FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Bir y = f(x) fonksiyonunun grafiği, bir eğri veya doğrudur. Grafik üzerinde, sonsuz çoklukta nokta vardır.buların tümünü bularak , analitik düzlemde işaretleyip birleştirmek olanaksızdır. Bunun yerine, eğrinin karakterini belirten bazı özel noktalarını ve bazı özelliklerini bulursak, bunlara dayanarak eğriyi aslına uygun biçimde çizebiliriz. Bu noktalar; eğrinin eksenleri kestiği noktalar, ekstrenum noktaları ve dönüm noktalarıdır. Özellikler ise; aratan veya azalan olması yukarı ve ya aşağı bükey olması, bazı doğrulara sonsuzda yaklaşması, yani teğet olmasıdır.

Önce, grafiklerin çiziminde bize yardımcı olan asimtotları tanımlayalım.

ASİMTOTLAR

Tanım:

Bir L doğrusu veya eğrisi ile bir y = f(x) foksiyonunun sonsuz giden uçları arasındaki uzaklık sıfıra yaklaşırsa, L ve y = f(x) fonksiyonunun bir asimtotu denir.

L, x – eksenine dikse, **düşey asimtot,**

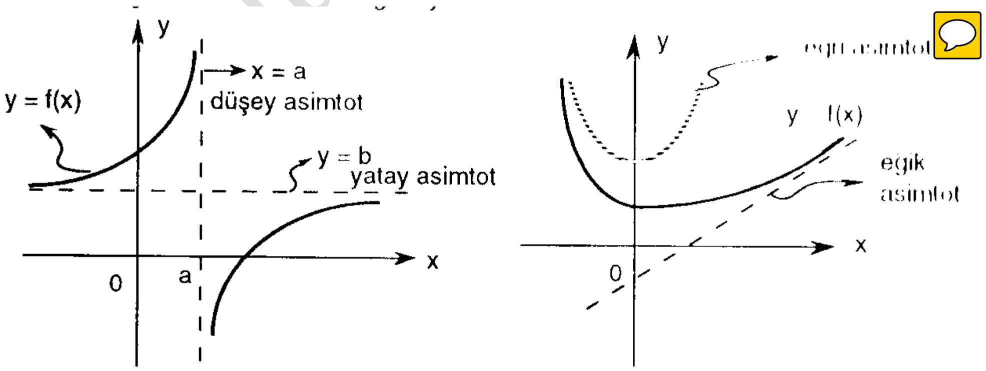
L, x – eksenine paralelse, **yatay asimtot,**

L, eğik bir doğru ise, **eğik asimtot,**

L, bir eğri ise, **eğri asimtot** adını alır.

Kısaca, bir eğriye sonsuza teğet olan doğru veya eğriye asimtot diyebiliriz. Asimtot başka bir noktada eğriyi kesebilir.

Şekilde asimtotları görüyoruz.



Bir eğrinin asimtotlarının yukarıdaki tanıma göre bulmamız güçtür. Bunun için aşağıdaki tanımlardan yararlanırız. Bunlar da ilk tanıma denktir.

Tanım:

Bir y = f(x) fonksiyonu verilsin

1) $\begin{pmatrix} \lim f(x) = +\infty \ \ veya \ -\infty \\ x \to a^- \end{pmatrix}$ veya $\begin{pmatrix} \lim f(x) = -\infty \ \ veya \ +\infty \\ x \to a^+ \end{pmatrix}$

ise x = a doğrusuna eğrinin **düşey asimtotu** denir.

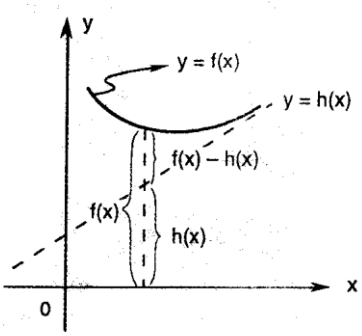
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ veya $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ veya

ise y = b doğrusuna eğrinin **yatay asimtotu** denir.

Tanım:

Bir y = f(x) eğrisi ve y = h(x) doğrusu verilsin.

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\, f(x) - h(x) \right] = 0 \quad \text{veya} \quad \lim_{x \to -\infty} \left[\, f(x) - h(x) \right] = 0$$



ise y = h(x) doğrusuna eğrinin **eğik asimtotu** denir.

Eğer y = h(x) bir eğri ise, buna **eğri asimtotu** denir.

$y = f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ biçiminde bir rasyonel fonksiyon verilsin.

1) Payın derecesi paydanın derecesinden 1 fazla ise, fonksiyon,

f(x) = mx + n + $\dfrac{C}{Q(x)}$, C sabit,

biçiminde yazılabilir. Bu durumda

$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - (mx + n) \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{C}{Q(x)} = 0$$ olacağından,

$$y = mx + n$$

eğrinin eğik asimtotu olur.

2) Payın derecesi paydanın derecesinden 2 fazla ise,

f (x) = ax^2 + bx + c + $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, (derece R(x) < derece Q(x)), şeklinde yazılabilir.

$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - (ax^2 + bx + c) \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{C}{Q(x)} = 0$$

olacağından,

$$y = ax^2 + bx + c$$

eğrinin eğri asimtotu olur.

O halde eğik veya eğri asimtotları bulmak için pay, paydaya bölünür ve bölüm asimtot olarak alınır.

Örnek

f(x) = $\dfrac{x^3 - x + 1}{x + 1}$ fonksiyonunun asimtotunu bulunuz.

Çözüm:

x + 1 = 0 $\Rightarrow$ x = -1 düşey asimtottur.

f(x) = $x^2 - x + \dfrac{1}{x+1}$ sayfa 110 daki şekil

olarak yazılabileceğinden,

$$y = x^2 - x$$

eğri asimtottur.

Örnek:

y = $\dfrac{ax - 4}{bx - c}$ eğrinin yatay ve düşey asimotlarının (2,1) noktasında keşismesi ve eğrinin y – eksenini y = 1 de kesmesi için a, b, c ne olmalıdır?

Çözüm:

Asimotlarının (2, 1) noktasında kesişmeleri için yatay asimot x = $\dfrac{c}{b}$ = 2, düşey asimot y = $\dfrac{a}{b}$ = 1 olmalıdır. Buna göre, c = 2b ve a = b olması gerekir.

Eğri y – eksenini y = 1 de kestiğine göre, x = 0 için y = $\dfrac{-4}{-c}$ = 1 olmalıdır. Buradan c=4 çıkar. Yerine konursda, b = 2 ve a = 2 bulunur.

Grafik Çizimleri

Bir fonksiyonun grafiğini çizmek için aşağıdaki yolu izlemek uygundur.

1) Tanım kümesi bulunur.
2) Fonksiyon periyodik ise, periyodu bulunur.
3) Fonksiyonun tek ve çift olup olmadığına bakılır.
4) Fonksiyon IR de tanımlı ise, $\lim\limits_{x \to \pm\infty}$ f(x) limiti hesaplanır.
5) Asimotlar bulunur.
6) Eğrinin eksenleri kestiği noktalar bulunur.
7) Fonksiyon [a, b] de tanımlı ise, f(a) ve f(b) değerleri bulunur.
8) Türev alınır ve kökleri bulunur.
9) Değişim tablosu yapılır.

10) Tabloya göre grafik çizilir.

Fonksiyonların tiplerine göre bu maddeler azalabilir.

Örnek:

fx)= $x^3 - 3x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

Fonksiyon periyodik değildir. Ancak,

f-x) = $(-x)^3 - 3(-x) + 2 = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x)$

olduğundan, fonksiyon tektir. Dolayısıyla $x \geq 0$ için grafik çizilip bunun orjinine göre simetriği alınabilir.

1) Tanım kümesi: E = IR dir.

2) Asimtotlar yok, ancak

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x) = +\infty$$

3) x = 0 için y = 0 olduğundan, eğri y – eksenini (0, 0) noktasında keser. y = 0 için $x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$ olduğundan eğri, x – eksenini (0,0), $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$ noktalarında keser.

4) Türev: $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$

$x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = f(1) = 1^3 - 3.1 = -2$ dir.

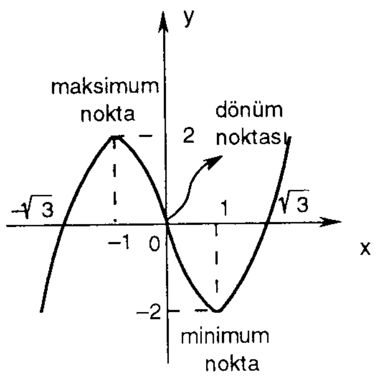
(-1, 2), (1, -2) noktaları ekstrenum noktalardır.

$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$ olduğundan (0, 0) dönüm noktasıdır.

5) Tablo

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$y'(x) = 3x^2 - 3$		+		+	0	−		−	0	+		+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	2	↘	0		-2	↗	0	↗	$+\infty$
					mak. değer		dönüm noktası		min. değer				

6) Grafik



Örnek:

$f(-x) = x^4 – 6x^2 + 8$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$f(-x) = f(x)$ olduğundan, fonksiyon çifttir. $x \geq 0$ için grafik çizilip, y-eksenine göre simetri alınabilir.

1) Tanım kümesi : E =IR

2) Asimtot yok, ancak

$$\lim_{x \to \pm\infty} (x^4 - 6x^2 + 8) = \lim_{x \to \pm\infty} x^4\left(1 - \frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^4}\right) = +\infty$$

3) $x = 0$ için $f(0) = 8$ olduğundan, eğri y – eksenini (0, 8) noktasında keser.

$y = 0 \Rightarrow x^4 - 6x^2 + 8 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)\ (x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2,\ x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$

olduğundan, eğri x – eksenini (-2, 0) , (2, 0) , $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$ noktalarında keser.

4) Türev:

$f'(x) = 4x^3 – 12x = 4x(x^2 – 3)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(x^2 – 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ ve $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$ olur.

$x_1 = 0$ için $y_1 = f(0) = 8$

$x_2 = -\sqrt{3}$ için $y_2 = f(-\sqrt{3}) = 9 – 6 . 3 + 8 = 17 – 18 = –1$

$x_3 = \sqrt{3}$ için $y_3 = f(\sqrt{3}) = -1$ olduğundan,

(0 , 8), $(-\sqrt{3}, -1)$, $(\sqrt{3}, -1)$ ekstrenum noktalardır.

$f''(x) = 12x^2 – 12$

$f''(x) = 12x^2 – 12 = 0 \Rightarrow x^2 – 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$

$x_1 = -1$ için $y_1 = f(-1) = (-1)^4 – 6 . (-1)^2 + 8 = 3$

$x_2 = 1$ için $y_2 = f(1) = 3$ tür. Dolayısıyla (-1, 3), (1, 3) dönüm noktalarıdır.

5) Tablo:

Önce türevlerin işaret tablosunu yapalım.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$			
x^2-3		$+$	0	$-$		$-$	0		
$f'(x)=4x(x^2-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0		
$f(x)$		$\searrow$	-1 min. nokta	$\nearrow$	8 mak. nokta	$\searrow$	-1 min. nokta		

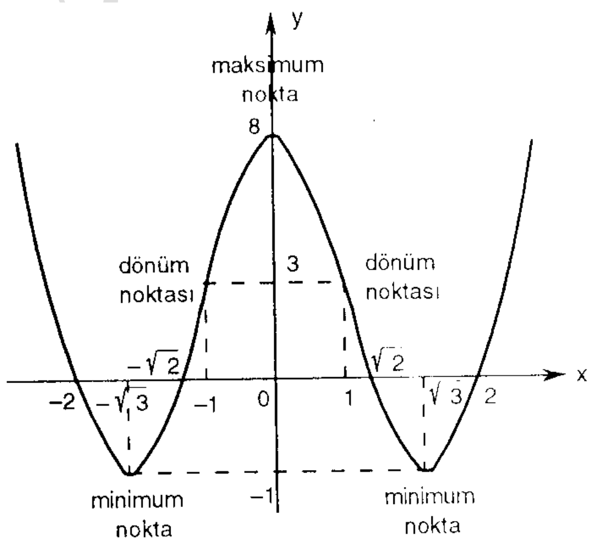
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)=12x^2-12$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		yuk. bük.	3 D.N.	aşağı bük.	3 D.N.	yuk. bük.	

şimdi bulunan bütün bilgileri aynı tablo üzerinde toplayalım.

x	$-\infty$	2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$0\ +$	$+$	$+$	$0\ -$	$-$	$-$	$0\ +$	$+$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	$0\ -$	$-$	$0\ +$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$	0	$-1 \nearrow$	$0 \nearrow$	$3 \nearrow$	$8 \searrow$	$3 \searrow$	$0 \searrow$	$1 \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty$
			min. nokta		D.N.	mak. nokta	D.N.		min. nokta		

6) Grafik

Şimdi tablodaki bilgilere göre grafiği çizelim.



RASYONEL FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Örnek:

y = $\dfrac{1-x}{x-2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

1) Tanım kümesi: E = IR –{2} dir.

2) Asimotlar :

Payda x – 2 olduğundan, x – 2 = 0 $\Rightarrow$ x = 2 düşey asimtottur.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1-x}{x-2}$ = -1 olduğundan, y = -1 yatay asimtottur.

3) x =0 için $\dfrac{1-x}{x-2}$ = 0 $\Rightarrow$ 1 – x = 0 $\Rightarrow$ x = 1 olduğundan, eğri, x – eksenini (1, 0) noktasında keser.

4) Türev :

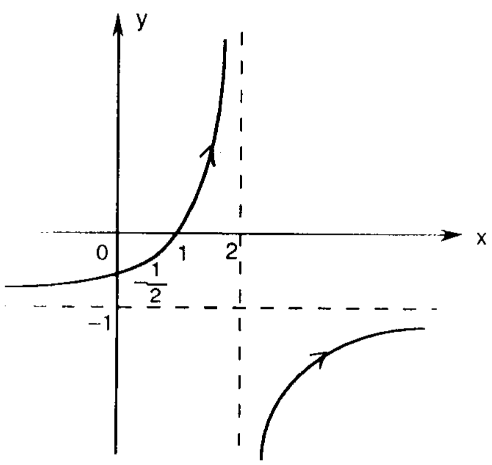
$y' = \dfrac{-1.(x-2)-1.(1-x)}{(x-2)^2} = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ > 0, (x $\neq$2 için)

olduğundan, ekstrenum nokta yoktur.

5) Tablo:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$y' = \dfrac{1}{(x-2)^2}$		+		+		+		+	
y	-1	$\nearrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$	D.A.	$-\infty$ $\nearrow$	-1

6) Grafik:



Örnek:

y = $\dfrac{x^2+1}{x}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

1) Tanım kümesi : E =IR – {0} dır.

2) Asimtotlar: x = 0 düşey asimtottur. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2+1}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2+1}{x} = +\infty$ dur. Payın derecesi paydanın derecesinden büyük olduğundan, yatay asimtot yok, eğik asimtot vardır.

$$y = \frac{x^2+1}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

olduğundan eğik asimtot y = x doğrusudur.

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2+1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2+1}{x} = +\infty$ dır.

3) x = 0 için f(0) tanımsız olduğundan, eğri, y – eksenini kesmez.

y = 0 için $\dfrac{x^2+1}{x} = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$. Bu denklemin reel kökü olmadığından, eğri, x – eksenini kesmez.

4) Türev:

$$y' = \frac{2x.x - 1.(x^2+1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$$

$x_1 = -1$ için $y_1 = f(-1) = \dfrac{(-1)^2 - 1}{-1} = \dfrac{2}{-1} = -2$

$x_2 = 1$ için $y_2 = f(1) = \dfrac{(1)^2+1}{1} = 2$ olduğundan (-1, -2), (1, 2) noktaları ekstrenum noktalardır.

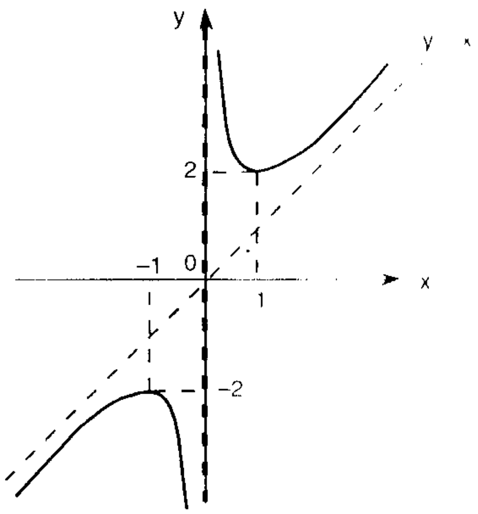
$$y'' = \frac{2x.x^2 - 2x.(x^2-1)}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x)}{x^4} = \frac{2}{x^3} \neq 0$$

olduğundan dönüm noktası yoktur.

5) Tablo

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$
			max. değer		D.A.		min. değer		

6) Grafik



İRASYONEL FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Örnek

$y = -x\sqrt{4-x^2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

1) Fonksiyon $4 - x^2 \geq 0$ için yani $-2 \leq x \leq 2$ için tanımlı olduğundan, tanım kümesi E= [-2, 2] dir.

2) x = 0 için y = 0 dır. Yani eğri eksenleri (0, 0) noktasında keser, y = 0 için $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 2$ dir.

3) Türev:

$$y' = -1\,.\,\sqrt{4-x^2} - x\,.\,\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{4-x^2} = \frac{2x^2-4}{\sqrt{4-x^2}}$$

$y' = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ olur.

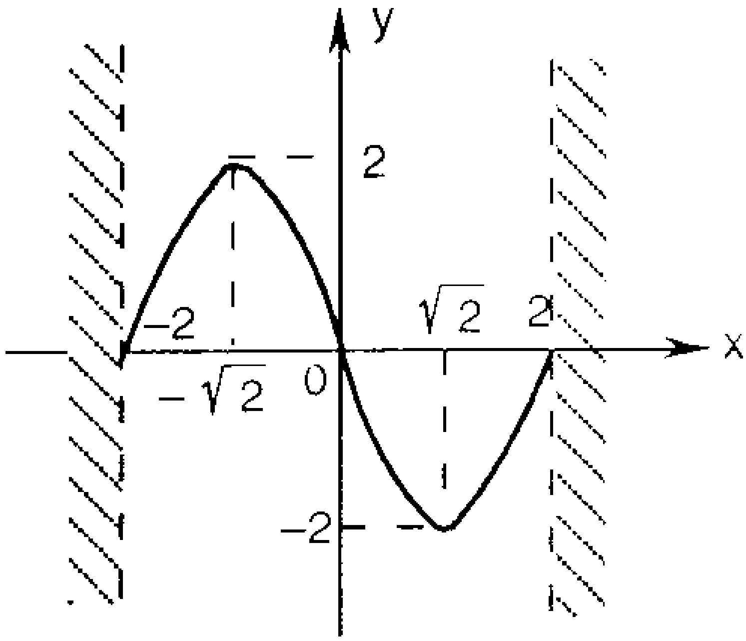
$x_1 = -\sqrt{2}$ ise, $y_1 = \sqrt{2}\,.\,\sqrt{4-2} = 2$

$x_2 = \sqrt{2}$ ise $y_2 = -\sqrt{2}\,.\,\sqrt{4-2} = -2$ olduğundan, $(-\sqrt{2}, 2)$, $(\sqrt{2}, 2)$ ekstrenum noktalardır.

4) Tablo

x		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2	
y'			$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		
y		0	$\nearrow$	$+2$	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	

5) Grafik



Örnek:

$y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

1) Fonksiyon $\dfrac{x+1}{x-1} \geq 0$ ve $x - 1 \neq 0$ için tanımlı olduğundan, tanım kümesi

$E = (-\infty,-1] \cup (1, +\infty)$ dır.

2) $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ düşey asimtottur.

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$ olur. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = \sqrt{1} = 1$ olduğundan, yatay asimtot $y = 1$ dir.

3) y = 0 için x + 1 = 0 $\Rightarrow$ x = -1 olduğundan, eğri x – eksenini (-1, 0) noktasında keser.

4) Türev:

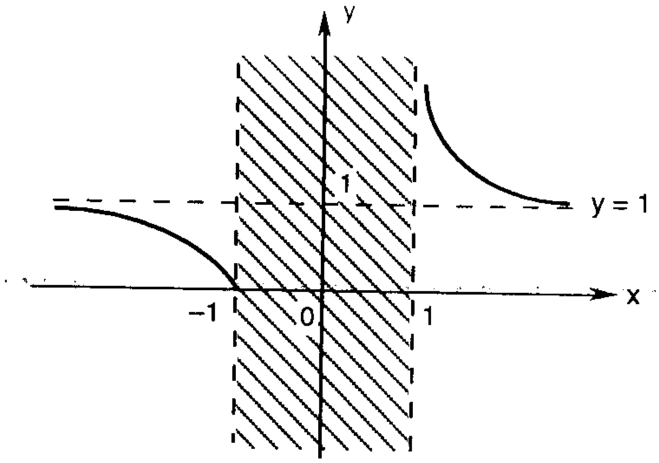
$$y' = \frac{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} = \frac{\dfrac{-2}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} = \frac{-1}{(x-1)^2 . \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} < 0$$

olur. Yani fonksiyon, tanım kümesinde azalandır. Dolayısıyla yerel ekstrenum noktaları yoktur.

5) Tablo:

x	$-\infty$		-1	0	1		$+\infty$
y′	−	−				− −	
y	1	↘	0		D.A.	$+\infty$ ↘	1

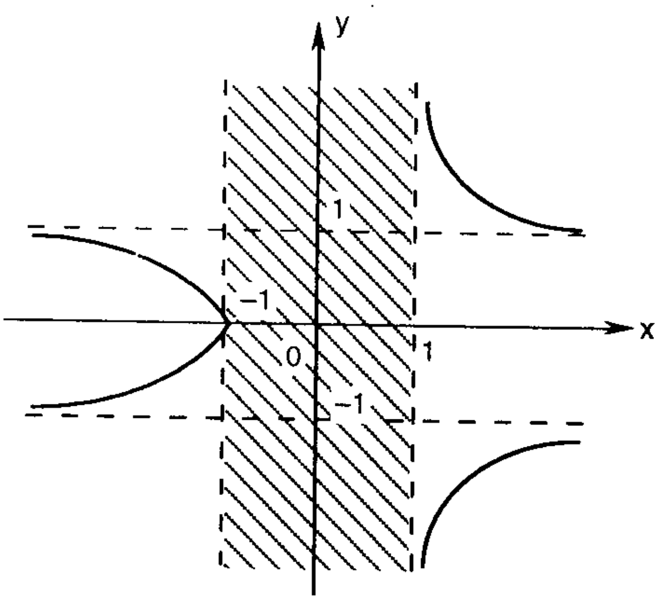
6) Grafik



Uyarı:

$y^2 = \dfrac{x-1}{x+1}$ bağıntısının grafiği sorulsaydı,

$y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ veya $y = -\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ olacağından, ikincil fonksiyonun grafiği birinci fonksiyonun grafiğinin x- eksenine göre simetriğidir. Buna göre, verilen bağıntının grafiği şekildeki gibi olur.



TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Örnek:

f(x) = $\dfrac{\sin x - 1}{2\sin x - 1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

1) Paydayı sıfır yapan x değerinde fonksiyon tanımsız, bunların dışında tanımlıdır. Buna göre,

$2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \dfrac{1}{2} = \sin \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ veya

$x = \left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = 2k\pi + \dfrac{5\pi}{6}$ değerlerinde tanımsızdır.

Tanım kümesi, $E = IR - \{x : x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ veya $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z\}$

olur.

Fonksiyon tektir.

2) $f(x + 2\pi) = \dfrac{\sin(x + 2\pi)}{2\sin(x + 2\pi) - 1} = \dfrac{\sin x - 1}{2\sin x - 1}$ olduğundan fonksiyonun periyodu $P = 2\pi$ dir. O halde, grafiği $[0, 2\pi]$ aralığında çizersek, grafik 2π uzunluğundaki aralıklarda tekrarlar.

3) k = 0 için $x = \dfrac{\pi}{6}$ düşey asimtot, $\dfrac{5\pi}{6}$ da düşey asimtottur.

4) x = 0 için f(0) = 0 olduğundan, eğri y-eksenini (0,0) da keser.

y = 0 için sin x = 0 ⇒ x = 0 veya x = π V x = 2π olduğundan eğri, x eksenini (0,0) da ve (π, 0), (2π, 0) da keser.

5) $f'(x) = \dfrac{\cos x(2\sin x - 1) - 2\cos x.\sin x}{(2\sin x - 1)^2}$

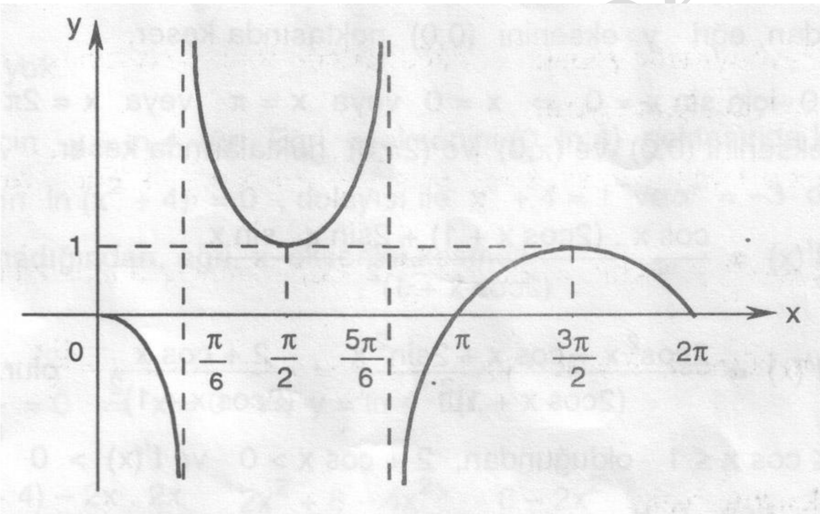
$$f'(x) = \frac{\cancel{2\cos x.2\sin x} - \cos x - \cancel{2\cos x.\sin x}}{(2\sin x - 1)^2} = \frac{-\cos x}{(2\sin x - 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \quad x = \dfrac{\pi}{2}$ veya $x = \dfrac{3\pi}{2}$

6) Tablo:

x	0		$\pi/6$		$\pi/2$		$5\pi/6$		π		$3\pi/2$		2π
f′(x)		−	⋮	−	0	+	⋮	+		+	0	−	
f(x)	0	↘	$-\infty$ ⋮ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ⋮ $-\infty$	↗	0	↗	1	↘	0

7) Grafik:



Bu grafik, 2π periyodu ile sağa, sola aynen kayar.

Örnek:

$y = f(x) = \dfrac{\sin x}{2\cos x + 1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

1) Paydayı sıfır yapan x ler için fonksiyon tanımsız, bunların dışında tanımlıdır. Buna göre,

$2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{-1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, $k \in Z$ olduğundan, tanım kümesi,

$$E = IR - \{x : x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}\}$$

Olur. Fonksiyon ne tektir, ne de çifttir.

2) $f(x + 2\pi) = \dfrac{\sin(x + 2\pi)}{2\cos(x + 2\pi) + 1} = \dfrac{\sin x}{2\cos x + 1}$

olduğundan, fonksiyon periyodiktir ve periyodu $P = 2\pi$ dir. Dolayısıyla grafiği $[0, 2\pi]$ aralığında çizersek, eğrinin devamını da anlamış oluruz.

3) $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ de tanımsızlık olduğundan, $[0, 2\pi]$ aralığında,

$k = 0$ için $x = \frac{2\pi}{3}$ düşey asimtot ve

$k = 1$ için $x = \frac{4\pi}{3}$ düşey asimtottur.

4) $x = 0$ için $f(0) = 0$

olduğundan, eğri y ekseni (0, 0) noktasında keser.

$y = 0$ için $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0$ veya $x = \pi$ veya $x = 2\pi$ olduğundan, eğri x eksenini (0,0) ve $(\pi, 0)$ ve $(2\pi, 0)$ noktalarında keser.

5) $f'(x) = \dfrac{\cos x.(2\cos x + 1) + 2\sin x.\sin x}{(2\cos x + 1)^2}$

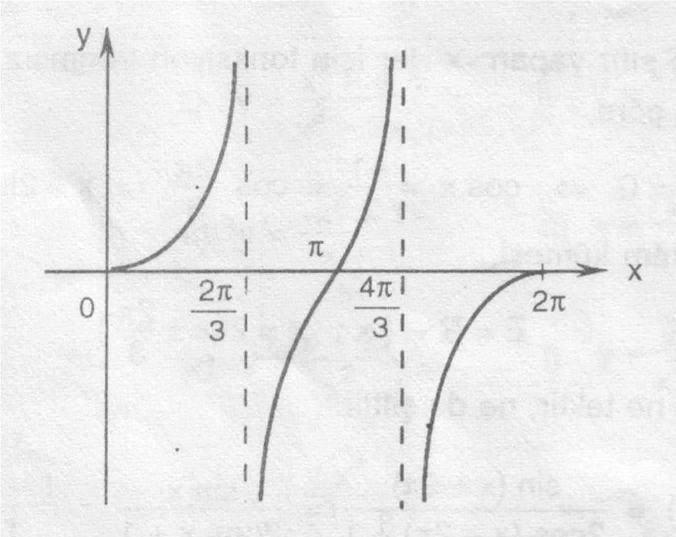
$f'(x) = \dfrac{2\cos^2 x + \cos x + 2\sin^2 x}{(2\cos x + 1)^2} = \dfrac{2 + \cos x}{(2\cos x + 1)^2}$ olur.

$-1 \leq \cos x \leq 1$ olduğundan, $2 + \cos x > 0$ ve $f'(x) > 0$ olur.

6) Tablo

x	0		$2\pi/3$		π		$4\pi/3$		2π
$f'(x)$		+	⋮	+		+	⋮	+	
$y = f(x)$	0	↗	$+\infty$ ⋮ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ⋮ $-\infty$	↗	0

7) Grafik



bu grafik 2π periyoduna göre sağa ve sola aynen kayar.

LOGARİTMİK FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Örnek:

y = In $(x^2 + 4)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

1) $\forall x \in$ IR için $x^2 + 4 > 0$ olduğundan, fonksiyonun tanım kümesi IR dir.

2) Asimtot yok

3) x = 0 için y = In 4 tür. Eğri y – eksenini (0, In 4) noktasında keser.

y = 0 için In $(x^2 + 4) = 0$, dolayısıyla ile $x^2 + 4 = 1$ ve $x^2 = -3$ olmalı.

Bu mümkün olmadığından, eğri x – eksenini kesmez.

4) Türev

$y' = \dfrac{2x}{x^2+4} = 0 \Rightarrow x = 0$ ve y = In 4 tür.

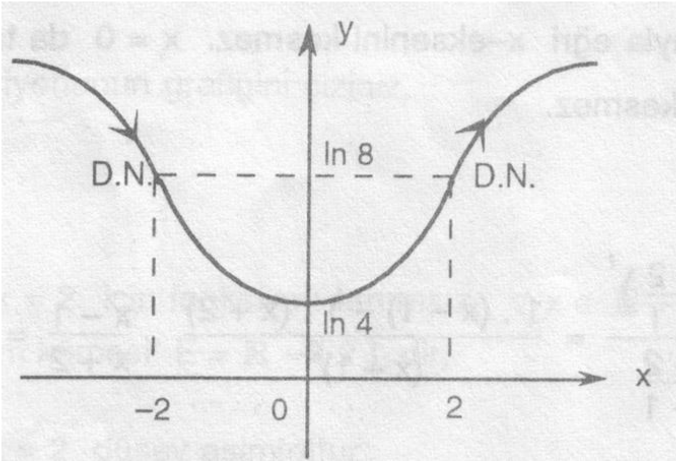
$$y'' = \frac{2(x^2+4) - 2x\,.\,2x}{(x^2+4)^2} = \frac{2x^2+8-4x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{8-2x^2}{(x^2+2)^2} = 0 \text{ dan}$$

x = ± 2 ve y = In 8 bulunur.

5) Tablo:

x	−∞		−2		0		2		+∞
y′		−		−	0	+		+	
y″		−	0	+		+	0	−	
y	+∞	↘	In 8	↘	In 4	↗	In 8	↗	+∞
			D.N.		M.N.		D.N.		

6) Grafik:



Örnek:

y = In $\frac{x+2}{x-1}$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

1) Fonksiyon $\frac{x+2}{x-1} > 0$ için tanımlıdır.

Sayfa 128deki tablo gelecek

Bu tabloya göre tanım kümesi E = $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ olur.

2) $x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$ düşey asimtottur.

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\text{In} \frac{x+2}{x-1} \right) = \text{In} \left(\lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{x-1} \right) \to \text{In}\ \infty \to \infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} \left(\text{In} \frac{x+2}{x-1} \right) = \text{In} \left(\lim_{x \to -2^-} \frac{x+2}{x-1} \right) \to \text{In}\ 0 \to -\infty$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to \infty} \text{In} \frac{x+2}{x-1} = \text{In} \left(\lim_{x \to -\infty} \frac{x+2}{x-1} \right) = \text{In}1 = 0 \\ &\lim_{x \to -\infty} \text{In} \frac{x+2}{x-1} = \text{In} \left(\lim_{x \to \infty} \frac{x+2}{x-1} \right) = \text{In}1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = 0 \text{ yatay asimtot}$$

3) y = 0 için $\frac{x+2}{x-1} = 1$ olmalı. Buradab $x + 2 = x - 1 \Rightarrow 2 = -1$ olamaz. Dolayısıyla eğri x – eksenini kesmez. x = 0 da tanımsız olduğundan, y-eksenini de kesmez.

4) Türev:

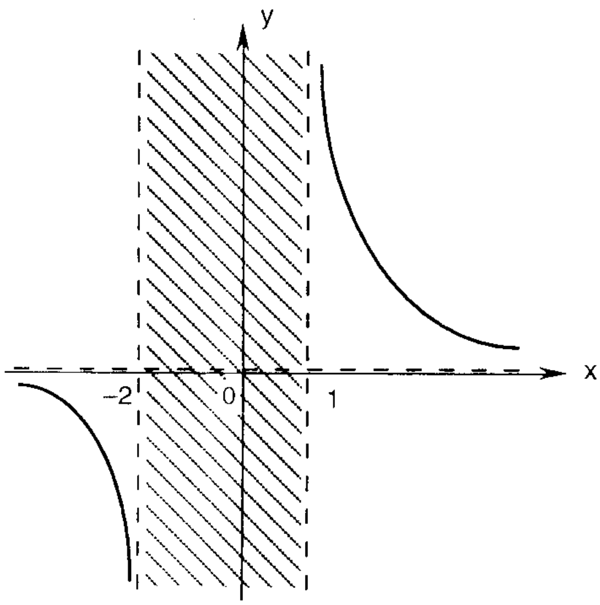
$$y' = \frac{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'}{\frac{x+2}{x-1}} = \frac{1.(x-1)-1.(x+2)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x-1}{x+2} = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$$

$y' \neq 0$ olduğundan, yerel ekstrenum yoktur.

5) Tablo:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0		0	$-$	
y	0	↘	$-\infty$		$+\infty$	↘	0

6) Grafik



ÜSTEL FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Örnek:

$y = e^{\frac{x-1}{x-2}}$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

1) $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ için fonksiyon tanımsız, $\forall\ x \in IR - \{2\}$ için tanımlı olduğundan, tanım kümesi $E = IR - \{2\}$dir.

2) $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ düşey asitottur.

$$\lim_{x \to 2^-} e^{\frac{x-1}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x-1}{x-2}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} e^{\frac{x-1}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x-1}{x-2}} = e^{\infty} = \infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{x-1}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{x-1}{x-2}} = e^1 = e$$ $\Rightarrow$ y = e yatay asimtottur.

1) x = 0 için y = $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ olduğundan, eğri, y eksenini (0, $\sqrt{e}$) noktasında keser.

$\forall x \in IR - \{2\}$ için y = $e^{\frac{x-1}{x-2}} > 0$ olduğundan, eğri x eksenini kesmez.

4) Türev:

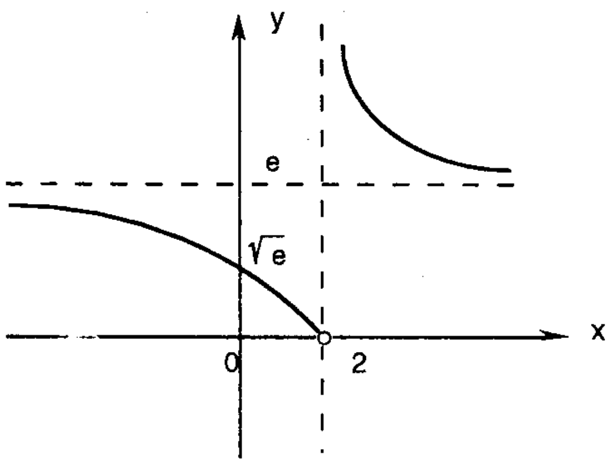
$$y' = \left(\frac{x-1}{x-2}\right)' \cdot e^{\frac{x-1}{x-2}} = \frac{-1}{(x-2)^2} \cdot e^{\frac{x-1}{x-2}} < 0$$ olduğundan, yerel ekstrenumlar yoktur.

5) Tablo

x	$-\infty$		0		2			$+\infty$
y′		−		−	⋮		−	−
y	e	↘	$\sqrt{e}$	↘	0 ⋮ $+\infty$	↘		e

D.A.

6) Grafik



Örnek:

$y = \dfrac{-x}{e^x}$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

1) Tanım kümesi E = IR dir.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{e^x} = \dfrac{-1}{e^\infty} = \dfrac{-1}{\infty} = 0$ olduğundan, yaytay asimtot

y = 0 dır. Düşey asimtot yoktur.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{e^x} = \lim_{x \to -\infty} -x \,.\, e^{-x} = +\infty \,.\, e^{\infty} = +\infty \,.\, \infty = +\infty$$

3) x = 0 için $y = \dfrac{-0}{e^0} = \dfrac{0}{1} = 0$ olduğundan, eğri, eksenleri (0, 0) da keser.

4) Türev:

$$y' = \frac{-1.e^x - e^x.(-x)}{(e^x)^2} = \frac{-e^x + e^x.x}{e^{2x}} = \frac{e^x(x-1)}{e^{2x}} = \frac{x-1}{e^x}$$

$y' = 0 \Rightarrow \dfrac{x-1}{e^x} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ de minimum var.

x = 1 için $y = \dfrac{-1}{e^1} = \dfrac{-1}{e} = \left(1, \dfrac{-1}{e}\right)$ minimum noktadır.

$$y'' = \frac{-1.e^x - e^x(x-1)}{(e^x)^2} = \frac{e^x - xe^x + e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(2-x)}{e^{2x}}$$

$y'' = 0 \Rightarrow 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$ de dönüm noktası var.

$\left(2, \dfrac{-2}{e^2}\right)$ dönüm noktasıdır.

7) Tablo

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y	∞	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{e}$	$\nearrow$	$\dfrac{-2}{e^2}$	$\nearrow$	0

8) Grafik