Fonksiyonlarda limit:

Bu bölümde $y = f(x)$ fonksiyonu ve $x_0 \in \mathbb{R}$ sayısı verildiğinde, x bağımsız değişkeni x_0 sayısına (soldan veya sağdan) yaklaşırken ya da sonsuza yaklaşırken, fonksiyonun da bir $L \in \mathbb{R}$ sayısına (veya $-\infty$ ya da $+\infty$'a) yaklaşıp yaklaşmadığı araştırılacak. Bunun için önce özel anlamda bir fonksiyon olan dizilerin limiti incelenecek. Sonra diziler yardımıyla, x reel değişkenli $y = f(x)$ reel fonksiyonların limiti ve daha sonra da tamamen fonksiyonlarda kalarak "$\varepsilon - \delta$ tekniği" de denilen limit tanımı ve özellikleri verilecek, on kadar özel limit tanıtılacaktır. Ayrıca limit alırken karşılaşılan ilk beş belirsiz hâl (belirsiz durum, ya da kısaca belirsizlik) olan $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞} belirsizlikleri tanıtılacak ve bu belirsizliklere sahip bir çok limit örnekleri L'Hospital Kuralı kullanılmadan çözülecektir.

Bu ilk beş belirsizliğe sahip olup L'Hospital'siz çözülemeyen bazı limit örnekleri ve diğer iki tane daha belirsiz hâl denilen 0^0 , ∞^0 belirsizlikleri de türev konusu işlendikten sonra, türev uygulamalarından biri olan L'Hospital Kuralı ile verilecektir.

Diziler:

Tanım kümesi $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$ sayma sayıları kümesi olan her fonksiyona $\mathbb{N}^+$ dan $\mathbb{R}$ ye bir dizi (veye bir reel dizi) denir.

$f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$; $n \to f(n)$ dizisinde $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, $f(3) = x_3$, . . . , $f(n) = x_n$, … ile gösterilirse x_1 , x_2 , x_3 ,$\cdots$, x_n ,... lere dizinin elemanları veya terimleri, x_n'ye ise dizinin genel terimi denir.

Dizi fonksiyonu, tanım kümesindeki bütün 1 , 2 , 3 , … , n , … sayma sayılarına, sırasıyla x_1 , x_2 , x_3 ,$\cdots$, x_n ,$\cdots$ reel sayılarını karşılık getirmektedir. Bir dizi, genel terimi paranteze alınarak (x_n) veya $\{x_n\}$ biçiminde gösterilir. (x_0, dizinin bir elemanını değildir, belli bir reel sayıyı göstermek için kullanılır. Zira dizinin tanım kümesi sayma sayıları kümesidir. Sayma sayıları kümesinde de sıfır yoktur. Dolayısıyla dizinin ilk terimi x_1 dir.)

Örnekler:

1) $\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ dizisinin genel terimi $x_n=\frac{1}{n}$ dir. Bu dizi $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ile gösterilir.

2) $\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$ dizisinin genel terimi $x_n=\frac{1}{2^n}$ dir. Bu dizi $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ ile gösterilir.

3) $\{x_n\}=\{(-1)^n\}$ in terimleri $x_1=-1, x_2=1, x_3=-1, x_4=1,\cdots, x_{2n-1}=-1, x_{2n}=1,\cdots$ dir.

4) a ve d reel (gerçek) sayıları için a , $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $\cdots$, $a+(n-1)d$, $\cdots$ terimlerine (elemanlarına) sahip dizi $\{x_n\}=\{a+(n-1)d\}$ dir. Bu diziye "aritmetik dizi" denir. Burada d sayısına dizinin "ortak farkı" denir. Yani ardışık terimleri arasındaki fark her $n\in\mathbb{N}^+$ için $x_{n+1}-x_n=d$ dir.

5) a ve q ($q\neq 0$) gerçek sayıları için a , aq , aq^2 , aq^3 , $\cdots$, aq^{n-1} , $\cdots$ terimlerinin oluşturduğu dizinin genel terimi $x_n=aq^{n-1}$ olup, bu dizi $\{x_n\}=\{aq^{n-1}\}$ dir. Buna "geometrik dizi" ve ardışık terimlerinin oranı olan $\frac{x_{n+1}}{x_n}=q$ sayısına da dizinin "ortak çarpanı" denir.

6) $\sqrt{2}$ sayısının yaklaşık birer değerini gösteren 1,4 ; 1,42 ; 1,415 ; ….. gibi rasyonel ondalık sayıları gitgide $\sqrt{2}$ sayısına daha da çok yaklaşırlar, fakat bir dizi oluşturmazlar. Ancak her bir aralığında $\sqrt{2}$ sayısını bulunduran, "iç-içe aralıklar" denilen aralıkların sol uç noktaları bir dizi, sağ uç noktaları da bir başka dizi olarak oluşturulabilir ve her iki dizi de $\sqrt{2}$ sayısına yaklaşır.

7) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\cdots$ terimlerine sahip bir dizi $\{x_n\}=\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ dir.

-1 , $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\cdots$ terimlerine sahip bir dizi $\{y_n\}=\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ dir.

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $\cdots$ terimlerine sahip bir dizi $\{z_n\}=\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}$ dir.

1 , 2 , 4 , 8 , 16 , $\cdots$ terimlerinin oluşturduğu bir dizi $\{t_n\}=\{2^{n-1}\}$ dir.

$\frac{1}{2},-\frac{2}{3},\frac{3}{4},-\frac{4}{5},\frac{5}{6}\cdots$ terimlerinden oluşan bir dizi $\{u_n\}=\left\{(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}\right\}$ dir.

8) $\{x_n\} = \{2^{-n}\cos n\}$ dizisinin ilk birkaç terimi $x_1 = 2^{-1}\cos 1 = \dfrac{\cos 1}{2} \cong \dfrac{0,54}{2} = 0,27$;

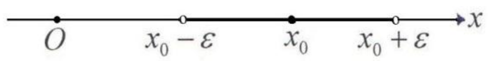
$x_2 = 2^{-2}\cos 2 = \dfrac{\cos 2}{4} \cong \dfrac{-0,416}{4} = -0,104$; $x_3 = 2^{-3}\cos 3 = \dfrac{\cos 3}{8} \cong \dfrac{-0.9899}{8} \cong -0.1236$ dır.

Burada kosinüsün önündeki 1 , 2 , 3 sayıları radyan cinsindendir. $1\,radyan = 1^{rd} \approx 57^0$,

$3^{rd} \approx 173^0$, $(3.1416)^{rd} \approx \pi^{rd} = 180^0$ dir

Komşuluk (civar) ve Delinmiş Komşuluk:

Bir $x_0 \in \mathbb{R}$ sayısı ve istenildiği kadar küçük bir $\varepsilon > 0$ gerçek (reel) sayısı verilsin. $(x_0 - \varepsilon\,,\, x_0 + \varepsilon)$ açık aralığına x_0 sayısının ε yarıçaplı komşuluğu denir ve $C_\varepsilon(x_0)$ ile gösterilir. Yani $C_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon\,,\, x_0 + \varepsilon)$ açık aralığıdır. (Bkz.Şekil 1). Bu aralıkta x_0 sayısı aralığın orta noktasıdır. Eğer bu nokta aralıktan atılacak olursa elde edilen $C_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon\,,\, x_0) \cup (x_0\,,\, x_0 + \varepsilon)$ açık aralığına x_0 sayısının ε yarıçaplı delinmiş komşuluğu denir (bkz. Şekil 2).



Şekil 1. Sayı doğrusu üzerinde komşuluk

Şekil 2. Sayı doğrusu üzerinde delinmiş komşuluk

Dizinin yığılma noktası:

$A \subset \mathbb{R}$ ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer x_0 sayısının her delinmiş komşuluğu A kümesinin en az bir elemanını içinde bulunduruyorsa bu x_0 sayısına A kümesinin bir yığılma noktasıdır denir. A kümesinin yığılma noktalarının oluşturduğu kümeye A'nın türev kümesi denir ve A' ile gösterilir.

Örnek:

$\{x_n\}=\left\{(-1)^n \dfrac{2n}{2n+3}\right\}$ dizisinin tek indisli terimleri -1 sayısına, çift indisli terimleri de $+1$ sayısına yığılmaktadır. Yani $A'=\{-1,1\}$ dir. İleride görülecek ki bu dizinin limiti yoktur.

Dizinin Limiti ($\varepsilon-$tekniği**):**

Bir $\{x_n\}$ dizisinde n büyüdükçe dizinin hemen hemen tüm terimleri belli bir x_0 sayısına istenildiği kadar yaklaşıyorsa, $\{x_n\}$ dizisi x_0 sayısına yaklaşıyor veya $\{x_n\}$ dizisinin limiti x_0 dır denir ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim x_n=x_0$ veya $x_n\to x_0$ ile gösterilir.

Bir başka deyişle; $\{x_n\}$ dizisinin hemen hemen her terimi x_0'ın ε yarıçaplı komşuluğunda bulunuyorsa, $\{x_n\}$'in limiti x_0 dır denir ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ veya $\lim x_n=x_0$ ya da $x_n\to x_0$ yazılır. Yani $\varepsilon>0$ ne kadar küçük olursa olsun, $C_\varepsilon(x_0)$ komşuluğunun dışında dizinin sonlu sayıda (ε'a bağlı, biraz sonra açıklayacağımız bir $n_0=n_0(\varepsilon)$ pozitif reel sayısının tam kısmı kadar) elemanı, fakat bu komşuluğun içinde ise dizinin geri kalan sonsuz tane elemanı vardır. Bu durumda bu dizinin sonsuz elemanı sadece bu x_0 sayısına yığılmaktadır ve dolayısıyla bu dizinin limiti x_0 noktasıdır denilir. Burada komşuluğun içindeki elemanları saymak kolay olmadığına göre komşuluğun dışında sonlu sayıda eleman olduğunu göstermek daha kolay olacaktır. Artık şimdi dizilerde limitin matematiksel tanımı verilebilir:

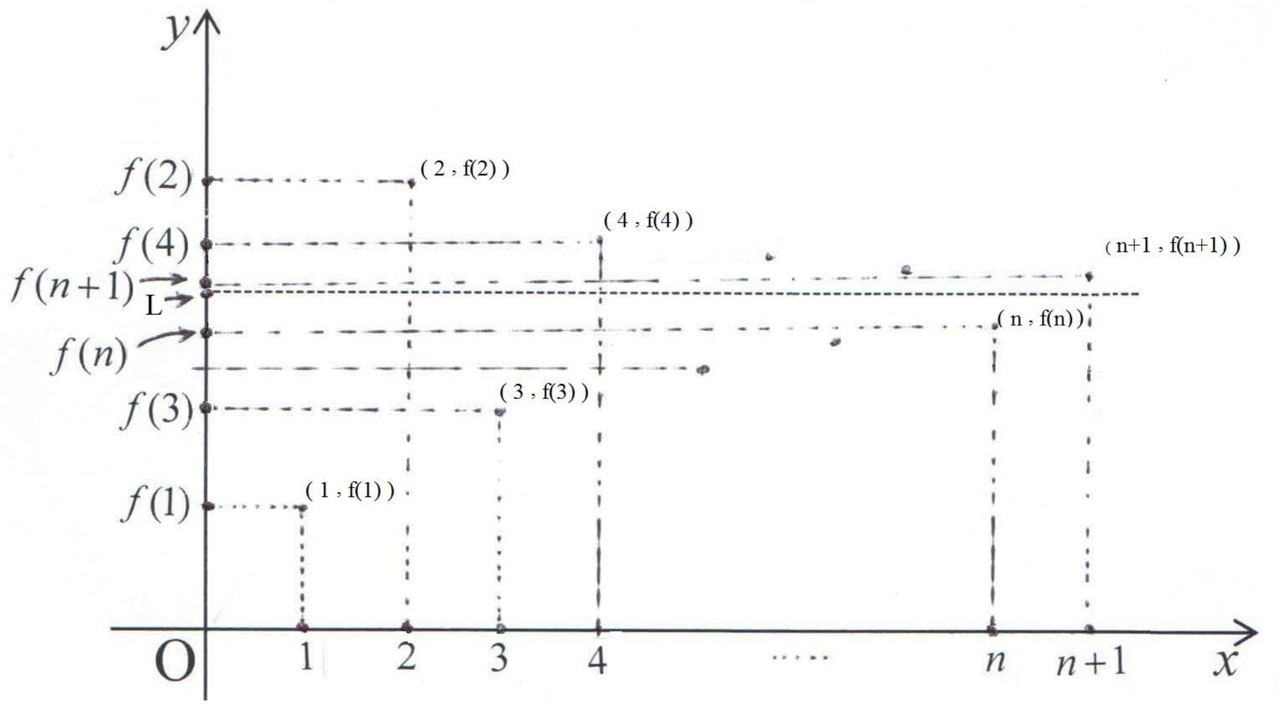
$\{x_n\}$ dizisi verilsin. Eğer istenildiği kadar küçük her $\varepsilon>0$ gerçek sayısına karşılık, öyle bir $n_0=n_0(\varepsilon)>0$ reel sayısı bulunabiliyor ve bu n_0'dan büyük olan tüm n sayma sayılarını indis olarak kabul eden x_n'ler ile x_0 reel sayısı arasında fark mutlak değerce ε'dan daha küçük kalıyorsa, yani $|x_n-x_0|<\varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman x_0 sayısına $\{x_n\}$ dizisinin limiti denir ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ veya $\lim x_n=x_0$ ya da $x_n\to x_0$ ile gösterilir.

Eğer bir dizinin yığılma noktası bir tek ise bu dizi yakınsak ve limiti de bu yığılma noktasıdır. Yığılma noktaları birden fazla ise o zaman dizi yakınsak değildir. Yani dizinin hemen hemen her terimi sadece bir $x_0\in\mathbb{R}$ sayısına yığılmayıp, sonsuz terimi x_0'dan başka noktalara da yığılmaktaysa bu dizi yakınsak değildir. Yakınsak olmayan dizilere ıraksak dizi denir. Ayrıca limiti $x_0=0$ olan dizilere "sıfır dizisi" denir.

Uyarı: Dizilerde limit, sadece $n \to \infty$ iken araştırıldığından, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ yerine $\lim x_n$ de yazılabilir. Bir de sıfır indisli bir dizi elemanı yoktur. Yani x_0 sayısı dizi elemanı olarak gösterilmez. Dizinin ilk elemanı x_1 dir. Çünkü dizilerde tanım kümesi $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$ sayma sayıları kümesidir, doğal sayılar kümesi denilen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3\ \cdots, n, \cdots\}$ kümesi değildir. x_0 yerine l , a , c , ...v.s. de yazılabilir. Ancak biz dizileri daha çok tanım aralığı (tanım kümesi) reel sayılar kümesi olan reel fonksiyonların limitini hesaplamada kullanacağımızdan fonksiyonun bağımsız değişkenin limitinin yaklaşacağı sayıyı l , a , c , ...v.s. olarak almak yerine, x_0 sayısını almayı tercih edeceğiz. Bu bölümde dizinin limitini çok az yerde l olarak göstereceğiz.

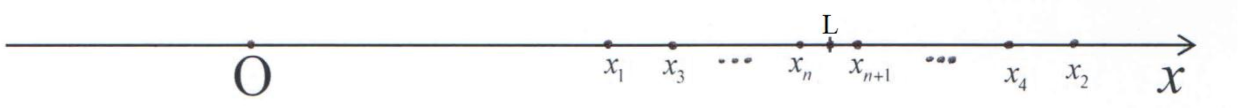
Bir Dizinin Grafiği:

$f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$; $n \to f(n)$ dizi fonksiyonunda $f = \{(n, f(n))\} = \{(n, x_n)\}$ kümesine analitik düzlemde (dik karteziyen koordinat sisteminde) karşılık gelen noktaların oluşturduğu şekle $\{f(n)\}$ veya $\{x_n\}$ dizisinin grafiği denir. Burada grafik sürekli (veya kesikli) bir eğri olmayıp analitik düzlemde sıralı ikililerden oluşan bir noktalar topluluğudur (bkz. Şekil 3).



Şekil 3: Bir $\{f(n)\}$ dizisinin grafiği.

Şekil 3'te $Oy-$ekseni üzerindeki $f(1), f(2), f(3), f(4), \cdots, f(n), f(n+1), \cdots$ ordinat değerlerini (görüntü elemanlarını) sırasıyla $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n, x_{n+1} \cdots$ olarak alıp $Ox-$ekseni üzerine yerleştirmekle dizilerin yeni bir geometrik gösterimini elde ederiz. (Bkz. Şekil 4).



Şekil 4. Bir $\{x_n\}$ dizisinin geometrik gösterimi.

Şimdi dizilerin limitinin, $\varepsilon -$tekniği kullanılarak gösterildiği birkaç örnek verelim:

Örnek: $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ dizisinin limitinin sıfır olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Burada $x_n = \frac{1}{n}$ ve $x_0 = 0$ dır. İstenildiği kadar küçük $\varepsilon > 0$ sayısı seçilsin.

Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $n_0 = n_o(\varepsilon) > 0$ gerçek (reel) sayısı var mıdır? Öyle ki her $n > n_0$ için $|x_n - x_0| < \varepsilon$ dur.

Bu son eşitsizlikten hareketle $|x_n - x_0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ denilirse buradan $\frac{1}{n} < \varepsilon$ dan $n > \frac{1}{\varepsilon}$ bulunur. İşte bu $\frac{1}{\varepsilon}$ sayısını n_0 olarak alırsak $n_0 = n_o(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ dur. Yani her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $n_0 = n_o(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ reel (gerçek) sayısı bulunabilmektedir ve her $n > n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$ için $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ dur. Yani $\lim \frac{1}{n} = 0$ dır.

Buna göre mesela $\varepsilon = 0,015$ seçilseydi $n_0 = n_0(\varepsilon) = n_0(0,015) = \frac{1}{0,015} = \frac{1000}{15} = 66,\overline{6}$

olup $x_0 = 0$'ın $\varepsilon = 0,015$ yarıçaplı komşuluğu dışında dizinin ilk 66 terimi vardır ve bu komşuluğun içinde $n > n_0(0,015) = 66,\overline{6}$ koşulunu sağlayan 67. , 68. , ….. sonsuz tane terim vardır. Yani istenildiği kadar küçük her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $|x_n - x_0| < \varepsilon$ eşitsizliğini her $n > n_0 = n_o(\varepsilon)$ için sağlayacak biçimde bir $n_0 = n_o(\varepsilon) > 0$ reel (gerçek) sayısını bulabilmekteyiz. Dolayısıyla komşuluk dışında sonlu, komşuluk içinde sonsuz terim vardır. O halde $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ dır.

Örnek: $\{x_n\}=\left\{\dfrac{n}{2n-1}\right\}$ dizisinin limitinin $x_0=\dfrac{1}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık bir $n_0=n_0(\varepsilon)>0$ reel sayısı, her $n>n_0$ için $|x_n-x_0|<\varepsilon$ olacak biçimde varsa o zaman $\lim x_n=x_0$ dır.

Burada hareket noktamız $|x_n-x_0|<\varepsilon$ dur;

$$|x_n-x_0|=\left|\frac{n}{2n-1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2n-(2n-1)}{2\cdot(2n-1)}\right|=\left|\frac{\cancel{2n}-\cancel{2n}+1}{2\cdot(2n-1)}\right|=\left|\frac{1}{2\cdot(2n-1)}\right|=\frac{1}{2\cdot(2n-1)}<\varepsilon \text{ denilirse}$$

buradan $\dfrac{1}{2\cdot(2n-1)}<\varepsilon\Rightarrow\dfrac{1}{2n-1}<2\varepsilon\Rightarrow 2n-1>\dfrac{1}{2\varepsilon}\Rightarrow n>\dfrac{1}{2}\cdot(\dfrac{1}{2\varepsilon}+1)$ bulunur. $\dfrac{1}{2}\cdot(\dfrac{1}{2\varepsilon}+1)=n_0$ olarak alınabilir ve $n>n_0$ koşulu da sağlanmış olur.

Böylece her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık bir $n_0=n_0(\varepsilon)=\dfrac{1}{4\varepsilon}+\dfrac{1}{2}$ pozitif reel sayısı vardır ve her $n>n_0$ için $|x_n-x_0|=\left|\dfrac{n}{2n-1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ dur, yani $\lim\dfrac{n}{2n-1}=\dfrac{1}{2}$ dir.

Uyarı: Bu örnekte mesela $\varepsilon=0,01$ için $n_0=n_0(0,01)=\dfrac{1}{4\cdot0,01}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{100}{4}+\dfrac{1}{2}=25+\dfrac{1}{2}=25,5>0$ olup her $n>25,5$ için $\left|x_n-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{n}{2n-1}-\dfrac{1}{2}\right|<0,01$ dir. Yani $\varepsilon=0,01$ için $x_0=\dfrac{1}{2}$'nin $0,01$ yarıçaplı komşuluğunun dışında dizinin ilk 24 tane terimi vardır ve 25-inci terimden itibaren (her $n>25,5$ için) dizinin sonsuz tane terimi $x_0=\dfrac{1}{2}$'nin $0,01$ yarıçaplı komşuluğunun içindedir. Burada ε ne kadar küçük olursa olsun $n_0=n_0(\varepsilon)=\dfrac{1}{4\varepsilon}+\dfrac{1}{2}>0$ reel sayısı sonlu bir sayı (gerçi ε küçüldükçe $n_0(\varepsilon)$ sayısı büyümektedir fakat yine de sonlu) olup, komşuluk dışında dizinin sonlu sayıda, komşuluk içinde de sonsuz sayıda terimi olmaktadır ki bu, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n-1}=\dfrac{1}{2}$ demektir.

Örnek: $\{x_n\}=\left\{\dfrac{n^2-7}{n^2-2n-5}\right\}$ dizisinin limitinin $x_0=1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $\varepsilon>0$ için bir $n_0(\varepsilon)>0$ sayısı var mıdır? Öyle ki her $n>n_0(\varepsilon)$ için $|x_n-x_0|=\left|\dfrac{n^2-7}{n^2-2n-5}-1\right|<\varepsilon$ dur. Buradan

$$\left|\frac{n^2-7}{n^2-2n-5}-1\right|=\left|\frac{n^2-7-(n^2-2n-5)}{n^2-2n-5}\right|=\left|\frac{\cancel{n^2}-7-\cancel{n^2}+2n-5)}{n^2-2n-5}\right|=\left|\frac{2n-2}{n^2-2n-5}\right|=\frac{2n-2}{n^2-2n-5}$$, her

$n \geq 4$ için. O halde her $n \geq 4$ için

$$\left|\frac{n^2-7}{n^2-2n-5}-1\right|=\frac{2n-2}{n^2-2n-5}<\frac{2n}{n^2-2n-5n}=\frac{2n}{n^2-7n}=\frac{2}{n-7}<\varepsilon$$ denilirse, bu son eşitsizlikten

$\dfrac{2}{n-7}<\varepsilon \Rightarrow \dfrac{2}{\varepsilon}<n-7$ den, her $n \geq 8$ için $n>\underbrace{\dfrac{2}{\varepsilon}+7}_{n_0(\varepsilon)}$ olup $n_0(\varepsilon)=\dfrac{2}{\varepsilon}+7=\dfrac{2+7\varepsilon}{\varepsilon}$ olarak

alınabilir.

Böylece her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık bir $n_0=n_0(\varepsilon)=\dfrac{2+7\varepsilon}{\varepsilon}>0$ reel sayısı vardır; öyle ki

$n>n_0=\dfrac{2+7\varepsilon}{\varepsilon}$ koşulunu sağlayan her n için $|x_n-x_0|=|x_n-1|=\left|\dfrac{n^2-7}{n^2-2n-5}-1\right|<\varepsilon$ dur.

Dolayısıyla $\lim \dfrac{n^2-7}{n^2-2n-5}=1$ dir.

Uyarı: Bu örnekte çözümün beşinci satırında, ikinci adımdaki $2n-2$ payı yerine bir büyütme yapılarak $2n$ alındı, payda da -5 yerine -5n alınarak payda daha da küçültüldü ve böylece yeni elde edilen kesir büyümüş oldu. Bu işlemlerin sonunda da $\cdots<\varepsilon$ yazıldı. Böylece mutlak değer dışındaki $\dfrac{2n-2}{n^2-2n-5}$ kesri, **bu kesrin limitini değiştirmeyecek biçimde** uygun terim ekleyip çıkarmakla basitleştirildi ve geçişme özelliği de göz önünde bulundurularak $|x_n-x_0|<\varepsilon$ olması da sağlandı. Burada amaç her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık $n>n_0$ olacak biçimde ε'a bağlı bir $n_0=n_0(\varepsilon)>0$ reel sayısının bulunabilmesidir! Bu n_0 sayesinde x_0'ın ε yarıçaplı komşuluğu dışında dizinin sonlu sayıda elemanı olduğu, dolayısıyla içeride de sonsuz sayıda elemanının (yani dizinin hemen hemen her teriminin) olduğu gösterilmiş olmaktadır. Ayrıca bu örnekte, mesela $\varepsilon=0,03$ sayısal değeri için $n_0=n_0(\varepsilon)=73,\overline{6}$ dır. Ancak bu sayı, $C_{0,03}(1)$ komşuluğu dışında dizinin ilk 74 teriminin olduğunu göstermez. Gerçekte dışarıda bundan daha az sayıda terim vardır. Zira yukarıda yapılan büyültmelerden dolayı dışarıda kalan eleman sayısı daha büyük çıkmaktadır. Ama bizim için önemli olan sonlu bir $n_0=n_0(\varepsilon)>0$ sayısının bulunabildiğini göstermektir.

Örnek: $\{x_n\}=\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}$ dizisinin limitinin $x_0=0$ olduğunu, yani bu dizinin bir sıfır dizisi olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Eğer $\{x_n\}$ dizisinin limiti $x_0=0$ ise, her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık en az bir $n_0(\varepsilon)>0$ sayısı vardır ve her $n>n_0$ için $|x_n-x_0|=\left|\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)-0\right|<\varepsilon$ dur. O halde

$$|x_n-x_0|=\left|\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)-0\right|=\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right|=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\dfrac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}=\frac{(\cancel{n}+1)-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\Rightarrow$$

$$\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right|=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{n}}<\varepsilon \text{ dersek, } \frac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon\Rightarrow\sqrt{n}>\frac{1}{2\varepsilon}\Rightarrow$$

$\Rightarrow n>\dfrac{1}{4\varepsilon^2}$ olup $\dfrac{1}{4\varepsilon^2}$ yi n_0 olarak alırsak; her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık bir $n_0(\varepsilon)=\dfrac{1}{4\varepsilon^2}>0$ sayısı vardır ve her $n>\dfrac{1}{4\varepsilon^2}$ için $|x_n-0|=\left|(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-0\right|<\varepsilon$ dur. Yani $\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$ dır.

Uyarı: Limiti sıfır olan dizilere sıfır dizisi veya sonsuz küçülen dizi denir. Her yakınsak dizi, genel terimi ile x_0 limiti arasındaki farkı olan $\{x_n-x_0\}$ dizisini yeni bir dizi olarak aldığımızda $\{y_n\}=\{x_n-x_0\}$ bir sıfır dizisidir. $\lim x_n=x_0\Rightarrow\lim\left(x_n-x_0\right)=0$ dır. Eğer $\lim x_n=0$ ise $\lim\dfrac{1}{x_n}=\mp\infty$ dur. Yani sıfır dizisinin çarpmaya göre tersinin limiti ya $-\infty$ veya $+\infty$ dur.

Sonsuz Büyüyen Diziler:

Limiti $+\infty$ veya $-\infty$ olan dizilere (pozitif veya negatif yönde) sonsuz büyüyen diziler denir. Sonsuz büyüyen dizilerin limitleri de matematiksel olarak verilebilir. Bu tekniğe de (M - tekniği) diyelim.

Sonsuz Büyüyen Dizilerin Limitleri ($M-$tekniği**):**

İstenildiği kadar büyük $M>0$ reel sayısına karşılık bir $n_0(M)>0$ reel sayısı, her $n>n_0(M)$ için $|x_n|>M$ olacak biçimde bulunabiliyorsa, $\{x_n\}$ dizisine sonsuz büyüyen dizi denir ve $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=\lim|x_n|=\infty$ veya $|x_n|\to\infty$ şeklinde gösterilir. Ayrıca sonsuz büyüyen bir dizide dizinin x_n terimi belli bir sayma sayısından sonraki n'ler için (veya bazen ilk terimden itibaren) daima pozitif değerler alıyorsa $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim x_n=\infty$ yazılır ve belli bir n'den (veya bazen ilk terimden) itibaren daima negatif değerler alıyorsa $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim x_n=-\infty$ yazılır.

Örnek: $q \in \mathbb{R}$ için $|q|>1$ olduğunda $\{x_n\}=\{q^n\}$ dizisinin sonsuz büyüyen bir dizi olduğunu gösteriniz.

Çözüm: İstenildiği kadar büyük $M>0$ reel sayısı verildiğinde en az bir $n_0(M)>0$ reel sayısı bulunabilir mi? Öyle ki her $n>n_0(M)$ için $|x_n|=|q^n|>M$ olsun. Bu son eşitsizlikten hareketle $|q^n|=|q|^n>M \Rightarrow |q|^n>M \Rightarrow n\log_{|q|}|q|>\log_{|q|}M$ olup, burada $\log_{|q|}|M|$ sayısı $n_0(M)$ olarak alınabilir.

Böylece her istenildiği kadar büyük her $M>0$ reel sayısına karşılık bir $n_0(M)=\log_{|q|}M$ reel sayısı bulunabilmektedir ve her $n>\log_{|q|}(M)$ için $|q^n|>M$ dir. Yani $\lim|q^n|=+\infty$ dur, hatta q>1 gibi pozitif reel sayı olduğunda $\lim q^n=+\infty$ dur. Eğer $q<-1$ ise iki durum söz konusudur. Çift indisli dizi genel terimi için $x_{2n}=q^{2n}\to+\infty$ ve tek indisli dizi genel terimi için de $x_{2n-1}=q^{2n-1}\to-\infty$ dur.

Örnek: $x_n=15-n^2$ genel terimli dizinin sonsuz büyüyen bir dizi olduğunu gösteriniz.

Çözüm: İstenildiği kadar büyük her $M>0$ reel sayısı verildiğinde her $n>n_0(M)$ için $|x_n|=|15-n^2|>M$ olacak biçimde bir $n_0(M)$ var mı? Bunu araştırıyoruz. Bu son eşitsizlikten hareketle, öncelikle eşitsizlikteki mutlak değerin içini dışarı alabilmek için n sayısı, $n\geq 4$ olmak koşuluyla, $|15-n^2|=n^2-15>M$ den $n^2>M+15 \Rightarrow n>\underbrace{\sqrt{M+15}}_{n_0(M)}$ olup

$n_0(M)=\sqrt{M+15}$ olarak alınabilir. Yani istenildiği kadar büyük her $M>0$ reel sayısına karşılık bir $n_0(M)=\sqrt{M+15}>0$ reel sayısı vardır ve her $n>\sqrt{M+15}$ için $|x_n|=|15-n^2|>M$ dir. Yani $\lim|x_n|=\lim|15-n^2|=+\infty$ dur. Öte yandan dizinin ilk birkaç terimi hesaplanırsa $x_1=14$, $x_2=11$, $x_3=6$, $x_4=-1$, $x_5=-10$, $x_6=-21$, … her $n\geq 4$ için $x_n<0$ olduğundan, yani 3'den daha büyük olan her n için x_n negatif olduğundan limiti de negatif olacaktır; o halde $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-n^2)=-\infty$ dur.

Örnek: $\{x_n\} = \left\{2^{\sqrt{n}}\right\}$ dizisi bir sonsuz büyüyen dizi olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Gerçekten her $M > 0$ reel sayısı verildiğinde, her $n > n_0(M)$ için $|x_n| = \left|2^{\sqrt{n}}\right| = 2^{\sqrt{n}} > M$ olacak biçimde bir $n_0(M)$ var mı? Bu son eşitsizlikten, yani $\left|2^{\sqrt{n}}\right| = 2^{\sqrt{n}} > M$ den $\sqrt{n} > \log_2 M \Rightarrow n > \left(\log_2 M\right)^2$ olup $n_0 = n_0(M) = \left(\log_2 M\right)^2$ olarak alınabilir. Böylece istenildiği kadar büyük $M > 0$ sayısına karşılık bir $n_0(M) = \left(\log_2 M\right)^2 > 0$ reel sayısı bulunabilmektedir ve her $n > \left(\log_2 M\right)^2$ için $\left|2^{\sqrt{n}}\right| > M$ dir. Dolayısıyla $\lim\left|2^{\sqrt{n}}\right| = +\infty$ dur. Öte yandan her $n \in \mathbb{N}^+$ için $2^n > 0$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\sqrt{n}} = +\infty$ dur.

Artan İndis Dizisi:

$\mathbb{N}^+$'dan $\mathbb{N}^+$'ya giden ve her $k \in \mathbb{N}^+$ için $n_k < n_{k+1}$ eşitsizliğini sağlayan $\{n_k\}$ sayma sayıları dizisine artan indis dizisi denir.

Örnek: $\begin{array}{l} \mathbb{N}^+ \to \ \mathbb{N}^+ \\ k \ \ \to n_k = 2k \end{array}$ ise $\{n_k\} = \{2k\}$ bir artan indis dizisidir.

Gerçekten her $k \in \mathbb{N}^+$ için $n_k = 2k < 2(k+1) = n_{k+1}$ eşitsizliği sağlanır.

Benzer biçimde $n_k < n_{k+1}$ eşitsizliğini sağlayan, genel terimleri $n_k = k^2$, $n_k = k^3 + 1$, $n_k = 3k - 2$, … olan bir çok artan indis dizisi oluşturulabilir.

Örnek: $\{n_k\} = \left\{\frac{1}{2}k\right\}$ bir artan indis dizisi değildir. Zira $k = 2$ için $n_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \in \mathbb{N}^+$ iken, $k = 1$ için $n_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}^+$ dir. Yani $\{n_k\} = \left\{\frac{1}{2}k\right\}$ dizisi, $\mathbb{N}^+$'dan $\mathbb{N}^+$'ya giden bir artan indis dizisi değildir.

Alt Dizi:

$\{x_n\}$ herhangi bir reel dizi olsun. $\{n_k\}$ bir artan indis dizisi ise $\left\{x_{n_k}\right\}$ dizisine $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi denir.

Örnek: $\{x_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ dizisi için bir artan indis dizisi $\{n_k\} = \{2k\}$ için

$\{x_{n_k}\} = \{x_{2k}\} = \left\{\dfrac{(-1)^{2k}}{2k}\right\} = \left\{\dfrac{1}{2k}\right\}$ bir alt dizidir. $\{n_k\} = \{2k-1\}$ bir başka artan indis dizisi için

$\{x_{n_k}\} = \{x_{2k-1}\} = \left\{\dfrac{(-1)^{2k-1}}{2k-1}\right\} = \left\{-\dfrac{1}{2k-1}\right\}$ bir başka alt dizidir.

Uyarı: Yukarıdaki alt dizileri k yerine n yazarak göstermek dizi yazılışına daha uygun olacaktır. Buna göre yukarıdaki örnekte verilen $\{x_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ dizisinin farklı iki alt dizisi

$\{y_n\} = \{x_{2n}\} = \left\{\dfrac{(-1)^{2n}}{2n}\right\} = \left\{\dfrac{1}{2n}\right\}$ ve $\{z_n\} = \{x_{2n-1}\} = \left\{\dfrac{(-1)^{2n-1}}{2n-1}\right\} = \left\{-\dfrac{1}{2n-1}\right\}$ dir.

Artan ve Azalan Diziler:

Bir $\{x_n\}$ dizisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n < x_{n+1}$ ise bu dizi "monoton artan" bir dizi ve her $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n > x_{n+1}$ ise bu dizi "monoton azalan" bir dizidir.

Eğer her $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n \le x_{n+1}$ ise bu diziye "azalmayan" bir dizi ve her $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n \ge x_{n+1}$ ise bu diziye de "artmayan" dizi denir.

Örnek: $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ dizisi monoton azalan bir dizidir. $\{y_n\} = \left\{\dfrac{n-1}{n}\right\} = \left\{1-\dfrac{1}{n}\right\}$ dizisi bir monoton azalan bir dizidir. Fakat $\{z_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$ dizisi ne monoton artan ne de monoton azalan bir dizidir. Ancak bu son dizinin alt dizilerinden $\{z_{2n-1}\} = \left\{\dfrac{(-1)^{(2n-1)+1}}{2n-1}\right\} = \left\{\dfrac{1}{2n-1}\right\}$ dizisi monoton azalan, $\{z_{2n}\} = \left\{\dfrac{(-1)^{2n+1}}{2n}\right\} = \left\{-\dfrac{1}{2n}\right\}$ dizisi de monoton artandır.

Sınırlı Diziler:

$\{x_n\}$ dizisinin tüm terimleri için, eğer $x_n \le M$ eşitsizliğini sağlayan bir M reel sayısı varsa diziye üstten sınırlı dizi; eğer $m \le x_n$ koşulunu sağlayan bir m sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine alttan sınırlı bir dizi denir. Hem alttan, hem de üstten sınırlı bir diziye de sınırlı dizi denir. Yani her $n \in \mathbb{N}^+$ için $|x_n| \le K$ olacak biçimde bir K reel sayısı varsa bu dizi sınırlı bir dizidir.

Örnekler:

1. $\{x_n\} = \{n\}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}^+$ için $1 \le n$ olduğundan bu dizi alttan sınırlıdır. Fakat üsten sınırlı değildir.

2. $\{x_n\} = \{-n\}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}^+$ için $-n \le -1$ olduğundan bu dizi üstten sınırlıdır . Fakat alttan sınırlı değildir. Yani her $n \in \mathbb{N}^+$ için $-\infty < -n \le -1$ dir.

3. $\{x_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}^+$ için $-1 \le \dfrac{(-1)^n}{n} \le \dfrac{1}{2}$ olduğundan, $m = -1$ ve $M = \dfrac{1}{2}$ olup bu dizi sınırlıdır. Üstelik $-1 \le \dfrac{(-1)^n}{n} \le \dfrac{1}{2} < 1$ yazılabileceğinden $|x_n| = \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| \le 1$ olabilecek biçimde bir $K = 1$ sayısı vardır. Dolayısıyla bu sınırlı dizidir.

4. $\{x_n\} = \left\{\dfrac{7}{n} - 3\right\}$ dizisi için $-3 < x_n \le 4$ olup, $m = -3$ ve $M = 4$ dür. Aynı zamanda dizinin genel terimi $-4 < -3 < x_n \le 4$ olarak da yazılabileceğinden $|x_n| \le 4$ olup $K = 4$ olarak alınabilir. Dolayısıyla bu dizi de sınırlı bir dizidir.

Dizi Özellikleri:

Dizilerle ilgili belli başlı özellikler ve teoremler aşağıda önermelerle verilmektedir:

1. $\{x_n\}$ dizisi yakınsak ise limiti tektir.

2. $\{x_n\}$ dizisi yakınsak ise sınırlıdır.

3. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri verilsin. Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n < y_n$ ise $\lim x_n \le \lim y_n$ dir.

4. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ yakınsak dizileri verildiğinde, $\{x_n \mp y_n\}$ ve $\{x_n \cdot y_n\}$ dizileri de yakınsaktır ve $\lim(x_n \mp y_n) = \lim x_n \mp \lim y_n$ ve $\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$ dir.

5. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ yakınsak ve $\lim y_n \neq 0$ ise $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ dizisi de yakınsaktır ve $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim x_n}{\lim y_n}$ dir.

6. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ve $\{z_n\}$ dizileri verilsin ve her $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n \leq y_n \leq z_n$ (veya $x_n < y_n < z_n$) olsun. Eğer $\{x_n\}$ ve $\{z_n\}$ aynı bir l limitine yakınsarsa, yani $\lim x_n = \lim z_n = l$ ise, o zaman $\{y_n\}$ dizisi de yakınsaktır ve aynı l limite yakınsar, yani $\lim y_n = l$ dır. (Sandöviç teoremi).

7. Monoton artan ve üstten sınırlı bir dizi yakınsaktır. Benzer şekilde monoton azalan ve alttan sınırlı bir dizi de yakınsaktır.

8. Bir dizi yakınsak ve limiti l ise bütün alt dizileri de yakınsak ve aynı limite sahiptir. Tersine bir dizinin iki alt dizisi farklı limitlere sahipse o dizi ıraksaktır.

9. $\{x_n\} = \{c\}$ sabit dizisinin limiti kendisidir. Yani $x_1 = c$, $x_2 = c$, ... , $x_n = c$ olup $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ dir.

10. $\{x_n\}$ dizisi bir sonsuz küçülen dizi (sıfır dizisi), $\{y_n\}$ dizisi de sınırlı bir dizi ise o zaman $\{x_n \cdot y_n\}$ dizisi de bir sıfır dizisidir. (Burada $\{y_n\}$ dizisinin limiti olmayabilir.Yeter ki sınırlı olsun).

Örnek: $\{x_n\} = \left\{\dfrac{n^2+2n-5}{n^2+1}\right\}$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n-5}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2} = 1$ dir. Aynı sonuca limit özelliklerini adım adım kullanarak da ulaşabiliriz;

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim \frac{n^2+2n-5}{n^2+1} = \lim \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\lim\left(1+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{\lim\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\lim 1 + \lim\frac{2}{n} - \lim\frac{5}{n^2}}{\lim 1 + \lim\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \frac{1+0-0}{1+0} = \frac{1}{1} = 1$$ bulunur.

Örnek: $\{x_n\}=\left\{\sqrt{n^2+1}-n\right\}$ dizisinin bir sıfır dizisi olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\sqrt{n^2+1}-n=\underset{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{1}}=\dfrac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ dir. Öte yandan

$\sqrt{n^2+1}>\sqrt{n^2}=n\Rightarrow\sqrt{n^2+1}>n$ olduğundan $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}<\dfrac{1}{n+n}$ den $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}<\dfrac{1}{2n}$ ve

$\sqrt{n^2+1}-n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}>0$ olup $0<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}<\dfrac{1}{2n}$ yazılabilir. Bu son eşitsizlikte limite geçilirse $\underbrace{\lim 0}_{0}\le\lim\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\le\underbrace{\lim\dfrac{1}{2n}}_{0}\ \Rightarrow\ \lim\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$ dır (6. Özellik: Sandöviç teoremi).

Örnek: $\{x_n\}=\left\{(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right\}$ dizisinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: $\{x_{2n}\}=\left\{(-1)^{2n}\dfrac{2n}{2n+1}\right\}=\left\{\dfrac{2n}{2n+1}\right\}$ alt dizisi için

$\lim\dfrac{2n}{2n+1}=\lim\dfrac{\cancel{n}\cdot 2}{\cancel{n}\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\dfrac{\lim 2}{\lim\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\dfrac{\lim 2}{\lim 2+\lim\frac{1}{n}}=\dfrac{2}{2+0}=\dfrac{2}{2}=1$ dir.

Bir başka $\{x_{2n-1}\}=\left\{(-1)^{2n-1}\dfrac{2n-1}{(2n-1)+1}\right\}=\left\{-\dfrac{2n-1}{2n}\right\}$ alt dizisi için

$\lim x_{2n-1}=\lim\left(-\dfrac{2n-1}{2n}\right)=\lim\left(-1+\dfrac{1}{2n}\right)=\lim(-1)+\lim\dfrac{1}{2n}=-1+0=-1$ dır. Verilen dizinin farklı iki alt dizisi farklı iki limite sahip olduğundan bu dizi yakınsak değildir, ıraksaktır.

Uyarı:: Bu örnekteki dizi ıraksak olmasına rağmen aynı zamanda $|x_n|=\left|(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right|=\left|(-1)^n\right|\cdot\left|\dfrac{n}{n+1}\right|=\left|\dfrac{n}{n+1}\right|=\dfrac{n}{n+1}<1$ olduğundan dizi sınırlıdır. Demek ki sınırlı her dizi yakınsak olmayabilir, fakat yakınsak bir dizi aynı zamanda sınırlıdır. (Teorem: Yakınsak her dizi sınırlıdır).

Örnek: $\{x_n\} = \{\cos n\}$ dizisinin limitinin olmadığını gösteriniz.

Çözüm: Bu örneğin çözümü için sonsuza giden n sayısını, yeni bir k sayma sayısı ile fonksiyonun periyodik oluşuna da uygun biçimde düzenlediğimizde acaba farklı limitlere ulaşabilir miyiz?

Bunun için n yerine önce $n = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ yazılırsa, n ile birlikte k da sonsuza gideceğinden

$\cos n = \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \cos\frac{\pi}{2} \xrightarrow{k\to\infty} \cos\frac{\pi}{2} = 0$ (sabit dizi) bulunur. Şimdi de n yerine

$n = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ biçiminde bir düzenleme yapılırsa $\cos n = \cos(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = \cos\frac{\pi}{3} \xrightarrow{k\to\infty} \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

Bulunur. Demek ki periyodik olma ve sonsuza gidişi de amacımıza uygun biçimde düzenlemekle (düzenli hale getirmekle)) bu dizinin limiti -1 ile +1 arasında her hangi bir sayı olarak karşımıza çıkmaktadır. Dolayısıyla bu dizinin limiti bilinmemektedir. Yani $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n = \lim \cos n = Yok!$ dur.

Örnek: $\{2^{-n} \cdot \cos n\}$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm: $\{x_n\} = \{2^{-n}\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ bir sıfır dizisidir. $\{y_n\} = \{\cos n\}$ dizisi ise sınırlı bir dizidir. Yani

$-1 \le \cos n \le 1$ ya da $|\cos n| \le 1$ dir. (Burada $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos n) = \text{YOK}!$). O halde 10. Özelliğe göre

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^{-n}\cos n\right) = 0$ dır.

Örnek: $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ dizisi yakınsak mıdır? Araştırınız.

Çözüm: Verilen dizinin genel terimi binom (iki terimli)açılımına göre

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \qquad (1)$$

Ve benzer biçimde

$$x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \qquad (2)$$

yazılabilir. x_n ile x_{n+1} dizi elemanlarının sağ tarafları terim terim karşılaştırılırsa (2)'deki parantezlerin herbiri (1)'deki karşılık geldiği parantezlerden büyük olup, ayrıca (1)'de bulunmayan fakat açılım gereği (2)'de bulunan pozitif sonuncu terimin ilavesinden dolayı her $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n < x_{n+1}$ dir. Yani dizimiz monoton artandır.

Acaba üstten de sınırlı mıdır? (1) ifadesinin sağ tarafındaki parantezlerin yerine daha büyük olan 1 sayıları yazılır ve daha sonra her $n \in \mathbb{N}^+$ için $2^{n-1} \le n!$ olduğundan (bunun doğruluğu tümevarım ile yapılabilir), açılımdaki büyültme yapılmış kısımdaki $\frac{1}{n!}$ terimleri yerine eşit ya da daha büyük olan $\frac{1}{2^{n-1}}$ terimlerini yazıp elde edilen ifadedeki geometrik serinin de eşiti yazılarak;

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \le 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = 2+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 2+1=3 \text{ olup}$$

$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ dür. Yani üstten de sınırlıdır. Monoton artan ve üstten de sınırlı olan bir dizi yakınsaktır ve bir limiti vardır. Bu limit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ ile gösterilir. Bu e sayısı yaklaşık $e \approx 2,72$ dir ($e = 2,71828182845904523536\cdots$). e sayısı $\frac{p}{q}$ gibi yazılamayan, yani rasyonel olmayan, irrasyonel bir sayıdır. Transandant (yüksek, aşkın) sayı olarak adlandırılır.
e , π , $\ln 2$, $\log 3$, $\sin 1^{rd}$, $Arc\tan\sqrt{3}$,$\cdots$ birer transandant sayıdır.
$\pi \approx 3{,}1416$, $\ln 2 \approx 0,69315$, $1\,radyan = 1^{rd} \approx 57^0$, $3^{rd} \approx 172^0$, $(3{,}1416)^{rd} \approx \pi^{rd} = 180^0$ dir.

Dizi Problemlerinin Çözümünde İzlenecek Yollar:

- Bir $\{x_n\}$ dizisinin limitinin bir $l \in \mathbb{R}$ reel sayısı olduğunun gösterilmesi istenildiğinde, eğer l sonlu ise $\varepsilon - tekniği$ ile uygun bir $n_0(\varepsilon)$ sayısının bulunulabileceği, eğer l sonsuz ise $M - tekniği$ ile uygun bir $n_0(M)$ sayısının bulunabileceği matematiksel olarak gösterilmelidir.
- Verilen dizi monoton-sınırlı ise yakınsaktır. Fakat bu yolla yakınsaklığı gösterilen bir dizinin limitini her zaman bulamayabiliriz. Sadece yakınsak olduğunu dolayısıyla bir limitinin olduğunu söyleyebiliriz.
- Verilen dizinin limitini pratik yoldan, yani genel teriminin $n \to \infty$ için limitini (daha önce verilen limit özelliklerinden de yararlanarak) elde edebiliriz.
- Verilen bir dizinin alt dizilerinin hepsi aynı bir limite yakınsıyor ise dizi yakınsaktır ve limiti de bu alt dizilerinin limiti ile aynıdır. Burada dizilerin elemanları sonuçta bir sayı doğrusu üzerinde bulunduğundan, verilen diziden n yerine artan indis dizisine uygun n'li yeni indisler verilerek bulunacak iki alt dizisinden birisinin genel terimini limitten küçük olan bir dizi olarak, diğerinin genel terimini de limitten büyük bir dizi olarak seçip, aynı limite yaklaştıklarını (mesela $\varepsilon - tekniği$ ile, ya da pratik yoldan $n \to \infty$ iken limitini araştırarak) göstermek yeterlidir.

Fonksiyonlarda Limit:

Fonksiyonlarda limite geçmeden önce, bağımsız değişkenin limitini tanımlayalım.

Bağımsız değişkenin Limiti:

Eğer bir $x_0 \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsayan bir $\{x_n\}$ dizisinin her bir terimi (elemanı) x olarak alınırsa bu x değişkeni x_0 sayısına yakınsıyor veya x_0 limitine sahiptir denir ve $x \to x_0$ veya $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ şeklinde gösterilir.

Örnek: x değişkenine sıra ile $x_1 = 3+1$, $x_2 = 3+\dfrac{1}{2}$, $x_3 = 3+\dfrac{1}{3}$, … , $x_n = 3+\dfrac{1}{n}$, … değerleri verilirse, bu durumda $\lim\limits_{x \to 3} x = 3$ tür veya $x \to 3$ tür. (Burada x değişkeni 3'ten büyük kalarak 3'e yaklaşıldığından buna sağdan limit de denir).

Örnek: x değişkenine sıra ile $x_1 = 2-1$, $x_2 = 2-\dfrac{1}{2}$, $x_3 = 2-\dfrac{1}{3}$, … , $x_n = 2-\dfrac{1}{n}$, … değerleri verilirse, bu durumda $\lim\limits_{x \to 2} x = 2$ dir veya tür. (Burada x değişkeni 2'den küçük kalarak 2'ye yaklaştığından buna soldan limit de denir).

Fonksiyonlarda Limit (Diziler Yardımıyla):

Eğer x_0 reel sayısına yaklaşan her $\{x_n\}$ dizisine karşılık $\{f(x_n)\}$ *görüntüler dizisi* bir L reel sayısına yakınsıyorsa $x \to x_0$ giderken $f(x)$ fonksiyonu L'ye yakınsıyor denir ve $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ biçiminde gösterilir. (Burada L bir reel sayı olabileceği gibi $-\infty$ veya $+\infty$ da olabilir).

UYARI:: Burada $\{x_n\}$ dizilerini genel olarak $\{x_n\} = \left\{x_0 - \dfrac{1}{n}\right\}$ veya $\{x_n\} = \left\{x_0 + \dfrac{1}{n}\right\}$ gibi x_0 sayısına soldan veya sağdan yaklaşan iki diziyi seçmek yeterlidir. $\left\{x_0 - \dfrac{1}{n}\right\}$ dizisi yerine $\left\{x_0 - \dfrac{1}{n^2}\right\}$ veya $\left\{x_0 - \dfrac{n}{n^2+3}\right\}$ ya da $\left\{x_0 - \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}\right\}$ gibi dizilerden birisi de alınabilir. Aynı durum sağdan limit için de geçerlidir. Ancak en yalın $\left\{x_0 - \dfrac{1}{n}\right\}$ ve $\left\{x_0 + \dfrac{1}{n}\right\}$ dizilerini almak daha kullanışlıdır. Fakat bazen problemin gerektirdiği daha farklı diziler de alınabilir.

Örnek: $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ fonksiyonunun $x_0=1$ için limitini diziler yardımıyla bulunuz.

Çözüm: $x_n=1-\dfrac{1}{n}$ genel terimli dizi için $x_n=1-\dfrac{1}{n}\to 1$ olup fonksiyonda her x yerine bu dizinin genel terimi yazılırsa

$$f(x_n)=\frac{(x_n)^2-1}{x_n-1}=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2-1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)-1}=\frac{\left(\cancel{1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\cancel{1}}{\cancel{1}-\frac{1}{n}-\cancel{1}}=\frac{-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{-\frac{1}{n}}=\frac{-\frac{1}{n}\left(2-\frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{n}}=2-\frac{1}{n}\quad \text{olup,}$$

$f(x_n)=2-\dfrac{1}{n}$, görüntüler dizisi genel terimidir. Bunun $n\to\infty$ için limiti

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{n}\right)=2$ dir. Benzer şekilde $\{x_n\}=\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}$ dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$

olup, $$f(x_n)=\frac{(x_n)^2-1}{x_n-1}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}=\frac{\left(\cancel{1}+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\cancel{1}}{\cancel{1}+\frac{1}{n}-\cancel{1}}=\frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\frac{\frac{1}{n}\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=2+\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty} 2$$

dir. Yani soldan ve sağdan limitler var ve birbirinin aynısıdır. (1 limitine sahip başka $\{x_n\}$ dizileri için de kontrol edilirse yine $L=2$ dir). O halde $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$ dir.

Örnek: $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun $x_0=0$ için, yani $x\to 0$ için limiti var mıdır?

Çözüm: Burada $\{x_n\}$ dizisini bu problemde amacımıza uygun olacak şekilde $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right\}$

olarak seçelim; $x_n=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\xrightarrow{n\to\infty} 0$ olup, görüntüler dizisi genel terimi $f(x_n)$ için

$f(x_n)=\sin x_n=\sin\dfrac{1}{\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1\ (\textit{sabit dizi})\xrightarrow{n\to\infty} L_1=1$ dir. Bir başka $\{x_n\}$ dizisi olarak $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{\pi+2n\pi}\right\}$ seçilirse $x_n=\dfrac{1}{\pi+2n\pi} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ olup,

bu yeni $\{x_n\}$ dizisi için bulunacak olan $f(x_n)$ *görüntüler dizisi*nin limiti ise

$$f(x_n)=\sin x_n=\sin\frac{1}{\dfrac{1}{\pi+2n\pi}}\sin\left(\pi+2n\pi\right)=\sin\pi=0\ (sabit\ dizi) \xrightarrow{n\to\infty} L_2=0 \text{ dir.}$$

Farklı iki dizi için görüntü dizilerinin limitleri de farklıdır. Dolayısıyla $x\to 0$ için $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ in limiti yoktur. (Burada sadece sağdan farklı iki dizi için farklı limitler bulunduğuna dikkat edilmeli. Benzer biçimde soldan da limit çalışmaları yapılabilir.).

Örnek: $f(x)=\cos x$ fonksiyonunun $x\to\infty$ için limitinin olmadığını gösteriniz.

Çözüm: Sonsuza giden $\{x_n\}=\{3n\pi\}$ dizisi için

$f(x_n)=\cos(x_n)=\cos(3n\pi)=\cos(n\pi+2n\pi)=(-1)^{n-1}$ görüntüler dizisi genel terimi olup

$\lim f(x_{2n})=\lim(-1)^{2n-1}=\lim(-1)=-1=L_1$ ve

$\lim f(x_{2n+1})=\lim(-1)^{2n+1-1}=\lim(-1)^{2n}=\lim(+1)=+1=L_2$ dir.

Uyarı:: Burada limit alınırken "$\lim\limits_{n\to\infty}$" yerine sadece " lim" yazılmıştır. Zira dizilerde limit incelemelerinde $n\in\mathbb{N}^+$ limit değişkeni (indis) sadece $+\infty$'a giderken limit araştırılır. Dolayısıyle "lim" gösteriminin altına $n\to\infty$ yazılmayabilir.

Örnek: $f(x)=\sqrt{3x+1}$ fonksiyonunun $x_0=1$ noktasındaki limitini diziler yardımıyla bulunuz.

Çözüm: $x_n=1-\dfrac{1}{n}$ genel terimli dizinin limiti $x_0=1$ dir. Görüntüler dizisi genel terimi ise

$f(x_n)=f\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\sqrt{3\left(1-\dfrac{1}{n}\right)+1}=\sqrt{\left(3-\dfrac{3}{n}\right)+1}=\sqrt{4-\dfrac{3}{n}}$ olup, $\lim\dfrac{3}{n}=0$ olduğundan

$L=\lim\left(\sqrt{4-\dfrac{3}{n}}\right)=2$ dir. Gerçekten $L=\lim f(x_n)=2$ olduğunu dizilerdeki her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık bir $n_0(\varepsilon)>0$ reel sayısı bularak da gösterebiliriz. Şöyle ki; istenildiği kadar küçük her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık bir $n_0(\varepsilon)>0$ reel sayısı bulabilir miyiz ki, her $n>n_0(\varepsilon)$ için

$|f(x_n)-L|=\left|\sqrt{4-\dfrac{3}{n}}-2\right|<\varepsilon$ olsun.

O halde $|f(x_n)-L|=\left|\sqrt{4-\frac{3}{n}}-2\right|=\left|\frac{\sqrt{4-\frac{3}{n}}-2}{1}\right|=\left|\frac{\left(\sqrt{4-\frac{3}{n}}-2\right)\left(\sqrt{4-\frac{3}{n}}+2\right)}{\sqrt{4-\frac{3}{n}}+2}\right|=\left|\frac{\left(4-\frac{3}{n}\right)-4}{\sqrt{4-\frac{3}{n}}+2}\right|=$

$=\left|\frac{-\frac{3}{n}}{\underbrace{\sqrt{4-\frac{3}{n}}}_{+}+2}\right|=\frac{\frac{3}{n}}{\underbrace{\sqrt{4-\frac{3}{n}}}_{+}+2}<\frac{\frac{3}{n}}{0+2}=\frac{\frac{3}{n}}{2}=\frac{3}{2n}<\varepsilon$ denilirse bu eşitsizliğin son kısmından

$\frac{3}{2n}<\varepsilon \Rightarrow \frac{3}{2\varepsilon}<n$ olup buradan $n>\frac{3}{2\varepsilon}$ dir. Burada $\frac{3}{2\varepsilon}$ ifadesi $n_0(\varepsilon)$ olarak alınabilir.

Böylece $n>\frac{3}{2n}=n_0(\varepsilon)$ olur.

Demek ki her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık bir $n_0(\varepsilon)=\frac{3}{2\varepsilon}>0$ sayısı vardır ve her $n>\frac{3}{2\varepsilon}$ için

$|f(x_n)-L|=\left|\sqrt{4-\frac{3}{n}}-2\right|<\varepsilon$ dur. Yani $\lim f(x_n)=\lim\left(\sqrt{4-\frac{3}{n}}\right)=2$ dir.

Yani $\{x_n\}=\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$ dizisi için bulunan görüntüler dizisi $\{f(x_n)\}=\left\{\sqrt{4-\frac{3}{n}}\right\}$ in limiti L=2 dir.

Başka bir $\{x_n\}=\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ dizisi için yukarıdakine benzer bir çalışma ile bulunacak olan görüntüler dizisi genel teriminin limiti de

$$f(x_n)=f\left(1+\frac{1}{n}\right)=\sqrt{3\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}=\sqrt{\left(3+\frac{3}{n}\right)+1}=\sqrt{4+\frac{3}{n}}\xrightarrow{n\to\infty}L=2$$

dir. Böylece diziler yardımıyla bulunan soldan ve sağdan limitler aynıdır. O halde $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{3x+1}=2$ dir.

UYARI:: Yukarıdaki sağdan limit $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{4+\frac{3}{n}}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{3}{n}\right)}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}4+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}=\sqrt{4+0}=2$ olarak yazılabilir. Hatta ileride bu örnekte çözümü araştırılan limit sorusu, dizilerden yararlanmaksızın, pratik olarak

$\lim\limits_{x\to1}\sqrt{3x+1}=\sqrt{\lim\limits_{x\to1}(3x+1)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to1}(3x)+\lim\limits_{x\to1}1}=\sqrt{3\lim\limits_{x\to1}x+\lim\limits_{x\to1}1}=\sqrt{3\cdot1+1}=\sqrt{4}=2$ olarak da bulunabilecektir.

Örnek: $f(x)=2^x$ fonksiyonunun $x\to\infty$ için limitini diziler yardımıyla bulunuz.

Çözüm: $+\infty$ limitine yaklaşan bir dizi $\{x_n\}=\{n\}$ olarak seçilsin. Görüntüler dizisi genel terimi için $f(x_n)=f(n)=2^n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ dur.

Gerçekten istenildiği kadar büyük bir M reel sayısına karşılık bir $n_0=n_0(M)$ pozitif reel sayısı var mıdır? Öyle ki her $n>n_0(M)$ için $|f(x_n)|>M$ dir, yani $|f(x_n)|=|2^n|>M$ dir. Buradan $|2^n|=2^n>M$ den $n>\log_2 M$ olup, $n_0(M)=\log_2 M$ alınabilir. Dolayısıyla istenildiği kadar büyük her $M>0$ reel sayısına karşılık bir $n_0(M)=\log_2 M$ pozitif reel sayısı vardır ve her $n>\log_2 M$ için $|2^n|>M$ dir. Yani $\lim|2^n|=\lim 2^n=+\infty$ dur.

UYARI:: $\{f(x_n)\}$ görüntüler dizisinin ilk birkaç terimi farklı işarette olsa ve belli bir terimden itibaren bu dizi daima pozitif değerler alıyorsa $\lim f(x_n)=+\infty$ dur. Benzer biçimde $\{f(x_n)\}$ görüntüler dizisinin ilk birkaç terimi hariç belli bir terimden itibaren bu dizi daima negatif değerler alıyorsa ve örnekteki gibi koşullar gerçekleniyorsa (yani istenildiği kadar büyük bir M reel sayısına karşılık bir $n_0=n_0(M)$ pozitif reel sayısı bulunabiliyor ve her $n>n_0(M)$ için $|f(x_n)|>M$ oluyorsa) $\lim f(x_n)=-\infty$ dur.

Örnek: $f(x)=2^x$ fonksiyonunun $x\to-\infty$ iken sıfıra yaklaştığını diziler yardımıyla gösteriniz.

Çözüm: Burada $\{x_n\}=\{-n\}$ seçilirse, $x_n=-n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$ dur. (Gerçekten her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık bir $n_0(\varepsilon)$ pozitif reel sayısı var mıdır? Öyle ki her $n>n_0(\varepsilon)$ için $|f(x_n)-L|=|2^{-n}-0|<\varepsilon$ olsun. Bu son eşitsizlikten $|2^{-n}-0|=\left|\frac{1}{2^n}-0\right|=\left|\frac{1}{2^n}\right|=\frac{1}{2^n}<\varepsilon$ olup buradan $2^n>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n\cdot\log_2 2>\log_2\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$ bulunur. Bu son eşitsizlikten $\log_2\frac{1}{\varepsilon}=n_0(\varepsilon)$ olarak alınabilir. Yani her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık bir $n_0(\varepsilon)=\log_2\frac{1}{\varepsilon}$ vardır, öyle ki her $n>n_0(\varepsilon)=\log_2\frac{1}{\varepsilon}$ için $|2^{-n}-0|<\varepsilon$ dur. Yani $\lim f(x_n)=\lim 2^{-n}=0$ dur.

Bunu bir başka yoldan şöyle de açıklayabiliriz: $\{x_n\}=\{-n\}$ dizisine karşılık görüntüler dizisi $f(x_n)=f(-n)=2^{-n}$ olup $\lim\limits_{n\to\infty}2^{-n}=\lim\frac{1}{2^n}=0$ dır. (Zira $\lim 2^n=+\infty$ olup, $\{2^n\}$ bir sonsuz büyüyen dizidir, bunun çarpmaya göre tersi olan $\frac{1}{2^n}$ genel terimli dizi ise bir sonsuz küçülen dizi (sıfır dizisi) dir, yani $2^{-n}=\frac{1}{2^n}\xrightarrow{n\to\infty}0$ dır.

Bir Fonksiyonun Limiti ($\varepsilon-\delta$ Tekniği):

x_0 ve L sonlu iki reel sayı olsun. İstenildiği kadar küçük $\varepsilon>0$ sayısına karşılık, $0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$ koşulunu sağlayan her x için $|f(x)-L|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon)>0$ bulunabiliyorsa x değişkeni x_0 noktasına (sayısına) yaklaştığında $f(x)$ fonksiyonunun limiti L'dir denir ve $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ ile gösterilir.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Burada $f(x)=2x-1$, $x_0=2$ ve $L=3$ dür.

Önceden seçilmiş istenildiği kadar küçük her $\varepsilon>0$ sayısına, $|x-2|<\delta(\varepsilon)$ oldukça $|f(x)-3|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon)>0$ sayısını belirleyelim.

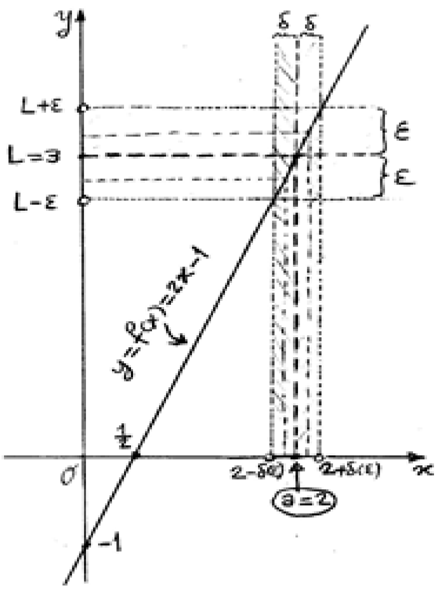
Bunun için $|f(x)-3|<\varepsilon$ eşitsizliğinden hareketle;

$$|f(x)-3|=|(2x-1)-3|<\varepsilon \Rightarrow$$

$$|f(x)-3|=|(2x-1)-3|<\varepsilon$$

$|f(x)-3|=|2x-4|=|2(x-2)|=2|x-2|<\varepsilon$ den $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ dir, buradan $\delta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{2}$ olarak alınabilir. (Hatta $\delta(\varepsilon)$ sayısı, $\dfrac{\varepsilon}{2}$ den küçük olan $\dfrac{\varepsilon}{3}, \dfrac{2\varepsilon}{5}, \dfrac{4\varepsilon}{9}, \varepsilon^2$, ... den biri olarak da alınabilir).

Başka bir deyişle $x\in\left(2-\dfrac{\varepsilon}{2}\ ,\ 2+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ olan x'ler için $|(2x-1)-3|<\varepsilon$ dur, yani $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$ tür. (Bkz. Şekil.5).



Şekil 5. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$ limitinin grafiği.

Bunu bir de sayısal olarak gözlemlemek istersek, $\varepsilon=0,03$ olarak verilmiş olsun. O zaman $\delta(\varepsilon)=\delta(0,03)=\dfrac{0,03}{2}=0,015$ olur ve $|x-2|<0,015$ iken $|f(x)-3|=|(2x-1)-3|<0,03$ dir. Yani x bağımsız değişkeni $x_0=2$ civarında gezerken, $f(x)=2x-1$ fonksiyonu da x ' in 2 civarındaki değerlerine karşılık, L=3 sayısının civarında görüntü değerleri almaktadır.

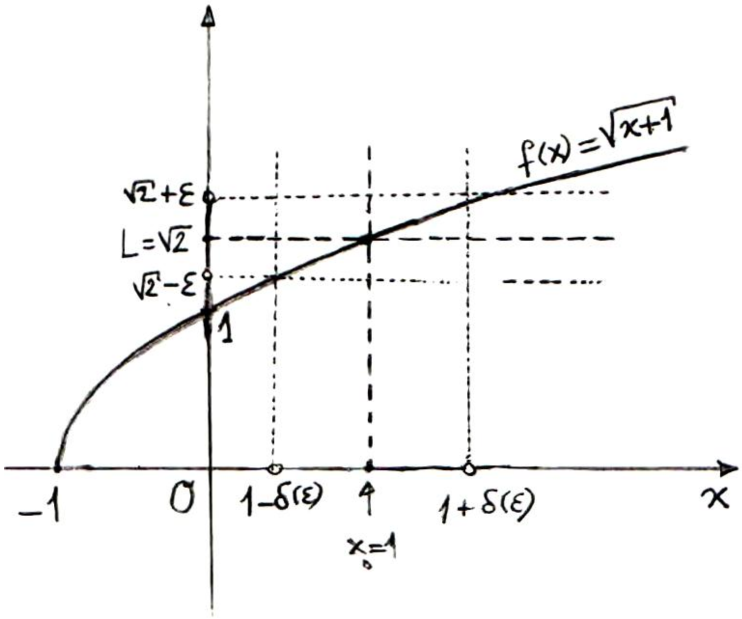
Örnek: $x\to 1$ için $y=f(x)=\sqrt{3x-1}$ fonksiyonunun $\sqrt{2}$ limitine sahip olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\left|f(x)-\sqrt{2}\right|=\left|\sqrt{3x-1}-\sqrt{2}\right|=\left|\frac{\sqrt{3x-1}-\sqrt{2}}{1}\right|=\left|\frac{3x-1-2}{\sqrt{3x-1}+2}\right|=\frac{3|x-1|}{\underbrace{\sqrt{3x-1}}_{(+)}+2}<\frac{3|x-1|}{0+2}=\frac{3|x-1|}{2}<\varepsilon$$

denilirse bu ifadenin son eşitsizliğinden $|x-1|<\dfrac{2}{3}\varepsilon$ dur. O halde $\delta(\varepsilon)=\dfrac{2}{3}\varepsilon$ olarak alınabilir.

Böylece her $\varepsilon>0$ sayısına $\delta(\varepsilon)=\dfrac{2}{3}\varepsilon>0$ sayısı $|x-1|<\delta(\varepsilon)=\dfrac{2}{3}\varepsilon$ oldukça $\left|\sqrt{3x11}-\sqrt{2}\right|<\varepsilon$ olacak şekilde karşılık gelmektedir. Yani $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{3x-1}=\sqrt{2}$ dir. (Bkz.Şekil.6).



Şekil 6. $\lim_{x\to 1}\sqrt{x+1}=\sqrt{2}$ limitinin grafiği.

Örnek:

$f(x)=\sin 2x$ fonksiyonunun $x=x_0$ noktasında limitinin $L=\sin 2x_0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $\varepsilon>0$ reel sayısına karşılık bir $\delta(\varepsilon)>0$ reel sayısı var mıdır? Öyle ki

$|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$ koşulunu sağlayan x reel sayıları için $|f(x)-L|=|\sin 2x-\sin 2x_0|<\varepsilon$ dur.
Buradan

$$|f(x)-L|=|\sin 2x-\sin 2x_0|=\left|2\cos\left(\frac{2x+2x_0}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{2x-2x_0}{2}\right)\right|=2\left|\cos\left(x+x_0\right)\right|\cdot\left|\sin\left(x-x_0\right)\right| \quad \text{olup}$$

$$|\sin 2x-\sin 2x_0|=2\underbrace{\left|\cos\left(x+x_0\right)\right|}_{\leq 1}\cdot\left|\sin\left(x-x_0\right)\right|\leq 2\cdot 1\cdot\left|\sin\left(x-x_0\right)\right|\leq 2\cdot 1\cdot|x-x_0|=2|x-x_0|<\varepsilon \quad \text{dur.}$$

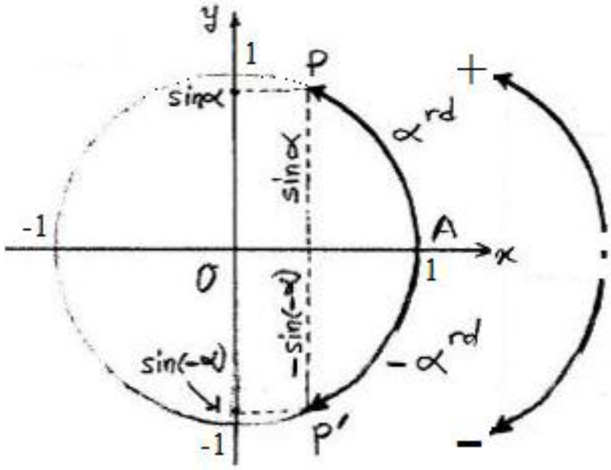
Buradan bu ifadenin son kısmı olan $2|x-x_0|<\varepsilon$ eşitsizliğinden $|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{2}$ bulunup, buradaki $\frac{\varepsilon}{2}$ sayısını $\delta(\varepsilon)$ olarak alabiliriz. Yani $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}$ iken $|\sin 2x-\sin 2x_0|<\varepsilon$ dur.

Dolayısıyla her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık, $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$ olacak biçimde bir $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}>0$ sayısı bulunabilmektedir. O halde $\lim_{x\to x_0}\sin 2x=\sin 2x_0$ dır.

UYARI:: Birim çemberdeki gözlemlerden α (alfa), radyan cinsinden pozitif bir yayı göstermek üzere $\alpha > 0$ yayı daima $\sin\alpha$ dan büyüktür. Gerçekten iki nokta arasındaki en kısa mesafe bu iki noktayı birleştiren doğru parçasıdır. Dolayısıyla

$\left|P'P\right| \le P'P \Rightarrow 2\sin\alpha < 2\alpha \Rightarrow \sin\alpha < \alpha$ dır.

Buradan $-\alpha < \sin\alpha < \alpha \Rightarrow \left|\sin\alpha\right| < \alpha$ dır. α 'nın kendisinin de negatif olabileceği göz önünde bulundurulursa $\left|\sin\alpha\right| \le \left|\alpha\right|$ dır.



Şekil 7. Birim çemberde yay-kiriş ilişkisi.

Fonksiyonlarda Limitin Özellikleri:

Fonksiyonlarda limitin belli başlı özelliklerini ve teoremlerini aşağıdaki önermelerle verelim:

1. Eğer $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ limiti varsa bu limit tektir.

2. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları verilsin. Eğer x 'in x_0 'a yakınsayan tüm değerleri için $f(x) \le g(x)$ ise ve $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ limitleri varsa o zaman $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ dir.

3. $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \mp g(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \mp \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ dir.

4. $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ dir.

5. $k \in \mathbb{R}$ bir reel sabit ise $\lim\limits_{x \to x_0} k = k$ dır.

6. $k \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere $\lim\limits_{x \to x_0} k = k$ olduğundan $\lim\limits_{x \to x_0} \left[k \cdot f(x) \right] = k \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ dir.

7. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ dir.

8. x'in x_0'a yakın tüm değerleri için $f(x)>0$ ve $g(x)<0$ ise o zaman $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geq 0$ ve $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\leq 0$ dir.

9. x'in x_0'a yakın tüm değerleri için $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ ve $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L$ ise o zaman $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ limiti de vardır ve $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ dir. (Sandöviç teoremi).

10. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^n$ dir ve $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[m]{f(x)}=\sqrt[m]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$ dir.

11. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\log_a f(x)\right)=\log_a\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\sin\left(f(x)\right)=\sin\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)$,

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(Arc\tan f(x)\right)=Arc\tan\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)$, … v.s. dir.

12. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ dir.

13. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ ise $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-L\right)=0$ dır. Sözle ifade edilirse; $x\to x_0$ iken $f(x)\xrightarrow{x\to x_0}L$ ise $g(x)=f(x)-L$ fonksiyonu da $x\to x_0$ için bir sonsuz küçülen fonksiyondur, yani $g(x)$'in limiti sıfırdır. Hatta sonlu sayıda küçülen fonksiyonun toplamı da çarpımı da yine bir sonsuz küçülendir.

14. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ ise $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}1}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}=\dfrac{1}{L}$ dir.

UYARI:: Limit özelliklerinin ispatı $\varepsilon-\delta$ tekniği ile yapılabilir. Ancak her zaman kolay olmayabilir. Bazı özelliklerin ispatında $\delta(\varepsilon)$'ların oldukça özel seçimi gerekir. Sonsuz küçülen fonksiyonların özellikleri ve teoremleri verildikten sonra, yukarıdaki özelliklerin ispatını daha basit yoldan vermek de mümkündür.

Örnek: $f(x)=x^2-2x+4$ fonksiyonunun $x_0=1$ için limitinin $L=3$ olduğunu $\varepsilon-\delta$ tekniği ile gösterelim.

Çözüm: İstenildiği kadar küçük her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık bir $\delta(\varepsilon)>0$ reel sayısı var mıdır? Öyle ki $|x-1|<\delta(\varepsilon)$ eşitsizliğini sağlayan x'ler için $|f(x)-L|=|(x^2-2x+4)-3|<\varepsilon$ dur. Bu son eşitsizlikten $|(x^2-2x+4)-3|=|x^2-2x+1|=|(x-1)^2|<\varepsilon$ dersek, bu ifadedeki son eşitsizlikten $|(x-1)^2|=|x-1|^2<\varepsilon$ dan $|x-1|<\sqrt{\varepsilon}$ olup $\sqrt{\varepsilon}=\delta(\varepsilon)$ olarak alınabilir. Böylece her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık en az bir $\delta(\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}>0$ reel sayısı bulunabilmektedir; öyle ki $|x-1|<\delta(\varepsilon)$ için $|(x^2-2x+4)-3|<\varepsilon$ dur, yani $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+4)=3$ dür.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$ olduğunu $\varepsilon - \delta$ tekniği ile gösterelim.

Çözüm: Her $\varepsilon > 0$ için $0 < |x-2| < \delta$ iken $|x^2 - 4| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulmak gerekir.

Şimdi $|x^2 - 4| = |(x+2)\cdot(x-2)| = |x+2|\cdot|x-2|$ olup, $|x^2-4| = |x+2|\cdot|x-2| < \varepsilon$ eşitsizliğinden ε ’a bağlı, $|x-2| < \delta(\varepsilon)$ olacak biçimde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ var mı? Bunu arıyoruz. Ancak bu örnekte $|f(x) - L| = |x^2 - 4| < \varepsilon$ eşitsizliğinden $|x+2|\cdot|x-2| < \varepsilon$ eşitsizliğine varılıp, buradan kolayca $|x-2| < \delta(\varepsilon)$ olacak biçimde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ reel sayısına bulunamaz. Zira yukarıdaki son ε ’lu eşitsizlikte $|x-2|$ teriminin yanında bir de bir türlü kurtulamadığımız $|x+2|$ terimi vardır. Bu terimi ise aşağıdaki gibi bir ek kabulle amacımıza uygun bir hale getirmeliyiz. Bunun için $x_0 = 2$ civarındaki x ’lerle ilgilenildiğinden önce $|x-2| < 1$ koşulunu göz önüne alalım. Bu koşuldaki 1 sayısı $\delta_1(\varepsilon)$ ’u göstersin, yani $\delta_1(\varepsilon) = 1$ olsun. (Burada 1 yerine $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; 0,3 ; 0,01 ; …v.s. de alınabilirdi!). Böylece $|x-2| < 1$ koşulundan

$$-1 < x-2 < 1 \Rightarrow -1+4 < x-2+4 < 1+4 \Rightarrow 3 < x+2 < 5 \Rightarrow -5 < 3 < |x+2| < 5 \Rightarrow |x+2| < 5$$

bulunur. Böylece $|x-2| < \delta_1(\varepsilon) = 1$ koşulu altında (bu durumda $|x+2| < 5$ dir),

$|x^2 - 4| = |(x+2)\cdot(x-2)| = |x+2|\cdot|x-2| < 5|x-2| < \varepsilon$ eşitsizliğinden $|x-2| < \frac{\varepsilon}{5}$ olup bu $\frac{\varepsilon}{5}$ pozitif reel sayısı $\delta_2(\varepsilon)$ olarak alınabilir, yani $\delta_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{5}$ seçilebilir. O halde

$\delta(\varepsilon) = \min\left(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\right) = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{5}\right)$ olarak alınırsa (dolayısıyla hem $|x-2| < 1$ hem de $|x-2| < \frac{\varepsilon}{5}$ sağlanır), her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $0 < |x-2| < \delta(\varepsilon)$ iken $|x^2 - 4| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta(\varepsilon) = \min\left(\delta_1, \delta_2\right) > 0$ sayısı bulunabilmektedir. Dolayısıyla $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$ dir.

UYARI: Yukarıdaki örnekten görülüyor ki $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$ dür. Yani bu örnek için $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ dır. Zaten polinomlarda her zaman x bağımsız değişkeninin x_0 ’a yaklaşırken bulunacak limit polinomun bu x_0 noktasındaki değerine eşittir.

Özel Limitler:

Limit hesaplamakta, süreklilik-süreksizlik araştırmakta ve hatta tanımdan hareketle türev almakta çok işimize yarayacak belli başlı özel limitleri verelim:

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Arc\sin x}{x}=1}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Arc\tan x}{x}=1}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to\mp\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e}$,

$\boxed{\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x}{x}=1}$, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tanh x}{x}=1}$,

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha}$, burada $\alpha\in\mathbb{R}$ dir.

UYARI:: Bu özel limitler $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$ olmak üzere $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$ olarak;

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln\left(1+u(x)\right)}{u(x)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1$; $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{e^{u(x)}-1}{u(x)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u}=1$ olarak da kullanılabilir.

Bu özel limitlerden birkaçının ispatı aşağıda örnekler içinde verilmiştir.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ olmak üzere, birim çemberde AP yayının uzunluğu $m(AP)=x$ *radyan* ya da AOP merkez açısının ölçüsü de $m(AOP)=x$ *radyan* olmak üzere yandaki şekilden alanlar:

POA üçgeninin alanı:

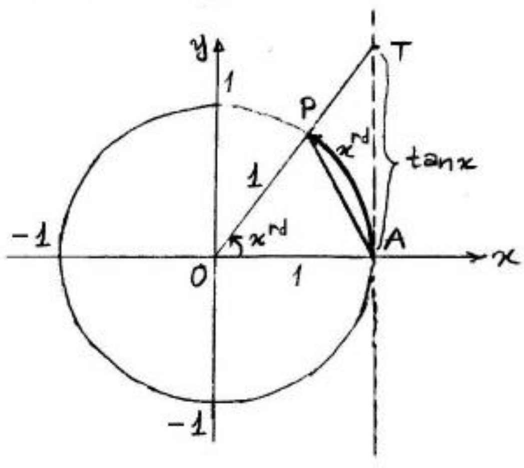
$$A(\triangle POA)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin x=\frac{1}{2}\sin x \ \ br^2$$

POA daire dilimini alanı:

$$A(\sphericalangle POA)=\frac{x}{2\pi}\cdot(\pi\cdot 1^2)=\frac{1}{2}x \ \ br^2 \quad \text{ve}$$

TOA dik üçgeninin alanı:

$$A(\triangle TOA)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x=\frac{1}{2}\tan x \ \ br^2 \quad \text{olup}$$



Şekil 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ limiti için şekil.

Bu üç alan karşılaştırılırsa;

$A(\triangle POA) < A(\sphericalangle POA) < A(\triangle TOA) \Rightarrow \frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x \Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}\sin x < \cancel{\frac{1}{2}}x < \cancel{\frac{1}{2}}\frac{\sin x}{\cos x}$ olup

bu son eşitsizliğin her bir yanı $\sin x$ 'e bölünürse ($\sin x > 0$ olduğundan eşitsizlikler yön değiştirmez) $\frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\cancel{\sin x}}{\cos x}\frac{1}{\cancel{\sin x}} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ dir. Bu son eşitsizlikler ters çevrilirse $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ olup her bir yanın $x \to 0$ için limiti alınırsa

$\underbrace{\lim_{x\to 0}\cos x}_{=1} \le \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \le \underbrace{\lim_{x\to 0} 1}_{=1} \Rightarrow 1 \le \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \le 1$ olup (Sandöviç Teoremi) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ dir.

Örnek: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x.\cos x} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{\substack{=1 \\ (\text{özel limit})}} = 1\cdot 1 = 1$ bulunur.

Örnek: $\lim_{x\to 0}\frac{Arc\tan x}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\lim_{x\to 0}\frac{Arc\tan x}{x}$ limitinde $Arc\tan x = t$ dönüşümü yapılırsa buradan $x = \tan t$ olup $x \to 0$ için $t \to 0$ olduğundan

$$\lim_{x\to 0}\frac{Arc\tan x}{x} = \left\{\begin{matrix} Arc\tan x = t \Rightarrow x = \tan t \\ x \to 0 \quad \Rightarrow \quad t \to 0 \end{matrix}\right\} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\tan t}{t}} = \frac{\lim_{t\to 0} 1}{\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}} = \frac{1}{1} = 1 \text{ dir.}$$

Örnek: $\lim_{x\to 0}\frac{Arc\sin x}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\lim_{x\to 0}\frac{Arc\sin x}{x} = \left\{\begin{matrix} Arc\sin x = t \Rightarrow x = \sin t \\ x \to 0 \quad \Rightarrow \quad t \to 0 \end{matrix}\right\} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = \frac{1}{1} = 1$ bulunur.

UYARI:: $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ denilirse $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ iken $\lim_{t\to 0}\frac{1}{f(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = \frac{1}{1} = 1$ dir. Yani kısaca $\lim_{t\to 0} f(t) = L$ ise $\lim_{t\to 0}\frac{1}{f(t)} = \frac{1}{L}$ dir. Yukarıdaki örnekte olduğu gibi, bir çok problemde bu limit özelliğinden yararlanılır.

Örnek: Özel limitlerden $\lim\limits_{x\to\mp\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ limitinin ispatını verelim.

Çözüm: Önce dizilerdeki $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ genel terimli dizinin limitinin e olduğunu gösterelim.

$a_1=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2$, $a_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}=2,25$, $a_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\frac{64}{27}=2\frac{10}{27}\cong 2,37$, …

böylece devam edilirse $\{a_n\}$ dizisinin artan olduğu hissediliyor. Önce artanlığını, sonra da üstten sınırlılığını gösterelim. Bunun için binom (iki terimli) açılımdan yararlanarak

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\binom{n}{0}1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

bulunur. Buradan

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n\cdot(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1).n}\cdot\frac{1}{n^n}$$

ya da daha uygun bir yazılışla

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \quad \text{….. (*)}$$

Elde edilir. Bu son eşitlikte her n yerine $n+1$ yazılırsa bulunacak yeni ifadede sağ tarafta her bir parantez daha da büyüyeceğinden ve yine bu tarafa yeni bir pozitif ifade ekleneceğinden

her $n\in\mathbb{N}^+$ için $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

olmaktadır. Yani $\{a_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ dizisi kesin artan bir dizidir. Bu dizinin üstten de sınırlı olduğunu göstermek için (*) eşitliğinde sağ taraftaki her bir parantez yerine daha büyük olan 1 sayısı yazılarak ve sonra $\frac{1}{n!}$ yerine de (daima $\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$ olduğundan) daha büyük-eşit olan $\frac{1}{2^{n-1}}$ ler alınarak daha da büyültmeler yapılırsa

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\le 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=2+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)<2+1=3$$

olup, her $n\in\mathbb{N}^+$ için $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$ tür.

Dolayısıyle kesin artan ve üsten sınırlı bir dizi yakınsaktır ve bir limite sahiptir. Bu örnekteki limite "e" denilirse, $\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$ dir. Bu "e" sayısı $e = 2,71828182845904523536....$ biçiminde irrasyonel ve transandant (yüksek,aşkın) bir sayıdır.

UYARI:: Her $n\in\mathbb{N}^+$ için $\frac{n!}{2^{n-1}} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ \cdots \ \cdot(n-1)\cdot n}{2\cdot 2\cdot 2\cdot \ \cdots \ 2\cdot 2} \geq 1$ olup, $n! \geq 2^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{2^{n-1}} \geq \frac{1}{n!}$ dir.

Diziler için $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ olduğu gibi, sürekli değişkenler (reel x değişkeni) için de $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ doğru olduğunu gösterelim. Önce $x>0$ olsun. Her pozitif x reel sayısını $n \leq x < n+1$ biçiminde yazabiliriz ($n\in\mathbb{N}^+$). $n\to\infty$ için $x\to\infty$ dur. Bu eşitsizlikte $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow 1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \leq 1+\frac{1}{n}$ ve hatta $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ dir. Bu son eşitsizlik $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^1$ olarak da yazılabileceğinden $n\to\infty$ için limit araştırılırsa $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$ ve $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$ olduğundan son eşitsizlikte her bir yanın limiti alınırsa $n\to\infty$ iken $x\to\infty$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \leq \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^1$$ olup, buradan

$e \leq \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq e$ bulunur, buradan sandöviç teoremi gereği $\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$ elde edilir. Hatta $x\to-\infty$ iken de limit "e" dir. Gerçekten $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ limitinin hesabında $x=-(t+1)$ dönüşümü uygulanırsa $x\to-\infty$ için $t\to+\infty$ dır. O halde

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left\{\begin{array}{l} x=-(t+1) \\ x\to-\infty \Rightarrow t\to\infty \end{array}\right\} = \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^t\cdot\left(\frac{t+1}{t}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^t\cdot\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right) = e\cdot 1 = e$$ dir. Yani

$x \to -\infty$ için de $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$ dir. Sonuç olarak $\boxed{\lim_{x\to\mp\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$ dir.

Örnek: $\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = \left\{\begin{array}{l}\frac{1}{u}=t \Rightarrow u=\frac{1}{t} \\ u\to 0 \Rightarrow t\to\mp\infty\end{array}\right\} = \lim_{t\to\mp\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$ dir. Yani $\boxed{\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e}$ dir.

Örnek: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1$ bulunur. Yani $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$ dir.

Örnek: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \left\{\begin{array}{l}e^x-1=t \Rightarrow e^x = 1+t \\ x=\ln(1+t)\,;\, x\to 0 \Rightarrow t\to 0\end{array}\right\} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \frac{1}{1} = 1$

bulunur. Yani $\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1}$ dir.

Artık birçok fonksiyonun limitini alabilecek güçteyiz. Aşağıda, özel limitler dışında fakat özel limitlerden yararlanılarak çözülen örnekler verilmiştir.

Örnek: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}{\frac{\tan 2x}{2x}\cdot 2x} = \frac{\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}{\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{2x}\cdot 2x} = \frac{\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}^{=1}}{\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{2x}}_{=1}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ bulunur.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\underbrace{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}}_{\substack{=1\\(\text{özel limit})}}=1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x}=$

$$=\left\{\begin{array}{l}\sin x=t\ \ d\ddot{o}n.\ ile\\ x\to 0\Rightarrow t\to 0\end{array}\right\}=1\cdot\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}}_{\substack{=1\\(\text{özel limit})}}=1\cdot 1=1 \quad \text{bulunur.}$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\underset{(1+\cos x)}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\cos x}=$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad \text{bulunur.}$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Arc\sin^2 x}{\ln(1+2x^2)}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Arc\sin^2 3x}{\ln(1+5x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{Arc\sin^2 3x}{(3x)^2}\cdot(3x)^2}{\dfrac{\ln(1+5x^2)}{5x^2}\cdot(5x^2)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{Arc\sin 3x}{3x}\right)^2}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x^2)}{5x^2}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\cancel{x^2}}{5\cancel{x^2}}=$

$$=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Arc\sin 3x}{3x}\right)^2}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x^2)}{5x^2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{9}{5}=\frac{1^2}{1}.\frac{9}{5}=\frac{9}{5} \quad \text{bulunur.}$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\big(1+(x-1)\big)}{x-1}=\left\{\begin{array}{l}x-1=t\ \ d\ddot{o}n.ile\\ x\to 1\Rightarrow t\to 0\end{array}\right\}=\underbrace{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}}_{\substack{=1\\(\text{özel limit})}}=1$ bulunur.

Örnek: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{\sqrt{2}}-a^{\sqrt{2}}}{x-a}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{\sqrt{2}}-a^{\sqrt{2}}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{\sqrt{2}}\cdot\left(\dfrac{x^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}}}-1\right)}{a\cdot\left(\dfrac{x}{a}-1\right)}=\dfrac{a^{\sqrt{2}}}{a}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\sqrt{2}}-1}{\dfrac{x}{a}-1}=\left\{\begin{matrix}\dfrac{x}{a}=1+t\ \ \textit{dön. ile}\\ x\to a\Rightarrow t\to 0\end{matrix}\right\}=$

$$=a^{\sqrt{2}-1}\cdot\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\sqrt{2}}-1}{t}}_{=\sqrt{2}\ \ \text{(özel limit)}}=a^{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot a^{\sqrt{2}-1}\ \ \text{bulunur.}$$

UYARI:: Burada $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{(1+u)^{\alpha}-1}{u}=\alpha$ limitinden yararlanıldı. ($\alpha\in\mathbb{R}$ bir sabit sayı.) Bu örnekte yapılan çalışma, aynı zamanda $f(x)=x^{\sqrt{2}}$ fonksiyonunun $x_0=a$ noktasındaki türev değeri olan $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ limitini (türevin limit ile yapılan tanımı olarak) hesaplamak demektir. Bu sonuç, $f(x)=x^{\sqrt{2}}$ fonksiyonunun (pratik yoldan) türevi olan $f'(x)=\sqrt{2}\cdot x^{\sqrt{2}-1}$ in $x_0=a$ noktasındaki türev değeri olan $f'(a)=\sqrt{2}\cdot a^{\sqrt{2}-1}$ ile aynıdır.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{\cancel{(x-1)}\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1}+1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}\ \ \text{bulunur.}$$

Başka yoldan çözüm: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\left\{\begin{matrix}x=1+t\ \ \ \textit{dön. ile}\\ x\to 1\Rightarrow t\to 0\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt[3]{1+t}-1}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(1+t)^{\frac{1}{2}}-1}{(1+t)^{\frac{1}{3}}-1}=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{(1+t)^{\frac{1}{2}}-1}{t}}{\dfrac{(1+t)^{\frac{1}{3}}-1}{t}}=\frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\ \frac{\dfrac{(1+t)^{\frac{1}{2}}-1}{t}}{\dfrac{(1+t)^{\frac{1}{3}}-1}{t}}=\frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\ \ \text{bulunur.}$$

(Burada $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{(1+u)^{\alpha}-1}{u}=\alpha$ özel limitinden yararlanıldı. $\alpha\in\mathbb{R}$ bir sabit sayı.)

Örnek: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{Arc\tan x-\frac{\pi}{4}}{x-1}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{Arc\tan x-\frac{\pi}{4}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{Arc\tan x-Arc\tan 1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{Arc\tan\frac{x-1}{1+x\cdot 1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{Arc\tan\frac{x-1}{1+x}}{\frac{x-1}{\mathrm{x+1}}\cdot(\mathrm{x+1})}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{Arc\tan\frac{x-1}{1+x}}{\frac{x-1}{\mathrm{x+1}}\cdot(\mathrm{x+1})}=\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{Arc\tan\left(\frac{x-1}{1+x}\right)}{\left(\frac{x-1}{1+x}\right)}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}}_{=\frac{1}{2}}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$ bulunur.

UYARI:: Burada $\dfrac{x-1}{1+x}=u$ dönüşümü ile $x\to 1\Rightarrow u\to 0$ ve $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{Arc\tan\left(\frac{x-1}{1+x}\right)}{\left(\frac{x-1}{1+x}\right)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{Arc\tan u}{u}=1$ dir.

Yukarıdaki örneği biraz daha genelleştirerek aşağıdaki örnek de verilebilir.

Örnek: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{Arc\tan x-Arc\tan x_0}{x-x_0}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{Arc\tan x-Arc\tan x_0}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{Arc\tan\frac{x-x_0}{1+x\cdot x_0}}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{Arc\tan\frac{x-x_0}{1+x\cdot x_0}}{\frac{x-x_0}{\mathrm{1+x\cdot x_0}}\cdot(\mathrm{1+x\cdot x_0})}=$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{Arc\tan\left(\frac{x-x_0}{1+x\cdot x_0}\right)}{\left(\frac{x-x_0}{1+x\cdot x_0}\right)}\cdot\frac{1}{1+x\cdot x_0}=\underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{Arc\tan\left(\frac{x-x_0}{1+x\cdot x_0}\right)}{\left(\frac{x-x_0}{1+x\cdot x_0}\right)}}_{=1}\underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{1}{1+x\cdot x_0}}_{\frac{1}{1+(x_0)^2}}=\frac{1}{1+x_0^{\,2}}$$ bulunur.

UYARI:: Bu örneğin çözümünde x_0 yerine x ve x yerine de $x+\Delta x$ yazılıp $\Delta x\to 0$ için limit alınırsa $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{Arc\tan(x+\Delta x)-Arc\tan x}{\Delta x}=\dfrac{1}{1+x^2}$ bulunur ki bu, $f(x)=Arc\tan x$ fonksiyonunun tanımdan hareketle (limit yolundan) türevinin $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ olduğunu göstermektedir. (Tanımdan hareketle limit çalışmasında limit değişkeni Δx olup, Δx limit değişkenine göre x sabittir).

Örnek: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{\frac{5}{7}}-a^{\frac{5}{7}}}{x-a}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{\frac{5}{7}}-a^{\frac{5}{7}}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{\frac{5}{7}}\cdot\left(\dfrac{x^{\frac{5}{7}}}{a^{\frac{5}{7}}}-1\right)}{a\cdot\left(\dfrac{x}{a}-1\right)}=\dfrac{a^{\frac{5}{7}}}{a}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\dfrac{x^{\frac{5}{7}}}{a^{\frac{5}{7}}}-1}{\dfrac{x}{a}-1}=a^{\frac{5}{7}-1}\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\dfrac{x^{\frac{5}{7}}}{a^{\frac{5}{7}}}-1}{\dfrac{x}{a}-1}=$

$$=a^{\frac{5}{7}-1}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{5}{7}}-1}{\dfrac{x}{a}-1}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x}{a}=1+t\ \ dön.\ \ ile\\ x\to a\Rightarrow t\to 0\end{array}\right\}=a^{\frac{5}{7}-1}\cdot\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\frac{5}{7}}-1}{t}}_{=\frac{5}{7}\ \ \text{(özel limit)}}=a^{\frac{5}{7}-1}\cdot\frac{5}{7}=\frac{5}{7}\cdot a^{\frac{5}{7}-1}=\frac{5}{7}a^{\frac{2}{7}}$$

bulunur.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\left\{\begin{array}{l}a^x=e^t\ \ dön.\,ile\quad x\ln a=t\ln e\\ \Rightarrow x=\dfrac{t}{\ln a}\ \Rightarrow x\to 0\Rightarrow t\to 0\end{array}\right\}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{\dfrac{t}{\ln a}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}\cdot\ln a=$

$$=\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}}_{\substack{=1\\(özel\ limit)}}\cdot\lim_{t\to 0}(\ln a)=1.\ln a=\ln a \quad \text{bulunur.}$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\log_a(1+x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\left(\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{=e}\right)=\log_a e$ dir.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot\tan\dfrac{\pi x}{2}\overset{0\cdot\infty}{=}\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot\dfrac{\sin\dfrac{\pi x}{2}}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}\cdot\sin\dfrac{\pi x}{2}=$

$$= \lim_{x\to1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}\cdot\underbrace{\lim_{x\to1}\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)}_{=1} = 1\cdot\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to1}\frac{1-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)} = \lim_{x\to1}\frac{1-x}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)} =$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{\frac{\pi}{2}\cdot(1-x)}{\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}(1-x)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\lim_{x\to1}\frac{\frac{\pi}{2}\cdot(1-x)}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)} = \left\{\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\cdot(1-x)=t\\ x\to1\Rightarrow t\to0\end{matrix}\right\} = \frac{2}{\pi}\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1} = \frac{2}{\pi} \quad \text{dir.}$$

Örnek: $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\text{cotan}\,x\right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\text{cotan}\,x\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\underset{(1+\cos x)}{\sin x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{\sin x} = \lim_{x\to0}\frac{\cancel{\sin x}\cdot\sin x}{\cancel{\sin x}} = \lim_{x\to0}(\sin x) = 0 \quad \text{bulunur.}$$

Örnek: $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x\cdot\ln(1-x)}{(e^{2x}-1)\cdot Arc\tan 4x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x\cdot\ln(1-x)}{(e^{2x}-1)\cdot Arc\tan 4x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot3\cancel{x}\cdot\frac{\ln(1-x)}{-x}\cdot(-\cancel{x})}{\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot2\cancel{x}\cdot\frac{Arc\tan 4x}{4x}\cdot4\cancel{x}} =$$

$$= \frac{\overbrace{\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}}^{=1}\cdot\overbrace{\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-x)}{-x}}^{=1}\cdot3\cdot(-1)}{\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{Arc\tan 4x}{4x}}_{=1}\cdot2\cdot4} = \frac{1.1.3.(-1)}{1.1.2.4} = \frac{-3}{8} = -\frac{3}{8} \quad \text{bulunur.}$$

Örnek: $\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos 4x)Arc\tan\sqrt{x}}{(e^{\sqrt{x}}-1)\ln(1+x^2)}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $$\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos 4x)Arc\tan\sqrt{x}}{(e^{\sqrt{x}}-1)\cdot\ln(1+x^2)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0}\frac{(2\cdot\sin^2 2x)\cdot Arc\tan\sqrt{x}}{(e^{\sqrt{x}}-1)\cdot\ln(1+x^2)} =$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2}\cdot(2x)^2\cdot\frac{Arc\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}}{\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot x^2}=\frac{2\cdot\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{Arc\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot4\cancel{x^2}\cdot\cancel{\sqrt{x}}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot\cancel{\sqrt{x}}\cdot\cancel{x^2}}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{Arc\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot4\cdot1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot1\cdot1}=\frac{2\cdot1^2\cdot1\cdot4\cdot1}{1\cdot1\cdot1\cdot1}=8 \quad \text{bulunur.}$$

Örnek: Aşağıdaki limitleri hesaplayınız:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x^2+1}{3x^2-4x}$, **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+5x^2+1}{-3x^3+2x}$, **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^3-x^2+1}{3x^2+2x-4}$, **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x^2+x+1}{x^2+2x-4}$

Çözümler: a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x^2+1}{3x^2-4x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{5x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(3-\frac{4x}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(3-\frac{4}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{3-\frac{4}{x}}=(\lim_{x\to\infty}x)\cdot\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{4}{x}\right)}=\underbrace{(\lim_{x\to\infty}x)}_{=\infty}\cdot\frac{\overset{=2}{\lim\limits_{x\to\infty}2}+\overbrace{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x}\right)}^{=0}+\overbrace{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)}^{=0}}{\underbrace{\lim\limits_{x\to\infty}3}_{=3}-\underbrace{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x}\right)}_{=0}}=$$

$$=\infty\cdot\frac{2+0+0}{3-0}=\frac{2}{3}\infty=\infty \quad \text{bulunur.}$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+5x^2+1}{-3x^3+2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}\left(4+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^3}\left(-3+\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-3+\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3} \quad \text{bulunur.}$$

c) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3-x^2+1}{3x^2+2x-4}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\cdot\left(4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\cdot\left(3+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}=\left(\lim_{x\to-\infty}x\right)\cdot\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}=(-\infty)\cdot\frac{4}{3}=-\infty$$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^2+x+1}{x^2+2x-4}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x^2}\cdot\left(-2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\cdot\left(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2}\right)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2}\right)}=$

$$=\frac{\overbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}(-2)}^{=-2}+\overbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}}^{=0}+\overbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}^{=0}}{\underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}1}_{=1}+\underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}}_{=0}-\underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}}_{=0}}=\frac{-2+0+0}{1+0-0}=\frac{-2}{1}=-2$$

NOT: Bir polinomun (çok terimlinin) bir polinoma bölümünün $x\to\mp\infty$ için limiti araştırılırken en yüksek dereceli terimlerin oranına bakmak yeterlidir. Gerçekten

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & , \quad n=m \ \ ise\\ 0 & , \quad n<m \ \ ise\\ \mp\infty & , \quad n>m \ \ ise\end{cases} \qquad \text{dir.}$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}\overset{1^\infty}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{(x+1)+3}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{3}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(1+\dfrac{3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}\right]^{\frac{3}{x+1}\cdot\frac{x}{2}}=$

$$=\left[\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}}_{=e}\right]^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{2x+2}}=e^{\overbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{2x+2}}^{\left(=\frac{3}{2}\right)}}=e^{\frac{3}{2}}=\sqrt{e^3} \quad \text{bulunur.}$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+5}{x^2+1}\right)^{2x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+5}{x^2+1}\right)^{2x}\overset{1^\infty}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1+3x+4}{x^2+1}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3x+4}{x^2+1}\right)^{2x}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3x+4}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{3x+4}}\right]^{\frac{3x+4}{x^2+1}\cdot 2x}=\left[\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+4}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{3x+4}}}_{=e}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+8x}{x^2+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+8x}{x^2+1}}=e^6 \quad \text{bulunur.}$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \overset{1^\infty}{=} \lim\limits_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}[1-(1-\cos x)]^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}} =$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\right]^{(-2\sin^2\frac{x}{2})\cdot\frac{1}{x^2}} = \left[\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}}_{=e}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{x^2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{4}\cdot 4}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2} = e^{\frac{-1}{2}\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2} = e^{\frac{-1}{2}\cdot(1)^2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ bulunur.}$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x+4}{2x}\right)^x$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x+4}{2x}\right)^x = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x}{2x}+\dfrac{4}{2x}\right)^x = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to -\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{\frac{2}{x}\cdot x} =$

$$= \left[\underbrace{\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}}_{=e}\right]^{\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to -\infty} 2} = e^2 \text{ bulunur.}$$

UYARI:: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+u(x)\right)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} u(x)\cdot v(x)}$ Limit çalışmalarında karşılaşılan 1^∞ belirsizlik durumlarında $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=0$ ve $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=\infty$ ise bu durumda $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+u(x)\right)^{v(x)} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x\to x_0} u(x)\cdot v(x)}$ dir ve e’nin üssü olan limitteki belirsizlik ise $0\cdot\infty$ dur.

Tek Taraflı (Soldan veya Sağdan) Limitler:

Şimdiye kadar alınan limitlerde aksi bir durum söz konusu olmadıkça x bağımsız değişkeni x_0 noktasına (sayısına) x_0'dan küçük kalarak (soldan) veya x_0'dan büyük kalarak (sağdan) yaklaşabiliyordu. Bunu $0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$ olan mutlak değerli eşitsizlik sayesinde yapabiliyorduk. Ama bazen verilen fonksiyonun kendi özelliğinden dolayı limit çalışmalarını tek taraflı yapmak gerekebilir, ya da özellikle süreksizlik çalışmalarında süreksiz cinsini belirlemek için soldan veya sağdan limitlere bakmak gerekir. Mesela $f(x)=\dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x}}$ fonksiyonunun $x_0=1$ noktasındaki limitini sadece soldan inceleyebiliriz. Zira paydadaki karekökten dolayı 1 sayısına 1'den küçük kalarak yaklaşmak gerekir. Bu limiti $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x}}$ biçiminde göstereceğiz. Yine benzer bir biçimde $f(x)=\dfrac{\ln x}{\operatorname{cotan} x}$ fonksiyonunun $x_0=0$ noktası civarındaki limitini de logaritma fonksiyonunun tanım aralığından dolayı, sadece pozitif x'ler için yani $x\to0^+$ için araştırabiliriz.

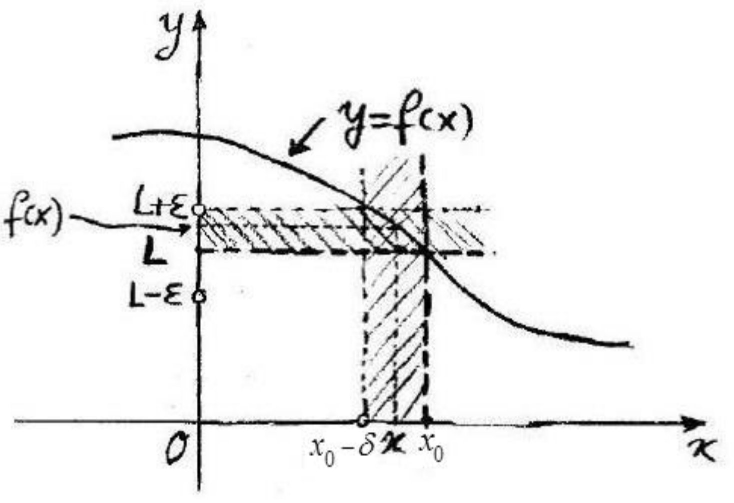
Soldan Limit:

İstenildiği kadar küçük bir $\varepsilon>0$ sayısına karşılık, $x_0-\delta<x<x_0$ eşitsizliğini sağlayan x'ler için $|f(x)-L|<\varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulunabilirse, o zaman bu L sayısına, fonksiyonun $x=x_0$ noktasındaki soldan limiti denir ve $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ biçiminde gösterilir.

Bu limit, $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

ya da $f(x_0-\varepsilon)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

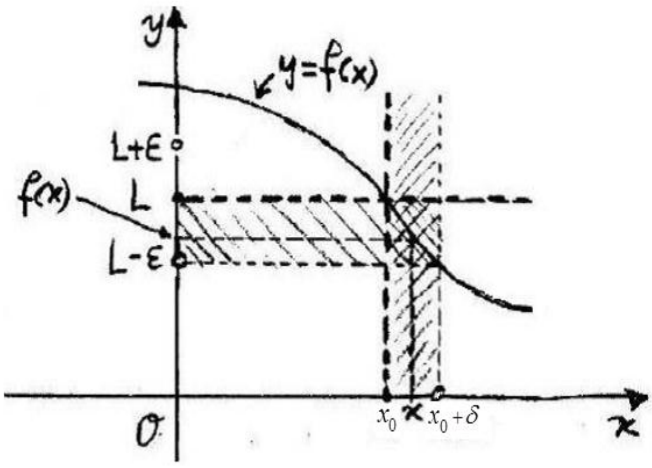
olarak da gösterilir.



Şekil 9. Fonksiyonun soldan limiti.

Sağdan Limit:

İstenildiği kadar küçük bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $x_0 < x < x_0 + \delta$ eşitsizliğini sağlayan x'ler için $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabilirse, o zaman bu L sayısına, fonksiyonun $x = x_0$ noktasındaki sağdan limiti denir ve $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ biçiminde gösterilir.
Bu limit, $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ ya da $f(x_0 + \varepsilon) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ olarak da gösterilir.



Şekil 10. Fonksiyonun sağdan limiti.

UYARI:: Soldan limitte x_0'dan küçük kalarak, sağdan limitte ise x_0'dan büyük kalarak x_0'a yaklaşılır. Sağdan,soldan limit çalışmaları yeni bir **pozitif** p reel değişkeni yardımıyla şöyle yapılabilir: Sağdan limitte $x_0 < x < x_0 + \delta$ olup buradan $x_0 - x_0 < x - x_0 < x_0 + \delta - x_0 \Rightarrow 0 < \underbrace{x - x_0}_{p} < \delta \Rightarrow 0 < x - x_0 = p$ denilerek $x = x_0 + p$ dönüşümü yapılabilir. Burada $p > 0$ olup $p \to 0$ için limit araştırılabilir. Benzer biçimde soldan limit için x değişkeni x_0 sayısından küçük kalarak x_0'a yaklaşacağından (Ox-ekseni üzerinde x noktası, daima x_0'ın solunda olacağından) $x - x_0 = -p$ dönüşümü yapılır ve yine $p > 0$ olup $p \to 0$ için limit araştırılır. Bu durumda pozitif p değişkeni, tanımdan hareketle türev almadaki h veya Δx gibi davranmaktadır. Ancak türevde h veya Δx hem pozitif, hem de negatif olabilirken buradaki p değişkeni **sadece pozitif** bir yeni değişkendir.

Örnek: $f(x) = |\ln(1+x)|$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasında soldan ve sağdan limitlerini hesaplayınız.

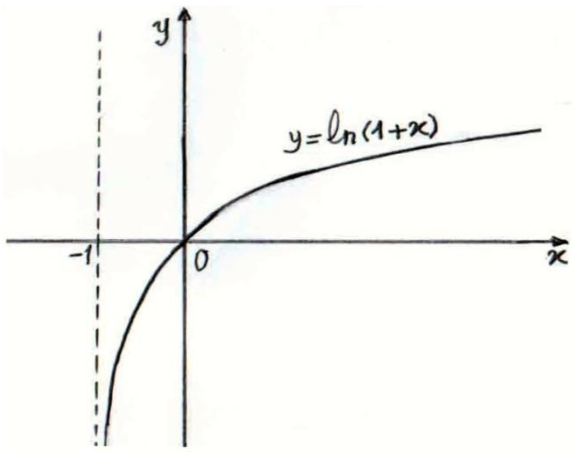
Çözüm: Soldan limit: $\lim\limits_{x \to 0^-} |\ln(1+x)| = \left\{ \begin{matrix} x = 0 - p \\ p > 0\,,\ p \to 0 \end{matrix} \right\} = \lim\limits_{p \to 0} |\ln(1 + (0 - p))| = \lim\limits_{p \to 0} \left| \overbrace{\ln(1-p)}^{(-)} \right| =$

$$=\lim_{p\to0}\left[-\left(\ln(1-p)\right)\right]=\lim_{p\to0}\frac{-\ln(1-p)}{p}\cdot p=\underbrace{\lim_{p\to0}\frac{\ln(1-p)}{-p}}_{\substack{=1\\ \text{(özel limit)}}}\cdot\underbrace{\lim_{p\to0}p}_{=0}=1\cdot0=0 \text{ bulunur.}$$

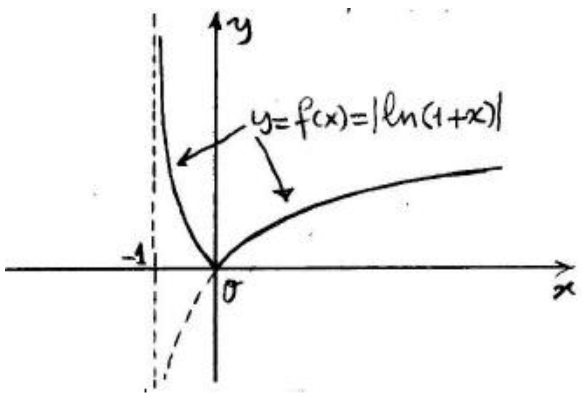
(Burada $\lim\limits_{p\to0}\frac{\ln(1-p)}{-p}=\lim\limits_{p\to0}\frac{\ln[1+(-p)]}{(-p)}=1$ özel limittir.)

Sağdan limit: $\lim\limits_{x\to0^+}|\ln(1+x)|=\left\{\begin{matrix}x=0+p\\ p>0\,,\ p\to0\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{p\to0}\left|\ln\left(1+(0+p)\right)\right|=\lim\limits_{p\to0}\left|\overbrace{\ln(1+p)}^{(+)}\right|=$

$$=\lim_{p\to0}\ln(1+p)=\lim_{p\to0}\frac{\ln(1+p)}{p}\cdot p=\underbrace{\lim_{p\to0}\frac{\ln(1+p)}{p}}_{\substack{=1\\ \text{(özel limit)}}}\cdot\underbrace{\lim_{p\to0}p}_{=0}=1\cdot0=0 \text{ bulunur.}$$



Şekil 11. $f(x)=\ln(1+x)$ in grafiği.



Şekil 12. $f(x)=|\ln(1+x)|$ in grafiği.

UYARI:: Bu örnekte $f(x)=|\ln(1+x)|$ fonksiyonunun $x_0=0$ noktasında soldan ve sağdan limitleri var ve aynı olduğundan, bu noktada fonksiyonun limiti vardır ve bu limit $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}|\ln(1+x)|=0$ dır. Üstelik $f(0)=|\ln(1+0)|=|\ln1|=0$ olduğundan bu örnekte $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$ dır. Yani, ileride de görüleceği üzere bu fonksiyon $x_0=0$ noktasında süreklidir. Hatta tanımdan hareketle (limit yolundan) sağdan ve soldan türevlerine de bakılacak ve $x_0=0$ noktasında fonksiyonun türevinin olmadığı da söylenebilecek. (Fonksiyon bir noktada sürekli olduğu halde, bu noktada türevli olmayabilir. Fakat türevli olduğu bir noktada mutlaka süreklidir.).

Bu örneğin ikinci bir yoldan çözümü:

Eğer soldan ve sağdan limitlerde p'li çalışma yapılmak istenmiyorsa, o zaman önce mutlak değerli ifade mutlak değer dışına alınmalıdır. Yani verilen mutlak değerli ifade parçalı, (dallandırılmış) biçimde yazılmalıdır;

$$f(x)=\left|\ln(1+x)\right|=\begin{cases}-\ln(1+x) & , \quad -1<x<0 \quad ise \\ 0 & , \quad x=0 \quad ise \\ \ln(1+x) & , \quad 0<x<\infty \; ise\end{cases}$$

dir. $x_0=0$'ın solunda limit çalışılırken yukarıdaki parçalı fonksiyonun en üst parçası (dalı) üzerinden ve $x_0=0$'ın sağında limit çalışılırken en alttaki parçası (dalı) üzerinden limitler alınmalıdır. Buna göre soldan limit;

$$\lim_{x\to 0^-}\left|\ln(1+x)\right|=\lim_{x\to 0^-}\left[-\left(\ln(1+x)\right)\right]=-\lim_{x\to 0^-}\ln(1+x)=-\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot x=-\underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+x)}{x}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0^-}x}_{=0}=-1\cdot 0=0$$

bulunur. Benzer biçimde sağdan limit çalışması ise

$$\lim_{x\to 0^+}\left|\ln(1+x)\right|=\lim_{x\to 0^+}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0^+}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot x=\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0^+}x}_{=0}=1\cdot 0=0 \quad \text{dır.}$$

Örnek: $f(x)=\dfrac{\left|1-x^2\right|}{1-x}$ fonksiyonunun $x_0=1$'deki soldan ve sağdan limitlerini hesaplayınız.

Çözüm: Soldan limiti

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\left|1-x^2\right|}{1-x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\left.\begin{cases}x=1-p \\ p>0\,,\; p\to 0\end{cases}\right\}=\lim_{p\to 0}\frac{\left|1-(1-p)^2\right|}{1-(1-p)}=\lim_{p\to 0}\frac{\left|\cancel{1}-(\cancel{1}-2p+p^2)\right|}{\cancel{1}-(\cancel{1}-p)}=\lim_{p\to 0}\frac{\left|2p-p^2\right|}{p}=$$

$$=\lim_{p\to 0}\frac{\left|\overset{(+)}{(2-p)}\cdot\overset{(+)}{p}\right|}{p}=\lim_{p\to 0}\frac{(2-p)\cdot\cancel{p}}{\cancel{p}}=\lim_{p\to 0}(2-p)=2 \quad \text{bulunur.}$$

Sağdan limiti ise

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\left|1-x^2\right|}{1-x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\left.\begin{cases}x=1+p \\ p>0\,,\; p\to 0\end{cases}\right\}=\lim_{p\to 0}\frac{\left|1-(1+p)^2\right|}{1-(1+p)}=\lim_{p\to 0}\frac{\left|\cancel{1}-(\cancel{1}+2p+p^2)\right|}{\cancel{1}-(\cancel{1}+p)}=\lim_{p\to 0}\frac{\left|-2p-p^2\right|}{-p}=$$

$$=\lim_{p\to 0}\frac{\left|-(2p+p^2)\right|}{-p}=\lim_{p\to 0}\frac{\left|2p+p^2\right|}{-p}=\lim_{p\to 0}\frac{2p+p^2}{-p}=\lim_{p\to 0}\frac{\cancel{p}\cdot(2+p)}{-\cancel{p}}=\lim_{p\to 0}[(-1)\cdot(2+p)]=-2 \quad \text{dir.}$$

Bu örneğin ikinci bir yoldan çözümü:

$f(x)=\dfrac{\left|1-x^2\right|}{1-x}$ fonksiyonunun payındaki mutlak değer ifadesinin sıfır yerleri yani $1-x^2=0$ denkleminin kökleri -1 ve +1 olup, kökler arası pozitif, kökler dışı negatif olduğundan

$$f(x)=\frac{\left|1-x^2\right|}{1-x}=\begin{cases} -(1-x^2) & , \quad -\infty<x<-1 \quad ise \\ 0 & , \quad x=-1 \quad ise \\ 1-x^2 & , \quad -1<x<1 \quad ise \\ 0 & , \quad x=1 \quad ise \\ -(1-x^2) & , \quad 1<x<+\infty \quad ise \end{cases}$$ olarak yazılabilir.

Bu örnekte sadece $x_0=1$ noktasında soldan ve sağdan limit araştırılması istenmektedir. Bunun için fonksiyonun $x_0=1$ noktasında soldan limiti araştırılırken parçalı fonksiyonun üçüncü satırı kullanılmalıdır, sağdan limiti araştırılırken de parçalı fonksiyonun son satırı kullanılmalıdır. Böylece soldan limiti

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\left|1-x^2\right|}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^2}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(1-x)}\cdot(1+x)}{\cancel{(1-x)}}=\lim_{x\to 1^-}(1+x)=1+1=2$$

Bulunur. Sağdan limiti ise

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\left|1-x^2\right|}{1-x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-(1-x^2)}{1-x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-\cancel{(1-x)}\cdot(1+x)}{\cancel{(1-x)}}=-\lim_{x\to 1^+}(1+x)=-(1+1)=-2 \quad \text{dir.}$$

Örnek: $f(x)=\dfrac{|\cos x|}{2x-\pi}$ fonksiyonunun $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ noktasındaki soldan ve sağdan limitini bulunuz.

Çözüm: $$f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{|\cos x|}{2x-\pi}=\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}-p \\ p>0\,,\ p\to 0 \end{array}\right\}=\lim_{p\to 0}\frac{\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-p\right)\right|}{2\cdot\left(\dfrac{\pi}{2}-p\right)-\pi}=$$

$$=\lim_{p\to 0}\frac{|\sin p|}{\cancel{2}\cdot\dfrac{\pi}{\cancel{2}}-2\cdot p-\pi}=\lim_{p\to 0}\frac{|\sin p|}{\cancel{\pi}-2p-\cancel{\pi}}=\lim_{p\to 0}\frac{\sin p}{-2p}=-\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{p\to 0}\frac{\sin p}{p}}_{=1}=-\frac{1}{2}\cdot 1=-\frac{1}{2} \quad \text{dir.}$$

Sağdan limiti ise $f(\frac{\pi}{2}+0)=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^{+}}\frac{|\cos x|}{2x-\pi}=\left\{\begin{matrix} x=\frac{\pi}{2}+p \\ p>0\,,\ p\to 0\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{p\to 0}\frac{\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}+p\right)\right|}{2\cdot\left(\frac{\pi}{2}+p\right)-\pi}=$

$$=\lim_{p\to 0}\frac{|-\sin p|}{\cancel{2}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}}+2\cdot p-\pi}=\lim_{p\to 0}\frac{|+\sin p|}{\cancel{\pi}+2p-\cancel{\pi}}=\lim_{p\to 0}\frac{\sin p}{2p}=\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{p\to 0}\frac{\sin p}{p}}_{=1}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$ dir.

Bu örneğin de ikinci bir yoldan çözümü:

$f(x)=\frac{|\cos x|}{2x-\pi}$ fonksiyonunun payındaki mutlak değerli ifadeyi, $x_0=\frac{\pi}{2}$ noktası civarında, mutlak değer dışına parçalı fonksiyon olarak

$$|\cos x|=\begin{cases}\cos x & ,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}\quad ise \\ 0 & ,\quad x=\frac{\pi}{2}\quad ise \\ -\cos x & ,\quad \frac{\pi}{2}<x<\pi\quad ise\end{cases}$$ biçiminde çıkarılabilir.

Buna göre fonksiyonun soldan limiti

$$f(\frac{\pi}{2}-0)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^{-}}\frac{|\cos x|}{2x-\pi}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^{-}}\frac{\cos x}{2x-\pi}=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2(x-\frac{\pi}{2})}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^{-}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{-2(\frac{\pi}{2}-x)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^{-}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{(\frac{\pi}{2}-x)}}_{=1\ (\text{özel limit})}=-\frac{1}{2}\cdot 1=-\frac{1}{2}$$ bulunur.

Sağdan limiti ise

$$f(\frac{\pi}{2}+0)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^{+}}\frac{|\cos x|}{2x-\pi}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^{+}}\frac{-\cos x}{2x-\pi}=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^{+}}\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2(x-\frac{\pi}{2})}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^{+}}\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{-2(\frac{\pi}{2}-x)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{(\frac{\pi}{2}-x)}}_{=1\ (\text{özel limit})}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}\quad \text{dir.}$$

Örnek: $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x<1 \quad ise \\ 2x-1 & , \quad 1<x\leq 3 \quad ise \\ 3x & , \quad 3<x \quad ise \end{cases}$ fonksiyonunun $x_1=1$ ve $x_2=3$

noktalarındaki soldan ve sağdan limitlerini bulunuz.

Çözüm: Burada fonksiyonun soldan ve sağdan limitleri araştırılırken p'li çalışma yapmaya gerek yoktur. Çünkü fonksiyonun gerek 1'in gerekse 3'ün solunda ve sağında kesin tanımları yukarıdaki parçalı (dallandırılmış) fonksiyonda verilmiştir. Buna göre $x_1=1$ için limitler

$$\left.\begin{aligned} f(1-0)&=\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(x^2)=1^2=1 \\ f(1+0)&=\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(2x-1)=2\cdot1=1=1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow f(1-0)=f(1+0) \text{ olup } \lim_{x\to1}f(x)=1 \text{ dir.}$$

$x_2=3$ noktasındaki soldan ve sağdan limitleri ise

$$\left.\begin{aligned} f(3-0)&=\lim_{x\to3^-}f(x)=\lim_{x\to3^-}(2x-1)=5 \\ f(3+0)&=\lim_{x\to3^+}f(x)=\lim_{x\to3^+}(3x)=3^2=9 \end{aligned}\right\}\Rightarrow f(3-0)\neq f(3+0) \text{ olup } \lim_{x\to3}f(x)=YOK \text{ tur.}$$

UYARI:: Bu örnekte fonksiyon $x_1=1$ noktasında tanımlı olmadığı halde limitlidir, $x_2=3$ noktasında ise tanımlı olduğu halde limitli değildir. Yani $x_2=3$'de limiti yoktur.

Örnek: $f(x)=\sqrt{x-2}$ fonksiyonunun $x_0=2$ deki limiti nedir?

Çözüm: Fonksiyon çift kuvvetten köke sahip olduğundan $x-2\geq 0$ için tanımlı olacağından, yani x bağımsız değişkeni 2'ye eşit ya da 2'den büyük olacağından limiti de sadece $x\to 2^+$ için araştırılabilir.

$$f(2+0)=\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\sqrt{x-2}=\left\{\begin{matrix} x=2+p \\ p>0\ ,\ p\to0 \end{matrix}\right\}=\lim_{p\to0}\sqrt{(2+p)-2}=\lim_{p\to0}\sqrt{p}=0 \quad \text{dir.}$$

UYARI:: Hatta $f(2)=0$ dır ve $\lim_{x\to x_0^+}\sqrt{x-2}=0$ olduğundan, yani $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$ olduğundan bu fonksiyon için ileride $x_0=2$ noktasında sağdan süreklidir denilecek.