Fonksiyonlarda Süreklilik ve Süreksizlik (1)

Fonksiyonun sürekliliği: Sezgisel olarak bir fonksiyonun grafiğini kalemimizi kaldırmadan çizdiğimiz bir aralıkta fonksiyon süreklidir. Eğrisini çizerken kalemimizi kaldırdığımız bir x_0 noktasında fonksiyon süreksizdir.

Matematiksel olarak bir $y=f(x)$ fonksiyonunun bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli olabilmesi için şu üç koşul sağlanmalıdır:

1° $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında fonksiyon tanımlıdır. Yani $f(x_0)$ vardır.

2° $x \to x_0$ giderken fo.nun bir limiti vardır. Yani $\lim_{x \to x_0} f(x)$ vardır.

3° Fo.nun bu limiti, x_0 daki görüntü değerine eşittir. Yani

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)} \qquad ------ \qquad (1)$$

dır. Bu (1) eşitliği aslında bir fo.nun bir x_0 noktasında sürekli olmasının matematiksel ifadesidir.

$f: A \to \mathbb{R}$, $y=f(x)$ fo.nu tanım aralığının her noktasında sürekli ise, bu fonksiyon bu aralıkta süreklidir.

Örnek: $f(x)=\sin x$ fo.nu herhangi bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında süreklidir.

Çözüm: sinüs fonksiyonunun tanım aralığı bütün reel sayılardan oluşan $(-\infty, +\infty)$ aralığı olup, $x_0 \in A$ için fonksiyon tanımlıdır. $\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$ olduğunu gösterelim. Bu limiti göstermek yerine aynı şey demek olan $\lim_{x \to x_0} (\sin x - \sin x_0) = 0$ olduğunu gösterebiliriz:

$$\lim_{x \to x_0} (\sin x - \sin x_0) = \lim_{x \to x_0} 2\cos\frac{x+x_0}{2} \cdot \sin\frac{x-x_0}{2} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} 2 \cdot \cos\frac{x+x_0}{2} \cdot \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \frac{x-x_0}{2} = 2 \cdot (\cos x_0) \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

dır. Yani $f(x)=\sin x$ fo.nu herhangi bir x_0 noktasında süreklidir.

2

Sonuç olarak bir fonksiyonun x_0 noktasındaki limiti, bu noktadaki görüntü değerine eşitse, fonksiyon bu noktada süreklidir denir. Yani x_0 noktasındaki limit değeri, bu noktadaki fonksiyon değerine eşit olmalıdır.

<u>Örnek:</u> $f(x)=|\ln x|$ fonksiyonunun $x_0=1$ noktasında sürekli olduğunu gösterelim.

$f(1)=|\ln 1|=0$ dır. Yani $f(x_0)=f(1)=0$ dır.

Acaba $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}|\ln x|$ var mı? Bunu da soldan ve sağdan limitlerine bakarak söyleyelim;

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}|\ln x|=\left\{\begin{array}{l} x=1-p \\ p>0,\ p\to 0\end{array}\right\}=\lim_{p\to 0}|\overbrace{\ln(1-p)}^{(-)}|=$$

$$=\lim_{p\to 0}(-\ln(1-p))=\lim_{p\to 0}\left(-\frac{\ln(1-p)}{-p}\right)(-p)=\lim_{p\to 0}\frac{\ln(1+(-p))}{(-p)}\cdot\lim_{p\to 0}p$$

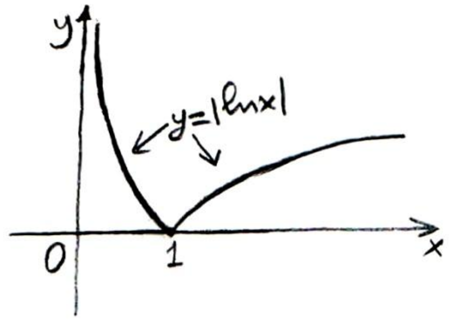
$$=1\cdot 0=0 \text{ dır.}$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1^+}|\ln x|=\left\{\begin{array}{l} x=1+p \\ p>0,\ p\to 0\end{array}\right\}=\lim_{p\to 0}|\overbrace{\ln(1+p)}^{+}|=\lim_{p\to 0}\ln(1+p)=$$

$$=\lim_{p\to 0}\frac{\ln(1+p)}{p}\cdot p=\lim_{p\to 0}\frac{\ln(1+p)}{p}\cdot\lim_{p\to 0}p=1.0=0$$

Yani $\lim\limits_{x\to 1^-}|\ln x|=\lim\limits_{x\to 1^+}|\ln x|=\lim\limits_{x\to 1}|\ln x|=0$ dır

Üstelik $\lim\limits_{x\to 1}|\ln x|=f(1)$ dır.



O halde $f(x)=|\ln x|$ fo.nu $x_0=1$ de süreklidir.

③

Örnek: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+3} & , \ x < -1 \\ -\dfrac{1}{2} & , \ x \geqslant -1 \end{cases}$ fonksiyonu $x_0 = -1$ noktasında sürekli midir?

Çözüm; $f(-1) = -\frac{1}{2}$ dir. $f(-1-0) = \lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{x}{x+3} = \dfrac{-1}{-1+3} = -\dfrac{1}{2}$,

$f(-1+0) = \lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ olup $f(-1-0) = f(-1+0)$ old.

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\frac{1}{2}$ dir. Üstelik bu limit değer, $x_0 = -1$ deki görüntü değerine de eşittir. Yani $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$ dir.

Dolayısıyle verilen fonksiyon $x_0 = -1$ de süreklidir.

Fonksiyonun süreksizliği ve süreksizlik cinsleri:

İlk sayfadaki (1) eşitliğinin sağlanmadığı her durumda fonksiyon bu noktada süreksizdir denir.

* Eğer $y = f(x)$ fonksiyonu için $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ iken, $f(x_0) \neq L$ ise ya da x_0 noktasında fonksiyon tanımsız ise, bu x_0 noktasında fo.nun kaldırılabilen süreksizliği vardır denir.

* Fonksiyon bir x_0 noktasında ister tanımlı ister tanımsız iken Fonksiyonun soldan ve sağdan sonlu limitleri var fakat bu limitler sonlu ise bu x_0 noktasında fonksiyonun sonlu (ani) sıçramalı süreksizliği vardır denir.

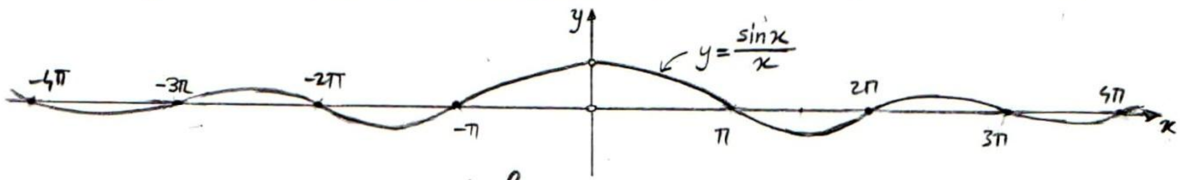
* Fonksiyonun soldan veya sağdan limitlerinden en az biri sonsuz ise, fonksiyonun bu x_0 noktasında sonsuz sıçramalı süreksizliği vardır denir.

④

Fonksiyonların süreksizliklerinin sınıflandırılması burada yapılandan daha farklı isimlerle de yapılabilir. Farklı kitaplarda farklı isimlerle de (I. cins anî sıçramalı, I. cins sonsuz sıçramalı; ya da en az bir limit sonsuz ise II. cins süreksizlik; ya da tek taraflı bile limit yoksa II. cinstir v.s. gibi) ifade edilebilir.

Örnek: $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ fo.nunun $x_0 = 0$ noktasındaki süreksizliğinin türünü belirtiniz.

Çözüm: $f(0) = \dfrac{\sin 0}{0} = \dfrac{0}{0}$ tanımsızdır. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ olduğu limit konusunda ispatlanmıştı. O halde $x_0 = 0$ da $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun kaldırılabilir süreksizliği vardır. (Bkz. Şekil.1).



Şekil. 1

Gerçekten $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ fonsiyonu yerine $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ biçiminde yeni bir fonksiyon tanımlanırsa $x_0 = 1$ dışında bu fonksiyon $f(x)$ ile aynıdır ve üstelik $x_0 = 0$ da $g(x)$ fonksiyonu süreklidir. Dolayısıyla $f(x)$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ daki süreksizliği bu yeni $g(x)$ fonksiyonunda kaldırılmıştır.

Örnek: $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktayı ve bu noktadaki süreksizliğinin cinsini belirtiniz.

Çözüm: $x_0 = 1$ için $f(1) = 2^{\frac{1}{1-1}} = 2^{1/0}$ = tanımsız olduğundan $x_0 = 1$ noktasında fonksiyon süreksizdir. $x_0 = 1$ noktasında soldan limiti

$$f(1-0) = \lim_{x \to 1^-} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left\{ \begin{matrix} x = 1-p \\ p > 0,\ p \to 0 \end{matrix} \right\} = \lim_{p \to 0} 2^{\frac{1}{(1-p)-1}} = \lim_{p \to 0} 2^{-\frac{1}{p}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0 \text{ dır.}$$

5

(örneğe devam...) $x_0=1$ noktasında sağdan limiti ise

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1^+} 2^{\frac{1}{x-1}} = \left\{\frac{x=1+p}{p>0,\, p\to 0}\right\} = \lim_{p\to 0} 2^{\frac{1}{(1+p)-1}} = \lim_{p\to 0} 2^{1/p} = 2^{\infty} = \infty \text{ dur.}$$

Dolayısıyla $x_0=1$ de fonksiyonun sonsuz sıçramalı süreksizliği vardır.

Örnek: $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & -\infty<x\le 1 \text{ ise} \\ ax+b, & 1<x<2 \text{ ise} \\ x^3-5, & 2\le x<\infty \text{ ise}\end{cases}$ fonksiyonun her yerde sürekli olması için a ve b keyfi sabitleri ne olmalıdır?

Çözüm: $f(1)=1^2+1=2$ ve $f(2)=2^3-5=3$ dür. Öte yandan

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-}(x^2+1)=1^2+1=2\\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x) \text{ olması}$$

gerektiğinden $2=a+b$ ------ (1) olmalıdır.

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-}(ax+b)=2a+b\\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+}(x^3-5)=2^3-5=3\end{aligned}\right\} \Rightarrow 2a+b=3 \text{ ------ (2)}$$

olmalıdır.

(1) ve (2) den $\left.\begin{aligned}a+b&=2\\2a+b&=5\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{a=3}$ ve $3+b=2 \Rightarrow \boxed{b=-1}$ dir

---

Örnek: $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktayı ve bu noktadaki süreksizliğin türünü belirtiniz.

Çözüm: $f(1)=\dfrac{1}{1-1}=\dfrac{1}{0}=$ tanımsız olduğundan fonksiyon bu noktada süreksizdir. Süreksizliğin cinsini (türünü, sınıfını) belirlemek için soldan ve sağdan limitlerine bakılırsa;

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x-1}=\left\{\frac{x=1-p}{p>0,\, p\to 0}\right\}=\lim_{p\to 0}\frac{1-p}{(1-p)-1}=\lim_{p\to 0}\frac{1-p}{-p}=\lim_{p\to 0}\left(-\frac{1-p}{p}\right)=-\frac{1}{0}=-\infty$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1}=\left\{\frac{x=1+p}{p>0,\, p\to 0}\right\}=\lim_{p\to 0}\frac{1+p}{(1+p)-1}=\lim_{p\to 0}\frac{1+p}{p}=\frac{1+0}{0}=\frac{1}{0}=+\infty \text{ olup}$$

$x_0=1$ de soldan ve sağdan limitler sonlu olmadığından, bu noktada fonksiyonun sonsuz sıçramalı süreksizliği vardır denir.

⑥

Sürekli fonksiyonların özellikleri

Teorem ① $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $x=x_0$ noktasında sürekli ise aşağıdaki kombinasyonları da $x=x_0$ da süreklidir:

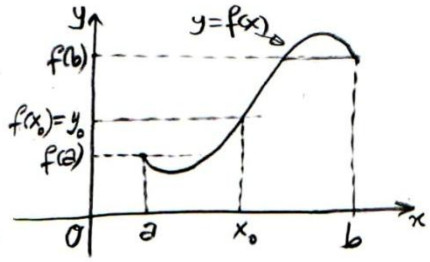
1° $f(x)+g(x)$ toplam fonksiyonlar; 2° $f(x)-g(x)$ fark fo.lar;

3° $f(x).g(x)$ çarpım fonksiyonlar; 4° $k.f(x)$ sabitle çarpım fo.nu

5° $\frac{f(x)}{g(x)}$, $(g(x_0)\neq 0)$ bölüm fo.lar 6° $f^{r/s}_{(x)}$ kuvvet fo.nu.

Teorem ② $f(x)$ fo.nu x_0 da sürekli, $g(x)$ fo.nu da $f(c)$ de sürekli ise $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ bileşke fo.nu da x_0 da süreklidir.

Teorem ③ $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli bir $f(x)$ fo.nu $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaki her değeri alır. Başka bir deyişle y_0, $f(a)$ ile $f(b)$ arasında herhangi bir değer ise bir $x_0\in[a,b]$ için $f(x_0)=y_0$ dır.



(Bu teoreme sürekli fonksiyonlar için Ara Değer Teoremi denir)

Teorem ④ $[a,b]$ de sürekli olan $y=f(x)$ fonksiyonu için $f(a)$ ve $f(b)$ görüntü değerleri farklı işarette ise $f(x)$ fonksiyonu bu aralıkta en az bir $x_0\in[a,b]$ için

$f(x_0)=0$ dır.