Taylor ve Maclaurin Serileri

Her mertebeden türevlenebilen bir $f(x)$ fonksiyonunu $a \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere $(x-a)$ nın kuvvetleri biçiminde

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + a_{n+1}(x-a)^{n+1} + \dots \quad \dots (1)$$

olarak yazılabilmesine fonksiyonun $x_0 = a$ noktasında Taylor serisine açılımı denir. Burada $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ hesaplanması gereken sabit katsayılardır.

(1) de $x=a$ yazılırsa $f(a) = a_0$ dır. Yani $\boxed{a_0 = f(a)}$ dır.

(1) eşitliğinin iki yanının x'e göre ardışık türevleri alınırsa;

$$f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2(x-a) + 3 \cdot a_3(x-a)^2 + \dots + n \cdot a_n(x-a)^{n-1} + (n+1) a_{n+1}(x-a)^n + \dots$$

$$f''(x) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3(x-a)^2 + \dots + n(n-1) a_n (x-a)^{n-2} + (n+1) \cdot n \cdot a_{n+1}(x-a)^{n-1} + \dots$$

$$f'''(x) = 3.2.1.a_3 + 4.3.2.a_4(x-a) + \dots + n(n+1)(n+2) \cdot a_n \cdot (x-a)^{n-3} + \dots$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n!\, a_n + (n+1) \cdot n(n-1) \dots 3.2.a_{n+1}(x-a) + (n+2) \cdot (n+1) \dots 4.3\,(x-a)^2 + \dots$$

olup, burada herbir eşitlikte $x=a$ yazılmakla,

$f'(a) = 1 \cdot a_1 \Rightarrow \boxed{a_1 = \dfrac{f'(a)}{1!}}$, $f''(a) = 2!\, a_2 \Rightarrow \boxed{a_2 = \dfrac{f''(a)}{2!}}$,

$\boxed{a_3 = \dfrac{f'''(a)}{3!}}$, ... , $\boxed{a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}}$, $a_{n+1} = \dfrac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$, ... bulunur.

Böylece

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \dots$$

ya da kısaca $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ biçiminde

$f(x)$ fonksiyonun (kuvvet serisi biçiminde) Taylor serisidir.

Burada $f^{(0)}(a)=f(a)$ anlamındadır ve $0!=1$ kabul edilmiştir.

Herhangi bir fonksiyonu $x_0=a$ noktası civarında Taylor serisine açmak demek bu fonksiyonu $(x-a)$ nın kuvvet serisi biçiminde yazmak demektir. Yani üstel, logaritmik, trigonometrik, v.s. her fonksiyonun eğer $x_0=a$ noktasında her mertebeden türevi varsa, bu fonksiyonu bir anlamda sonsuzuncu dereceden $(x-a)$ nın polinomu gibi yazabilmekteyiz.

Taylor serisine açılım olan

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad \ldots(2)$$

serisinde $a=0$ yazılmakla elde edilen

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad \ldots\ldots(3)$$

serisine de aynı fonksiyonun Maclaurin serisi denir.

<u>Örnek:</u> $f(x)=4x^3-2x+1$ fonksiyonunun $(x-2)$'nin kuvvetleri biçiminde sonlu Taylor serisine açılımını bulalım.

$$f(x)=4x^3-2x+1 \Longrightarrow f(2)=4.2^3-2.2+1=29$$

$$f'(x)=12x^2-2 \Longrightarrow f'(2)=12.2-2=22$$

$$f''(x)=24x \Longrightarrow f'''(2)=24\cdot 2=48$$

$$f'''(x)=24 \Longrightarrow f'''(2)=24$$

$$f^{IV}(x)=f^{V}(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=0$$ olup, buradan

$$f(x)=4x^3-2x+1=f(2)+\frac{f'(2)}{1!}(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3+0+0+\cdots+0$$

$$f(x)=4x^3-2x+1=29+\frac{22}{1!}(x-2)+\frac{48}{2!}(x-2)^2+\frac{24}{3!}(x-1)^3$$ den

$$4x^3-2x+1=29+22(x-2)+24(x-2)^2+4(x-1)^3$$ bulunur.

③

Örnek: $f(x)=e^x$ fonksiyonunun Maclaurin serisine açılımını bulunuz.

$f(x)=e^x \Rightarrow f^{(n)}(x)=e^x$ dir. $f(0)=e^0=1$ ve $f^{(n)}(0)=e^0=1$ olup

$$f(x)=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}+\dots$$

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\dots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}+\frac{1}{(n+2)!}x^{n+2}+\dots \text{ den}$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \text{ dir.}$$

Örnek: $f(x)=\sin x$ in Maclaurin serisine açılımını bulalım.

$f(x)=\sin x$; $f'(x)=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$, $f''=\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$,

$f'''(x)=\cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2})=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$, ... $f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$ dir.

$f(0)=0$ ve $f^{(n)}(0)=\sin(0+n\cdot\frac{\pi}{2})=\sin n\cdot\frac{\pi}{2}$ olup, n nin çift veya tek olmasına göre ayrı ayrı incelenmeli. Bu son eşitlikte n yerine $2n$ konulursa $f^{(2n)}(0)=\sin 2n\cdot\frac{\pi}{2}=\sin n\pi=0$ dır

n yerine $2n-1$ yazılırsa $f^{(2n-1)}(0)=\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}=\sin(n\pi-\frac{\pi}{2})=-\sin(\frac{\pi}{2}-n\pi)$

den $f^{(2n-1)}(0)=-\cos n\pi=-(-1)^n=(-1)^{n+1}$ veya $f^{(2n-1)}(0)=(-1)^{n-1}$ dir.

Buna göre $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ serisi

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots \text{ den}$$

$$f(x)=0+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5-+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+-\dots$$

$$f(x)=\boxed{\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\dots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+-\dots}$$

biçiminde alterne (bir artı, bir eksi işaretle) Maclaurin serisine açılımı elde edilir.

④

Örnek: $f(x)=\cos x$ fonksiyonunun Maclaurin serisine açılımını da bulalım:

$$f(x)=\cos x \; ; \; f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \text{ olup, } f(0)=\cos 0=1 \; ;$$

$$f^{(n)}(0)=\cos\left(0+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\cos n\cdot\frac{\pi}{2} \begin{cases} \nearrow f^{(2n)}(0)=\cos 2n\cdot\frac{\pi}{2}=\cos n\pi=(-1)^n \text{ dir} \\ \searrow f^{(2n-1)}(0)=\cos(2n-1)\cdot\frac{\pi}{2}=0 \text{ dır.} \end{cases}$$

O halde $\cos x = f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f'''(0)}{3!}x^3+\dfrac{f^{iv}(0)}{4!}x^4+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

$$\cos x = 1+\frac{0}{1!}x+\frac{(-1)^1}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+\frac{(-1)^2}{4!}x^4+-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+-\cdots \text{ dan}$$

$$\boxed{\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+-\cdots} \text{ bulunur.}$$

Örnek: $f(x)=x\cdot e^x$ in Maclaurin serisini bulalım:

$$v=x \Rightarrow v'=1,\; v''=v'''=\cdots=v^{(n)}=0 \text{ ve } u=e^x \Rightarrow u^{(n)}=e^x \text{ olup}$$

$$f^{(n)}(x)=(u\cdot v)^{(n)}=u^{(n)}\cdot v^{(0)}+n\cdot u^{(n-1)}\cdot v'+0+0+\cdots+0=x\cdot e^x+n\cdot e^x=(x+n)\cdot e^x \text{ dir.}$$

Böylece $f(0)=0\cdot e^0=1$ ve $f^{(n)}(0)=(0+n)e^0=\underline{\underline{n}}$ dır. O halde

$$f(x)=x\cdot e^x=0+\frac{1}{1!}x+\frac{2}{2!}x^2+\frac{3}{3!}x^3+\cdots+\frac{n}{n!}x^n+\cdots=\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+\cdots$$

Yani $$\boxed{x\cdot e^x = x+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+\frac{x^{n+1}}{n!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}}$$

bulunur.

NOT: Bu soru için şöyle bir pratik yol da izlenebilir:

e^x in seriye açılımını daha önce

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}+\cdots \quad \text{biçiminde}$$

bulmuştuk. Bunun her terimini x ile çarpmakla

$$x\cdot e^x = x\cdot\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right)=x+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+\frac{x^{n+1}}{n!}+\cdots$$

bulunur.

Seriye açılımda kalan terim:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}+\frac{f^{(n+2)}(a)}{(n+2)!}(x-a)^{n+2}+\dots}_{R_n(x)\ \text{denilsin}}$$

Taylor serisinde n. mertebeden türev teriminden sonraki sonsuz tane terimi $R_n(x)$ ile gösterelim. Eğer $f(x)$ f.nunun ilk n mertebeye kadar türevleri $x_0=a$ noktasında var ve $x_0=a$ civarında $n+1$ inci mertebeden türevi de sürekli ise, bu $R_n(x)$ kalan terimi Lagrange tarafından

$$\boxed{R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)}\ ,\quad 0<\theta<1$$

olarak verilmiştir. (bkz. Mavi kitap s. 180 – 181 veya Genel Matematik I kitabımızın 262. – 264. sayfaları.)

Benzer biçimde

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}+\frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}x^{n+2}+\dots}_{R_n(x)\ \text{denilirse}}$$

Maclaurin serisindeki $R_n(x)$ Lagrange kalanı da

$$\boxed{R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^n}\ ,\quad 0<\theta<1 \quad \text{dir.}$$

Böylece $f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+R_1(x)$ ise, burada Lagrange kalanı $R_1(x)=\frac{f'(a+\theta(x-a))}{1!}$, $0<\theta<1$ dir. Benzer biçimde $f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+R_2(x)$ ise, burada Lagrange kalanı $R_2(x)=\frac{f'''(a+\theta(x-a))}{3!}(x-a)$, $0<\theta<1$ dir.

Benzer bir çalışma Maclaurin serisinin Lagrange kalanlı biçimi; ⑥

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+R_1(x) \quad \text{ise,} \quad R_1(x)=\frac{f''(\theta x)}{2!}x^2, \quad 0<\theta<1 \text{ dir.}$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+R_2(x) \quad \text{ise,} \quad R_2(x)=\frac{f'''(\theta x)}{3!}x^3, \quad 0<\theta<1 \text{ dir.}$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}+R_3(x) \quad \text{ise,} \quad R_3(x)=\frac{f^{IV}(\theta x)}{4!}x^4, \quad 0<\theta<1 \text{ dir.}$$

<u>Örnek:</u> $f(x)=e^x$ in seriye açılımında ilk üç terim alarak $f(0,1)$ in yaklaşık bir değerini bulunuz. Ayrıca bu hesaplamada yapılan hatanın mutlak değeri için bir üst sınır veriniz

$$f(x)=e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+R_2(x) \quad \text{den,} \quad R_2(x)=\frac{f'''(\theta x)}{3!}x^3, \quad 0<\theta<1$$

olup $f(0,1)=e^{0,1}\approx 1+\frac{0,1}{1!}+\frac{(0,1)^2}{2!}=1+0,1+0,005=1,105$ dir.

$$e^{0,1}-\left(1+\frac{0,1}{1!}+\frac{(0,1)^2}{2!}\right)=R_2(0,1) \quad \text{olup}$$

$$|R_2(0,1)|=\left|\frac{f'''(0)}{3!}(0,1)^3\right|=\frac{e^{0,1}}{3!}|(0,1)^3|=\frac{e^{0,1}}{3!}(0,1)^3<\frac{e^1}{3}10^{-3}<\frac{3}{3}10^{-3}=\frac{10^{-3}}{2}=0,0005$$

olup

$e^{0,1}$ in yaklaşık hesabında seriye açılımın ilk üç terimi alındığında, yapılan hata mutlak değerce 0,0005 den daha küçük kalmaktadır.

Son olarak seriye açılımın hangi x'ler için anlamlı (yani seri yakınsak) olduğunu bulabilmek için, hangi x'ler için $n\to\infty$ iken $R_n(x)$ in sıfıra yakınsadığı araştırılmalıdır. Bu işlem her zaman kolayca yapılamayacağından, kuvvet serilerinde D'Alembert oran testi ile yani $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}:\frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n\right|<1 \text{ için araştırma yapılır.}$$

7

Benzer biçimde $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ Maclaurin serisinin

yakınsaklık aralığı da $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n+1)}(0)\cdot x^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!}\right|<1$

olan x lerden oluşur.

Gerçekten $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\underbrace{\frac{x^n}{n!}}_{u_n}+\underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{u_{n+1}}+\cdots$ serisinin

yakınsaklık aralığı $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1$ için araştırılır;

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0 \text{ dır,}$$

her $x\in(-\infty,+\infty)$ için. Dolayısıyla $f(x)=e^x$

fonksiyonunun her $x\in(-\infty,+\infty)$ için seriye açılımı vardır.

Bundan dolayı x yerine $2x$, $-3x$, x^2 yazıldığında da seriye açılım anlamlıdır (yakınsaktır.) Böylece

$$e^{2x} = 1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\cdots+\frac{(2x)^n}{n!}+\cdots \quad \forall x\in\mathbb{R} \text{ için}$$

$$e^{-3x} = 1+\frac{(-3x)}{1!}+\frac{(-3x)^2}{2!}+\cdots+\frac{(-3x)^n}{n!}+\cdots \quad \forall x\in\mathbb{R} \text{ için}$$

$$e^{x^2} = 1+\frac{x^2}{1!}+\frac{(x^2)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x^2)^n}{n!}+\cdots, \text{ yani}$$

$$e^{x^2} = 1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots \quad \forall x\in(-\infty,+\infty)$$

için yazılabilir.

Benzer çalışma $f(x)=\ln(1+x)$ için yapılırsa sonuç ne olur? Buna bakalım;

$f(x) = \ln(1+x)$; $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n}$ dır ; $f(0)=0$

ve $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$, $\forall n \geq 1$ için.

$$f(x) = \ln(1+x) = 0 + \frac{(-1)^0 \cdot 0!}{1!}x + \frac{(-1)^1 \cdot 1!}{2!}x^2 + \frac{(-1)^2 \cdot 2!}{3!}x^3 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n + \dots$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \underbrace{\frac{x^n}{n}}_{u_n} + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{u_{n+1}} + \dots \quad \text{bulunur.}$$

Acaba hangi x'ler için yakınsak?

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}/(n+1)}{x^n/n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot|x| = 1 \cdot |x| < 1 \text{ için yakınsak.}$$

Yani $|x|<1 \Rightarrow -1<x<1$ için yakınsak, O halde

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \quad , \quad \forall x \in (-1,1) \text{ için.}$$

Not: Taylor ve Maclaurin serileri ile ilgili daha geniş açıklamalar ve örnekleri Mavi kitabın 178.–190. sayfalarında bulabilirsiniz. Ayrıca bizim kitabımızın kapak sayfası ile bu konunun işlendiği 262 den 275'e kadar olan sayfaların taranmış biçimi de bu sayfanın devamında eklenmiştir.

GENEL MATEMATİK I

Prof. Hamdi ARIKAN
Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL
Dr. İbrahim ÖZGÜR

DEĞİŞİM YAYINLARI
İstanbul / 2002

4.7. Taylor ve Mac-Laurin Formülleri ve Seriye Açılımlar

1) Teorem (Taylor-Lagrange Formülü)

Eğer bir $y = f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve n. mertebeye kadar sürekli türevi haiz ve (a,b) de $(n+1)$. mertebeden sonlu türeve sahip ise

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots +$$

$$+ \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \qquad (1)$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ vardır.

Buradaki $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ terimine *Lagrange kalanı* veya *tümler terimi* denir.

İspat

a, $f(a), f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$, b, $f(b), \ldots, f^{(n)}(b)$ sonlu değerler olduğundan

$$f(b) - f(a) - \frac{b-a}{1!} f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) - \ldots -$$

$$- \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} R = 0 \qquad (2)$$

olacak şekilde bir R sabiti vardır.

$R = f^{(n+1)}(c)$ olduğunu göstermek gerekir.

$$g(x) = f(b) - f(x) - \frac{b-x}{1!} f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) - \ldots -$$

$$-\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x)-\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}R \qquad (3)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.

$g(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ de süreklidir.

$g(x)$ (a,b) de türetilebilir.

$g(a)=0$ (2) den

$g(b)=0$

$g(x)$ Rolle teoreminin bütün şartlarını gerçeklediğinden $g'(c)=0$ olacak şekilde en az bir $c(a,b)$ vardır.

$$g'(x)=-f'(x)-\left[-f'(x)+\frac{b-x}{1!}f''(x)\right]-\left[-\frac{(b-x)}{1!}+\frac{(b-x)^2}{2!}f'''(x)\right]$$

$$-\left[-\frac{(b-x)^2}{2!}f'''(x)+\frac{(b-x)^3}{3!}f^{IV}(x)\right]\ldots$$

$$-\left[-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)+\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)\right]+\frac{(b-x)^n}{n!}R \;;$$

$$g'(x)=-\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)+\frac{(b-x)^n}{n!}R \qquad (4)$$

bulunuz.

$$g'(c)=0\;; \quad -\frac{(b-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c)+\frac{(b-c)^n}{n!}R=0 \;;$$

$$R=f^{(n+1)}(c) \qquad (5)$$

elde edilir.

Bu formül $n=0$ özel halinde Lagrange formülünü verir.

Taylor formülünün diğer bir gösterimi $b=x$ yazarak

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots +$$

$$+ \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)) \qquad (0 < \theta < 1)$$

elde edilir.

$$(R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)) \text{ kalan})$$

Bu formülde $a = 0$ yazarak

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

Mac-Laurin formülü elde edilir.

Görüldüğü üzere Mac-Laurin formülü bir $f(x)$ fonksiyonunun x'in artan tam kuvvetlerine göre sıralanmış bir polinoma bütünler (kalan) terimin ilavesi şeklinde yazılmasını mümkün kılar.

Göz önüne alınan fonksiyonun her mertebeden türevi varsa n keyfi seçilebilir.

$f(x)$, "0" ın bir açık civarı olan (a,b) aralığında tanımlı ve 0 (sıfır) noktasında her mertebeden türeve sahip bir fonksiyon olsun.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad (1)$$

kuvvet serisine, f fonksiyonun 0 noktası civarındaki *Mac-Laurin açılımı* denir.

Eğer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

kuvvet serisi 0 (sıfır) noktasının bir civarında yakınsak ve bu civardaki limiti

$f(x)$ ise, f fonksiyonu 0 noktası civarında Mac-Laurin serisine açılabilir denir.

ÖRNEKLER

1. $y = f(x) = e^x$ fonksiyonuna Mac-Laurin formülünü uygulayın ve 0 (sıfır) ın her civarında Mac-Laurin serisine açılabileceğini gösteriniz.

f fonksiyonu 0 (sıfır) noktasında her mertebeden türeve sahip ve 0'ın her civarında tanımlıdır.

$f^{(n)}(x) = e^x$ ve $f^{(n)}(0) = 1$ olduğundan Mac-Laurin formülü

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n \quad \text{ve}$$

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)} f^{(n+1)}(\theta x) \text{ den } R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \cdot e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1) \text{ dir.}$$

Şimdi $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ olduğunu gösterelim;

Her x reel sayısı için $e^{\theta x}$ pozitif bir reel sayıdır. O halde $x > 0$ ve $x < 0$ için $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ oranının limitini araştırmak gerekir.

$x > 0$ olsun.

1) $0 < x < 1$ için $\lim\limits_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} = 0 \text{ dır.}$$

2) $x = 1$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(n+1)!} = 0$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ dir.

3) $x > 1$ için $[\![x]\!] = N$ olsun.

$N \le x < N+1$ dir.

$n+1=N$ için $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, $A=\frac{x^N}{N!}$ değerini alır.

$n+1=N+1$ için $B=\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}=A\cdot\frac{x}{N+1}$ değerini alır.

$\frac{x}{N+1}<1$ olduğundan $B<A$ dır.

$n+1=N+2$ için $C=\frac{x^{N+2}}{(N+2)!}=\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}\cdot\frac{x}{N+2}$ değerini alır.

$\frac{x}{N+2}<1$ olduğundan $C<B$ dir. O halde $n>N$ için

$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{x^n}{n!}\frac{x}{n+1}<A\cdot\frac{x}{n+1}$ dir.

Bu durumda $A\cdot\frac{x}{n+1}$ in limitinin 0 olduğu gösterilmelidir.

$A\cdot\frac{x}{n+1}<\varepsilon$ dan $n+1>\frac{Ax}{\varepsilon}$ ve $n>\left[\frac{Ax}{\varepsilon}-1\right]$ elde edilir. Her $\varepsilon>0$ sayısına $\sup\left[N,\frac{Ax}{\varepsilon}\right]=N(\varepsilon)$ karşı getirilerek istenilenin sağlandığı görülür.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$ ve dolayısıyla $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$ dır. $x<0$ için benzer tarzda $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$ olduğu gösterilir;

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

2. $y=\sin x$ fonksiyonu sıfırın her civarında her mertebeden sürekli türeve sahip olduğundan Mac-Laurin formülü uygulanabilir;

$$y^{(n)}=\sin(x+n\frac{\pi}{2}) \; ; \quad f^{(n)}(0)=\sin(n\frac{\pi}{2})\cdot f(0)=0$$

$$f^{(2n)}(0)=\sin n\pi=0 \text{ ve } f^{(2n-1)}(0)=\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}=(-1)^{n-1}$$

$$f(x)=\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2n-1} \text{ ve}$$

$$R_{2n-1}=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin(\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2})$$

$$\left|R_{2n-1}\right|=\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|\left|\sin(\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right|\le\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|$$

Örnek 1'de $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=0$ olduğu görüldü. Sıfırın her civarında $y=\sin x$ fonksiyonunun seriye açılımı

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \text{ dir.}$$

3. $y=\cos x$ 0'ın her civarında her mertebeden türeve sahip olduğundan Mac-Laurin formülü uygulanabilir.

$$y^{(n)}=\cos(x+n\frac{\pi}{2}),\; f(0)=1,\; f^{(n)}(0)=\cos n\frac{\pi}{2};\; f^{(2n)}(0)=\cos n\pi=(-1)^n$$

ve $f^{(2n-1)}(0)=\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}=0$ olduğundan

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n} \quad \text{ve}$$

$$R_{2n} = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos(\theta x + (n+1)\pi) \text{ elde edilir.}$$

$\left|\cos\left[\theta x + (n+1)\pi\right]\right| \leq 1$ olduğundan

$$|R_{2n}| \leq \left|\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\right| \text{ ve}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n} = 0$ olduğu görülür.

Sıfırın her civarında Mac-Laurin serisi

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \text{ dir.}$$

4. Euler Formülü

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

olduğunu gösteriniz.

Bir kompleks değişkenli fonksiyon için Mac-Laurin formülünü kabul etmekle

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \text{ den}$$

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \ldots + \frac{(ix)^n}{n!} + \ldots$$

$$= (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots) + i(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots) \text{ elde edilir. O halde}$$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \qquad (1)$$

dir.

Bu formülde x yerine $-x$ yazarak

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i\sin x \qquad (2)$$

bulunur.

(1) de $x=\pi$ yazarak

$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi$; $e^{i\pi}=-1$ elde edilir.

5. $y=\ln(1+x)$ fonksiyonu sıfırın 1 yarıçaplı $C_1(0)$ civarında her mertebeden türeve sahiptir.

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$, $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ ve

$f(0)=\ln 1=0$ olduğundan Mac-Laurin formülü

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n \ ;$$

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{(-1)^n\cdot n!}{(1+\theta x)^{n+1}}=\frac{(-1)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (0<\theta<1) \text{ dir ve}$$

$|x|<1$ için $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$ olduğundan Mac-Laurin serisi

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \text{ dir.}$$

6. $y=(1+x)^m$ (m rasyonel) fonksiyonu sıfırın 1 yarıçaplı $C_1(0)$ civarında her mertebeden türeve sahiptir.

$f^{(n)}(x)=m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)(1+x)^{m-n}$,

$f^{(n)}(0)=m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$ ve $f(0)=1$ olduğundan Mac-Laurin formülü

$$(1+x)^m=1+\frac{mx}{1!}+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n+R_n \quad ;$$

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}$$ dir ve

$|x|<1$ için Mac-Laurin serisi

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$ dir.

7. $y=(x^2-1)\cos x$ fonksiyonu sıfırın her civarında her mertebeden sürekli türeve sahip olduğundan Mac-Laurin formülü uygulanabilir.

$u = x^2-1$, $v=\cos x$ denirse

$u' = 2x$, $u'' = 2$, $u^{(n)} = 0$ $\quad n>2$ ve $v^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$

olduğundan

$$f^{(n)}(x) = (x^2-1)\cos(x+n\frac{\pi}{2}) + n\cdot 2x\cos\left[x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right] +$$

$$+n(n-1)\cos\left[x+(n-2)\frac{\pi}{2}\right]$$ elde edilir. Buradan

$$f(0) = -1,\ f^{(n)}(0) = (-1)\cos\frac{n\pi}{2} + n(n-1)\cos(n-2)\frac{\pi}{2}$$

$$f^{(2n)}(0) = (-1)\cos n\pi + 2n(2n-1)\cos(n-1)\pi$$

$$= (-1)^{n+1} + 2n(2n-1)(-1)^{n-1}$$

$$= (-1)^{n-1}\left[1+2n(2n-1)\right]$$ ve

$f^{(2n-1)}(0) = 0$ bulunur.

$$f(x) = (x^2-1)\cos x = -1 + \frac{3x^2}{2!} - \frac{13}{4!}x^4 + \ldots +$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}\left[1+2n(2n-1)\right]}{(2n)!}x^{2n} + R_{2n}$$

$$R_{2n}=\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}((\theta x)^2-1)\cos\left[\theta x+(n+1)\pi\right]+$$

$$+2(2n+2)\theta x\cos\left[\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]+(2n+2)(2n+1)\cdot\cos\left[\theta x+n\pi\right] \text{ dir.}$$

8. (2) den

$$\sin 1=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{(2p-1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

ve (3) den

$$\cos 1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!} \text{ olduğu görülür.}$$

Bunlardan yararlanarak $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)^2}{(2k+1)!}$ serisinin toplamını $\sin 1$ ve $\cos 1$ cinsinden hesaplayınız.

$$(2k-1)^2\equiv\left[(2k+1)-2\right]^2\equiv(2k+1)^2-4(2k+1)+4 \;;$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)^2}{(2k+1)!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}-4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}+4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

$$=-\sin 1+\cos 1-4\cos 1+4\sin 1=3\sin 1-3\cos 1$$

9. $\sqrt[4]{30}$ sayısının yaklaşık bir değeri $\frac{7}{3}$ olarak verildiğine göre bu sayıyı 10^{-4} den küçük hata ile hesaplayınız.

$$(1+x)^{1/4}=1+\frac{\frac{1}{4}}{1!}x+\frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)(\frac{1}{4}-2)}{3!}x^3+$$

$$+\ldots+\frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{4}-n+1)}{n!}x^n+R_n$$

$$R_n=\frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{4}-n+1)(\frac{1}{4}-n)}{(n+1)!}x^{n+1}\cdot(1+\theta x)^{n+1-\frac{1}{4}}\quad(0<\theta<1) \text{ ve}$$

$\frac{7}{3}(1+x)^{1/4}=\sqrt[4]{30}$ dan $x=\frac{29}{2401}$ dir.

$$|R_n|<\left|\frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{4}-n)}{(n+1)!}(\frac{29}{2401})^{n+1}\right|<10^{-4} \text{ den}$$

$$|R_1|<\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{2}(\frac{29}{2401})^2<10^{-4} \text{ elde edilir.}$$

$$\sqrt[4]{30}\cong\frac{7}{3}\left[1+\frac{1}{4}\cdot\frac{29}{2401}\right]=\frac{3211}{1372}=2,3403$$

10. $y=8^x$ fonksiyonunun Mac-Laurin açılımındaki ilk üç terimi alarak $f(-0,2)$ sayısını yaklaşık olarak hesaplayınız ve hata için bir üst sınır veriniz, $(Ln2\cong 0,6931)$

$f^{(n)}(x)=(3\ln 2)^n 8^x$

$f(0)=1\ ,\quad f^{(n)}(0)=(3\ln 2)^n$

$$8^x=1+\frac{3\ln 2}{1!}x+\frac{(3\ln 2)^2}{2!}x^2+R_2$$

$$8^{-0,2}\cong 1+(3\ln 2)\cdot(-0,2)+\frac{(3\ln 2)^2}{2!}(-0,2)^2=1,4488$$

$$|R_2| = \frac{(3\ln 2)^3}{3!}\frac{2^3}{10^3}\frac{1}{8^{0,2\theta}} \qquad 0<\theta<1$$

$$|R_2| < \frac{(3\ln 2)^3}{3!}\cdot\frac{2^3}{10^3}$$

Alterne serilerde yaklaşık değer hesaplarındaki hata mutlak değerce son terimden sonra gelen terimin mutlak değerinden küçüktür.

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki limitlerin karşılarında belirtilen değer olduğunu gösteriniz.

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$ $\qquad (\frac{1}{\sqrt{e}})$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{4x^2-1}-3x\right]$ $\qquad (\frac{1}{2})$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}$ $\qquad (\frac{1}{2})$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x-1}{1-\cos x}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctg} x)^{\frac{1}{x}}$ $\qquad (1)$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}$ $\qquad (1)$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ $\qquad (\frac{1}{2})$

h) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$ $\qquad (\frac{1}{9})$

2. $f(x)=\dfrac{1}{4(1-\sqrt{x-1})}+\dfrac{1}{6(\sqrt[3]{x-1}-1)}$ fonksiyonunun $x=2$ için belirsiz olup olmadığını araştırınız; belirsiz ise limitini hesaplayınız. $(\frac{1}{24})$

3. Gerekli Mac-Laurin açılımından yararlanarak aşağıdaki limiti hesaplayınız.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+3x^2+6x^3+\ln(1-3x)^{2/3}}{x^4}$$

4. Esas sonsuz küçük x olduğuna göre, aşağıdaki fonksiyonlar da birer sonsuz küçük ise mertebelerini ve esas kısımlarını bulunuz.

a) $y=\text{tg}\,x-\sin x$ $\quad n=3 \quad E.K.(y)=\frac{1}{2}x^3$

b) $y=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ $\quad n=1 \quad E.K.(y)=\frac{x}{2}$

c) $y=x\cos x-\ln(1+x)$ $\quad n=2 \quad E.K.(y)=\frac{x^2}{2}$

d) $y=\text{tg}\,x-\sqrt{x}$ $\quad n=\frac{1}{2} \quad E.K.(y)=-\sqrt{x}$

e) $y=e^x-\cos x$ $\quad n=1 \quad E.K.(y)=x$

f) $y=2x-\sin x-\text{tg}\,x$ $\quad n=3 \quad E.K.(y)=\frac{x^3}{6}$

5. $y=9^x$ in Mac-Laurin açılımını yazınız.
$f(-0,3)$ ün yaklaşık bir değerini açılımda ilk 4 terim alarak hesaplayınız ve hata için bir üst sınır veriniz.

6. $\sqrt[4]{82}$ sayısının yaklaşık bir değerini binom serisinde ilk üç terim alarak hesaplayınız ve hata için bir üst sınır veriniz.

7. $y=e^{-x}\sin x$ fonksiyonunun Mac-Laurin açılımını yazınız $f(\frac{1}{10})$ sayısını, hatanın mutlak değeri $<10^6$ olacak şekilde hesaplayınız.

8. $y=(x^2-2x+5)e^{3x}$ in Mac-Laurin açılımını yazınız ve bu açılımda 3 terim alarak $f(\frac{1}{10})$ sayısının yaklaşık bir değerini hesaplayınız.