Yüksek Mertebeden Türevler

(a,b) açık aralığında tanımlı ve türetilebilen f fonksiyonunun f' türevi (a,b) de tanımlı bir fonksiyon gibi düşünülebilir. f' fonksiyonunun (a,b) nin her noktasında türetilebilmesi halinde bu şekilde elde edilen türev fonksiyonu f'' veya $D^2 f$ ya da $\frac{d^2y}{dx^2}$ ile gösterilebilir ve $f''(x)$'e $y=f(x)$ fonksiyonunun x noktasındaki 2. türevi denir. Böylece n defa ard arda türetme işlemine devam ediliyorsa son adımda elde edilen fonksiyona $y=f(x)$ fonksiyonun n. mertebeden türevi denir ve

$f^{(n)}(x)=(D^n f)(x)=\frac{d^n y}{dx^n}$ şeklinde gösterilir.

Yüksek Mertebeden Türevin Özellikleri

1) f fonksiyonu (a,b) aralığında p. mertebeden türeve sahip olsun. $m+n\le p$ için

$D^m(D^n f)=D^{m+n} f$ dir. ($f^{(0)}=f, g^{(0)}=g$ demektir).

2) $n\le p$ için k bir sabit reel sayı olmak üzere $D^n(kf)=k\cdot D^n f$ dir.

3) g fonksiyonunda (a,b) de p. mertebeden türeve sahip ise $n\le p$ için

$D^n(f\mp g)=D^n f\mp D^n g$ dir

4) Yukarıdaki f ve g fonksiyonları için $n\le p$ olmak üzere

$D^n(f\cdot g)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(D^{n-k}f)\cdot(D^k g)$ dir. Bu formüle *Leibniz Formülü* denir.

Bu dört özellik matematik tümevarım yöntemiyle ispatlanır.

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1. m bir rasyonel sayı, a sabit bir reel sayı ve k bir tabii sayı olmak üzere

$y = ax^m$ fonksiyonun k. mertebeden türevini bulunuz.

$y' = m \cdot ax^{m-1}$, $y'' = m(m-1)ax^{m-2}$,...

$y^{(k)} = m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)ax^{m-k}$

diğer taraftan

$m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+1) = \binom{m}{k}\cdot k!$ olduğundan

$$y^{(k)} = \binom{m}{k}k!\cdot ax^{m-k}$$

yazılır.

Formülün her k doğal sayısı için doğruluğu indüksiyonla gösterilebilir.

2. $y = \sin x$ fonksiyonunun n. mertebeden türevini bulunuz.

$$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$y'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})$$

.

.

.

$y^{(n)} = \sin(x + n\cdot\frac{\pi}{2})$ bulunur.

3. $y = \cos x$ in n. mertebeden türevinin benzer şekilde

$y^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$ olduğu görülür.

4. $y = \ln x$ için ard arda türev alarak

$y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$ elde edilir.

5. $y = e^x$ için ard arda türev alarak

$y^{(n)} = e^x$ bulunur.

6. $y = a^x$ için $y^{(n)} = (\ln a)^n a^x$ dir.

7. $y = \dfrac{\mathrm{k}}{(x+a)^m}$ nin n. mertebeden türevi nedir?

$$y = \mathrm{k}(x+a)^{-m} \ : \ y^{(n)} = (-1)^n \, \mathrm{k}(m)(m+1)\cdot\ldots\cdot(m+n-1)\frac{1}{(x+a)^{m+n}}$$

8. $y = e^{-x}(x^2+1)$ fonksiyonunun n. mertebeden türevini bulunuz.

$u = e^{-x}$ ve $v = x^2+1$ önerilirse

$u^{(n)} = (-1)^n e^{-x}$ ve $v' = 2x$, $v'' = 2 v^{(n)} = 0 \qquad n \geq 3$

elde edilir. Leibniz formülünden

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)} \text{ ve } n \geq 3 \text{ için } v^{(n)} = 0$$

olduğundan

$$y^{(n)} = \binom{n}{0} u^{(n)} v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)} v''$$

$$y^{(n)} = (-1)^n e^{-x}(x^2+1) + n(-1)^{n-1} e^{-x}(2x) + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}\cdot 2 \text{ bulunur.}$$

9. $y=(x^3+2x^2-3)\sin(2x+5)$ fonksiyonunun n. mertebeden türevini bulunuz.

$u=(x^3+2x^2-3)$ ve $v=\sin(2x+5)$ denirse

$u'=3x^2+4x \quad u''=6x+4\,,\ u'''=6 \quad u^{(n)}=0 \quad n>3$ ve

$v^{(n)}=2^n\sin(2x+5+n\frac{\pi}{2})$ elde edilir.

$y^{(n)}=(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$ Leibniz formülünden ve $n>1$ için

$u^{(n)}=0$ olduğundan

$$y^{(n)}=\binom{n}{0}u^{(0)}v^{(n)}+\binom{n}{1}u'v^{(n-1)}+\binom{n}{2}u''v^{(n-2)}+\binom{n}{3}u'''v^{(n-3)}\ ;$$

$$y^{(n)}=(x^3+2x^2-3)2^n\sin(2x+5+n\frac{\pi}{2})+n(3x^2+4x)2^{n-1}\sin(2x+5+$$

$$+(n-1)\frac{\pi}{2})+\frac{n(n-1)}{2}(6x+4)2^{n-2}\sin(2x+5+(n-2)\frac{\pi}{2})$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}6\cdot 2^{n-3}\sin(2x+5+(n-3)\frac{\pi}{3})$$ bulunur.

10. $y=e^{2x}\cos x$ fonksiyonunun n. mertebeden türevini bulunuz.

$u=e^{2x}$, $v=\cos x$ denirse

$u^{(n)}=2^n e^{2x}$ ve $v^{(n)}=\cos(x+n\frac{\pi}{2})$ dir.

$$y^{(n)}=\binom{n}{0}2^n e^{2x}\cos x+\binom{n}{1}2^{n-1}e^{2x}\cos(x+\frac{\pi}{2})+\binom{n}{2}2^{n-2}e^{2x}\cos(x+2\frac{\pi}{2})+$$

$$+\ldots+\binom{n}{n}e^{2x}\cos(x+n\frac{\pi}{2})$$ bulunur.

11. $y = \dfrac{x^3+5x^2-4x+1}{x^2-4}$ fonksiyonunun n. mertebeden türevini bulunuz.

$u = x^3+5x^2-4x+1$ $\qquad v = \dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2}\right)$ denirse

$u' = 3x^2+10x-4$, $u'' = 12x+10$ $\quad u''' = 12$, $n>3$ için $u^{(n)} = 0$ ve

$$v^{(n)} = \frac{1}{4}(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right]$$ ede edilir.

Buradan

$$y^{(n)} = (x^3+5x^2-4x+1)\cdot\frac{1}{4}(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right] + \dots +$$

$$+\binom{n}{3}6\cdot\frac{1}{4}(-1)^{n-3}(n-3)!\left[\frac{1}{(x-2)^{n-2}} - \frac{1}{(x+2)^{n-2}}\right]$$

elde edilir. Diğer bir şekilde

$$\frac{x^3+5x^2-4x+1}{x^2-4} \equiv x+5+\frac{21}{x^2-4}$$ olduğundan

$n>1$ için $$y^{(n)} = \frac{21}{4}\cdot(-1)^n\cdot n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right]$$ bulunur.

12. **a)** $y = e^{x^2}$ fonksiyon için bir rekürans bağıntısı elde ediniz.

$y' = 2xe^{x^2}$; $y' = 2x \cdot y$ den her iki yanın n. mertebeden türevini alarak

$y^{(n+1)} = 2x \cdot y^{(n)} + \binom{n}{1} 2y^{(n-1)}$ elde edilir.

b) $y = \mathrm{Arctan}\, x$ fonksiyonu için bir rekürans bağıntısı elde ediniz.

$$y' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{den} \qquad (1+x^2)y' = 1 \qquad (1)$$

bulunur

(1) in iki yanının n. mertebeden türevi alınarak

$$(1+x^2)y^{(n+1)} + \binom{n}{1} 2xy^{(n)} + \binom{n}{2} 2y^{(n-1)} = 0 \ ,$$

$(1+x^2)y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} = 0$ bulunur.

NOT: Bu kısa ders notu Genel Matematik I (Prof. Hamdi Arıkan, Prof. Dr. Ömer Faruk Gözükızıl, Yrd. Doç. Dr. İbrahim Özgür) kitabının 237-243 üncü sayfalarının taranmasıyla elde edilmiştir.