Fonksiyonlarda limite devam:

Eğer x_0 sonlu, L sonsuz ise; istenildiği kadar büyük $M>0$ sayısına karşılık bir $\delta(M)>0$ sayısı bulunabilir mi? öyleki $|x-x_0|<\delta(M)$ eşitsizliğini sağlayan x'ler için $|f(x)|>M$ dir.

Bu durumda x bağımsız değişkeni x_0'a yaklaşırken $f(x)$ fonu da sonsuza gidiyor denir ve

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$$ yazılır.

Not: $|x-x_0|<\delta(M)$ için $f(x)>M$ ise $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

$|x-x_0|<\delta(M)$ için $f(x)<-M$ ise $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ dur.

Örnek: $x\to 3+0$ için $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$ fo.nunun limiti $+\infty$ dur.

Çözüm $\left|\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}\right|>M$ den hareketle

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x-3}}\right|=\frac{1}{\sqrt{x-3}}>M \Rightarrow \frac{1}{|x-3|}>M^2 \Rightarrow |x-3|<\frac{1}{M^2}$$

den $\delta(M)=\dfrac{1}{M^2}$ olarak alınabilir. Böylece istenildiği kadar büyük her $M>0$ reel sayısına karşılık bir $\delta(M)=\dfrac{1}{M^2}>0$ reel sayısı vardır ve $|x-3|<\dfrac{1}{M^2} \Rightarrow \left|\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}\right|>M$ dir.

Yani $$\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{\sqrt{x-3}}=+\infty$$ dur.

(2)

Eğer x_0 sonsuz, L sonlu ise; istenildiği kadar küçük her $\varepsilon > 0$ sayısına, $|x| > n(\varepsilon)$ oldukça $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n(\varepsilon) > 0$ reelsayısı karşılık getirilebilirse x sonsuza gittiğinde $f(x)$ fonu L limitine sahiptir denir ve $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ (veya $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$) yazılır.

Örn. $x \to \infty$ için $f(x) = \frac{3x+7}{x+1}$ fo.nunun limiti 3 tür.

Çözüm: $|f(x) - L| = \left| \frac{3x+7}{x+1} - 3 \right| = \left| \frac{3x+7-3(x+1)}{x+1} \right| = \left| \frac{4}{x+1} \right| =$

$= \frac{4}{|x+1|} < \varepsilon \Rightarrow |x+1| > \frac{4}{\varepsilon} \Rightarrow |x| + |1| > |x+1| > \frac{4}{\varepsilon}$ ve

geçişme özelliğinden $|x| + 1 > \frac{4}{\varepsilon} \Rightarrow |x| > \frac{4}{\varepsilon} - 1 = n(\varepsilon)$

olarak alınabilir.

Böylece her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $n(\varepsilon) = \frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}$ vardır ve $|x| > \frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}$ eşitsizliğini sağlayan x'ler için $\left| \frac{3x+7}{x+1} - 3 \right| < \varepsilon$ dur.

O halde $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x+7}{x+1} = 3$ tür.

Benzer şekilde $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x+7}{x+1} = 3$ tür.

Eğer (x_0 sonsuz), (L sonsuz) ise (ki burada x_0 olarak $+\infty$ veya $-\infty$ olabilir ve L olarak da $+\infty$ ya da $-\infty$ bulunabilir); istenildiği kadar büyük $M>0$ reel sayısına karşılık, $|x|>n(M)$ oldukça $|f(x)|>M$ olacak biçimde, bir $n(M)>0$ reel sayısı bulunabilirse $|x|\to\infty$ iken ($x\to+\infty$ veya $x\to-\infty$ iken) $f(x)$ sonsuza gidiyor denir ve $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ veya $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ (ya da $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ veya $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$) yazılır.

Örnek: $f(x)=\sqrt{3-x}$ fonksiyonu $x\to-\infty$ için $f(x)\to+\infty$ olduğunu gösterelim.

Çözüm $|f(x)|=|\sqrt{3-x}|>M$ den hareketle

$$|\sqrt{3-x}|=\sqrt{3-x}>M \Rightarrow \quad 3-x>M^2 \Rightarrow -x>M^2-3 \text{ ve}$$

buradan $|x|>M^2-3$ bulunur. Bu $M^2-3=n(M)$ olarak alınabilir

Yeterince büyük her M pozitif sayısına karşılık bir $n(M)=M^2-3$ sayısı bulunabilmektedir ve $|x|>M^2-3$ oldukça $|\sqrt{1-x}|>M$ olmaktadır. Üstelik $-x>M^2-3 \Rightarrow x<-(M^2-3)$ yazılabileceğinden (Yani $\sqrt{3}$ ten büyük olan, istenildiği kadar büyük M'ler için x daima negatif olarak sonsuza giderken) fonksiyon da $+\infty$'a gitmektedir.

Böylece $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{3-x}=+\infty$ dur.

(4)

Örnek: $\lim_{x\to-\infty}(2x+1)=-\infty$ olduğunu gösterelim

Çözüm: Keyfi büyük her $M>0$ sayısı için $|x|>n(M)$ oldukça $|f(x)|=|2x+1|>M$ olacak şekilde bir $n(M)>0$ sayısı bulunabilir mi?

$|2x+1|>M$ den hareketle $|2x+1|>|2x|-|1|=|2x|-1>M$ den

$|2x|>M+1 \Rightarrow 2|x|>M+1 \Rightarrow |x|>\frac{M+1}{2}$ olup $n(M)=\frac{M+1}{2}$ olarak seçilebilir. O halde bu problem için her $M>0$ sayısına karşılık bir $n(M)=\frac{M+1}{2}$ bulunabilmektedir ve

$|x|>\frac{M+1}{2}$ olan x'ler için $|2x+1|>M$ dir.

Üstelik $2x+1\leq 0$ olan, yani $x\leq-\frac{1}{2}$ olan her x için $2x+1\leq 0$ olduğundan $x<-\frac{1}{2}$ için $2x+1$ negatif olup

$|\underbrace{2x+1}_{(-)}|=-(2x+1)>M \Rightarrow -2x-1>M \Rightarrow -2x>M+1$ den

$2x<-(M+1) \Rightarrow x<-\frac{M+1}{2}$ dir.

Yani istenildiği kadar büyük pozitif M sayısı için

$x<-\frac{M+1}{2}$ iken (yani $x\to-\infty$ giderken), $2x+1<-M$

(yani $f(x)=2x+1\longrightarrow-\infty$ gider) olup

$\lim_{x\to-\infty}(2x+1)=-\infty$ dur.