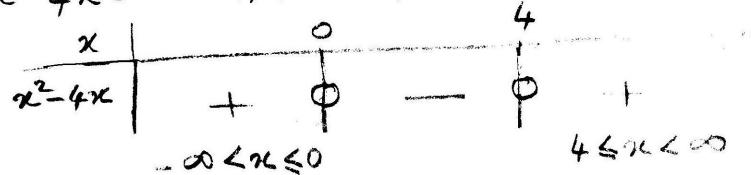


SORU ①: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x} + \ln \frac{x+1}{x-3}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.

Förgüm: $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$, $f_2(x) = \ln \frac{x+1}{x-3}$ iken f(x) fonksiyonu f_1 ve f_2 fonksiyonlarının tanım aralıklarının arakesitlidir. Buna göre

f_1 fonunu $x^2 - 4x \geq 0$ için tanımlı olsun

$$x^2 - 4x = x(x-4) \geq 0 \text{ dan}$$



f_1 fonunun tanım aralığı $T.A_1 = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$ dir.

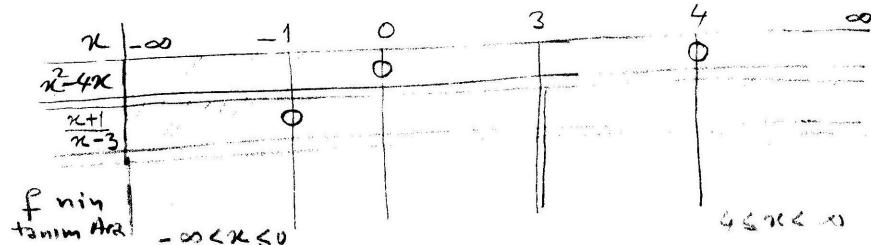
f_2 fonunu $\frac{x+1}{x-3} > 0$ için tanımlı olsun



f_2 fonunun tanım aralığı $T.A_2 = (-\infty, -1] \cup (3, +\infty)$ dir.

f fonunun $T.A. = T.A_1 \cap T.A_2 = (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$ dir.

Not:



SORU ③: $f(x) = \sqrt{\frac{4-x^2}{x}} + \arcsin\left(\log\frac{x}{10}\right)$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.

Gözüm: $f_1(x) = \sqrt{\frac{4-x^2}{x}}$ ve $f_2(x) = \arcsin\left(\log\frac{x}{10}\right)$ denilirse, f fonksiyonun tanım aralığı f_1 ve f_2 fonksiyonlarının tanım aralıklarının arakesitidir.

f_1 fonksiyonu $\frac{4-x^2}{x} \geq 0$ için tanımlıdır.

$$\frac{4-x^2}{x} = \frac{(2+x)(2-x)}{x} \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & -2 & 0 & \infty \\ \hline 2+x & + & 0 & + & + \\ 2-x & + & 0 & + & + \end{array}$$

f_1 fonksiyonun tanım aralığı $T.A_1 = (-\infty, -2] \cup (0, 2]$ dir.

f_2 fonksiyonun tanımı olması için $-1 \leq \log\frac{x}{10} \leq 1$ ve $\frac{x}{10} > 0$ olmalıdır. Yani $x > 0$ iken $-1 \leq \log\frac{x}{10} \leq 1$ olmalıdır.

$$-1 \leq \log\frac{x}{10} \leq 1 \Rightarrow -\log 10 \leq \log\frac{x}{10} \leq \log 10 \Rightarrow$$

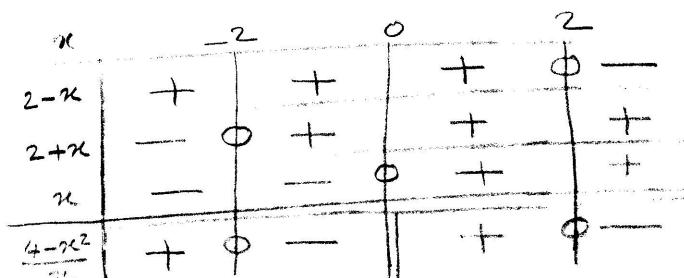
$$\log 10^{-1} \leq \log\frac{x}{10} \leq \log 10 \Rightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{x}{10} \leq 10 \text{ dan}$$

$1 \leq x \leq 100$ olup f_2 nin tanım aralığı $T.A_2 = [1, 100]$ dir.

f nin tanım aralığı $T.A = T.A_1 \cap T.A_2 = [1, 2]$ dir.

Not: f_1 fonksiyonun tanım aralığı için ek açıklaması:

$$4-x^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{(2-x)(2+x)}{x} \geq 0 \text{ dem}$$



SORU(3): $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos 2x) \cdot \ln(1+\sqrt{x})}{(\frac{2\sqrt{x}}{e}-1) \cdot (\tan 3x)^2} = ?$

$$\begin{aligned}
 & \text{Topluk: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos 2x) \cdot \ln(1+\sqrt{x})}{(\frac{2\sqrt{x}}{e}-1) \cdot \tan^2 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x \cdot \ln(1+\sqrt{x})}{\tan^2 3x \cdot (\frac{2\sqrt{x}}{e}-1)} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\tan^2 3x} \cdot \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\frac{2\sqrt{x}}{e}-1} \\
 & = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{=2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2}{9 \cdot \tan^2 3x} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x}}{2 \cdot (\frac{2\sqrt{x}}{e}-1)}}_{=\frac{1}{2}} = \\
 & = 2 \cdot 1 \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{9} \left(\frac{3x}{\tan 3x}\right)^2}_{=\frac{1}{9}} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{x}}{\frac{2\sqrt{x}}{e}-1}\right)}_{=\frac{1}{2}} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9}
 \end{aligned}$$

Not: $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ dir.

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1 \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan u}{u} = 1 \quad \text{Lütfen özel limitler}$$

SORU 4: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+6}{x+3} \right)^{2x+1} = ?$

Gözüm: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+6}{x+3} \right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3+3}{x+3} \right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x+3} \right)^{2x+1} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3}{x+3} \right)^{\frac{x+3}{3}} \right]^{\frac{3}{x+3} \cdot (2x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3}{x+3} \right)^{\frac{x+3}{3}} \right]^{6} =$$

$$= e^6 \text{ dir.}$$

Not: $\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^u = e$ dir. (özel limit.)

$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} (1+u) = e$ dir. (özel limit)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+3}{x+3} = \frac{6}{1} = 6 \text{ dir.}$$

Soru 5: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = ?$

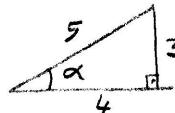
Gözüm: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x^2}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{-2\sin^2 \frac{x}{2}}} \right]^{\frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{-2\sin^2 \frac{x}{2}}} \right] \xrightarrow[e]{} e^{-\frac{2}{4}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} \text{ dir.}$$

SORU 6: $\sin(\arctan \frac{1}{7} + \arcsin \frac{3}{5}) = ?$

Föyüm: $\arcsin \frac{3}{5} = \alpha$ denilirse  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$

olup $\alpha = \arctan \frac{3}{4}$ dir. Yani $\arcsin \frac{3}{5} = \arctan \frac{3}{4}$ dir.

İle yandan $\arctan \frac{1}{7} + \arcsin \frac{3}{5} = \arctan \frac{1}{7} + \arctan \frac{3}{4} =$

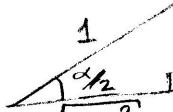
$$= \arctan \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = \arctan \frac{\frac{4+21}{28}}{\frac{28-3}{28}} = \arctan \frac{25/28}{25/28} =$$

$= \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ olduğundan

$$\sin(\arctan \frac{1}{7} + \arcsin \frac{3}{5}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ dir.}$$

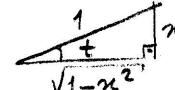
SORU 7: $\tan(2\arcsinx)$ in x türünden cııldı?

Föyüm: $2\arcsinx = \alpha$ denilirse $\arcsinx = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = x$ den



$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \text{ den}$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \frac{x}{1} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{1}}{\frac{1-x^2}{1} - \frac{x^2}{1}} = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2} \text{ dir.}$$

Not: II. bir yol $\arcsinx = t$ denilip 

$$\tan 2t = \frac{2 \tan t}{1 - \tan^2 t} = \frac{2 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1 - \frac{x^2}{1-x^2}} \text{ den}$$

$$\tan 2t = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1-x^2}{1-2x^2} = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2} \text{ dir.}$$

SORU ⑧: $2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}$ işleminin sonucunu bulunuz.

$$\text{+ öððüm: } 2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7} = \arctan \frac{1}{3} + (\arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}) =$$

$$= \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}} = \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{10/21}{20/21} =$$

$$= \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{2} = \arctan \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \arctan \frac{5/6}{5/6} =$$

$$= \arctan 1 = \frac{\pi}{4} // \text{ bulunur. (Not: } \arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-a \cdot b} \text{)}$$

$$\text{SORU ⑨: } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\ln \frac{x}{2} \right) \cdot \tan \frac{\pi x}{4} \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \frac{x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{4}} \cdot \sin \frac{\pi x}{4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{2} - 1 \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{4} \right)} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 2} \sin \frac{\pi x}{4}}_{=1} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \left(1 + \frac{x-2}{2} \right)}{\sin \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{x}{2} \right)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \left(1 + \frac{x-2}{2} \right)}{\sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2-x}{2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \left(1 + \frac{x-2}{2} \right)}{-\sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x-2}{2}} = - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \left(1 + \frac{x-2}{2} \right)}{\frac{x-2}{2}} \cdot \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x-2}{2}}{\frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x-2}{2}} =$$

$$= - \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = - \frac{2}{\pi} // \text{ bulunur.}$$

SORU(10): $f(x) = \frac{|\cos 2x|}{4x - \pi}$ fonksiyonunun $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ iken
soldan ve sağdan limitini bulunuz.

Gözüm: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{|\cos 2(\frac{\pi}{4} - p)|}{4(\frac{\pi}{4} - p) - \pi} =$

$\boxed{x = \frac{\pi}{4} - p}$
 $p > 0$

 $= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{|\cos(\frac{\pi}{2} - p)|}{\cancel{x - 4p + \pi}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{|\sin 2p|}{-4p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\sin 2p}{-2 \cdot 2p} = -\frac{1}{2} \text{ dir.}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{|\cos 2(\frac{\pi}{4} + p)|}{4(\frac{\pi}{4} + p) - \pi} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{|\cos(\frac{\pi}{2} + 2p)|}{\cancel{x + 4p - \pi}} =$$

$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + p}$
 $p > 0$

 $= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{|\cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos 2p - \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin 2p|}{4p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2p}{4p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2p}{2 \cdot 2p} = \frac{1}{2} \text{ dir.}$

Yani $f(\frac{\pi}{4} - 0) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = -\frac{1}{2}$; $f(\frac{\pi}{4} + 0) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \frac{1}{2}$ dir.

Not: $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$ dir.

SORU 11: $f(x) = \frac{|\ln x|}{x-1}$ fonsiyonun $x \rightarrow 1$ iken

soldan ve sağdan limitini bulunuz.

Fözyüm: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{|\ln(1-p)|}{(1-p)-1} = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{-\ln(1-p)}{-p} \stackrel{H}{\rightarrow} 1$ dir.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{|\ln(1+p)|}{x+p-1} = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{|\ln(1+p)|}{p} = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+p)}{p} \stackrel{(+)}{\rightarrow} 1$ dir

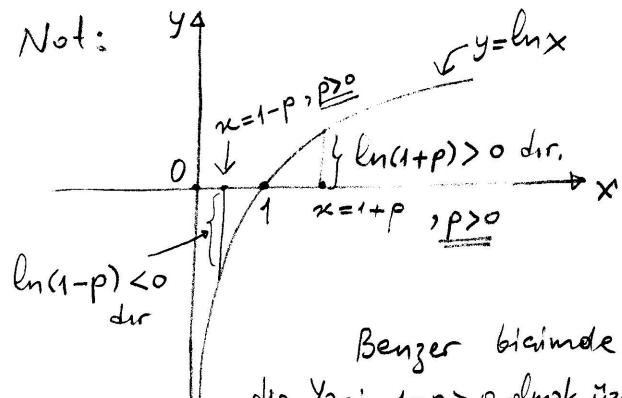
SORU 12: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 3}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x}{2}} = ?$

Fözyüm: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 3}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x}{2}} \stackrel{1^\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1 + 3x + 2}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x+2}{x^2+1} \right)^{\frac{x}{2}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3x+2}{x^2+1} \right)^{\frac{x^2+1}{3x+2}} \cdot \frac{3x+2}{x^2+1} \cdot \frac{x}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3x+2}{x^2+1} \right)^{\frac{x^2+1}{3x+2}} \right]^{\frac{3x^2+2x}{2}} \stackrel{3/2}{\rightarrow} e$ dir.

Not: $\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^u = e$; $\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{1/u} = e$ dir.

Bunlar birer özel limitdir.

Not: y



Yani; $p > 0$ iken

$1+p > 1$ olup her
iki yanın logaritması
alınırsa $\ln(1+p) > \ln 1 = 0$
olup $\ln(1+p) > 0$ dir.

Benzer biçimde $1-p < 1 \Rightarrow \ln(1-p) < \ln 1 = 0$

dir. Yani $1-p > 0$ olmak üzere, $p > 0$ iken $\ln(1-p) < 0$ dir.

SORU 13: $f(x) = \frac{x+1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ fonksiyonunun sürekli olduğu noktalar ve bu noktadaki süreksizliğin cinsini belirtiniz.

Gözüm: $x=1$ için $f(1) = \frac{1+1}{1+2^{\frac{1}{1-1}}} = \frac{2}{1+2^{\frac{1}{0}}} = \text{tanımsız}$ olduğundan $x=1$ de f tanımsızdır.

$x=1$ deli süreksizliğin cinsine gelince;

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{\substack{\uparrow \\ x=1-p \\ p>0}} \frac{(1-p)+1}{1+2^{\frac{1}{(1+p)-1}}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{2-p}{1+2^{\frac{1}{-\frac{1}{p}}}} = \frac{2}{1+0} = 2 \text{ dir.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{\substack{\uparrow \\ x=1+p \\ p>0}} \frac{(1+p)+1}{1+2^{\frac{1}{(1+p)-1}}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{2+p}{1+2^{\frac{1}{\frac{1}{p}}}} = 0 \text{ dir.}$$

O halde $x=1$ de I. cins ani sıyrımlı süreksizlik vardır.

Not: * $a > 1$ için $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$;

$a < 1$ için $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$ dir.

Örneğin, $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{0}} = 2^\infty = \infty$ dir,

$\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{0^-}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^\infty} \rightarrow 0$ dir.

* Bu soruda h yerine, her zaman pozitifliğini de vurgulamak için p harfi kullanıldı. Zira safdan soldan limit çalısmalarındaki h daima pozitiftir. Tanımdan hareketle türerde kullanılan h ise pozitif ya da negatif olabilir. Biz bu h yerine de Δx almayı yeğliyoruz (tercih ediyoruz).

SORU(14): f fonksiyonu I aralığında tanımlı ve pozitif değerler alınsın. f fonksiyonu artan ise $\frac{1}{f}$ fonksiyonunun azalan olduğunu gösteriniz.

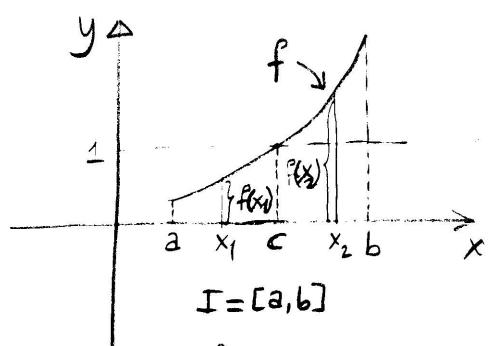
Gözüm: f fonksiyonu I de artan olduğundan her $x_1, x_2 \in I$ ve $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ dir. Yani $f(x_1) - f(x_2) < 0$ dir.

$$x_1 < x_2 \text{ iken } \frac{1}{f(x_1)} - \frac{1}{f(x_2)} = \frac{\cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)}}{\cancel{f(x_1)} \cdot \cancel{f(x_2)}} \stackrel{(+)}{>} 0 \text{ dir. Yani}$$

$$\frac{1}{f(x_1)} - \frac{1}{f(x_2)} \stackrel{(+)}{>} 0 \text{ dir, Yani } x_1 > x_2 \text{ iken } \frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)} \text{ dir.}$$

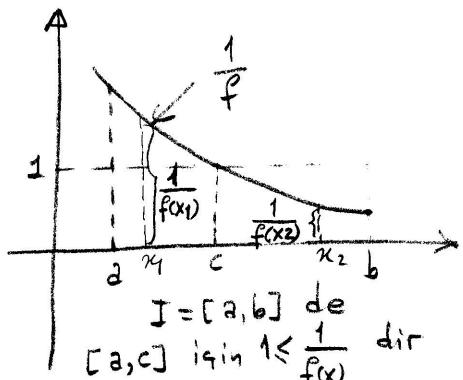
Bu ise $\frac{1}{f}$ fonksiyonunun azalan olduğunu gösterir.

Not: Bu problem ikişin aşağıdaki açıklaması, grafikleri de sizebiliriz.



$[a, c] \text{ da } 0 < f(x) \leq 1$
 $[c, b] \text{ da } 1 \leq f(x) \text{ dir.}$

$x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ dir.



$x_1 < x_2$ iken $\frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)}$ dir.

NOT: Bu 14.soruda kısaca, “ $x_1 < x_2$ için $0 < f(x_1) < f(x_2)$ ise eşitsizlik özelliğinden $\frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)}$ dir.” denilebilirdi.

Ayrıca 10. sayfanın altıncı satırındaki son büyük kesrin payındaki ilk fonksiyon $f_2(x)$ değil $f(x_2)$ olacak. Düzeltir, özür dileriz. Gözden kaçan başka hataları bildirirseniz seviniriz. Ayrıca 7. sayfanın dördüncü satırındaki ilk kesrin payındaki mutlak değerin içi $\cos(\frac{\pi}{2} - 2p)$ olacaktır.

Soru 15: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{9x^2 + 12x + 5} + 3x + 4] = ?$

Gözüm: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})} =$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{a} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{a} \sqrt{(x + \frac{b}{2a})^2} =$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{a} |x + \frac{b}{2a}| = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{a}(x + \frac{b}{2a}) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{a}[-(x + \frac{b}{2a})] \end{cases}$ dir.

Buna göre:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{9x^2 + 12x + 5} + 3x + 4] \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{9}|x + \frac{12}{2 \cdot 9}| + 3x + 4] =$$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} [3(-x - \frac{2}{3}) + 3x + 4] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x - 2 + 3x + 4) = 4 - 2 = \underline{\underline{2}}$ bulunur

Not: II. yol: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[\sqrt{9x^2 + 12x + 5} + 3x + 4]}{1} =$
 $[\sqrt{9x^2 + 12x + 5} - (3x + 4)]$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^2 + 12x + 5 - (3x^2 + 24x + 16)}{\sqrt{9x^2 + 12x + 5} - (3x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x - 11}{|x| \sqrt{9 + \frac{12}{x^2} + \frac{5}{x^2}} - 3x - 4} =$$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x(12 + \frac{11}{x})}{-x \sqrt{9 + \frac{12}{x^2} + \frac{5}{x^2}} - 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x(12 + \frac{11}{x})^0}{-x(\sqrt{9 + \frac{12}{x^2} + \frac{5}{x^2}} + 3 + \frac{4}{x})^0} =$
 $= \frac{12}{\sqrt{9} + 3} = \frac{12}{3+3} = \frac{12}{6} = \underline{\underline{2}}$ bulunur

Not: $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x)$ dir.

SORU 16: $f(x) = \sec x$ fonksiyonun türevinin $f'(x) = \sec x \cdot \tan x$ olduğunu türevin tanımından harekette (limit yolundan) gösteriniz.

Gözüm:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sec(x+\Delta x) - \sec x}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos(x+\Delta x)} - \frac{1}{\cos x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot \cos(x+\Delta x) \cdot \cos x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x+(x+\Delta x)}{2} \cdot \sin \frac{x-(x+\Delta x)}{2}}{\Delta x \cdot \cos(x+\Delta x) \cdot \cos x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin \frac{-\Delta x}{2}}{\Delta x \cdot \cos(x+\Delta x) \cdot \cos x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \cdot \sin(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin \frac{-\Delta x}{2}}{2 \cdot (\frac{-\Delta x}{2}) \cdot \cos(x+\Delta x) \cdot \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x \cdot \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \\
 &= \sec x \cdot \tan x // \text{bulunur.}
 \end{aligned}$$

Not: Bu soruyu Δx yerine h yazıp $h \rightarrow 0$ isin limiti alınır.
 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ dir, $\cos p - \cos k = -2 \sin \frac{p+k}{2} \cdot \sin \frac{p-k}{2}$ dir.

SORU 17: $f(x) = a^x$ in, tanımdan harekette, türevi nedir?

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot \ln a}{\ln(1+t)} = \\
 &= a^x \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot \ln a}{\ln(1+t)} = a^x \cdot \ln a // \text{bulunur.}
 \end{aligned}$$

Not: Bu soruda kitaptaki gibi h artma miktarı (poz. veya neg.) kullanılmıştır. Size aynı soruyu $h = \Delta x$ yazarak yeniden göğünüz.

SORU 18: $f(x) = \sin^2 x$ fonksiyonunun türevinin $f'(x) = \sin 2x$ olduğunu, türevin tanımından hareketle (limit yolundan) gösteriniz.

$$\begin{aligned}
 \text{Gözüm: } f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x+\Delta x) - \sin^2 x}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[\sin(x+\Delta x) + \sin x] \cdot [\sin(x+\Delta x) - \sin x]}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [\sin(x+\Delta x) + \sin x] \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \\
 &\quad = 2 \sin x \\
 &= 2 \sin x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{(x+\Delta x)+x}{2} \cdot \sin \frac{(x+\Delta x)-x}{2}}{\Delta x} = \\
 &= 2 \sin x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}} = 2 \sin x \cdot \cos x = \underline{\underline{\sin 2x}}
 \end{aligned}$$

bulunur.

Not: $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$ dir.

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1 \text{ dir (özel limit)}$$

Ek sorular: Aşağıdaki fonksiyonların her birinin türevinin katsılarında yazılı formlar olduğunu tanımdan hareketle gösteriniz:

$$* f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \text{ dir.}$$

$$* f(x) = e^{3x} \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot e^{3x} \text{ dir.}$$

$$* f(x) = 2^{5x} \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot 2^{5x} \cdot \ln 2 \text{ dir.}$$

$$* f(x) = e^{\sin x} \Rightarrow f'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x} \text{ dir.}$$

$$* f(x) = \operatorname{sh} x \Rightarrow f'(x) = \operatorname{ch} x \text{ dir.}$$

$$* f(x) = \operatorname{ch} x \Rightarrow f'(x) = \operatorname{sh} x \text{ dir.}$$

$$* f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x \text{ dir.}$$

SORU 19: $f(x) = \log_a x$ in türevinin $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ olduğunu türevin tanımından hareketle (limit yolu ile) gösteriniz.

Gözüm:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + \frac{\Delta x}{x})}{x \cdot \frac{\Delta x}{x}} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \\
 &= \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln a} // \text{ dir.}
 \end{aligned}$$

Not: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ dir. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ dir.

Ek sorular: Aşağıdaki herbir fonksiyonun türevinin kesişimlerinde yazılı formalar olduğunu, tanımdan hareketle gösteriniz

* $f(x) = \tan^2 x \Rightarrow f'(x) = 2 \tan x \cdot (1 + \tan^2 x)$ dir.

* $f(x) = \log_3 3x \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{3x \cdot \ln 2} = \frac{1}{x \cdot \ln 2}$ dir.

* $f(x) = \ln \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2x}$ dir.

* $f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x}$ dir.

* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2x \cdot \sqrt{x}}$ dir.

SORU (20): $f(x) = \sqrt{1+x}$ fonksiyonunun türevini, türevin tanımından hanelikle (limit yolundan) bulunuz.

Cözüm:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+(x+\Delta x)} - \sqrt{1+x}}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+(x+\Delta x)} - \sqrt{1+x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + (x+\Delta x) - (x+\Delta x)}{\Delta x \cdot (\sqrt{1+x+\Delta x} + \sqrt{1+x})} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot (\sqrt{1+x+\Delta x} + \sqrt{1+x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x+\cancel{\Delta x}} + \sqrt{1+x}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}
 \end{aligned}$$

bulunur.

SORU (21): $f(x) = \operatorname{Arctan} x$ in türevinin $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ olduğunu türevin tanımından hareketle (limit yolundan) gösteriniz.

Fözüm:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctan}(x+\Delta x) - \operatorname{Arctan} x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctan} \frac{x+\Delta x - x}{1+(x+\Delta x) \cdot x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctan} \frac{\Delta x}{1+(x+\Delta x) \cdot x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctan} \frac{\Delta x}{1+(x+\Delta x) \cdot x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctan} \frac{\Delta x}{1+(x+\Delta x) \cdot x}}{[\cancel{1+(x+\Delta x) \cdot x}] \cdot \frac{\Delta x}{\cancel{1+(x+\Delta x) \cdot x}}} = \frac{1}{1+(x+0) \cdot x} = \frac{1}{1+x^2} \text{ bulunur.}$$

Not: Bu soru, tanımdan hareketle değil de bileske fonksiyonun türevi yolundan çözülmek istenseydi;

$y = f(x) = \operatorname{Arctan} x \Leftrightarrow \tan y = x$ olup her ikisi de x 'e göre türevi alınırsa (y nin x 'in bir fonksiyonu olduğu gözönünde tutularak)

$$\frac{d(\tan y)}{dx} = \frac{d(\tan y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d(x)}{dx} \Rightarrow (1 + \tan^2 y) \cdot y' = 1 \text{ den}$$

$$y' = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2} \text{ bulunurdu. Yani } (\operatorname{Arctan} x)' = \frac{1}{1+x^2} \text{ dir.}$$

$\tan y = x$ old.