1,+\infty)$ da artandır.

Aynı zamanda $x_0=1$ de minimum vardır.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	
		konveks	B.N.	konkav	



$(-\infty,1)$ de konveks ; $(1,+\infty)$ da konkav

$x_0=1$ in öncesinde ve sonrasında $f(x)$ ikinci mertebe türevi işaret değiştirdiğinden $x_0=1$ de

Yani $(1,0)$ noktası fo.nun eğrisinin büküm noktasıdır.

Soru: $y=f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2}$ fonksiyonunun konkav-konveks olduğu aralıkları ve (varsa) büküm noktalarını bulunuz.

Çözüm: Fo.nun tanım aralığı $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ dur. Öte yandan

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-x}{x^2}, & -\infty<x<1 \\ 0, & x=1 \\ \dfrac{x-1}{x^2}, & 1<x<+\infty \end{cases}$$ olup

$-\infty<x<1$ için $f'(x)=\left(\dfrac{1-x}{x^2}\right)'=\dfrac{-1\cdot x^2-(1-x)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{-x-2(1-x)}{x^3}=\dfrac{x-2}{x^3}$

$1<x<+\infty$ için ise $f'(x)=\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)'=-\left(\dfrac{1-x}{x^2}\right)'=-\dfrac{x-2}{x^3}=\dfrac{2-x}{x^3}$ olup

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{x^3}, & -\infty<x<1 \\ \text{YOK}, & x=1 \\ \dfrac{2-x}{x^3}, & 1<x<+\infty \end{cases}$$ dur. Tekrar türev alınırsa

$-\infty<x<1$ için $f''(x)=\left(\dfrac{x-2}{x^3}\right)'=\dfrac{x^3-3x^2(x-2)}{x^6}=\dfrac{-2x^3+6x^2}{x^6}=\dfrac{2x^2(3-x)}{x^6}=2\cdot\dfrac{3-x}{x^4}$

$1<x<+\infty$ için $f''(x)=\left(\dfrac{2-x}{x^3}\right)'=-\left(\dfrac{x-2}{x^3}\right)'=-2\cdot\dfrac{3-x}{x^4}=2\cdot\dfrac{x-3}{x^4}$ olup

$$f''(x)=\begin{cases} 2\cdot\dfrac{3-x}{x^4}, & -\infty<x<1 \\ \text{YOK}, & x=1 \\ 2\cdot\dfrac{x-3}{x^4}, & 1<x+\infty \end{cases}$$ dur. $f''(x)$ işaretini sadece payından alır. $x_0=0$ ve $x_1=3$ kritik noktalardır.

$-\infty<x<1$ için

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$2\cdot\frac{3-x}{x^4}$		+	‖	+	‖	+	ϕ	−	
		konveks		konveks					

$1<x<+\infty$ için

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$2\cdot\frac{x-3}{x^4}$		−	‖	−	‖	−	ϕ	+	
						konkav	B.N.	konveks	

$f''(1-0)>0$, $f''(1+0)<0$ old. $(1,0)$ büküm noktasıdır.
$f''(3-0)<0$, $f''(3+0)>0$ old. $(3,\frac{2}{9})$ büküm noktasıdır.

$(-\infty,0),(0,1),(3,+\infty)$ da konveks $(1,3)$ de konkavdır.

Örnek: $f(x) = \text{Arctan}\,x$ fo. nunun konveks ve konkav olduğu aralıkları bulunuz, (varsa) büküm noktasını belirtiniz.

Çözüm: $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ nin tekrar türevi alınırsa;

$f''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ olup ikinci mertebe türev her $x \in \mathbb{R}$ için anlamlıdır. Türevin işareti

x	$-\infty$	0	
$f''(x)$	$+$	ϕ	$-$
	konveks	B.N	konkav

$(-\infty, 0)$ da fo. konveks.

$(0, \infty)$ da fo. konkavdır.

$f''(x)$ türevi işaret değiştirdiğinden bu $x_0 = 0$ civarında $f''(x)$ türevi işaret değiştirdiğinden bu $(x_0, f(x_0)) = (0, 0)$ noktası fo.nun eğrisinin büküm noktasıdır.

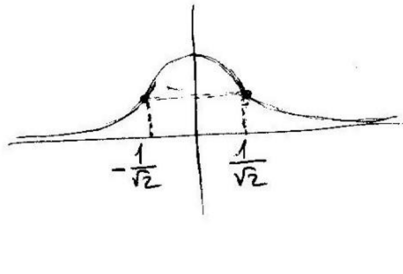
Soru: $y = f(x) = e^{-x^2}$ nin konkavlık-konvekslik aralıkları.

Çöz: $f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2} \Rightarrow f''(x) = (-2x)(-2x) \cdot e^{-x^2} - 2 \cdot e^{-x^2}$

$$= (4x^2 - 2)e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1) \cdot e^{-x^2}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \quad x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \; x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$f''(x)$	$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$
	konveks	B.N.	konkav	B.N.	konveks



Örn.: $y=f(x)=x.\ln|x|$ in konkav-konveks olduğu aralıklar ve (varsa) büküm noktaları?

Çöz. Fonun tanım aralığı $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ dur.

$f'(x)=1.\ln|x|+x.\frac{1}{x}=\ln|x|$ olup

$f''(x)=\frac{1}{x}$ dir.

x		0	
$f''(x)$	$-$	$\Vert$	$+$
	konkav		konveks

$x_0=0$ da $f''(0)=$ tanımsız old. $x_0=0$ civarında (öncesinde ve sonrasında) işaret değiştirmesine rağmen büküm noktası değildir.

Bu fonun büküm noktası yoktur.

Ayrıca artan-azalan aralıklar sorulsaydı, birinci mertebe türevin kritik noktaları $x_1=0$ ve $x_2=\mp1$ olup

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+\nearrow$	0	$-\searrow$	$\Vert$	$-\searrow$	0	$+\nearrow$	
			max				min		

Tabloda artan-azalan olduğu aralıklar ve ekstremum noktaları görülmektedir.

Yani $(-\infty,-1)$ ve $(1,+\infty)$ aralıklarında artan

$(-1,1)\setminus\{0\}$ aralığında azalandır.

Ayrıca $f(-1)=-1.\ln|-1|=-1.\underbrace{\ln 1}_{0}=0$ olduğundan

$(-1,0)$ dır ve $(1,0)$ noktaları ekstremum noktalarıdır

9. sayfadaki sorunun kısaca anlatımı

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x^2} = \begin{cases} \dfrac{1-x}{x^2} , & -\infty < x < 1 \text{ ise} \\ 0 , & x = 1 \text{ ise} \\ \dfrac{x-1}{x^2} , & 1 < x < +\infty \text{ ise} \end{cases}$$

$$\left(\frac{1-x}{x^2}\right)' = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)' = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} = -2x^{-3} + x^{-2}$$

$$\left(\frac{1-x}{x^2}\right)'' = \left(-2x^{-3} + x^{-2}\right)' = +6x^{-4} - 2x^{-3} = \frac{6}{x^4} - \frac{2}{x^3}\,(x) = \frac{6-2x}{x^4}$$

$x_1 = 3$ ve $x_2 = 0$ kritik noktalar

$$\left(\frac{x-1}{x^2}\right)'' = -\frac{6-2x}{x^4} = \frac{2x-6}{x^4}$$

anlamlı

x	$-\infty$		0		1		3
$\left(\frac{x-1}{x^2}\right)''$		+	‖	+	+4	+	0

$(-\infty, 0)$ ve $(0, 1)$ de konveks

x		0		1		3		$+\infty$
$\left(\frac{x-1}{x^2}\right)''$	−	‖	−	−4	−	0 B.N	+	

anlamlı.

$(1, 3)$ de konkav ve $(3, \infty)$ da konveks.