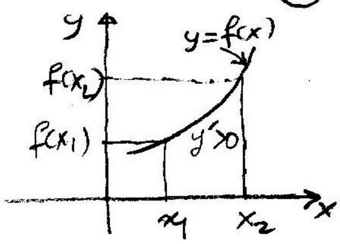
Ekstremum (Maksimum- Minimum) konusu ve problemleri:

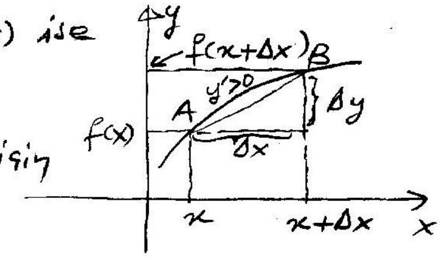
1

Artan- Azalan fonksiyonlar



$y=f(x)$ fo.nu $(x_1, x_2) \subset A$ aralığında daima $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ise artandır.

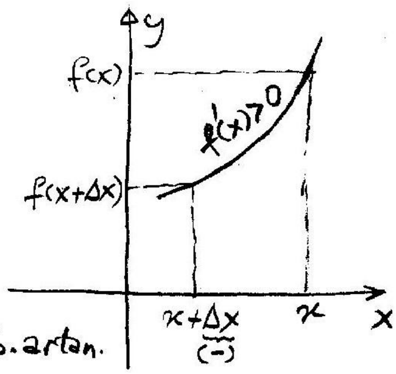
Aynı şekilde $(x, x+\Delta x)$ aralığında (şimdilik $\Delta x > 0$ olsun) $f(x+\Delta x) > f(x)$ ise bu aralıkta fo. artandır.



$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) > 0$ olup $\Delta x > 0$ için

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\overbrace{f(x+\Delta x) - f(x)}^{(+)}}{\underbrace{\Delta x}_{(+)}} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overset{(+)}{\Delta y}}{\underset{(+)}{\Delta x}} = f'(x) > 0 \text{ dır.}$$

Yani $f'(x) > 0$ olduğu aralıkta fo. artandır.

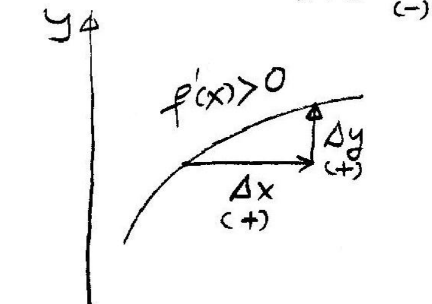


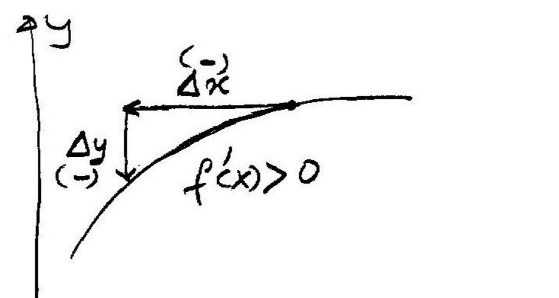
Eğer $\Delta x < 0$ ise $x+\Delta x < x$ olup,

aynı zamanda $f(x+\Delta x) < f(x)$ ise

Yani $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) < 0$ iken

$\Delta x < 0$ ise $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\overset{(-)}{\Delta y}}{\underset{(-)}{\Delta x}} = f'(x) > 0$ old. fo. artan.

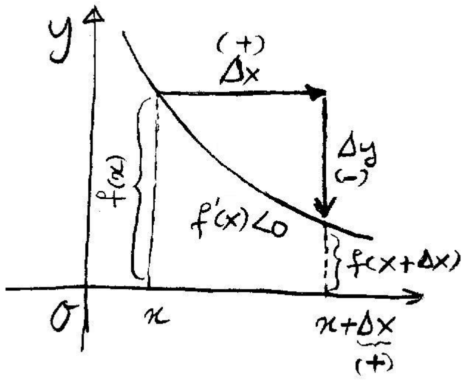


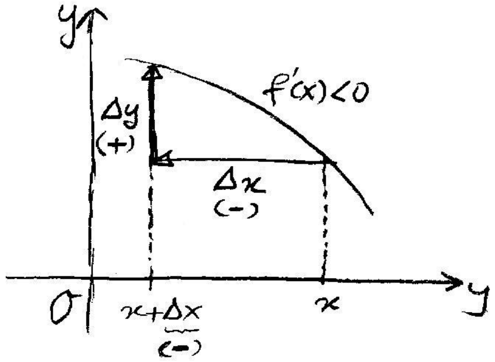


Tersine $\Delta x > 0$ iken $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) < 0$ ise

Ya da $\Delta x < 0$ iken $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) > 0$ ise

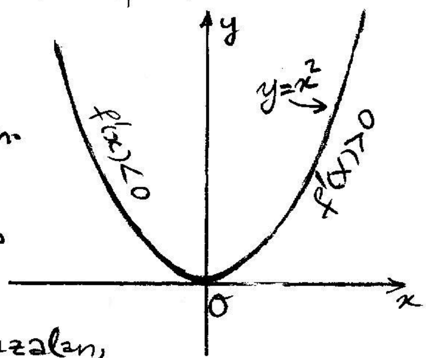
fonksiyon azalandır. (şekilleri diğer sayfada).





Sonuç olarak fonksiyonun artan olduğu aralıkta $f'(x)>0$, azalan olduğu aralıkta $f'(x)<0$ dır.

Örnek: $f(x)=x^2$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulalım.

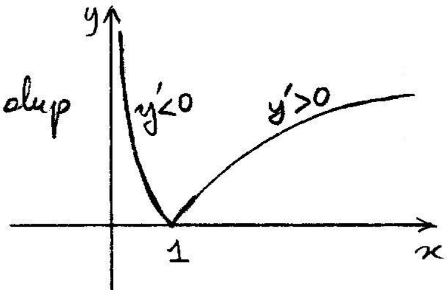


$f'(x)=2x$ olup türevin işaret tablosu:

x	$-\infty$	$x=0$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	ϕ	$+$

$(-\infty,0)$ aralığında $f'(x)<0$ old. fo. azalan, $(0,+\infty)$ aralığında $f'(x)>0$ olduğundan fonksiyon artandır.

Örnek: $f(x)=|\ln x|$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulalım



$$f(x)=|\ln x|=\begin{cases}-\ln x, & 0<x<1\\ 0, & x=1\\ \ln x, & 1<x<+\infty\end{cases}$$ olup

$$f'(x)=(|\ln x|)'=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, & 0<x<1\\ \text{yok}, & x=1\\ \dfrac{1}{x}, & 1<x<+\infty\end{cases}$$

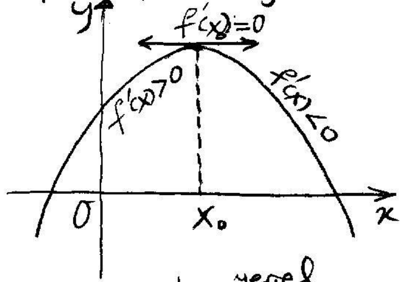
türevin işaret tablosu oluşturulursa; $\forall x\in(0,1)$ için $f'(x)=\frac{-1}{x}<0$, $\forall x>1$ için $f'(x)=\frac{1}{x}>0$ dır

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\|\|$	$+$

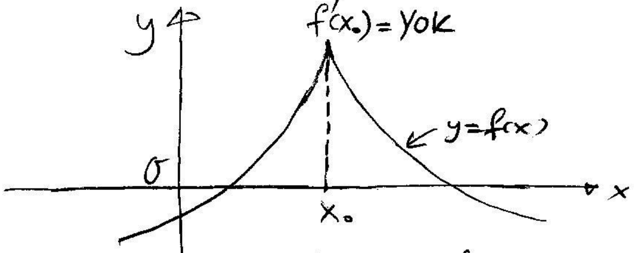
O halde $(0,1)$ de $f(x)=|\ln x|$ azalan, $(1,\infty)$ da artan fonksiyondur.

Bir fonksiyonun ekstremum (max. veya min.) noktası:

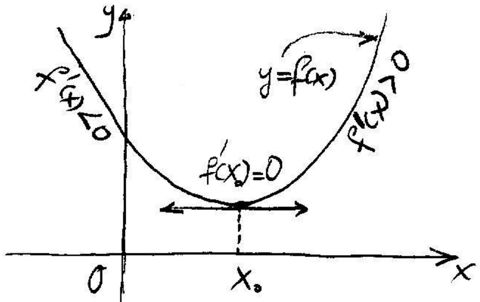
$y=f(x)$ fonksiyonunun birinci mertebeden $f'(x)$ türevinin sıfır yada tanımsız olduğu noktaların öncesinde ve sonrasında $f'(x)$ türevi işaret değiştirirse, bu noktada f.nun bir **yerel ekstremumu** vardır denir.



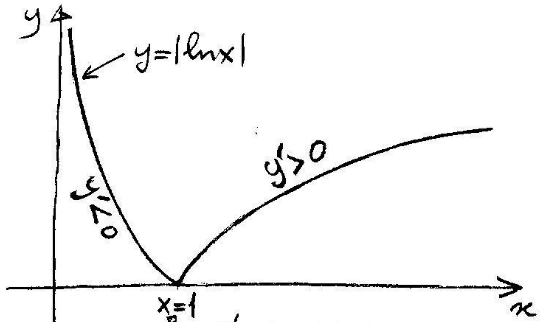
x_0 da yerel maksimum var.



x_0 da yerel max. var.



x_0 da yerel minimum var.



$f'(1)=$ YOK

$x_0=1$ de yerel min. var.

Not: Birinci mertebeden türevin sıfır olduğu x_0 noktasında ikinci mertebeden türev pozitif ise bu noktada bir yerel minimum; ikinci mertebeden türev bu noktada pozitif ise bir yerel maksimum vardır.

Genel olarak x_0 noktasında ve onun civarında $n+1$ inci mertebeden sürekli türevi olan $f(x)$ f.nu için

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(n)}(x_0)=0,\quad f^{(n+1)}(x_0)\neq 0 \quad \text{iken}$$

i) n tek ise x_0 ekstremum noktasıdır. $f^{(n+1)}(x_0)>0$ ise x_0 da min. $f^{(n+1)}(x_0)<0$ ise max. vardır.

ii) n çift ise x_0 ekstremum noktası değildir. (bkz. mavi kitap syf 205. Teo. 4)

Örnek: Toplamları 13 olan iki reel sayının çarpımlarının en büyük değeri kaçtır?

Çözüm: Sayılardan biri x olsun. Diğeri $13-x$ olup, sayıların çarpımını oluşturan fonksiyon $f(x)=x\cdot(13-x)$ dir. Yani $f(x)=13x-x^2$ dir. Türevi $f'(x)=13-2x$ olup

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 13-2x=0 \Rightarrow x_0=\frac{13}{2}$$ kritik noktadır.

(Türevi sıfır ya da tanımsız yapan noktaya kritik nokta denir)

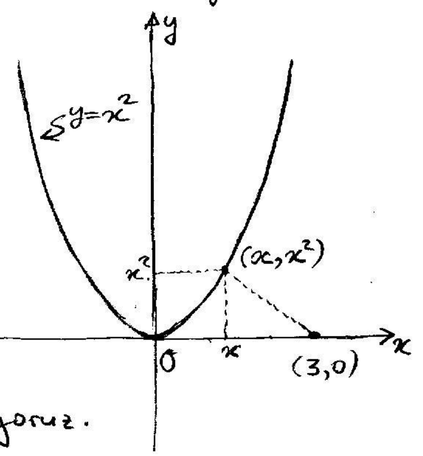
Türevin işaret tablosundan

x	$-\infty$		$x_0=\frac{13}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$ ↗	ϕ max.	$-$ ↘	

$x_0=\frac{13}{2}$ noktasının öncesinde ve sonrasında türevin işareti değiştiğinden burada bir ekstremumu (maksimumu) vardır. Aranılan en büyük değer ise

$$\text{Max. değer}=f\left(\frac{13}{2}\right)=\frac{13}{2}\cdot\left(13-\frac{13}{2}\right)=\frac{169}{4}=42{,}25 \text{ dir.}$$

Örnek: $(3,0)$ noktasına $y=x^2$ parabolünün en yakın noktasının koordinatlarını ve ayrıca bu uzaklığı bulunuz.



Parabol üzerinde hareketli bir nokta (x,x^2) olsun. $(3,0)$ ile, bu nokta arası uzaklık fonksiyonu;

$$f(x)=\sqrt{(x-3)^2+(x^2-0)^2}=\sqrt{(x-3)^2+x^4}$$ olup,

bu uzaklığı minimum yapan değeri arıyoruz.

$$f'(x)=\frac{2(x-3)+4x^3}{2\sqrt{(x-3)^2+x^2}}=\frac{2x^3+x-3}{\sqrt{(x-3)^2+x^2}}$$ den $f'(x)=0$ yapan

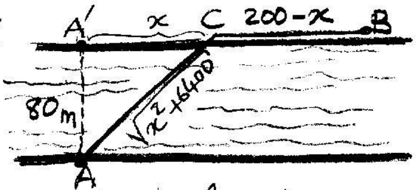
x_0 değeri $2x^3+x-3=(x-1)\cdot(2x^2+x+3)=0$ dan $x_0=1$ dir. Başka kök yok.

x	$-\infty$		$x_0=\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$ ↘	ϕ min.	$+$ ↗	

türevin işareti sadece $x-1$ den gelir. $2x^2+x-3>0$ daima. Payda zaten pozitif.

$$\text{Min. değer}=f(1)=\sqrt{(1-3)^2+(1^2)^2}=\sqrt{5} \text{ birim.}$$

Örnek: Bir akarsunun farklı iki tarafında A ve B yerleşim noktaları vardır. Akarsunun genişliği $|AA'| = 80$ m ve $|A'B| = 200$ m. dir. A ile B noktaları arasında bir boru döşenlecektir. Borunun suyun içinde kalan kısmının metresi 25 TL. ye, suyun dışındaki kara parçasında kalan kısmının metresi ise 15 TL. ye mâloluyor. Bu işin en az (minimum) mâliyet ile yapılabilmesi için borunun sudan çıktığı C noktası ile A' noktası arasındaki uzaklık kaç metre olmalıdır? Ayrıca minimum maliyet kaç TL. dir?



Çözüm: $|A'C| = x$ metre olsun. Pisagor'dan $|AC| = \sqrt{x^2+6400}$ ve $|CB| = 200 - x$ olup; problemin maliyet fonksiyonu

$$f(x) = 25 \cdot \sqrt{x^2+6400} + 15 \cdot (200 - x)$$ dir. Ekstremum için bu fonksiyonun türevi alınıp, türevi sıfır yapan kritik noktalar araştırılmalıdır;

$$f'(x) = 25 \cdot \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+6400}} + 15 \cdot (-1) = \frac{25x - 15\cdot\sqrt{x^2+6400}}{\sqrt{x^2+6400}}$$ olup

$$f'(x) = 0 \iff 25x - 15\sqrt{x^2+6400} = 0 \Rightarrow \cancel{25}^{5}x = \cancel{15}^{3}\sqrt{x^2+6400}$$ den

$$5x = 3\sqrt{x^2+6400} \Rightarrow 25x^2 = 9\cdot(x^2+6400) \Rightarrow 16x^2 = 9\cdot 6400$$ olup

$$4x_{1,2} = \mp 3\cdot 80 \Rightarrow x_1 = 60 \quad , \quad x_2 = -60 \text{ (anlamsız) dır.}$$

Bu problemin kritik noktası $x_1 = 60$ dır. x_1 in öncesinde ve sonrasında işareti sadece payından kaynaklanır. (Payda poz.)

$f'(60-0) < 0$ ve $f'(60+0) > 0$ olduğundan $|AC| = x_1 = 60$ için minimum vardır. Minimum mâliyet ise, $|AC| = 100$ m olup

$$f(60) = 25 \cdot 100 + 15 \cdot 140 = 2500 + 2100 = 4600 \text{ TL. dir.}$$

6

NOT: Bu örnekte $f'(x)$ in işaret incelemesinin açık olarak görülmesi istenirse; payda daima pozitif olduğundan sadece $f'(x)$ in payını incelemek yeterli

$f'(x)$ in payı $= 25x - 15\sqrt{x^2+6400}$ olup, $x_1 = 60$ civarında pozitif olduğu bilinen $25x + 15\sqrt{x^2+6400}$ ile çarpıp bölersek;

$$25x - 15\sqrt{x^2+6400} = \frac{(25x - 15\sqrt{x^2+6400})\cdot(25x + 15\sqrt{x^2+6400})}{25x + 15\sqrt{x^2+6400}} =$$

$$= \frac{25^2x^2 - 15^2(x^2+6400)}{25x + 15\sqrt{x^2+6400}} = \frac{625x^2 - 225(x^2+6400)}{25x + 15\sqrt{x^2+6400}} = \frac{400x^2 - 225\cdot 6400}{25x + 15\sqrt{x^2+6400}}$$

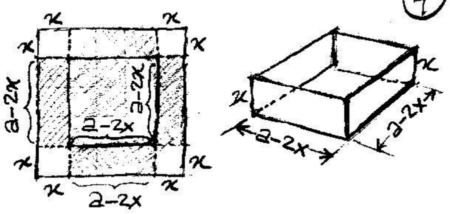
$$= \frac{(20x - 15\cdot 80)(20x + 15\cdot 80)}{25x + 15\sqrt{x^2+6400}} = \frac{400\cdot(x-60)\cdot(x+60)}{25x + 15\sqrt{x^2+6400}} \quad \text{olup}$$

$x_1 = 60$ civarında payımızdaki ikinci çarpan ve payda pozitif olup kesrin işaretini $(x-60)$ çarpanı belirler. Dolayısıyla
$f'(60-0) < 0$ ve $f'(60+0) > 0$ dır.

$f'(x)$ türevinin işaretini incelemek yerine $f''(x)$ türevini bulup $f''(60) > 0$ olduğunu gözlemleyerek de ekstremum olup olmadığı araştırılabilir.

Örnek: Bir kenarı a cm olan kare biçiminde bir metal levhanın köşelerinde eşit büyüklükte kareler kesilip atılıyor. Geriye kalan parçanın kenarları kıvrılıp üstü açık bir kare prizma elde ediliyor. Bu kare prizmanın en büyük (maksimum) hacimli olması için kesilip atılan karelerin bir kenarı kaç cm olmalıdır?

Çözüm: Köşelerden kesilip atılacak karelerin bir kenarı x cm olsun (bu, üstü açık kare prizmanın yüksekliği demektir, aynı zamanda.)

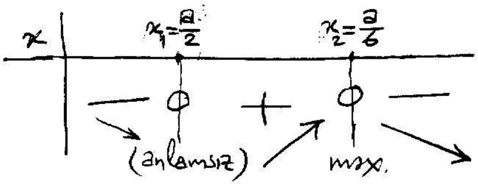


Böylece hacim fonksiyonu $V(x) = (a-2x)^2 \cdot x$ olup

$V'(x) = 2(a-2x)^1 \cdot (-2) \cdot x + (a-2x)^2 \cdot 1 = -4x(a-2x) + (a-2x)^2$ den

$V'(x) = (a-2x) \cdot (-4x + a - 2x) = (a-2x) \cdot (a-6x)$ bulunur

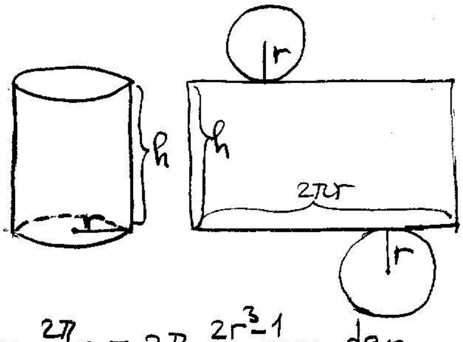
$V'(x) = (a-2x) \cdot (a-6x) = 0$ dan; $x_1 = \frac{a}{2}$ (anlamsız, zira prizma yoktur) ve $x_2 = \frac{a}{6}$ cm dir. Türevin işareti incelenirse;



Türevin işaret incelemesinden $x = \frac{a}{6}$ da f.nun maksimumu vardır.

Örnek: Silindir biçiminde, 1 dm³ hacminde, üstü kapalı bir konserve kutusu yapılacaktır. En az malzeme kullanılarak yapılan kutunun yüksekliğinin taban yarıçapına oranı nedir?

Çözüm: Toplam yüzey fonksiyonu $S = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$ olup, h ile r arasındaki ilişki $V = \pi r^2 \cdot h = 1$ den $h = \frac{1}{r^2}$ olup $S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1}{r^2}$ den



$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2\pi}{r}$ olup $S'(x) = 4\pi r - \frac{2\pi}{r^2} = 2\pi \cdot \frac{2r^3 - 1}{r^2}$ den

$S'(r) = \frac{2\pi}{r^2}\left(\sqrt[3]{2}r - 1\right) \cdot \left(\sqrt[3]{4} \cdot r^2 - \sqrt[3]{2}r + 1\right)$ olup $S'(r) = 0$ dan bir tek

$r_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ bulunur. İkinci çarpanın reel kökleri yoktur. ($\Delta < 0$ dır.) $S'(r)$ nin işareti sadece $(\sqrt[3]{2} \cdot r - 1)$ çarpanından kaynaklanır. Payın ikinci çarpanı ve payda $\forall r > 0$ için pozitiftir.

O halde

r	0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		$+\infty$
$S'(r)$		$-$	0	$+$	
		$\searrow$	min.	$\nearrow$	

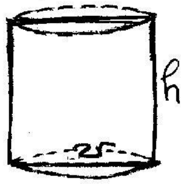
$r_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ için fonksiyonun bir minimumu vardır.

Öte yandan $r = r_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ için $h = \frac{1}{r^2} = \sqrt[3]{4}$ dür.

Böylece $\frac{h}{r} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = \sqrt[3]{8} = 2$ dir. Yani $\frac{h}{r} = 2$ dir.

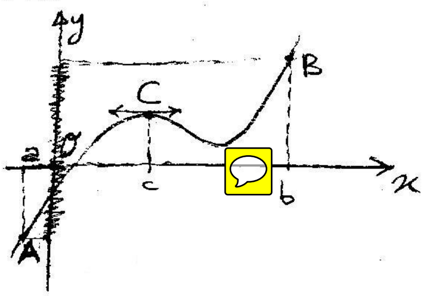
Sonuç olarak $\frac{h}{r} = 2$ veya $\frac{h}{2r} = 1$ olup, demekki

imâl edilecek silindirik kutunun yüksekliği taban çapına eşit olursa en az malzeme kullanılmış olur. Buna göre bir markette gözümüzün hizasında bulunan raftaki bir silindirik konservenin silüeti (kesit halindeki görüntüsü) bir kare biçiminde ise ($h=2r$) bu kutu en az malzeme harcanarak yapılmış demektir.

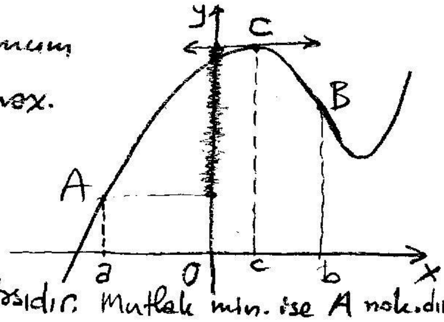


O

NOT: $y=f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında alabildiği en büyük değere mutlak (global) maksimum, en küçük değere ise mutlak (global) minimum denir.



(a,b) aralığının bir c noktasında $f'(x)$ türevi sıfır ya da tanımsız iken bu noktanın öncesinde ve sonrasında $f'(x)$ in işareti farklı ise f.nun bu noktada bir yerel (lokal) ekstremumu vardır. Yukarıdaki şekilde A noktasında mutlak maksimum B de mutlak minimum C de ise yerel max. vardır.



Son olarak yandaki şekilde görüldüğü gibi C yerel minimum noktası aynı zamanda mutlak max. noktasıdır. Mutlak min. ise A nok.dır