A. N. Kolmogorov, A new metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1958, Volume 119, Number 5, 861–864

Доклады Академии наук СССР
1958. Том 119, № 5

МАТЕМАТИКА

Академик А. Н. КОЛМОГОРОВ

НОВЫЙ МЕТРИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ ТРАНЗИТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И АВТОМОРФИЗМОВ ПРОСТРАНСТВ ЛЕБЕГА

Хорошо известно, что значительная часть метрической теории динамических систем может быть изложена как абстрактная теория «потоков» $\{S_t\}$ на «пространствах Лебега» M с мерой μ в терминах, инвариантных по отношению к «изоморфизмам по модулю нуль» (см. обзорную статью В. А. Рохлина [1], к которой дальнейшее изложение примыкает в отношении определений и обозначений). Меру на M мы будем предполагать нормированной условием

$$\mu(M) = 1 \tag{1}$$

и нетривиальной (т. е. предполагать существование множества $A \subseteq M$ с $0 < \mu(A) < 1$). Известно много примеров транзитивных автоморфизмов и транзитивных потоков с так называемым «счетнократным лебеговским спектром» (для автоморфизмов см. [1], § 4, для потоков [2-5]). Со спектральной точки зрения мы имеем здесь один тип автоморфизмов $\mathfrak{L}_0^\omega$ и один тип потоков $\mathfrak{L}^\omega$. Вопрос о том, не являются ли все автоморфизмы типа $\mathfrak{L}_0^\omega$ (соответственно, потоки типа $\mathfrak{L}^\omega$) друг другу изоморфными mod 0, оставался до сих пор открытым. Мы показываем в §§ 3—4, что ответ на этот вопрос отрицателен как в случае автоморфизмов, так и в случае потоков. Новый инвариант, позволяющий расщепить класс автоморфизмов $\mathfrak{L}_0^\omega$ и класс потоков $\mathfrak{L}^\omega$ на континуум инвариантных подклассов, есть *энтропия на единицу времени*. В § 1 излагаются необходимые сведения из теории информации (вводимые здесь понятия условной энтропии и условной информации и их свойства имеют, вероятно, и более широкий интерес, хотя все изложение непосредственно примыкает к определению количества информации из [7] и многочисленным работам, развивающим это определение. В § 2 дается определение характеристики h и доказывается ее инвариантность. В §§ 3—4 указываются примеры автоморфизмов и потоков с произвольными значениями h в пределах $0 < h \leqslant \infty$. В случае автоморфизмов дело идет о примерах давно построенных, в случае потоков построение примеров с конечным h — задача более деликатная и связанная с некоторыми любопытными вопросами теории марковских процессов.

§ 1. *Свойства условной энтропии и условного количества информации.* В соответствии с [1], обозначаем через $\mathfrak{S}$ булевскую алгебру измеримых множеств пространства M, рассматриваемых mod 0. Пусть $\mathfrak{C}$ — замкнутая в метрике $\rho(A, B) = \mu((A - B) \cup (B - A))$ подалгебра алгебры $\mathfrak{S}$. Она порождает определенное mod 0 разбиение $\xi_{\mathfrak{C}}$ пространства M, определяемое тем условием, что $A \in \mathfrak{C}$ в том и только в том случае, когда mod 0 все A может быть составлено из полных элементов разбиения $\xi_{\mathfrak{C}}$. На элементах C разбиения $\xi_{\mathfrak{C}}$ определяется «каноническая система мер μ_C» [1]. Для любого $x \in C$ будем считать

$$\mu_x(A \mid \mathfrak{C}) = \mu_C(A \cap C). \tag{2}$$

С точки зрения теории вероятностей (где любая измеримая функция элемента $x \in M$ называется «случайной величиной») случайная величина $\mu_x(A \mid \mathfrak{C})$ есть «условная вероятность» события A при известном исходе «испытания» $\mathfrak{C}$ ([6], гл. I, § 7).

Для трех подалгебр $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ алгебры $\mathfrak{S}$ и $c \in \xi_{\mathfrak{C}}$ положим:

$$I_C(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}) = \sup \sum_{i,j} \mu_x(A_i \cap B_j) \log \frac{\mu_x(A_i \cap B_j)}{\mu_x(A_i)\,\mu_x(B_j)}, \tag{3}$$

где верхняя грань берется по всем конечным разложениям $M = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \ldots \cup A_n$, $M = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$, для которых $A_i \cap A_j = N$, $B_i \cap B_j = N$, $i \neq j$, $A_i \in \mathfrak{A}$ $B_j \in \mathfrak{B}$ (N — пустое множество). Если $\mathfrak{C}$ есть тривиальная алгебра $\mathfrak{N} = \{N, M\}$, то (3) переходит в определение безусловной информации $I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ из приложения 7 к ([7])*. Сама величина (3) интерпретируется как «количество информации в результатах испытания $\mathfrak{A}$ относительно испытания $\mathfrak{B}$ при известном исходе C испытания $\mathfrak{C}$». Если не фиксировать $C \in \xi_{\mathfrak{C}}$, то естественно рассматривать случайную величину $I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C})$, которая при $x \in C$ равна $I_x(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}) = I_C(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C})$. Далее мы будем иметь дело с ее математическим ожиданием

$$\mathbf{M} I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}) = \int_M I_x(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C})\, \mu(dx). \tag{4}$$

Не требуют особых пояснений определения условной энтропии и средней условной энтропии $H(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{C}) = I(\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \mid \mathfrak{C})$, $\mathbf{M} H(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}) = \int_M H_x(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{C}) \mu(dx)$.

Отметим те свойства условного количества информации и условной энтропии, которые нам понадобятся далее. Свойства (α) и (δ) для случая безусловных количества информации и энтропии общеизвестны, свойство (ε) для безусловного количества информации составляет содержание теоремы 2 из заметки ([8]). Свойства (β) и (γ) доказываются без труда. По поводу свойства (β) следует лишь заметить, что аналогичное предложение для количества информации (из $\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{C}'$ вытекает: $I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}) \leqslant I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}')$) было бы уже ошибочным. С этим связано то обстоятельство, что в свойстве (ζ) стоит нижний предел и знак $\geqslant$: соответствующий предел может не существовать, а нижний предел может в некоторых случаях оказаться больше $\mathbf{M} I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C})$.

(α) $I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}) \leqslant H(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{C})$, *равенство заведомо достигается при* $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$.

(β) *Если* $\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{C}'$, *то* $H(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{C}) \leqslant H(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{C}')$, $\mathrm{mod}\, 0$.

(γ) *Если* $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{B}'$, *то* $\mathbf{M} I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}) = \mathbf{M} I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}' \mid \mathfrak{C}) + \mathbf{M} I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C} \vee \mathfrak{B})$, *где* $\mathfrak{C} \vee \mathfrak{B}'$ — *минимальная замкнутая алгебра, содержащая* $\mathfrak{C}$ *и* $\mathfrak{B}'$.

(δ) *Если* $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{B}'$, *то* $\mathbf{M} I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}) \geqslant \mathbf{M} I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}' \mid \mathfrak{C})$.

(ε) *Если* $\mathfrak{A}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}_n \subseteq \ldots$, $\bigcup_n \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}$, *то* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} I(\mathfrak{A}_n, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}) = \mathbf{M} I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C})$.

(ζ) *Если* $\mathfrak{C}_1 \supseteq \mathfrak{C}_2 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{C}_n \supseteq \ldots$, $\bigcap_n \mathfrak{C}_n = \mathfrak{C}$, *то* $\lim_{n\to\infty} \inf \mathbf{M} I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C}_n) \geqslant \geqslant \mathbf{M} I(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \mid \mathfrak{C})$.

§ 2. Определение инварианта h. Будем говорить, что поток $\{S_t\}$ квазирегулярен (имеет тип $\mathfrak{K}$), если** существует замкнутая подалгебра $\mathfrak{S}_0$ алгебры $\mathfrak{S}$, сдвиги которой $\mathfrak{S}_t = S_t \mathfrak{S}_0$ обладают следующими свойствами: (I) $\mathfrak{S}_t \subseteq \mathfrak{S}_{t'}$, если $t \leqslant t'$. (II) $\bigcup_t \mathfrak{S}_t = \mathfrak{S}$. (III) $\bigcap_t \mathfrak{S}_t = \mathfrak{N}$.

---

* Авторы заметки ([8]) не обратили своевременно внимания на приложение 7 к ([7]), не включенное в русский перевод ([9]). Заметка ([8]) должна была бы начинаться со ссылки на это приложение к ([7]).

** Это условие значительно слабее, чем условия «регулярности», обычно употребляемые в теории случайных процессов. См. об этом в конце § 4.

При интерпретации потока как стационарного случайного процесса $\mathfrak{S}_t$ может рассматриваться как алгебра событий, «зависящих лишь от течения процесса до момента времени t». Легко доказывается, что потоки типа $\mathfrak{R}$ транзитивны, а из результатов Плеснера ([10], [11]) можно вывести, что они имеют однородный лебеговский спектр. Если кратность спектра равна ν ($\nu = 1, 2, \ldots, \omega$), то отнесем поток к типу $\mathfrak{R}^{\nu}$. Очевидно, что $\mathfrak{R}^{\nu} \subseteq \mathfrak{L}^{\nu}$, где $\mathfrak{L}^{\nu}$ — класс потоков с лебеговским спектром однородной кратности ν. Возможно, впрочем, что все $\mathfrak{L}^{\nu}$ (и, следовательно, $\mathfrak{R}^{\nu}$), кроме $\mathfrak{L}^{\omega}(\mathfrak{R}^{\omega})$, пусты и что $\mathfrak{R}^{\omega} = \mathfrak{L}^{\omega}$.

Теорема 1. *Если для потока* $\{S_t\}$ *существует* $\mathfrak{S}_0$, *удовлетворяющее условиям* (I) — (III), *то при* $\Delta > 0$ $\mathbf{M} H(\mathfrak{S}_{t+\Delta} \mid \mathfrak{S}_t) = h\Delta$, *где* h — *константа, лежащая в пределах* $0 < h \leqslant \infty$.

Теорема 2. *Константа* h *для данного потока* $\{S_t\}$ *не зависит от выбора* $\mathfrak{S}_0$, *удовлетворяющего условиям* (I)—(III).

Наметим здесь доказательство теоремы 2. Пусть двум $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_0'$ соответствуют $h < \infty$ и h'. В силу теоремы 1 и лемм (α) и (ε) для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое k, что

$$h = \mathbf{M} H(\mathfrak{S}_{t+1} \mid \mathfrak{S}_t) = \mathbf{M} I(\mathfrak{S}_{t+1}, \mathfrak{S} \mid \mathfrak{S}_t) \leqslant \mathbf{M} I(\mathfrak{S}_{t+1}, \mathfrak{S}_{t+k}' \mid \mathfrak{S}_t) + \varepsilon. \tag{5}$$

Из (5), в силу леммы (ζ), вытекает существование такого m, что

$$h \leqslant \mathbf{M} I(\mathfrak{S}_{t+1}, \mathfrak{S}_{t+k}' \mid \mathfrak{S}_t \vee \mathfrak{S}_s') + 2\varepsilon \quad \text{при } t - s \geqslant m. \tag{6}$$

Из (6) и лемм (δ), (γ), (α), (β) (применять в указанном порядке!):

$$\begin{aligned}
nh &\leqslant \sum_{t=0}^{n-1} \mathbf{M} I(\mathfrak{S}_{t+1}, \mathfrak{S}_{t+k}' \mid \mathfrak{S}_t \vee \mathfrak{S}_{-m}') + 2n\varepsilon \leqslant && (\delta)\\
&\leqslant \sum_{t=0}^{n-1} \mathbf{M} I(\mathfrak{S}_{t+1}, \mathfrak{S}_{n+k}' \mid \mathfrak{S}_t \vee \mathfrak{S}_{-m}') + 2n\varepsilon = && (\gamma)\\
&= \mathbf{M} I(\mathfrak{S}_x, \mathfrak{S}_{n+k}' \mid \mathfrak{S}_0 \vee \mathfrak{S}_{-m}') + 2n\varepsilon \leqslant && (\alpha)\\
&\leqslant \mathbf{M} H(\mathfrak{S}_{n+k}' \mid \mathfrak{S}_0 \vee \mathfrak{S}_{-m}') + 2\varepsilon n \leqslant && (\beta)\\
&\leqslant \mathbf{M} H(\mathfrak{S}_{n+k}' \mid \mathfrak{S}_{-m}') + 2n\varepsilon = \\
&= (n + k + m)\, h' + 2n\varepsilon,
\end{aligned}$$

$$h \leqslant \frac{n+k+m}{n} h' + 2\varepsilon. \tag{7}$$

Так как $\varepsilon > 0$ и n произвольны (причем n выбирается после фиксирования k и m), то из (7) вытекает неравенство $h \leqslant h'$. Это неравенство вполне аналогично доказывается и в случае $h = \infty$. Аналогично доказывается обратное неравенство $h' \leqslant h$, чем и заканчивается доказательство теоремы 2.

§ 3. Инварианты автоморфизмов. Если в § 2 считать, что t принимает только целые значения, то $\{S_t\}$ однозначно определяется автоморфизмом $T = S_1$. В силу теорем 1 и 2 существует инвариант $0 < h(T) \leqslant \infty$.

Легко доказывается, что любой автоморфизм типа $\mathfrak{R}_0$ (индекс стоит для отличия от случая потоков с непрерывным временем) имеет счетнократный лебеговский спектр, т. е. из классов $\mathfrak{R}_0^{\nu}$ не пуст только класс $\mathfrak{R}_0^{\omega} \subseteq \mathfrak{L}_0^{\omega}$. Он распадается по значениям $h(T)$ на классы $\mathfrak{R}_0^{\omega}(h)$.

Теорема 3. *Для любого* h, $0 < h \leqslant \infty$, *существует автоморфизм, принадлежащий* $\mathfrak{R}_0^{\omega}(h)$.

Соответствующие примеры хорошо известны и получаются, например, из схемы независимых случайных испытаний $\mathfrak{L}_{-1}, \mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_t, \ldots$ с распределением вероятностей исхода ξ_t испытания $\mathfrak{L}_t$

$$\mathbf{P}\{\xi_t = a_i\} = p_i, \qquad -\sum_{i=1}^{\infty} p_i \log p_i = h. \tag{8}$$

Пространство M составляется из последовательностей $x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_t, \ldots)$, $x_t = a_1, a_2, \ldots$, а сдвиг $Tx = x'$ определяется формулой $x'_t = x_{t-1}$. Мера μ на M определяется как прямое произведение вероятностных мер (8).

§ 4. Инварианты потоков.

Теорема 4. *Для любого h, $0 < h < \infty$, существует поток класса $\mathfrak{R}^{\omega}(h)$, т. е. поток со счетнократным лебеговским спектром и заданным значением константы h.*

По аналогии с § 3 естественно возникает идея — воспользоваться для доказательства теоремы 4 вместо схемы дискретных независимых испытаний схемой «процессов с независимыми приращениями», или обобщенных процессов «с независимыми значениями» ([12],[13]). Однако этот путь приводит лишь к потокам класса $\mathfrak{R}^{\omega}(\infty)$ ([5]). Для получения конечных значений h приходится воспользоваться более искусственным построением. В этой заметке возможно только дать описание одного из таких построений.

Определим взаимно независимые случайные величины ξ_n, соответствующие всем целым n, распределениями их значений: $\mathbf{P}(\xi_0 = k) = 3/4^k$, $k = 1, 2, \ldots$, а при $n \neq 0$ $\mathbf{P}\{\xi_n = k\} = 1/2^k$, $k = 1, 2, \ldots$ Точку τ_0 на оси t расположим в случае $\xi_0 = k$ с равномерным распределением вероятностей на отрезке $-u/2^k \leqslant \tau_0 \leqslant 0$, а точки τ_n при $n \neq 0$ определим из соотношения $\tau_{n+1} = \tau_n + u/2^{\xi_n}$.

Положим $\varphi(t) = \xi_n$ при $\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}$. Легко проверить, что распределение случайной функции $\varphi(t)$ инвариантно по отношению к сдвигам $S_t\varphi(t_0) = \varphi(t_0 - t)$. Легко подсчитать, что $h\{S_t\} = 6/u$ (на единицу времени падает в среднем $3/u$ точек τ_n, а на каждое ξ_n приходится энтропия $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2$).

Можно получить более наглядное представление о нашем случайном процессе, если включить в описание его состояния $\omega(t)$ в момент времени t, кроме величины $\varphi(t)$, еще значение $\delta(t) = t - \tau^*(t)$ разности между t и ближайшей слева от t точки τ_n. При таком способе описания наш процесс оказывается стационарным марковским процессом. Он заслуживает лишь название «квазирегулярного», так как, хотя соответствующая ему динамическая система транзитивна, значение разности $f(\omega(t), t) = \tau^*(t) = t - \delta(t)$ определяется с точностью до двоично рационального слагаемого поведением реализации процесса в сколь угодно далеком прошлом.

Поступило
21 I 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Рохлин, Усп. матем. наук, 4, 2 (30) (1949). [2] И. М. Гельфанд, С. В. Фомин, Усп. матем. наук, 7, 1 (47) (1952). [3] С. В. Фомин, Укр. матем. журн., 2, № 2, (1950). [4] K. Itô, Japan J. Math., 22, 63 (1952). [5] K. Itô, Trans. Am. Math. Soc., 81, 253 (1956). [6] Дж. л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, 1956. [7] C. E. Shannon, W. Weaver, The Mathematical Theory of Communications, 1949. [8] И. М. Гельфанд, А. Н. Колмогоров, А. М. Яглом, ДАН, 111, №4 (1956). [9] К. Шэннон, Сборн. Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, ИЛ, 1953. [10] А. И. Плеснер, ДАН, 23, № 4 (1939). [11] А. И. Плеснер, ДАН, 25, № 9 (1939). [12] K. Itô, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 18, № 3 (1954). [13] И. М. Гельфанд, ДАН, 100, № 5 (1955).