Eşitsizliklerin Çözümü

$3x-1<2x-3$; $\frac{x+1}{x-2}\geqslant 2$; $x-1\leqslant\frac{6}{x}$; $1\leqslant\frac{4x+6}{x+1}\leqslant 3$ ...

gibi eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulmak için en genel bir yol eşitsizliklerin her birinde değişkenleri ve sabit sayıları bir tarafta toplayıp x'li ifade ≤ 0 veya x'li ifade >0 haline getirip işaret incelemesi yapmaktır. Son örnekte $1\leqslant\frac{4x+6}{x-1}$ ve $\frac{4x+6}{x+1}\leqslant 3$ biçiminde yazıp, x'li ifade $\geqslant 0$ veya x'li ifade $\leqslant 0$ biçimine getirip ayrı ayrı çözüm kümeleri bulunup arakesit alınmalıdır!

Örnek 1. $3x-1<2x-3 \Rightarrow 3x-2x<1-3 \Rightarrow x<-2$ dir.

O halde çözüm kümesi $Ç=\{x\in\mathbb{R}: x<-2\}=(-\infty,-2)$ dir.

(Not: Burada değişkenleri ve sabiti bir tarafta toplama gereği duyulmadı!)

Örnek 2. $\frac{x+1}{x-2}\geqslant 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi?

Çözüm! $\frac{x+1}{x-2}\geqslant 2 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2}-2\geqslant 0 \Rightarrow \frac{x+1-2x+4}{x-2}\geqslant 0$ dan

$\frac{5-x}{x-2}\geqslant 0$ olup $5-x=0\Rightarrow x_1=5$; $x-2=0\Rightarrow x_2=2$

x	$-\infty$	2		5	$+\infty$
$5-x$	+		+	0	—
$x-2$	—	0	+		+
$\frac{5-x}{x-2}$	—		+	0	—

O halde çözüm kümesi:

$Ç=\{x\in\mathbb{R}: 2<x\leqslant 5\}=(2,5]$ dir.

Örnek (3) $x-1 \leq \frac{6}{x}$ eşitsizliğinin çözüm kümesi?

Çözüm: $x-1 \leq \frac{6}{x} \Rightarrow x-1-\frac{6}{x} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2-x-6}{x} \leq 0$ veya

$\frac{(x+2)(x-3)}{x} \leq 0 \Rightarrow$ $x_1=-2$, $x_2=+3$, $x_3=0$ kritik noktalar

x		-2		0		3	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{(x+2)(x-3)}{x}$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$

$-\infty < x \leq -2$ $0 < x \leq 3$

O halde Çözüm kümesi

$Ç=(-\infty,-2] \cup (0,3]$ dür.

Örnek (4) $1 \leq \frac{4x+6}{x+1} \leq 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesi?

$1 \leq \frac{4x+6}{x+1}$ ve $\frac{4x+6}{x+1} \leq 3$ eşitsizliklerini aynı anda sağlayan x'ler aranıyor.

$1 \leq \frac{4x+6}{x+1} \Rightarrow 0 \leq \frac{4x+6}{x+1} - 1$ den $0 \leq \frac{3x+5}{x+1} \Rightarrow$ $x_1=-5/3$, $x_2=-1$ olup

x	$-\infty$	$-5/3$		-1		$+\infty$
$3x+5$	$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{3x+5}{x+1}$	$+$	0	$-$		$+$	

$-\infty < x \leq -\frac{5}{3}$ $-1 < x < +\infty$

O halde

$Ç_1=(-\infty,-\frac{5}{3}] \cup (-1,+\infty)$

dur.

Ayrıca;

$\frac{4x+6}{x+1} \leq 3 \Rightarrow \frac{4x+6}{x+1} - 3 \leq 0 \Rightarrow \frac{x+3}{x+1} \leq 0 \Rightarrow$ $x_3=-3$, $x_4=-1$ olup

(Devamı diğer sayfada...)

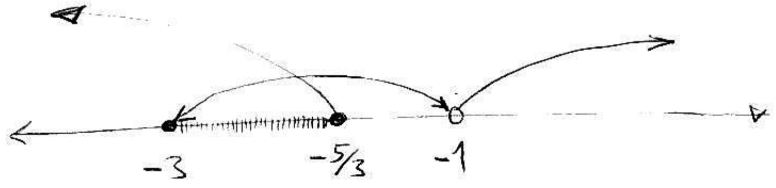
(Dördüncü örneğe devam)

x		-3		-1	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+3}{x+1}$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$

O halde

$G_2 = [-3, -1)$ dir.

$-3 \leq x < -1$



$$G = G_1 \cap G_2 = \left[-3, -\frac{5}{3}\right] \quad \text{dür.}$$

II. YOL : $1 \leq \frac{4x+6}{x+1} \leq 3 \Rightarrow 1 \leq \frac{4(x+1)+2}{x+1} \leq 3 \Rightarrow 1 \leq 4 + \frac{2}{x+1} \leq 3$

$1-4 \leq \frac{2}{x+1} \leq 3-4 \Rightarrow -3 \leq \frac{2}{x+1} \leq -1$ den $x+1<0$ olduğu görülür.

$a<b$ ve $c<0 \Rightarrow a.c \geqslant b.c$ özelliğinden; ($c = x+1$ dir!)

$-3.(x+1) \geqslant 2 \geqslant -1.(x+1) \Rightarrow -3x-3 \geqslant 2 \geqslant -x-1$ den

$$\underbrace{-x-1 \leq 2}_{\Downarrow}\ \ \underbrace{2 \leq -3x-3}_{\Downarrow}$$

$-x \leq 3$

$x \geqslant -3$ dür

Yani $-3 \leq x$ dir

$5 \leq -3x$

$-\frac{5}{3} \geqslant x$ dir

Yani $x \leq -\frac{5}{3}$ dür

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3 \leq x \\ x \leq -\frac{5}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow -3 \leq x \leq -\frac{5}{3}$ dür

O halde $G = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq -\frac{5}{3}\} = [-3, -\frac{5}{3}]$ dür