Ters fonksiyonlar – Ters trigonometrik fonksiyonlar:

Bire-bir ve örten bir f fonksiyonu A dan B ye $y=f(x)$ fonksiyon kuralı ile verilsin, yani

$$f : A \longrightarrow B$$
$$x \longrightarrow y=f(x)$$

$y=f(x)$ fonksiyon kuralında, x yerine y ve y yerine x yazmakla bulunan $x=f(y)$ ifadesinden y nin çekilmesiyle elde edilen $y=f^{-1}(x)$ ifadesi B den A ya f^{-1} ters fonksiyonunu (ters fo. kuralını) verir.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y=f(x)=2x-1$ fonksiyonunun ters fo.nu $y=2x-1$

$x=2y-1 \Rightarrow y=\frac{x+1}{2}=f^{-1}(x)$ dir.

Yani $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y=f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}$ dir.

Örnek: $f : \mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\} \longrightarrow \mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$

$x \longrightarrow y=f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ fo.nunun ters fonksiyon kuralını bulalım;

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow x=\frac{ay+b}{cy+d} \Rightarrow x(cy+d)=ay+b \text{ den}$$

$$(cx)y+dx=ay+b \Rightarrow (cx-a)\cdot y=-dx+b \text{ den}$$

$$y=f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$ bulunur. Yani ters fo.

$$f^{-1} : \mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\} \longrightarrow \mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}, \quad y=f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$ dir.

Örnek $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$ fo.nunun ters fonksiyonu $x=\sqrt[3]{y}$ den $y=f^{-1}(x)=x^3$ tür.

Yani $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y=f^{-1}(x)=x^3$ tür.

Örnek: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $y=f(x)=2^x$ fo.nunun ters fo.nu

$y=2^x \Rightarrow x=2^y$ nin iki tarafının 2 tabanlı logaritması alınırsa $\log_2 x = y \log_2 2 \Rightarrow y=f^{-1}(x)=\log_2 x$ dir. Yani

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad y=f^{-1}(x)=\log_2 x \quad \text{dir.}$$

Not: f nin tanım aralığı f^{-1} in değer aralığı olur
f nin değer aralığı f^{-1} in tanım aralığı olur.

Ayrıca f nin grafiğine ait bir (a_1, b_1) noktası, f^{-1} in grafiğinin (b_1, a_1) noktası olacağından f^{-1} in grafiği f nin grafiğinin birinci açıortay doğrusuna ($y=x$ doğrusu) göre simetriğidir.

Ters trigonometrik fonksiyonlar:

Sinüs, kosinüs, tanjant ve cotantant fonksiyonlarının terslerini bulabilmek için fonksiyonların herbirinin bire-bir ve örten olduğu tanım aralıkları seçilmelidir. Bunun için orijin civarında kesin artan yada azalan oldukları aralıkları seçerek bire-birlik ve örtenliğini sağlayabiliriz.

a) Sinüs fonksiyonunun ters fo.nu için, bire-bir ve örten olan

$$f=\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1] \quad , \quad y=f(x)=\sin x$$

$y=\sin x \Rightarrow x=\sin y$ ifadesinden y yi çekelim. Yani sinüsü x yapan yay (ark) y olup bu, yeni bir gösterimle $y=\operatorname{Arc}\sin x$ ile ifade edilebilir. Böylece $f=\sin$ fo.nunun ters fo.nu $f^{-1}=\operatorname{Arc}\sin$ fo.nu olup

$$f^{-1}=\operatorname{Arc}\sin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \longrightarrow y=f^{-1}(x)=\operatorname{Arc}\sin x \quad \text{dir.}$$

b) Kosinüs fo.nunun ters fonksiyonu için, bire-bir ve örten olan, $f=\cos$: $[0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$, $y=f(x)=\cos x$ olsun. $y=\cos x \Rightarrow x=\cos y$ ifadesinden y yi çekersek, $y=\mathrm{Arccos}\,x=f^{-1}(x)$ dir. Yani kosinüsü x eden yay (ark) y dir. Böylece

$$f^{-1}=\mathrm{Arccos} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$
$$x \longrightarrow y=f(x)=\mathrm{Arccos}\,x \quad \text{dir.}$$

$f(0)=\mathrm{Arccos}\,0=\frac{\pi}{2}$; $f(-1)=\mathrm{Arccos}(-1)=\pi$, $f(1)=\mathrm{Arccos}\,1=0$; $f(\frac{1}{2})=\mathrm{Arccos}\,\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, $f(-\frac{\sqrt{2}}{2})=\mathrm{Arccos}(-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3\pi}{4}$ dür.

Yani $\mathrm{Arccos}\,\frac{\sqrt{3}}{2}=?$ için $\mathrm{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2}=y \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\cos y$ den $y=\frac{\pi}{6}$ dır

c) Tanjant fo.nunun ters fo.nu için, yine 1-1 ve örten olacak biçimde $f=\tan$: $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \longrightarrow (-\infty,+\infty)$, $y=f(x)=\tan x$ olup, ters fo. için x yerine y, y yerine x yazarak

$y=\tan x \Rightarrow x=\tan y$ den $y=f^{-1}(x)=\mathrm{Arctan}\,x$; yani tanjantı x yapan yay y dir. Böylece ters fonk.

$$f^{-1}=\mathrm{Arctan} : (-\infty,+\infty) \longrightarrow (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$
$$x \longrightarrow y=f^{-1}(x)=\mathrm{Arctan}\,x \quad \text{dir.}$$

Bir kaç değer bulmak istersek; $f(0)=\mathrm{Arctan}\,0=0$,
$f(1)=\mathrm{Arctan}\,1=\frac{\pi}{4}$, $f(-\sqrt{3})=\mathrm{Arctan}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$,
$f(-1)=\mathrm{Arctan}(-1)=-\frac{\pi}{4}$, $f(\frac{1}{\sqrt{3}})=\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$ dır.

Acaba $\mathrm{Arctan}(-\frac{1}{\sqrt{3}})=?$ $\mathrm{Arctan}(-\frac{1}{\sqrt{3}})=y \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ için $\tan y=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ den tanjantı $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ yapan ve $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ aralığında olan yay $y=-\frac{\pi}{6}$ radyan dır.

d) <u>Kotanjant fo.nunun ters fo.nu</u> için bire-bir ve örten olan

$$f = \text{cotan} : (0, \pi) \longrightarrow (-\infty, +\infty) \quad , \quad y = f(x) = \text{cotan}\, x$$

fo.nunun ters fo.nunu bulalım. $y = \text{cotan}\, x$ den $x = \text{cotan}\, y$ olup, buradan $y = f^{-1}(x) = \text{Arccotan}\, x$ ve

$$f^{-1} = \text{Arccotan} : (-\infty, +\infty) \longrightarrow (0, \pi)$$
$$x \longrightarrow y = f^{-1}(x) = \text{Arccotan}\, x \quad \text{dır.}$$

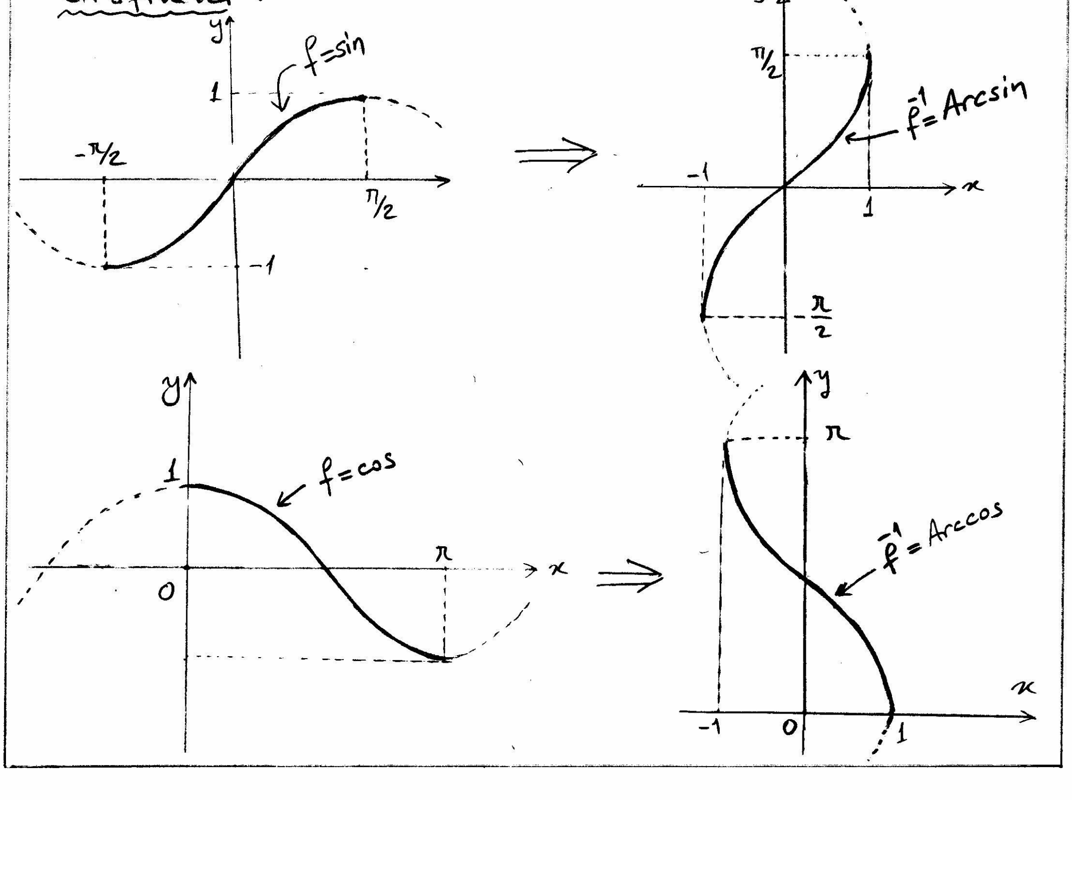
Birkaç değer bulalım; $f(0) = \text{Arccotan}\, 0 = \frac{\pi}{2}$,

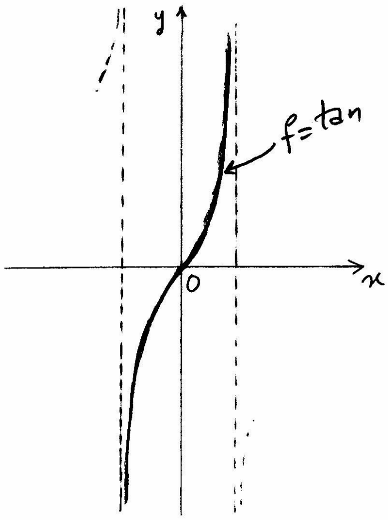
$f(-1) = \text{Arccotan}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \text{Arccotan}\, \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$ dır.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to 0} (\text{Arccotan}\, x) = \pi \quad ; \quad \lim_{x \to \infty} (\text{Arccotan}\, x) = 0$$

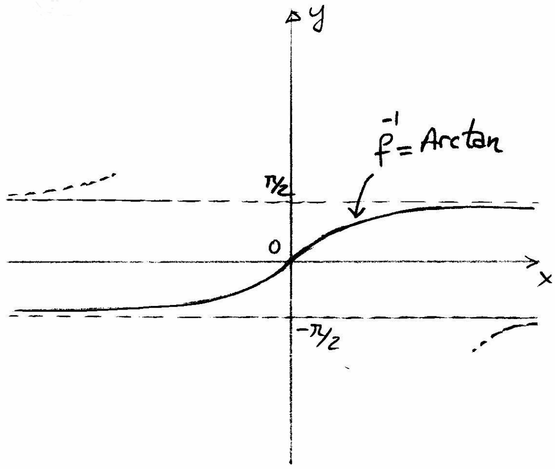
Benzer olarak $\lim_{x \to -\infty} (\text{Arctan}\, x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to \infty} (\text{Arctan}\, x) = \frac{\pi}{2}$ dur.

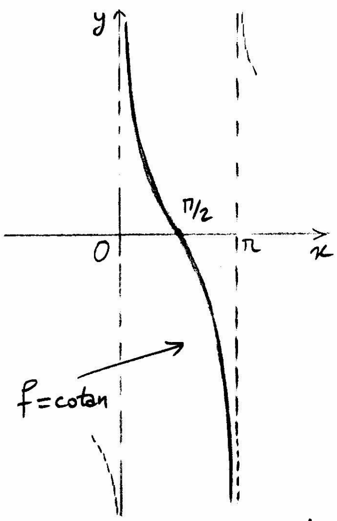
Grafikler:



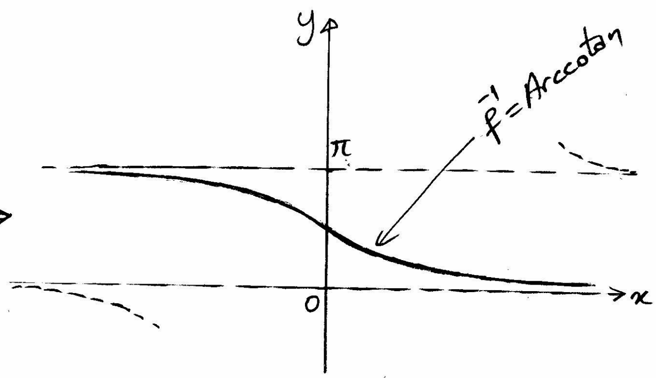


$\Rightarrow$





$\Rightarrow$



Ters trigonometrik özdeşlikler:

$\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b = ?$

$\mathrm{Arctan}\,a = \alpha$ dersek $a = \tan\alpha$

$\mathrm{Arctan}\,b = \beta$ dersek $b = \tan\beta$

$\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b = \alpha + \beta \;\Rightarrow\; \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta}$ den

$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{a+b}{1-a\cdot b}$ den $\alpha+\beta = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{a+b}{1-a\cdot b}$ olup

$$\boxed{\mathrm{Arctan}\,a + \mathrm{Arctan}\,b = \mathrm{Arctan}\,\frac{a+b}{1-ab}}$$ dır.

Benzer şekilde $\boxed{\text{Arctan}\, a - \text{Arctan}\, b = \text{Arctan}\, \frac{a-b}{1+a.b}}$ dır.

$\underbrace{\text{Arcsin}\, a}_{\alpha} + \underbrace{\text{Arcsin}\, b}_{\beta} = ?$ $\text{Arcsin}\, a = \alpha \Rightarrow \begin{array}{l} \sin\alpha = a \\ \cos\alpha = \sqrt{1-a^2} \end{array}$ dır

$\text{Arcsin}\, b = \beta$ dersek $\Rightarrow$ $\sin\beta = b$ ve $\cos\beta = \sqrt{1-b^2}$ dır.

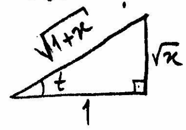
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = a.\sqrt{1-b^2} + \sqrt{1-a^2}.b$ den

$\alpha+\beta = \boxed{\text{Arcsin}\, a + \text{Arcsin}\, b = \text{Arcsin}\,(a.\sqrt{1-b^2} + \sqrt{1-a^2}.b)}$ dır.

Benzer biçimde $\boxed{\text{Arcsin}\, a - \text{Arcsin}\, b = \text{Arcsin}\,(a.\sqrt{1-b^2} - \sqrt{1-a^2}.b)}$

$\boxed{\text{Arccos}\, a - \text{Arccos}\, b = \text{Arccos}\,(a.b + \sqrt{1-a^2}.\sqrt{1-b^2})}$ dır

<u>Örnek:</u> $\cos(\text{Arctan}\sqrt{x})$ in x türünden eşidi ?



$\text{Arctan}\sqrt{x} = t$ dersek, uygun bir dik üçgenden

olup, bu üçgenden $\cos(\underbrace{\text{Arctan}\sqrt{x}}_{t}) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ dır.

<u>Örnek:</u> $f(x) = \text{Arctan}\, \frac{1+x}{1-x} - \text{Arctan}\, x$ sabit f.nu?

Özdeşlikten yararlanarak,

$f(x) = \text{Arctan}\, \frac{1+x}{1-1.x} - \text{Arctan}\, x = (\text{Arctan}\, 1 + \cancel{\text{Arctan}\, x}) - \text{Arctan}\, x$

$= \text{Arctan}\, 1 = \frac{\pi}{4} = \text{sbt.}$ tır.