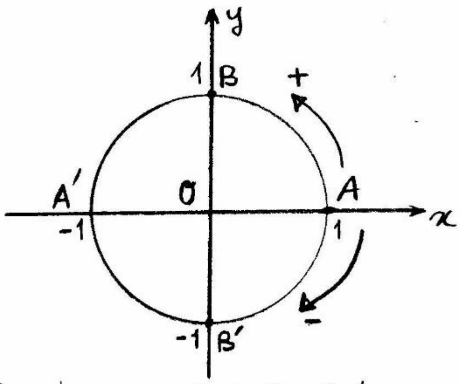
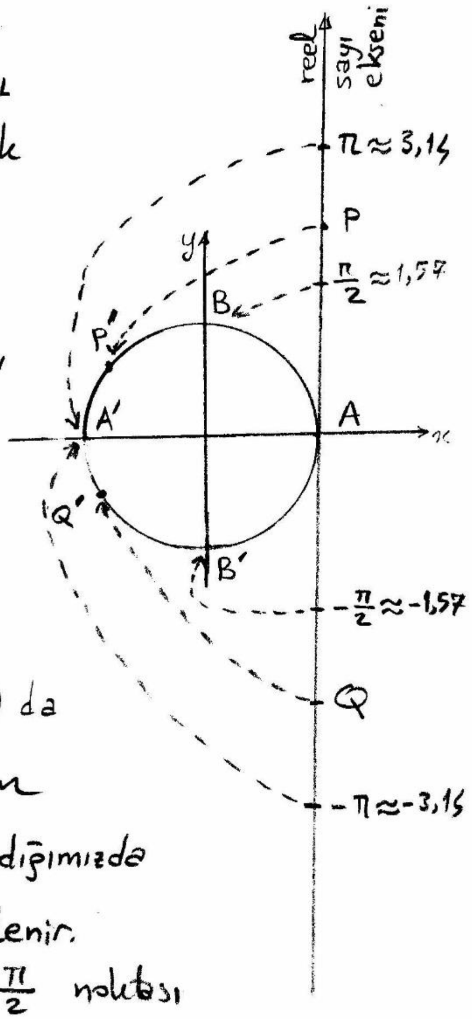
TRIGONOMETRI HAKKINDA TEMEL BİLGİLER

BİRİM ÇEMBER: Yarıçapı 1 birim olan $x^2+y^2=1$ denklemine sahip merkezil çemberdir.



Ox-eksenini A' ve A noktalarında Oy-eksenini B ve B' noktalarında keser. A noktası birim çemberin yay başlangıç noktasıdır. A dan B ye doğru gidiş pozitif dönme yönünü, A dan B' ye doğru gidiş de negatif dönme yönünü gösterir.

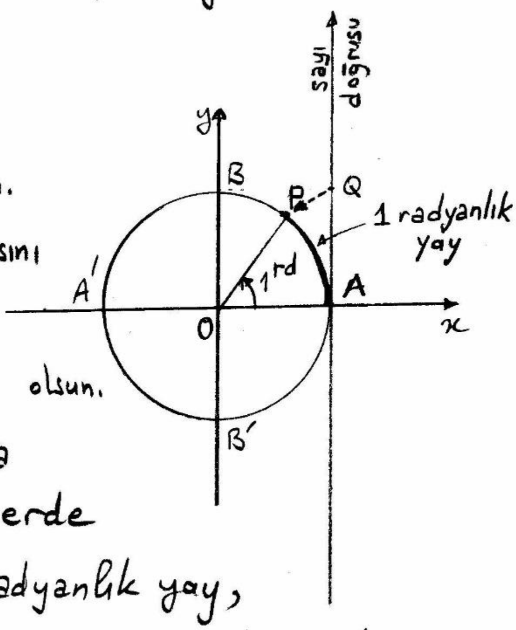
SARMA FONKSİYONU: Reel sayılar eksenini (sayı doğrusunu), orijin noktası birim çemberin A noktası ile çakışacak biçimde Ox-eksenine dik olarak yerleştirelim. Sayı doğrusu üzerinde bir reel sayı P olsun. AP uzunluğunu birim çembere A dan itibaren sardığımızda P noktası çember üzerinde bir P' noktasına gelir.



Aynı şekilde sayı doğrusu üzerinde bir Q noktası (negatif bir reel sayı) da AQ doğru parçasını A dan itibaren negatif yönde birim çembere sardığımızda Q noktası da bir Q' noktasına eşlenir.

Böylece sayı doğrusu üzerindeki $\frac{\pi}{2}$ noktası B noktasına, π noktası A' ye, $-\frac{\pi}{2}$ noktası B' ye ....v.s. eşlenir.

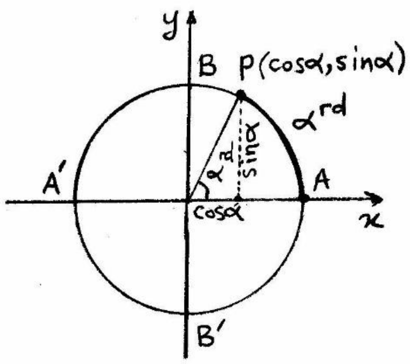
Böylece sayı doğrusu üzerindeki her noktaya birim çember üzerinde bir nokta karşılık getiren fonksiyona sarma fonksiyonu denir.



Sayı doğrusu üzerinde 1 reel sayısına karşılık gelen nokta Q olsun. Yani $|AQ| = 1$ br. AQ doğru parçasını A dan itibaren birim çembere sardığımızda yayın bitim noktası P olsun. 1 birim uzunluğundaki $\widehat{AP}$ yayına 1 radyanlık yay denir (Bir çemberde yarıçapı uzunluğundaki yaya 1 radyanlık yay, bu yayı gören merkez açıya da 1 radyanlık merkez açı denir) Buna göre $\widehat{AB} = \frac{\pi}{2}$ radyanlık yay, $\widehat{AA'} = \pi$ radyanlık yay, $\widehat{AB'} = -\frac{\pi}{2}$ radyanlık yaydır. Böylece A dan itibaren pozitif yönde dönüp tekrar A ya ilk gelişimizde birim çember üzerinde 2π radyanlık yay elde edilir.

2π radyanlık yay ölçüsü $360°$ ye karşılık gelir. Böylece 1 radyanlık yay ölçüsü yaklaşık $57°$ lik bir yay ölçüsüdür. Yani $1^{rd} \approx 57°$ dir. $2\pi^{rd} \approx 6,28^{rd} = 360°$ dir.

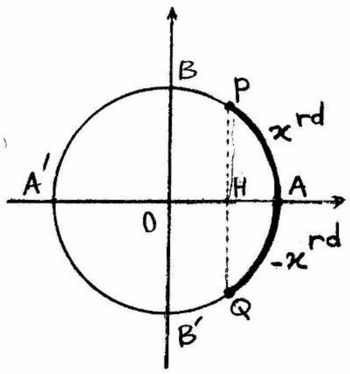
SİNÜS, KOSİNÜS FONKSİYONLARI :



Analitik düzlemde (Dik koordinat sistemiyle donatılmış düzlemde) birim çember üzerinde α^{rd} lik yayın başlangıç noktası A dır. Bitim noktası da P olsun.

İşte α radyanlık yayın bitim noktası olan P noktasının apsisine $\cos\alpha$, ordinatına da $\sin\alpha$ denir. Buna göre $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$; $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\pi=-1$, $\sin\pi=0$; .... v.s. dir. α^{rd} lık yaya 2π, 4π, ... $2k\pi$ (k bir tamsayı) kadar yay eklendiğinde yine aynı P noktasına gelindiğinden $\sin\alpha=\sin(\alpha+2k\pi)$, $\cos\alpha=\cos(\alpha+2k\pi)$ dir. Yine birim çemberden $\sin\alpha=\sin(\pi-\alpha)$, $\cos\alpha=\cos(-\alpha)$ dır. Sinüs ekseni $B'B$ ve kosinüs ekseni de $A'A$ dır.

Yani her $\alpha\in\mathbb{R}$ için $-1\leq\sin\alpha\leq 1$ ve $-1\leq\cos\alpha\leq 1$ dir. Yine birim çemberden, x ve $-x$ radyanlık yayların sinüs ve kosinüsleri için



$\boxed{\sin(-x)=-\sin x}$ ve $\boxed{\cos(-x)=\cos x}$

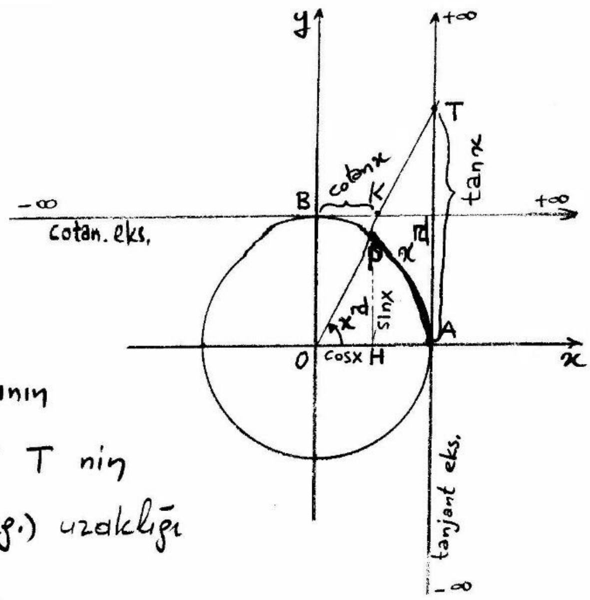
Yani $f(x)=\sin x$ fonksiyonu tek fo.

$g(x)=\cos x$ fonksiyonu çift fo. dur.

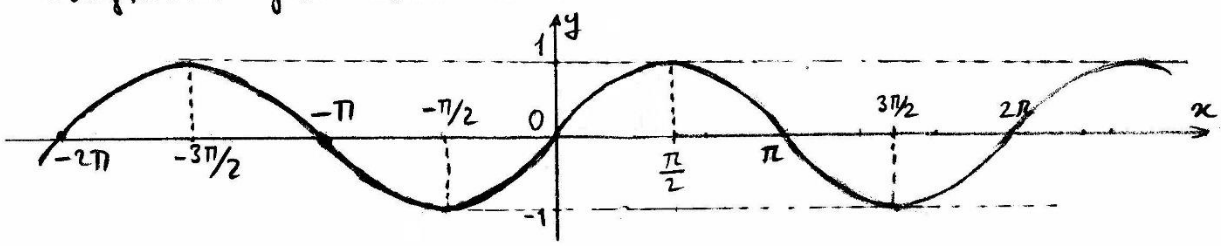
x radyanlık yayın bitim noktası P ise $P(\cos x, \sin x)$ dir. POH dik üçgenine Pisagor teoremi uygulanırsa ilk trigonometrik özdeşlik olan $\boxed{\cos^2 x+\sin^2 x=1}$ hemen elde edilir. (İçerisindeki bilinmeyenlerin her değeri için sağlanan eşitliklere özdeşlik denir. İçerindeki bilinmeyenlerin bazı değerleri için sağlanan eşitliklere de denklem denir). Ayrıca $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$ dir.

Başlangıç noktası A olan ve Ox- eksenine dik eksen tanjant ekseni, başlangıç noktası B olan Oy-eksenine dik eksen de kotanjant ekseni olarak tanımlanır.

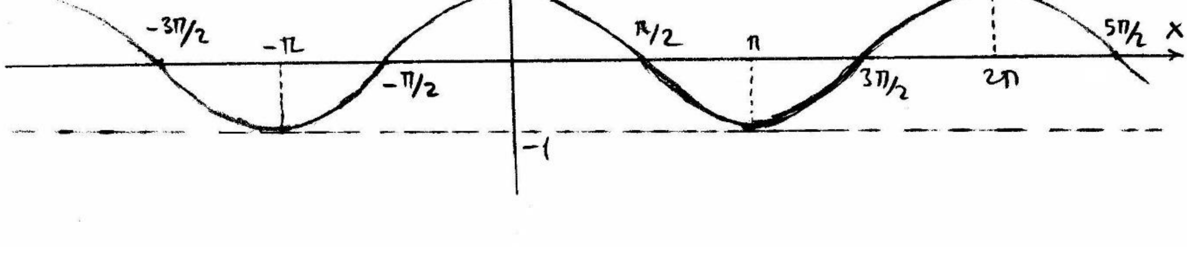
x^{rd} lık yay AP olsun.
[OP ışını kotanjant eksenini K, tanjant eksenini de T noktasında kessin. |BK| doğru parçasının cebirsel (işaretli) uzunluğu $\cot x$ dir. |AT| doğru parçasının cebirsel (işaretli) uzunluğu yani T nin A ya olan işaretli (poz. veya neg.) uzaklığı olan reel sayı da $\tan x$ dir.



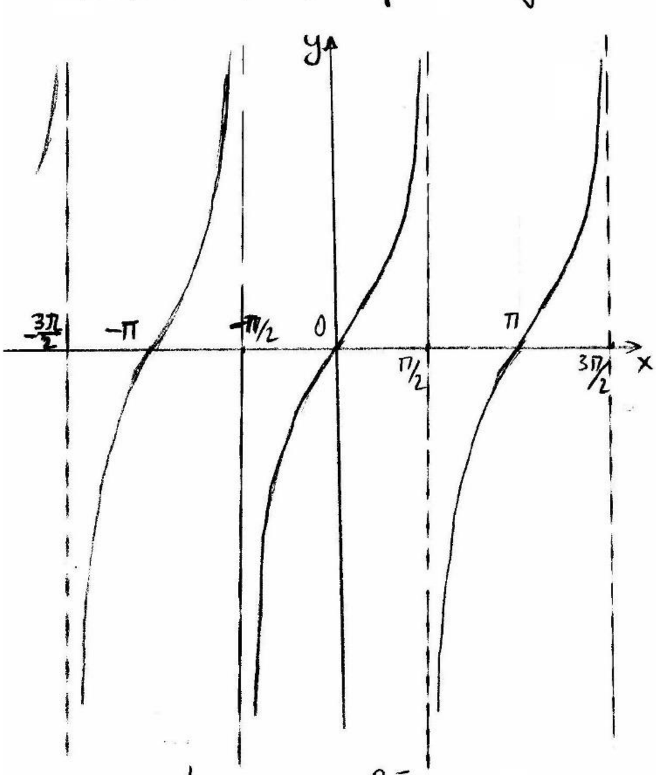
SİNÜS FONKSİYONUNUN GRAFİĞİ: $\widehat{AP}$ yayının gösterdiği x^{rd} lık yay düzeltilip apsis ekseninde işaretlensin. Bu apsise karşılık ordinat da HP olarak alınsın. Böylece $\frac{\pi}{6}$ apsisli noktada ordinat $\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ apsisli noktada $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ apsisli noktada ordinat -1 alınarak düzlemde işaretlensin. Bu şekilde bulunan noktalar birleştirilirse sinüs fonksiyonunun eğrisi aşağıdaki gibi elde edilir.



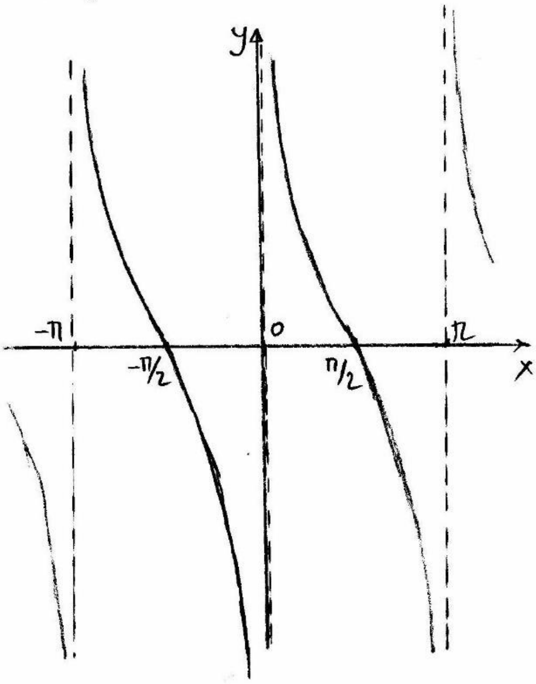
Benzer bir çalışmayla kosinüs fo.nunun grafiği de aşağıdaki gibidir.



Benzer çalışmayla tanjant ve kotanjant eğrileri ise

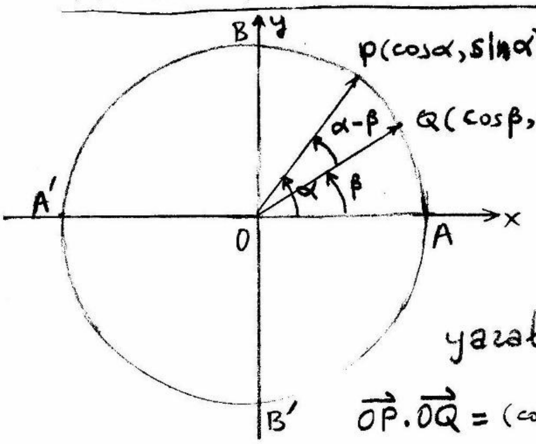


$y = \tan x$ in grafiği



$y = \cot x$ in grafiği.

TEMEL TRİGONOMETRİK ÖZDEŞLİKLER:



$\vec{OP} = \cos\alpha\,\vec{e}_1 + \sin\alpha\,\vec{e}_2$ dir.

$\vec{OQ} = \cos\beta\,\vec{e}_1 + \sin\beta\,\vec{e}_2$ dir.

$\vec{OP}$ ile $\vec{OQ}$ vektörlerinin skaler çarpımlarını iki değişik biçimde yazalım:

$$\vec{OP}\cdot\vec{OQ} = \underbrace{|\vec{OP}|}_{1}\underbrace{|\vec{OQ}|}_{1}\cos(\alpha-\beta) \quad \text{-----} (1)$$

$$\vec{OP}\cdot\vec{OQ} = (\cos\alpha\,\vec{e}_1 + \sin\alpha\,\vec{e}_2)\cdot(\cos\beta\,\vec{e}_1 + \sin\beta\,\vec{e}_2) \quad \text{--------} (2)$$

$$\vec{OP}\cdot\vec{OQ} = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta \quad \text{--------} (3)$$

(1) ve (3) ün sağ taraflarının eşitliğinden, derhal

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta} \quad \text{--------} (4)$$

bulunur. (4) de β yerine $-\beta$ konulursa ve $\cos(-\beta) = \cos\beta$ ve $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta} \text{ ------ } (5)$$ bulunur.

$\sin a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ olduğu gözönüne alınırsa,

a yerine $(\alpha-\beta)$ konularak

$\sin(\alpha-\beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha-\beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right]$ ifadesinde

en sağ ifade (5) özdeşliğine göre yazılarak,

$$\sin(\alpha-\beta) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right] = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{\sin\alpha}.\cos\beta - \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{\cos\beta}.\cos\beta$$ dan

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta} \text{ ----- } (6)$$ bulunur.

Burada β yerine $-\beta$ konulursa

$$\sin[\alpha-(-\beta)] = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos(-\beta) - \cos\alpha.\sin(-\beta)$$ dan

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta} \text{ ------- } (7)$$ bulunur.

(7) özdeşliğinde β yerine α yazılırsa;

$$\sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha.\cos\alpha + \cos\alpha.\sin\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$$ dan

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2.\sin\alpha.\cos\alpha} \text{ ------ } (8)$$ bulunur.

(5) özdeşliğinde β yerine α yazılırsa;

$$\cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha.\cos\alpha - \sin\alpha.\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$ dan

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$ ve $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ den

yararlanıp, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ ve

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ bulunur.

Böylece $\cos 2\alpha$ nın üç tane özdeşi olarak

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha - 1 \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2\alpha \end{aligned}} \text{ ------ } (9)$$ bulunur.

(7) ve (6) özdeşlikleri alt alta yazılıp, taraf tarafa önce toplanır, sonra çıkarılırsa;

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cancel{\cos\alpha.\sin\beta}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cancel{\cos\alpha.\sin\beta}$$
$$+ \qquad\qquad +$$

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha.\cos\beta$ dan

$$\boxed{\sin\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]} \quad \text{---- (10)}$$
bulunur

ve taraf tarafa çıkarıldığında da

$$\boxed{\cos\alpha.\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]} \quad \text{---- (11)}$$
bulunur

Benzer şekilde (4) ve (3) özdeşlikleri alt alta yazılıp taraf tarafa toplanır ve çıkarılırsa;

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$$
$$+ \qquad\qquad +$$

$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha.\cos\beta$ dan

$$\boxed{\cos\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]} \quad \text{...... (12)}$$
bulunur

ve taraf tarafa çıkarıp düzenlenirse;

$$\boxed{\sin\alpha.\sin\beta = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]} \quad \text{---- (13)}$$
bulunur.

Son olarak $\sin p+\sin q$, $\sin p-\sin q$ ve $\cos p+\cos q$, $\cos p-\cos q$ ifadelerinin herbirinin çarpım biçimindeki özdeş ifadelerini bulalım:

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$\underbrace{\sin(a+b)}_{p}+\sin(\underbrace{a-b}_{q}) = 2\sin a \cdot \cos b$ idi. $\left.\begin{array}{l} a+b=p \\ a-b=q \end{array}\right\}$ denilirse

buradan $a=\frac{p+q}{2}$ ve $b=\frac{p-q}{2}$ olup

$$\boxed{\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}} \quad \text{.....(14)}$$

benzer biçimde

$$\boxed{\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}} \quad \text{....(15)}$$

Benzer olarak

$$\boxed{\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}} \quad \text{.....(16)}$$

ve

$$\boxed{\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}} \quad \text{....(17)}$$

bulunur.

Ayrıca $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, $\sin(\pi\mp\alpha)$, $\cos(\pi\mp\alpha)$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\mp\alpha\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\mp\alpha\right)$ ... v.s. gibi ifadelerin

eşitleri (özdeşleri) ise ya birim çember üzerindeki yorumdan, ya da bunların herbirinin açılımından bulunur.

Meselâ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}\cdot\cos\alpha + \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}\cdot\sin\alpha \doteq \cos\alpha$ dır.

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\mp\alpha\right) = \underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{0}\cdot\cos\alpha \pm \underbrace{\sin\frac{3\pi}{2}}_{-1}\cdot\sin\alpha = \mp\sin\alpha$ dır.

Not: $\sin\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{4}$, ..., $\tan\frac{5\pi}{6}$, ... v.s. değerlerinin hesabına gerek görülmedi. Trigonometrik denklem çözümlerine ise girilmedi.