2.1 Giriş

Bir önceki **bölümde** Coulomb Yasasını kullanarak yük dağılımları için elektrik alan hesabının nasıl yapıldığını gördük. Yapmamız gerekenin verilen yük dağılımı için uygun integrali kurmak ve bu integral ile elektrik alanı hesaplamak olduğunu söylemiştik. Ancak kimi zaman en basit simetrik şekiller için bile elektrik alanın bu yöntemle hesaplanması çok kolay değildir. Örnek vermek gerekirse, küresel bir yük dağılımının içinde ve dışında elektrik alan hesabı biraz kafa karıştırıcı olabilir.

Bu bölümde simetrik yük dağılımları için kullanacağımız bir yöntemden bahsedeceğiz. Ancak bunu yapabilmek için önce **elektrik akısı** ve **Gauss Yasası**ndan bahsetmemiz gerekiyor. **Genel ve her zaman doğru olan Gauss Yasasını anlar isek, Gauss Yasasını simetrik durumlar için uygulayıp elektrik alanı çok daha kolay hesaplayabiliriz.**

Amacımız anlaşıldı ise şimdi yola koyulalım ve bir sonraki sayfada elektrik akısının tanımıyla başlayalım.

2.2 Elektrik Akısı

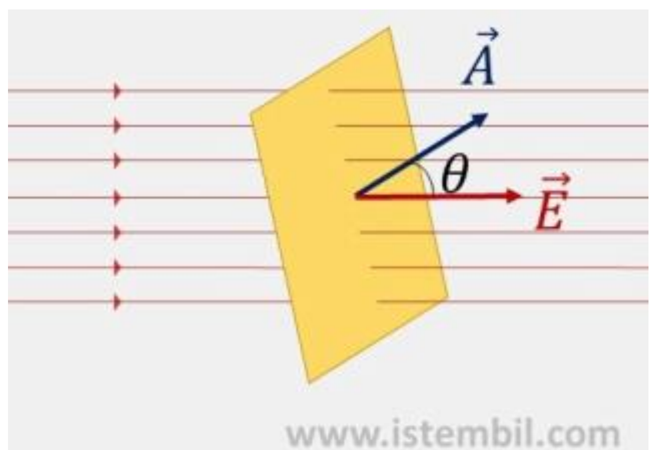
2.2.1 Düzgün Elektrik Alan Altında Düz Yüzeyden Geçen Elektrik Akısı

Gauss Yasasından bahsedebilmemiz için öncelikli olarak **Elektrik Akısından** bahsetmemiz gerekiyor. **Şekil 2.1**'de gösterildiği gibi düzgün (sabit) elektrik alan altında düz bir yüzeyden geçen elektrik akı

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = E\,A\cos\theta \qquad (2.1)$$

olarak tanımlanır. Birimi $N \cdot m^2/C$ 'dur. Burada $\vec{A}$ vektörü, büyüklüğü yüzeyin alanına (A) eşit, yüzeye dik (normal) bir vektördür **Not:** Bir vektör yüzeye dik ise $\vec{A}$ 'ya paralel, yüzeye paralel ise $\vec{A}$ 'ya dik olacaktır.

Denk. 2.1'i anlamak için elektrik alan çizgilerini kullanalım. Bir yüzeyden geçen elektrik akı, o yüzeyden geçen elektrik alan çizgi sayısı ile doğru orantılıdır. Şimdi tekrar **Şekil 2.1**'de gösterilen yüzeyi düşünelim. Bu düz yüzeyden geçen **elektrik akı yani bu yüzeyden geçen toplam elektrik alan çizgi sayısı sizce nelere bağlıdır?**

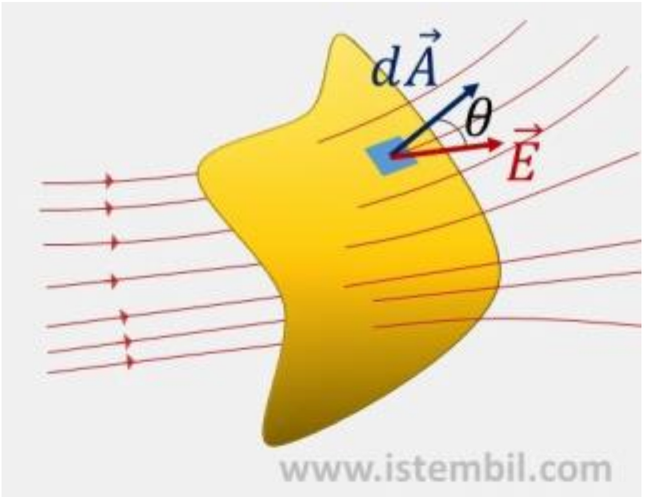


Şekil 2.1 Düzgün bir elektrik alan olan bir bölgede düz bir yüzeyden geçen elektrik akı.

- **Elektrik alanın büyüklüğüne bağlı mıdır?** Hatırlayın elektrik alan çizgi yoğunluğu elektrik alanın büyüklüğü ile artıyordu. Elektrik alan çizgisi ne kadar yoğun olursa, yüzeyden geçen çizgi sayısı da o kadar artar. Yani **elektrik akı elektrik alanın büyüklüğü ile doğru orantılı olmalıdır**.
- **Yüzeyin alanına bağlı mıdır?** Alan ne kadar büyürse, o kadar fazla elektrik alan çizgisi geçebilir, yani **elektrik akı yüzeyin büyüklüğü ile doğru orantılı olacaktır**.
- **Son olarak elektrik akı, yüzeyin ya da $\vec{A}$ vektörünün elektrik alan vektörü ile yaptığı açıya bağlı mıdır?** Eğer yüzey elektrik alana dik ise, yani $\vec{A}$ vektörü ile $\vec{E}$ vektörleri arasındaki θ açısı sıfır ise, yüzeyden geçen elektrik alan çizgisi sayısı (yüzey alanını değiştirmeden) bu yüzey için maksimum olur. θ açısını yavaş yavaş arttırır isek, yüzeyden geçen elektrik alan çizgisi sayısı da azalır ve yüzey elektrik alana paralel olduğunda , yani $\vec{A}$ vektörü ile $\vec{E}$ vectörleri arasındaki θ açısı 90° olduğunda bu yüzeyden hiç elektrik alan çizgisi geçmez ve akı sıfır olur. Aslında elektrik akı, yüzeyin elektrik alanına dik izdüşümünün büyüklüğü ile doğru orantılı olacaktır. İzdüşümün alanı $A_\perp = A\cos\theta$ 'ya eşit olacaktır. Yani **elektrik akı, $\vec{A}$ ve $\vec{E}$ vektörleri arasındaki açının kosinüsü ($\cos\theta$) ile doğru orantılı olacaktır.**

Gördüğünüz üzere, **Denk. 2.1**'de verdiğimiz tanımımız aslında yukarıda verdiğimiz cevapların hepsini kapsıyor.

2.2.1 Düzgün Olmayan Elektrik Alan Altında ve/veya Eğri Bir Yüzeyden Geçen Elektrik Akısı



Şekil 2.1 Düzgün olmayan bir elektrik alan olan bir bölgede eğri bir yüzeyden geçen elektrik alan, akı.

Denk 2.1 bize elektrik akısını yalnız düzgün elektrik alan ve düz yüzeyler için verir. Peki ya bu elektrik alan yüzey üzerinde değişiyor ise ve/veya yüzey düz değilse ne yapmamız lazım?

Burada da yaklaşımımız her zaman yaptığımız gibi problemi cevabını bildiğimiz küçük parçalara bölmek olacak. Yani bu yüzeyi o kadar küçük parçalara böleceğiz ki her bir parçasını düz gibi düşünebilelim ve elektrik alan bu küçük yüzey üzerinde değişmeye fırsat bulamasın. Böylelikle herbir küçük yüzey için **Denk. 2.1**'i kullanabilir ve eğri yüzey üzerindeki toplam elektrik akısını da küçük parçalar üzerindeki akıları toplayarak elde edebiliriz.

Şekil 2.2'de gösterilen yüzey üzerinden gidelim. Mavi ile gösterilen sonsuz küçüklükteki dA alanına sahip parçası (sonsuz küçüklükte alıyorum ki hem düz olmasını hem de elektrik alanın bu alan üzerinde sabit olmasını garanti altına alalım) üzerindeki elektrik akısı, $d\Phi_E$;

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

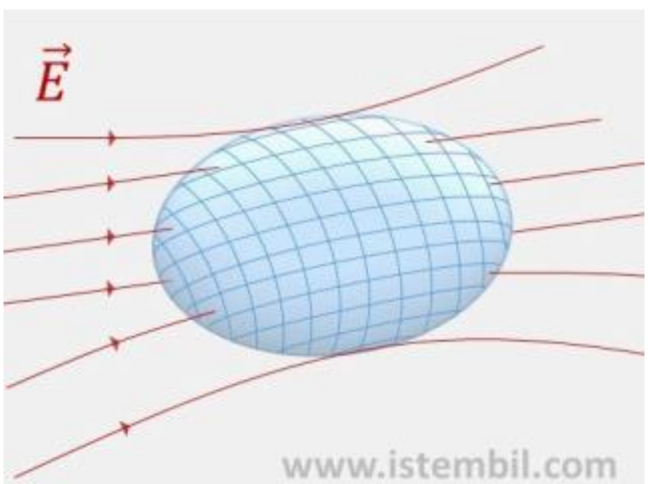
olacaktır. Yine buradaki $d\vec{A}$ yüzeye dik, dA büyüklüğündeki vektördür.

Sonsuz küçüklükte parçalara bölüp toplama işlemi integraldi hatırlayacağınız üzere. Bu durumda bu yüzey üzerinden geçen toplam elektrik akısı

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \qquad (2.2)$$

olacaktır. Burada integrali yüzey üzerinde aldığımızı hatırlatmakta fayda var. Tıpkı lego parçaları gibi, bu küçük alanları toplayarak tekrar yüzeyi oluşturuyoruz. Bunu yaparken de herbiri üzerindeki akıyı hesaplayıp topluyoruz.

2.3 Kapalı Bir Yüzeyde Elektrik Akısı



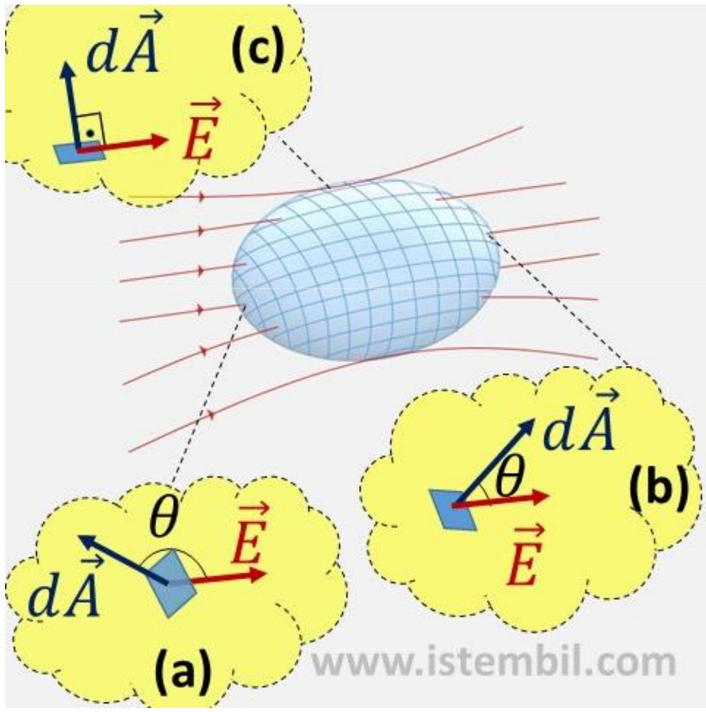
Şekil 2.3 Kapalı bir yüzeyden geçen elektrik akısı

Denk. 2.2 ile herhangi bir yüzeyden geçen elektrik akısı rahatlıkla hesaplanabilir. Ancak bu bölümde **kapalı** bir yüzeyden geçen elektrik akısından bahsedeceğiz. Kapalı yüzeyden kasıt içerisinde hiç bir açıklık olmadan bir hacim hapseden bir yüzey. Örneğin yumurta kabuğu, açılmadan önce kola kutusu kapalı yüzeylerdir. Ancak açıldıktan sonra kola kutusu kapalı olma özelliğini kaybeder. Artık kapalı yüzey ile neden bahsettiğimizi bildiğimize göre, şimdi elektrik alan olan uzayın bir bölgesinde bu kapalı yüzeyden geçen elektrik akısından bahsedebiliriz.

Tabi kapalı yüzeylerin genelde düz ve elektrik alanın da düzgün olmamasından dolayı, elektrik akı için integral hesabını kullanacağız. Yani yüzeyi küçük parçalara bölmemiz ve herbir parça için $d\vec{A}$ vektörünü tanımlamamız gerekiyor. Burada asıl üzerinde durmak istediğim $d\vec{A}$ vektörünün yönü.

$d\vec{A}$ vektörü herzaman yüzeye dik, yüzeyden dışarı yöne doğru tanımlanır. Şimdi **Şekil 2.3**'te gösterilen kapalı yüzeyi düşünelim. Elektrik alan çizgilerinin bir kısmı yüzeyden içeri girerken, bir kısmı yüzeyden dışarı çıkıyor.

Hatırlayacağınız üzere **elektrik akısının yüzeyden geçen elektrik alan çizgisi sayısı ile doğru orantılı** olduğunu söylemiştik. **Şekil 2.3**'te gösterilen basit örnekte dört elektrik alan çizgisi içeri girerken dört çizgi çıkıyor, iki çizgi de yüzeye teğet geçiyor. Bu durumda bu yüzeyden geçen **NET**(toplam) elektrik akısı ne olacaktır? Bu sorunun cevabını sıfır dediğinizi duyar gibiyim. Şimdi aynı yüzeye **Şekil 2.4**'te daha detaylı bakarak nedenini söyleyelim.



Şekil 2.4 Kapalı bir yüzeyden geçen elektrik akısı ne zaman negatif, ne zaman pozitif olur? Cevaplar açılarda...

Şekil 2.4'te noktalı çizgiler ile gösterilen üç farklı durum (a), (b) ve (c) bulutlarında inceleniyor. Şimdi sırası ile hepsine bakalım.

(a) Bu bulutta elektrik alan çizgisinin yüzeyden içeri girdiği küçük dA yüzeyi inceleniyor. Elektrik alan çizgilerinin kapalı yüzeyden içeri girdiği bütün yüzeyler için $d\vec{A}$ vektörü yüzeyden dışarı doğru, elektrik alan vektörü $\vec{E}$ de yüzeyden içeri doğrudur. Yani ikisi arasındaki açı her zaman 90° 'den büyüktür. Bu durumda bu küçük yüzeylerden geçen akı

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cos\theta \, dA < 0$$

negatif olacaktır (açı $\theta > 90^\circ$ olduğunda $\cos\theta$ negatif olacaktır).

(b) Bu bulutta ise elektrik alan çizgilerinin yüzeyden dışarı çıktığı bir küçük yüzey inceleniyor. Tahmin edeceğiniz üzere bu durumda da elektrik alan vektörü $\vec{E}$ ile $d\vec{A}$ arasındakı açı her zaman 90° 'den küçük olacaktır. Yani bu yüzeylerden geçen akı

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cos\theta \, dA > 0$$

pozitif olacaktır (açı $\theta < 90^\circ$ olduğunda $\cos\theta$ pozitif olacaktır).

(c) Son olası durum ise bu bulutta gösterilmiştir. Yani elektrik alan çizgisinin yüzeye teğet olduğu durum. Yani $\vec{E}$ ile $d\vec{A}$ arasındaki açı 90° olacaktır. Bu yüzeylerde bir elektrik akısı olmayacaktır. Yani

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cos 90^\circ dA = 0$$

Özetlemek gerekirse kapalı yüzeyden içeri giren elektrik alan çizgileri için elektrik akısı negatif, yüzeyden dışarı çıkan elektrik alan çizgileri için pozitif olacaktır. Bütün dA'lar üzerindeki akıyı toplayarak toplam elektrik akısını hesaplayabiliriz;

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \qquad (2.3)$$

Burada $\oint$ üzerindeki halka, integralin **kapalı** yüzey üzerinde alındığını göstermektedir.

Şimdi gelelim bu integralin yani kapalı yüzeyden geçen akının alabileceği değerlere. Bu konuya başlarken sıfır olacağını söylemiştik. Çünki ne kadar elektrik alan çizgisi içeri giriyorsa o kadar çizgi de dışarı çıkıyordu. Yani net akı sıfırdı bu örnek için. Sıfır dışında alabileceği değerlerin ne olduğu/olabileceği konusunu bir sonraki **2.4 Gauss Yasası** kısmında ele alacağız.

2.4 Gauss Yasası

Öncelikle bir yüzeyden geçen elektrik akısının bu yüzeyden geçen elektrik alan çizgi sayısı ile doğru orantılı olduğunu ve elektrik alan çizgilerinin kapalı yüzeyden içeri giriyorsa negatif, çıkyorsa pozitif elektrik akısı oluşturduğunu hatırlatalım. Sonra bir önceki kısımda bahsettiğimiz gibi kapalı bir yüzey düşünelim. Bu kapalı yüzeyden 100 elektrik alan çizgisi içeri giriyor olsun. Şimdi yüzeyden çıkabilecek elektrik alan çizgi sayısı ile alakalı olasılıklardan bahsedelim.

1. Yüzeyin içerisinde hiç bir şey olmuyor ve 100 çizginin hepsi dışarı çıkıyor. Bu durumda

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

olacaktır.

2. İkinci olasılık ise içeri giren 100 çizgiden bir kaçını, örneğin 20sini içeride kaybettiğimizi düşünelim. Mesela içeride bir sihirbaz şapkasında tıpkı tavşanları kaybettiği gibi elektrik alan çizgilerimizi kaybetmiş olsun. Bu durumda yalnızca 80 elektrik alan çizgisi dışarı çıkacak ve elektrik akısı negatif olacaktır;

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} < 0$$

3. Son olarak içeri giren 100 elektrik alan çizgisinin, sihirbazın şapkasından çıkardığı ekstra 20 elektrik alan çizgisi ile yüzeyden dışarı çıktığını düşünelim. Yani kapalı yüzeye 100 elektrik alan çizgisi girerken, 120 çizgi çıkmış olacak. Bu durumda da elektrik akısı pozitif olacaktır;

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} > 0$$

İlk olasılığı anlamak hiç zor değil. Sonuçta yüzeyin içerisinde hiç bir şey olmadığı için giren çizgilerin hepsi tekrar çıkacak ve akı sıfır olacaktır. Ancak sihirbazın şapkası ne olabilir şimdi onu düşünelim. Bunun için de ben size bir önceki bölümde bahsettiğimiz elektrik alan çizgilerinin iki özelliğini hatırlatmak istiyorum.

- Elektrik alan çizgileri **pozitif** yüklerde başlar, **negatif** yüklerde biter.
- Pozitif yüklerde başlayan/negatif yüklerde biten elektrik alan çizgi sayısı, yükün büyüklüğü ile doğru orantılıdır.

Yukarıda listelenen özelliklerden aslında sihirbazın şapkasının yük olduğunu anlamışsınızdır. Eğer kapalı yüzey içerisinde **negatif bir yük** var ise, içeri giren 100 çizginin bir kısmı bu yük üzerinde biteceği için daha az sayıda elektrik alan çizgisi çıkar ve **akı negatif** olur. Eğer içeride **pozitif bir yük** var ise, bu yük üzerinde elektrik alan çizgiler başlar ve içeri giren 100 çizgi ile beraber yüzeyden çıkar. Yani **pozitif bir akı** olur. Aslında tam bağıntı **Gauss Yasası** ile verilir;

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{iç}}{\epsilon_o} \qquad (2.4)$$

burada $\epsilon_o = 8.85 \times 10^{-12}\ C^2/N \cdot m^2$ boş uzayın geçirgenliği, $Q_{iç}$ ise kapalı yüzey (Gauss yüzeyi diyelim bundan sonra) içerisindeki yüktür. Bu ifade bize **kapalı bir yüzeyden geçen net akının, Gauss yüzeyi içerisindeki yük bölü ϵ_o'a eşit olduğunu söyler.** Gauss Yasası genel bir denklemdir ve her zaman doğrudur. Bir sonraki kısımda Gauss Yasasını kullanarak, komplex ancak simetrik yük dağılımlarının oluşturduğu elektrik alanı nasıl bulabileceğimizden bahsedeceğiz.

Gauss Yasası Elektromanyetizma anlayışımızın temelini oluşturan dört denklemden (Maxwell Denklemleri) biridir. **Bölüm 11**'de daha detaylıca Maxwell Denklemlerinden bahsedeceğiz.

2.5 Gauss Yasasının Uygulamaları

Gauss Yasasının her zaman doğru olduğunu ancak özel (simetrik) durumlarda karmaşık yük dağılımlarının oluşturduğu elektrik alanı kolayca hesaplamamızı sağladığını söyledik. Gauss Yasasını tekrar yazalım ve burada ne demek istediğimizden bahsedelim.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{iç}}{\epsilon_o} \qquad (2.4\ \text{tekrar})$$

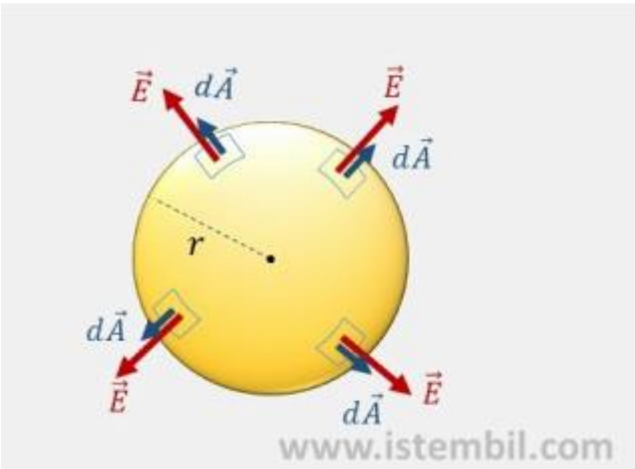
Farzedelim ki bir yük dağılımından dolayı bir P noktasında elektrik alan hesabı yapmak istiyoruz. Bu durumda bu P noktasının üzerinde olduğu hayali bir Gauss Yüzeyi (kapalı yüzey) düşünmemiz gerekiyor. **Denk. 2.4**'ü kullanarak elektrik alan vektörü $\vec{E}$'yi bulmaya çalışmak biraz aptal işi gibi gözükebilir. Sonuçta bu denklemi skaler çarpımı bir integral içerisinde olan $\vec{E}$ için çözmek istiyoruz. **Ancak sistem simetrik ise uygun Gauss Yüzeyi seçimi ile hem skaler çarpımla hem de integral ile uğraşmamıza gerek kalmayacaktır.**

burada A Gauss yüzeyinin alanıdır. Eğer elektrik alan yalnızca yüzeyin bir kısmına dik ise

$$\int E\, dA = E \int dA = E A'$$

burada A' elektrik akı olan yüzeyin alanıdır.

Böylelikle Gauss Yasasının sol tarafı çok daha basit hale gelecektir.Artık hem denklemin sağ tarafındaki seçtiğiniz Gauss yüzeyi içerisindeki yük $Q_{iç}$ 'i hesaplamak, hem de ardından E 'yi hesaplamak oldukça kolay olacaktır.



Şekil 2.5 Simetrik Yük dağılımını çevreleyen küresel Gauss Yüzeyi

NOT1: Eğer seçtiğiniz Gauss yüzeyi **küre** ise, elektrik alan vektörü **Sekil 2.5**'teki gibi bütün yüzeye dik olmalı ve yüzey üzerinde büyüklüğü sabit olmalıdır. Bu durumda Gauss Yasasını adım adım uygularsak bize

i. $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \dfrac{Q_{iç}}{\epsilon_o}$

ii. $\oint E\, dA = \dfrac{Q_{iç}}{\epsilon_o}$

iii. $E \oint dA = \dfrac{Q_{iç}}{\epsilon_o}$

iv. $E\, 4\pi r^2 = \dfrac{Q_{iç}}{\epsilon_o}$

Burada $\oint dA$ küçük dA'ların toplamıdır ve kürenin (Gauss yüzeyimizin) toplam yüzey alanı olacaktır. Eğer kürenin yarıçapı r ise bu alan $4\pi r^2$'dir.

Artık geriye yalnızca $Q_{iç}$ 'in hesaplanması gerekiyor.

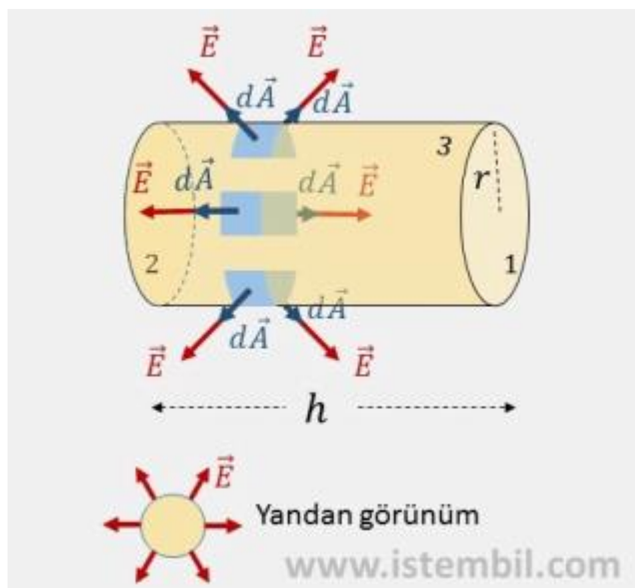
NOT 2: Peki elektrik alanın tüm yüzeye dik ve sabit olduğu duruma baktık. Peki ya elektrik alan yalnızca yüzeyin bir kısmına dik ve o kısım üzerinde sabit, diger kısımlarda yüzüye paralel ise. Bu duruma en güzel örnek **Şekil 2.6**'da gösterilen silindirik bir yüzeydir. Farzedin ki elektrik alan yalnızca yan yüzeye dik ve bu yüzey üzerinde sabit, silindirin dairesel sağ ve sol yüzeylerine paralel olsun. Adım adım denklemin sol tarafı aşağıdaki gibi olacaktır.

i. $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \dfrac{Q_{iç}}{\epsilon_o}$

ii. $\int_1 \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_2 \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_3 \vec{E} \cdot d\vec{A} = \dfrac{Q_{iç}}{\epsilon_o}$

iii. $0 + 0 + \int_3 E\, dA = \dfrac{Q_{iç}}{\epsilon_o}$

iv. $E\, 2\pi r\, h = \dfrac{Q_{iç}}{\epsilon_o}$



Şekil 2.6 Simetrik Yük dağılımını çevreleyen silindirik Gauss Yüzeyi

Burada $\oint dA$ üç yüzeyin (daire şeklindeki sağ ve sol yüzeyler ile silindirin yan yüzeyleri) toplamı şeklinde ifade edilmistir. Yalnızca 3 yüzeyde yani yan yüzeyde akı sıfır değildir. Yan yüzeyin alanı $\int_3 dA = 2\pi r\, h$ olacaktır. r silindirin yarı çapı, h ise uzunluğudur. $Q_{iç}$ hesaplandıktan sonra yan yüzey üzerindeki elektrik alanın büyüklüğü E rahatlıkla hesaplanabilir.

Gauss Yasasını kullanarak elektrik alan hesabı yaptığınız problemlerde aşağıdaki adımları izleyebilirsiniz.

- Yük dağılımının oluşturduğu elektrik alanı/alan çizgilerini hayal edin
- Yukarıda bahsedildiği gibi bu elektrik alan/alan çizgileri için uygun Gauss yüzeyini seçin
- $Q_{iç}$ 'i belirleyin.
- E için çözün.