Principia Mathematica

RABAUD-CASOLI NoÃ©

16 avril 2018

Table des matières

PrÃ©face

Le livre que vous Ãªtes en train de lire traite de l'Ã©tude mathÃ©matique des principes des mathÃ©matiques. Cette Ã©tude est nÃ©e de la fusion de deux domaines d'Ã©tudes diffÃ©rents. D'une part, la gÃ©omÃ©trie et l'analyse qui sont deux domaines dans lesquelles les mathÃ©maticiens on cherchÃ© Ã formuler et systÃ©matiser les axiomes, ainsi que les travaux de Cantor et d'autres mathÃ©maticiens sur des sujets tels que la thÃ©orie des agrÃ©gats. Et d'autre part, la logique symbolique, qui a maintenant acquis, grÃ¢ce Ã PÃ©ano et ses Ã©mules, la rigueur et l'exhaustivitÃ© nÃ©cessaire au traitement de ce qui est Ã ce jour le fondement des mathÃ©matiques. De cette fusion rÃ©sulte, principalement, que ce qui Ã©tait considÃ©rÃ© tacitement ou explicitement comme un axiome Ã©tait soit dÃ©montrable soit inutile ; mais aussi que des mÃ©thodes semblables Ã celle utilisÃ©es pour dÃ©montrer ces soit-disant axiomes, pouvait Ãªtre utilisÃ©es dans des domaines considÃ©rÃ©s jusqu'Ã prÃ©sent comme inaccessibles Ã notre entendement, comme les infinis, et permettre d'obtenir des rÃ©sultats de grande importance. De ce fait, le domaine des mathÃ©matiques se voit Ã©tendues par l'ajout de nouveaux champs de recherches, mais aussi par d'une rÃ©flexion sur ses fondation, dans un domaine jusqu'Ã prÃ©sent abandonnÃ© aux philosophes.

Lorsque nous avons commencÃ© Ã Ã©crire cet ouvrage en 1900, c'Ã©tait dans le but de fournir un second volume aux *Principes des MathÃ©matiques*[1] mais plus nous progression dans notre Ã©tude plus il devint Ã©vident que le sujet Ã©tait bien plus vaste que nous ne l'avions supposÃ© ; par ailleurs, sur de nombreuses questions fondamentales que nous avions laissÃ© en suspend dans le premier volume, nous sommes Ã prÃ©sent arrivÃ© Ã des rÃ©solutions qui nous semblent satisfaisantes. C'est pourquoi il Ã©tait nÃ©cessaire que notre ouvrage soit Ã©crit de maniÃ¨re indÃ©pendante des *Principes des MathÃ©matiques*. Cependant nous avons mis de cotÃ© les domaines controversÃ©s ou gÃ©nÃ©raux de la philosophie pour Ã©noncer nos affirmation de maniÃ¨re dogmatique. La raison de ce choix est que la justification principale de toute thÃ©orie des principes mathÃ©matiques est nÃ©cessairement inductive, c'est Ã dire qu'on doit pouvoir reconstruire les mathÃ©matiques classiques Ã partir de la thÃ©orie des principes en question. En mathÃ©matiques les proposition qui nous sont le plus intuitives ne sont pas les fondements mais certaines conclusion qu'on peut en tirer. C'est lorsqu'on peut atteindre ce genre de proposition qu'on considÃ©rera les prÃ©misses comme crÃ©dibles, au contraire d'une thÃ©orie dÃ©ductive dont la crÃ©dibilitÃ© des consÃ©quence

1. *The Principles of Mathematics* est un ouvrage prÃ©cÃ©dent de Bertrand Russel publiÃ© en 1903 oÃ¹*ilintroduitnotammentsoncÃ©lÃ¨breparadoxeetl'idÃ©equelalogiqueetlesmathÃ©matiquesontconfondues.N.d.*

repose sur la croyance en ses prÃ©misses.

Lorsqu'on Ã©tabli un systÃ¨me dÃ©ductif tel que celui-ci, il y a deux tÃches trÃ¨s diffÃ©rentes qu'il faut mener Ã bien de front. D'un part, l'analyse des mathÃ©matiques actuelles pour rechercher les prÃ©misses utilisÃ©, vÃ©rifier qu'ils sont cohÃ©rents entre eux et qu'ils ne peuvent pas Ãªtre rÃ©duits en d'autres plus fondamentaux. D'autre part, il faut reconstruire les mathÃ©matiques Ã partir des prÃ©misses que nous avons gardÃ©s et rÃ©-Ã©tablir suffisamment de consÃ©quence pour justifier la validitÃ© de nos propos. Dans le prÃ©sent ouvrage, nous n'avons pas relatÃ© cette part d'analyse prÃ©alable, mais dont les rÃ©sultats apparaissent uniquement dans les axiomes proposÃ©s. Nous ne prÃ©tendons pas que les l'analyse n'aurait pas put remonter plus loin, il n'y a aucune raison de penser le contraire, que des axiomes plus fondamentaux n'auraient pas put Ãªtre trouvÃ©s pour pouvoir Ã©tablir les nÃ´tres. Tout ce que nous prÃ©tendons, c'est que les axiomes dont nous partons sont suffisants, pas qu'il sont nÃ©cessaires.

Par ailleurs, nous avons considÃ©rÃ© qu'il Ã©tait nÃ©cessaire de pousser les dÃ©ductions Ã partir des prÃ©misses jusqu'Ã avoir rÃ©-Ã©tabli les vÃ©ritÃ©s gÃ©nÃ©ralement admises. Cependant nous ne nous sommes pas restreint strictement Ã cette tÃche. Il est courant que l'on ne considÃ¨re que des cas particulier, mÃªme lorsque nos outils permettent de traiter tout aussi simplement le cas gÃ©nÃ©ral. Par exemple, l'arithmÃ©tique des cardinaux est gÃ©nÃ©ralement conÃ§ue en relation avec les nombre finis mais fonctionne tout aussi bien avec les nombre transfinis et il est plus aisÃ© de la dÃ©montrer sans faire de distinction entre les nombre finis et les infinis. De la mÃªme maniÃ¨re de nombreuses propriÃ©tÃ©s associÃ©es aux sÃ©ries demeurent valable pour des arrangement qui ne sont pas Ã proprement parler des sÃ©ries mais dont certaines propriÃ©tÃ©s intrinsÃ¨ques sont celles des arrangements en sÃ©ries. Dans de tels cas, c'est une erreur logique de ne prouver que pour un seule catÃ©gorie d'arrangements ce qui aurait put Ãªtre prouvÃ© de maniÃ¨re plus gÃ©nÃ©rale. Dans tout notre travail, un procÃ©dÃ© de gÃ©nÃ©ralisation similaire est impliquÃ© de maniÃ¨re plus ou moins importante. Nous avons toujours recherchÃ© les hypothÃ¨ses les plus gÃ©nÃ©rales et raisonnablement simples Ã partir desquelles il Ã©tait possible d'aboutir Ã une conclusion donnÃ©e. Pour cette raison, et cela surtout dans la fin de l'ouvrage, l'importance des propositions relÃ¨ve surtout de ses hypothÃ¨ses. Souvent ces conclusion seront familiÃ¨res dans un certain nombre de cas, mais les hypothÃ¨ses restreintes permettront lorsque que cela est possible d'englober d'autre cas plus ou moins proches de ceux qui nous sont familiers.

Nous avons jugÃ© nÃ©cessaire de dÃ©velopper entiÃ¨rement les preuves, car sinon il serait trÃ¨s difficile de visualiser quels sont les hypothÃ¨ses rÃ©ellement nÃ©cessaires et si le rÃ©sultat dÃ©coule bien des prÃ©misses explicitÃ©s. (Il faut se souvenir que nous n'affirmons pas simplement que tel et tel proposition sont vraies, mais aussi que les axiomes que nous avons Ã©tablis sont suffisant pour les dÃ©montrer.) Bien que le dÃ©tail de toutes les preuves soient nÃ©cessaires pour Ã©viter les erreurs et convaincre ceux qui pourraient avoir un doute, celles-ci peuvent Ãªtre sautÃ©es par le lecteur qui n'est pas tant que cela intÃ©ressÃ© par cette partie du sujet et qui n'aurait aucun doute quant Ã notre maitrise du sujet. Le lecteur qui serait particuliÃ¨rement intÃ©ressÃ© par certaine partie de ce livre pourra probablement se contenter de lire le rÃ©sumÃ© des parties et sections prÃ©cÃ©dentes car il y trouvera l'explication des idÃ©es impliquÃ©es et les principaux Ã©noncÃ©s prouvÃ©s. Cependant les dÃ©monstrations effectuÃ©es dans la section A de la premiÃ¨re partie sont nÃ©cessaires car c'est Ã cet endroit que la maniÃ¨re de construire un preuve est Ã©tablie. Les preuves des premiÃ¨res propositions sont dÃ©taillÃ©s sans aucune omission d'aucune Ã©tape, mais au fur et Ã mesure de l'ouvrage, les preuves seront de plus en plus condensÃ©es, en laissant suffisamment de dÃ©tails pour permettre au lecteur de reconstruire, grÃce aux rÃ©fÃ©rences, une preuve dans laquelle aucune Ã©tape ne serait sous entendue.

L'ordre des chapitre est majoritairement dictÃ© par des nÃ©cessitÃ©s logiques, cependant certaines parties sont indÃ©pendantes jusqu'Ã un certain point et on peut considÃ©rer leur ordre comme relativement optionnel. C'est les cas par exemple de l'arithmÃ©tique des cardinaux et des relations qui est traitÃ©e avant les suites, mais nous aurions tout aussi bien put parler des suites en premier.

Les paradoxes et les contradiction qui infectent la logique et la thÃ©orie des agrÃ©gat ont monopolisÃ© un part considÃ©rable du travail d'Ã©criture de cet ouvrage. Nous avons examinÃ© un grand nombre d'hypothÃ¨ses pour dÃ©faire ces contradictions ; dont une bonne part ont Ã©tÃ© avancÃ©es par d'autres logiciens et environ autant l'ont Ã©tÃ© par nos soin. Il nous a parfois fallu plusieurs mois pour admettre qu'un hypothÃ¨se ne tenait pas la route. Lors d'un travail d'une telle ampleur, il n'est pas Ã©tonnant qu'il nous ai fallut changer rÃ©guliÃ¨rement d'avis ; mais il est progressivement devenu Ã©vident qu'une espÃ¨ce de thÃ©orie de types devrait Ãªtre adoptÃ©e pour Ã©viter toute forme de contradiction. La forme de cette thÃ©orie que nous avons dÃ©veloppÃ© dans cet ouvrage n'est pas une nÃ©cessitÃ© logique et d'autre formes sont compatibles avec la vÃ©racitÃ© de nos dÃ©ductions. Nous l'avons particularisÃ©, Ã la fois car cette forme nous semblait le plus probable et car il Ã©tait nÃ©cessaire de construire au moins une thÃ©orie parfaitement dÃ©veloppÃ©e pour Ã©viter les contradictions. Mais trÃ¨s peu de choses seraient modifiÃ©es dans notre livre par l'utilisation d'une autre forme de la thÃ©orie des types. En fait, nous pouvons aller jusqu'Ã affirmer que, Ã supposer que d'autres moyens d'Ã©viter les contradictions existent, presque rien dans cet ouvrage, Ã l'exception des passages qui manipulent directement des concepts liÃ©s Ã la thÃ©orie des types, ne dÃ©pend de du type ou de la forme de thÃ©orie des types adoptÃ©e ; dÃ©s lors il est prouvÃ© (nous pretendons avoir prouvÃ©) qu'il Ã©tait possible de construire une logique mathÃ©matique qui ne mÃ¨ne pas Ã une contradiction. On peut alors constater que la thÃ©orie des types est une thÃ©orie nÃ©gative, elle interdit certaines dÃ©ductions qui seraient sans cela considÃ©rÃ©es comme valides, mais n'en autorise aucune qui serait, sans elle, invalide. C'est pourquoi on peut raisonnablement supposer que les dÃ©ductions autorisÃ©es par la thÃ©orie des types demeurerons vrai mÃªme si on cette derniÃ¨re s'avÃ©rait fausse.

Le systÃ¨me logique est entiÃ¨rement explicitÃ© dans les propositions numÃ©rotÃ©es qui sont indÃ©pendantes de l'introduction et des rÃ©sumÃ©s. Ceux-ci sont entiÃ¨rement explicatifs, et ne font pas partis de la chaine dÃ©ductive. Les explications sur la hiÃ©rarchie des types prÃ©sentÃ©es dans l'introduction sont lÃ©gÃ¨rement diffÃ©rentes de celles donnÃ©es dans le **??** du corps de l'ouvrage. Cette derniÃ¨re Ã©tant plus rigoureuse et celle qui est utilisÃ©e dans le reste du livre.

La notation symbolique c'est avÃ©rÃ©e Ãªtre une nÃ©cessitÃ© : sans, nous n'aurions pas Ã©tÃ© capable rÃ©aliser les raisonnements nÃ©cessaires. Elle a Ã©tÃ© dÃ©veloppÃ©e au fur et Ã mesure de notre pratique et n'est pas une fantaisie introduite pour le simple but de l'esthÃ©tique. La mÃ©thode gÃ©nÃ©rale qui prÃ©side Ã l'utilisation de ces symboles est due Ã PÃ©ano. Son plus grand mÃ©rite n'est pas tant ces dÃ©ductions en logique ni dans les notations qu'il a introduites (toutes excellentes que les deux soient), mais d'avoir montrÃ© que la logique symbolique devait Ãªtre libÃ©rÃ©e de son attachement obsessif Ã l'algÃ¨bre ordinaire et d'en avoir fait un outil utilisable pour la recherche. GuidÃ© par notre Ã©tude de ses mÃ©thodes, nous nous sommes sentis libre de construire, et de reconstruire, un symbolisme qui devrais Ãªtre adaptÃ© Ã toutes les parties que nous avons traitÃ©es. Aucun symbole n'a Ã©tÃ© introduit si ce n'est sur la base de son utilitÃ© immÃ©diates dans nos raisonnements.

Un certain nombre de rÃ©fÃ©rences vers des passages ultÃ©rieurs peuvent Ãªtre trouvÃ©es dans les notes et les explications. Cependant nous avons pris toutes les prÃ©cautions nÃ©cessaires pour vÃ©rifier la rigueur de ces annonces, mais nous ne pouvons bien sur pas le faire avec autant de confiance qu'avec des rÃ©fÃ©rences Ã des passages antÃ©rieurs.

Les remerciements dÃ©taillÃ©s nÃ©cessaires envers nos prÃ©dÃ©cesseurs n'ont pas souvent Ã©tÃ© possibles, car il nous a fallut transformer tout ce que nous avions empruntÃ© pour l'adapter Ã notre systÃ¨me et Ã nos notations. Nos principales sources bibliographiques seront Ã©videntes Ã tout lecteur qui serait familier avec la littÃ©rature du sujet. De maniÃ¨re gÃ©nÃ©rale, nous avons principalement utilisÃ© les travaux de PÃ©ano, en Ã©tendant, lorsque nÃ©cessaire, son systÃ¨me symbolique avec ceux de Frege et de SchrÃ¶der.Cependant, une grand part du symbolisme a dut Ãªtre inventÃ©e, non pas que les symbolisme prÃ©cÃ©dant ne nous plaisaient pas, mais car les idÃ©es que nous manipulions n'avaient pas Ã©tÃ© prÃ©cÃ©demment symbolisÃ©es. Dans tous les domaines d'analyse logique, notre source principale est Fredge. LÃ oÃ¹*nousnouss*Ã©*paronsdelui, c′*

Il nous faut remercier le Conseil de la Royal Society de nous avoir consenti un prÃªt de Â£200 du Fond Gouvernemental de Publication et aussi au Syndicat des Presses Universitaires d'avoir supportÃ© la majeur partie du coÃ»t de production de cet ouvrage. L'excellence technique, dans tous les domaines, des Presses Universitaires, le zÃ¨le et l'aide de ses membres ont concrÃ¨tement simplifiÃ© le travail de correction des preuves.

Un second volume est dÃ©jÃ sous presses et il devrait paraitre avec un troisiÃ¨me volume dÃ¨s que l'impression sera terminÃ©e.

A. N. W.
B. R.

Cambridge,
novembre 1910

Table des matières

Introduction de la seconde Ã©dition [2]

Lors de la prÃ©paration de cette nouvelle Ã©dition [3] des *Principia MathÃ©matica*, les auteurs on choisi de conservÃ© le texte inchangÃ©, Ã l'exception de des coquilles et des erreurs mineurs [4], bien qu'ils aient Ã©tÃ© conscient de l'existence d'amÃ©liorations possibles. La principale raison de ce choix et que tout altÃ©ration des propositions aurait remis en cause les rÃ©fÃ©rences internes, ce qui aurait reprÃ©sentÃ© un travail immense. Il a alors semblÃ© prÃ©fÃ©rable d'ajouter dans une introduction les principales amÃ©liorations qui semblaient nÃ©cessaires. Certaines sont peu discutables, d'autres cependant sont une affaire d'opinion.

2. Pour cette introduction, tout comme pour les annexes, les auteurs sont redevables Ã M. F. P. Ramsey du King's College Ã Cambridge, qui a lu l'ensemble en manuscrit et fourni des critiques et des suggestions trÃ¨s profitables.

3. Edition de 1925 (*NdT*)

4. Nous somme d'ailleurs redevable a de nombreux lecteurs pour leur lecture attentive, et tout spÃ©cialement aux Dr. Behmann et Boscovitch de GÃµ*ttingen*.

Introduction

La logique mathÃ©matique qui occupe la partie **??** a Ã©tÃ© dÃ©veloppÃ©e en gardant Ã l'esprit trois objectifs. Tout d'abord, nous avons cherchÃ© a produire l'analyse la plus poussÃ©e possible des concepts manipulÃ©s et des procÃ©dÃ©s dÃ©monstratifs tout en diminuant Ã l'extrÃªme le nombre de propositions non-dÃ©montrÃ©es et de concepts non dÃ©finis (appelÃ©s respectivement propositions primitives et concepts primitifs) sur lesquels cette analyse se fonde. Dans un second temps elle a Ã©tÃ© conÃ§ue dans le but de prÃ©ciser parfaitement la notation de chaque proposition mathÃ©matique, pour renforcer sa notation de la maniÃ¨re la plus simple et la plus adaptÃ©e possible. C'est la raison principale qui a guidÃ© le choix des sujets. Enfin, ce systÃ¨me est spÃ©cialement conÃ§u pour rÃ©soudre les paradoxes qui, ces derniÃ¨res annÃ©es, ont troublÃ© les spÃ©cialistes de la logique symbolique et de la thÃ©orie des agrÃ©gats ; nous pensons que la thÃ©orie des types telle que nous la dÃ©crivons par la suite, permet non seulement d'Ã©viter les contradictions, mais aussi de dÃ©tecter prÃ©cisÃ©ment les erreurs qui y ont conduit.

Des trois but prÃ©cÃ©dents, le premier et le troisiÃ¨me nous ont menÃ© Ã adopter des mÃ©thodes, des notations et des dÃ©finitions qui sont plus complexes que celles que nous aurions adoptÃ©es si nous n'avions eu en tÃªte que le premier objectif. Cela s'applique tout particuliÃ¨rement Ã la thÃ©orie des expressions descriptives (**??** et **??**) et Ã la thÃ©orie des classes et des relations (**??** et **??**). Sur ces deux points, et dans une moindre mesure pour d'autres, il a semblÃ© nÃ©cessaire de sacrifier quelque peu la clartÃ© au profit de l'exactitude. Ce sacrifice est toutefois essentiellement temporaire : en effet la notation adoptÃ©e au final possÃ¨de un sens apparent intuitif malgrÃ© la grande complexitÃ© de sa rÃ©elle dÃ©finition, et celui-ci pourra Ãªtre utilisÃ© sans difficultÃ© mis Ã part pour certains points cruciaux. DÃ©s lors, il pourra Ãªtre utile, dans une premiÃ¨re approche de la notation, de considÃ©rer sa signification intuitive comme un concept primitif, *i.e.* comme un concept introduit sans dÃ©finition. Puis lorsque que la notation sera devenue familiÃ¨re, il sera aussi devenu plus simple d'utiliser la notation plus complexe qui est Ã notre avis plus correcte. Dans le cœur de cet ouvrage, lorsqu'il sera nÃ©cessaire de se cantonner fermement Ã la plus stricte construction logique, il ne sera plus possible d'utiliser les conceptions intuitives ; cela est cependant entiÃ¨rement possible dans l'introduction. Les explications donnÃ©es dans le chapitre 1 de l'introduction placent la clartÃ© avant l'exactitude : les explications complÃ¨tes sont en partie fournies dans les autres chapitres de l'introduction et en partie dans le reste de l'ouvrage.

Dans tous cet ouvrage, l'usage du symbolisme, par opposition au mots, Ã pour but conceptualiser d'une maniÃ¨re la plus stricte et prÃ©cise possible les raisonnements dÃ©monstratifs. Cet usage a Ã©tÃ© imposÃ© par la poursuite permanente des trois objectifs prÃ©cÃ©dents. Les raisons de l'extension du symbolisme au delÃ des concepts de nombre et des opÃ©rations gÃ©nÃ©ralement associÃ©e sont les suivantes :

1. Les concepts employÃ©s ici sont plus abstraits que ceux du langage courant. C'est pourquoi il n'y a pas de mot dont la signification principale soit exactement celle requise ici. Tout usage d'un mot aurait alors nÃ©cessitÃ© une restriction contre nature de leur sens classique et il aurait Ã©tÃ© plus complexe de s'y restreindre constamment que de

dÃ©finir une nouvelle symbolique.

2. La structure grammaticale du langage est adaptÃ©e Ã une grande variÃ©tÃ© d'utilisations. Par consÃ©quent, elle n'est pas assez univoque pour reprÃ©senter simplement les processus fondamentaux, bien que trÃ¨s abstraits, des raisonnements. En rÃ©alitÃ©, la simplicitÃ© si abstraite des concepts dÃ©passe le langage, celui-ci Ã©tant plus adaptÃ© Ã l'expression d'idÃ©es complexes. La proposition "une baleine est grosse" reprÃ©sente au mieux cette capacitÃ© du langage en dÃ©crivant, par une formulation trÃ¨s simple, une situation complexe ; alors qu'expliquer "un est un nombre" dans le langage conduit Ã une intolÃ©rable prolixitÃ©. Pour la mÃªme raison, l'usage du symbolisme permet des formulations concises, tout particuliÃ¨rement adaptÃ©es Ã la formulation des concepts et des processus dÃ©ductifs de cet ouvrage.
3. L'adaptation des rÃ¨gles du symbolisme aux processus dÃ©ductifs facilite l'intuition lorsque les concepts deviennent trop abstraits pour que l'imagination permette de comprendre facilement les relations qui les lient. En effet, plus les associations de symboles deviendront familiÃ¨res dans leur reprÃ©sentations d'une association d'idÃ©es et qu'alors les relations possibles entre ces symboles, telles que dÃ©finies par les rÃ¨gles du symbolisme, deviendront familiÃ¨res, plus ces nouvelles associations permettront de dÃ©crire des relations de plus en plus complexes. Ainsi, l'esprit pourra finalement mener des raisonnements dans des rÃ©gions de la pensÃ©e oÃ$^{1}l'imaginationseraittotalementinefficacesansl'apportdusymbolisme.Lelangag$
4. L'Ã©numÃ©ration complÃ¨te de tous les concepts et de toutes les Ã©tapes de raisonnement employÃ©s en mathÃ©matiques, en tant que premier objectif de cet ouvrage, nÃ©cessite Ã la fois de la concision et l'explicitation de chaque proposition avec un maximum de formalisme dans une formule aussi caractÃ©ristique que possible.

De plus amples Ã©claircissements quant aux mÃ©thodes et au symbolisme de cet ouvrage peuvent Ãªtre obtenus en rÃ©ponse aux objections qu'on pourrait lui formuler.

1. La majoritÃ© de la recherche mathÃ©matique ne s'intÃ©resse pas au procÃ©dÃ© dÃ©monstratif complet, mais prÃ©sente simplement un rÃ©sumÃ© de la preuve juste assez dÃ©taillÃ© pour convaincre un esprit suffisamment Ã©duquÃ©. Pour de telles recherches, la prÃ©sentation dÃ©taillÃ©e de toutes les Ã©tapes du raisonnement est bien Ã©videment superflue, tant que le niveau de dÃ©tail est assez poussÃ© pour Ã©viter les erreurs. Ã ce sujet, il ne faut pas oublier que les travaux de Weierstrass et de ses collÃ¨gues ont montrÃ© que, mÃªme dans les mathÃ©matiques traditionnelles, il fallait pousser la rigueur bien au-delÃ de ce que les gÃ©nÃ©rations prÃ©cÃ©dentes de mathÃ©maticiens ne l'avaient envisagÃ©.
2. Dans tous les domaines de la pensÃ©e, tant que l'imagination est suffisante Ã la rÃ©flexion l'utilitÃ© du symbolisme se rÃ©duit Ã Ã©crire plus vite les formules obtenues sans son aide. Un des objectifs secondaires de cet ouvrage est justement de montrer que par l'usage du symbolisme, les raisonnements dÃ©ductifs peuvent Ãªtre Ã©tendus Ã des

domaines que l'on considÃ©rait traditionnellement comme inaccessibles Ã la logique mathÃ©matique. Et, tant que les concepts de ces domaines ne nous sont pas familiers, un raisonnement dÃ©taillÃ© est adaptÃ© aux questionnements quant aux propriÃ©tÃ©s gÃ©nÃ©rales de ces objets, en plus d'Ãªtre aussi nÃ©cessaire Ã l'analyse des Ã©tapes de la rÃ©flexion.

Chapitre 1

Explication prÃ©liminaires des concepts et des notations

La notation adoptÃ©e dans le prÃ©sent ouvrage est issue de celle de PÃ©ano et les explication qui vont suivre sont des adaptations de celles qu'il a introduite dans son *Formulario Mathematico*. Nous avons adoptÃ© son usage des points comme parenthÃ¨ses ainsi que bon nombre de ses symboles.

Les variables Le concept de variable, tel qu'il apparait ici, est plus gÃ©nÃ©rale que celui utilisÃ©e en mathÃ©matiques traditionnelle. En effet, dans celle-ci, une variable reprÃ©sente gÃ©nÃ©ralement une grandeur indÃ©terminÃ©e ou un nombre. En logique mathÃ©matique, tout symbole dont le sens n'est pas dÃ©terminÃ© est appelÃ© une *variable*, et les diffÃ©rentes possibilitÃ©s de sens sont appelÃ©s les *valeurs* de la variable. Les valeurs peuvent Ãªtre n'importe quel ensemble d'objets, propositions, fonction classe ou relation, suivant les circonstances. Si une affirmation est formulÃ©e Ã propos "MrA et MrB", "MrA" et "MrB" sont des variables dont les valeurs sont restreinte Ã des hommes. La gamme des valeurs possible d'une variable peut soit Ãªtre dÃ©terminÃ©e par convention ou (si rien n'a Ã©tÃ© prÃ©cisÃ© Ã ce sujet) avoir Ãªtre dÃ©finie comme l'ensemble des valeurs qui donnent un sens Ã l'affirmation. Ainsi, quand un manuel de logique affirme que "A est A" sans autre indication sur ce que A peut dÃ©signer, ce qu'il affirme c'est que toute proposition du type "A est A" est vrai. Une variable dont la signification est confinÃ©e Ã certaines valeurs parmi celle qu'elle pourrait prendre est appelÃ©e *restreinte*, dans le cas contraire on dit qu'elle est *libre*. Ainsi quand une variable libre apparait, elle reprÃ©sente tout objets tel que la proposition dans laquelle elle se trouve puisse Ãªtre signifiantes (*i.e.* soit vrai soit fausse). Pour l'Ã©tude de la logique, les variables libres sont les plus adaptÃ©es que les variables restreintes et devraient toujours leur Ãªtre prÃ©fÃ©rÃ©es. Par ailleurs les variables libres sont toujours contraintes par le contexte de son utilisation. En effet, les affirmations qui peuvent Ãªtre signifiante vis Ã vis des propositions ne le sont pas forcÃ©ment vis Ã vis des classes ou des relations et rÃ©ciproquement. Mais les restrictions imposÃ©es Ã une variable libre ne sont pas nÃ©cessairement Ã©crites explicitement car elle sont imposÃ©es par les limites de sens des affirmations oÃ^1*cesvariablesapparaissent*, *etparconsÃ©quentellessontintrinsÃ*

Pour rÃ©sumer : les trois points principaux quant Ã l'usage des variables sont :

1. une variable est une notation ambigÃ¼e et non encore dÃ©finie.
2. dans un mÃªme contexte, une mÃªme variable reprÃ©sente la mÃªme entitÃ© ; et par consÃ©quent des variables diffÃ©rentes apparaissant dans le mÃªme contexte peuvent avoir des valeurs toutes diffÃ©rentes.
3. les spectres des valeurs possibles de deux variables apparaissant dans le mÃªme contexte peuvent Ãªtre identiques, ils peuvent aussi se rejoignent ou bien encore ils sont totalement diffÃ©rent, de tel sorte Ã ce que si la valeur d'une des variables est attribuÃ© Ã l'autre, alors la proposition rÃ©sultante devient dÃ©pourvue de sens, plutÃ´t que de devenir une proposition non ambigÃ¼e (vrai ou fausse) tel qu'il aurait Ã©tÃ© le cas si chacune des variables s'Ã©tait vue attribuÃ©e une valeur *acceptable*.

L'usage des diffÃ©rentes lettres Les variables et certaines constantes seront reprÃ©sentÃ©es par une lettre seule ; cependant une lettre qui aura dÃ©jÃ Ã©tÃ© attribuÃ©e Ã une constante lors d'une dÃ©finition ne pourra plus Ãªtre utilisÃ©e par la suite pour reprÃ©senter une variable. Les minuscules de l'alphabet latin seront utilisÃ©e pour reprÃ©senter des variables, Ã l'exception des lettres p et s au delÃ du paragraphe **??**, Ã partir duquel un sens bien dÃ©fini sera attribuÃ© Ã ces deux lettres. Les majuscules suivantes se verront donner une signification constante : B, C, D, E, F, I, et J. Parmi les lettres grecque minuscules ce sera aussi le cas de ϵ, ι[2] et (plus tard) des lettres η, θ et ω. Certaine majuscule de cet alphabet seront, de temps en temps, utilisÃ©es comme constantes, cependant, ces majuscules ne seront pas utilisÃ©e pour dÃ©signer des variables. Parmi les lettres restantes, p, q et r seront utilisÃ©es pour dÃ©signer des propositions (mis Ã par aprÃ¨s le paragraphe **??**, au delÃ duquel p ne dÃ©signera plus un variable) et seront appelÃ©es des *lettres propositionnelles* ; f, g, ϕ, ψ, χ, θ et (jusqu'au paragraphe **??**) F reprÃ©senteront des variables de fonction et seront par consÃ©quent appelÃ©e *lettres fonctionnelles*.

Les minuscules grec que nous n'avons pas encore mentionnÃ©es seront utilisÃ©es pour des variables dont les valeurs sont des classes, et on s'y rÃ©fÃ©rera simplement comme aux *lettres grecques*. Les majuscules ordinaires, non encore exclues seront utilisÃ©e pour les variables dont les valeurs sont des relations, et on les appellera des *lettres majuscules*, tout simplement. Les minuscules ordinaires, autres que celles mentionnÃ©es ci-dessus seront utilisÃ©es pour les variables dont les valeurs ne sont pas particuliÃ¨rement des fonctions, des classes ou des relations ; ces lettres seront nommÃ©es simplement les *lettres minuscules latines*.

Au delÃ des premiÃ¨res parties de cette ouvrage, des variables de propositions et de fonctions n'apparaitront que rarement. Nous aurons alors trois grand type de variables :

— les variables de classes, notÃ©es par des lettres grec minuscules,

2. la lettre π Ã©tait aussi prÃ©sente dans la premiÃ¨re Ã©dition avant d'Ãªtre barrÃ©e dans la version imprimÃ©e et retirÃ©e de la seconde Ã©dition. *N.d.T.*

— les variables de relation, notÃ©es en majuscules,
— et les variables sans attribution particuliÃ¨res, notÃ©es en lettres minuscules latines.

En plus de l'utilisation des minuscules grecques pour les variables de classes, des majuscules pour les variables de relation et des minuscules pour les variables de type entiÃ¨rement indÃ©terminÃ© (cela ayant pour origine la possibilitÃ© d' "ambigÃ¼itÃ© systÃ©matique", qui sera expliquÃ©e plus tard lors de l'Ã©tude de la thÃ©orie des types), le lecteur doit seulement se souvenir que toutes les lettres reprÃ©sentent des variables, Ã moins qu'elles aient Ã©taient dÃ©finie comme des constantes quelque part avant dans le livre. De maniÃ¨re gÃ©nÃ©rale, le contexte dÃ©termine par sa structure le spectre des valeurs des variables qui apparaissent ; mais prÃ©ciser spÃ©cifiquement quelque indication sur la nature des variables employÃ©es, tel que nous l'avons fait ici, permet d'Ã©viter de laborieuses rÃ©flexions.

Les fonctions propositionnelles Ã©lÃ©mentaires Des propositions qui ne sont pas considÃ©rÃ©es comme ambigÃ¼e Ãªtre assemblÃ©es en une unique proposition plus complexe que ses constituants. C'est en cela une fonction qui *prend pour argument des propositions.* L'idÃ©e gÃ©nÃ©rale derriÃ¨re de tels assemblages de propositions, ou des variables qui les reprÃ©sentent, ne sera pas dÃ©crite dans cet ouvrage. Cependant, il y a quatre cas particuliers qui sont d'une importance capitale, puisque toutes les propositions complexes qui seront formÃ©e en assemblant des propositions Ã©lÃ©mentaires par la suite, le seront Ã©tape par Ã©tape et en utilisant le ces quatre fonctions Ã©lÃ©mentaires.

Il y a :

1. la nÃ©gation,
2. la somme logique ou la disjonction
3. le produit logique ou la fonction conjonctive
4. l'implication

Ces fonctions, telle que nous les utiliserons dans cet ouvrage, ne sont pas indÃ©pendantes ; et si l'on dÃ©fini deux d'entre elles comme des concepts primitifs non dÃ©fini, alors les deux autres pourront en Ãªtre dÃ©duit. Par consÃ©quent le choix de celles qui seront considÃ©rÃ©es comme arbitraire et plus ou moins arbitraire (quoi que pas entiÃ¨rement). Il semble qu'on gagne une certaine simplicitÃ© en prenant les deux premiÃ¨res fonctions comme primitive ainsi qu'une Ã©lÃ©gante symÃ©trie dans les raisonnements.

La nÃ©gation de l'argument p, oÃ^{1}p$estn'importequelleproposition, etlapropositionquiestlecontrairede$p$/, c'es$
p. DÃ¨s lors $\sim p$ est la fonction de nÃ©gation avec l'argument p et signifie la nÃ©gation de p. On y ferra aussi rÃ©fÃ©rence comme la proposition non$-p$. Ainsi, $\sim p$ signifie nom$-p$, c'est Ã dire la nÃ©gation de p.

La somme logique est une fonction avec deux arguments p et q. C'est la fonction qui affirme p ou q indÃ©pendamment. C'est Ã dire qu'au moins une des deux proposition p ou q est vraie. On Ã©crira $p \vee q$. Ainsi $p \vee q$ est la somme logique avec p et q comme argument qu'on appelle aussi la somme logique de p et q. DÃ¨s lors $p \vee q$ signifie qu'au moins p ou q est vrai, sans exclure la possibilitÃ© que les deux soient vrais.

Le produit logique est la fonction propositionnelle de deux argument p et q. C'est la proposition qui affirme conjointement que p et q sont toutes deux vraies.

On l'Ã©crira $p.q$ ou - dans le but d'user des points comme des parenthÃ¨ses telles que nous le verrons sous peu- $p : q$, $p : .q$ ou bien encore $p :: q$. Ainsi $p.q$ est le produit logique avec p et q pour argument, qu'on appelle aussi le produit logique de p et q. DÃ¨s lors $p.q$ signifie que p et q sont toutes les deux vraies. On comprendra aisÃ©ment que cette fonction peut Ãªtre dÃ©finie Ã l'aide des deux fonction prÃ©cÃ©dentes, car si p et q sont vraies, il faut bien qu'il soit faux que $\sim p$ ou $\sim q$ soit vrai. DÃ¨s lors $p.q$ n'est au final qu'une abrÃ©viation pour

$$\sim (\sim p \vee \sim q)$$

Si un d'autres idÃ©es se rattachent Ã la proposition "p et q sont toutes deux vraies", elles ne sont pas nÃ©cessaires ici.

L'implication est une fonction propositionnelle de deux arguments p et q. c'est la proposition qui affirme que non-p ou q est vrai, c'est Ã dire la proposition $\sim p \vee q$. Ainsi, si p est vrai, $\sim p$ ne l'Ã©tant pas, la proposition $\sim p \vee q$ impose la seconde alternative, c'est Ã dire que q soit vraie. Autrement dit : si p est vrai et $\sim p \vee q$ sont vraies, alors q l'est aussi. C'est dans ce sens que l'on dira que la proposition $\sim p \vee q$ est la proposition p implique q. Le concept reprÃ©sentÃ© par cette fonction propositionnelle et si important qu'il requiert un symbolisme adaptÃ©, qui puisse le reprÃ©senter en liant p et q sans faire intervenir $\sim p$. Cependant l'«implication» dont nous parlons n'exprime aucune autre relation entre p et q que celle de la disjonction « non-p ou q ». Le symbolisme employÃ© pour « p implique q » est « $p \supset q$ ». Ce symbolisme pourra aussi Ãªtre lu « si p, alors q ». La combinaison d'une implication et de variables apparentes fera naitre le concept d' « implication formelle ». Cette idÃ©e qui dÃ©rive de l'implication telle que nous venons de la dÃ©finir sera expliquÃ©e plus tard. Lorsqu'il sera nÃ©cessaire de distinguer l' « implication » de l' «implication formelle », on parlera d' « implication matÃ©rielle ». par consÃ©quent « l'implication matÃ©rielle » est simplement l'implication telle que nous venons de la dÃ©finir. En revanche le processus d'infÃ©rence, que l'on confond souvent avec l'implication sera expliquÃ© dans la suite de cette partie.

Ces quatre fonctions propositionnelles sont les fonctions propositionnelles fondamentales. Ce sont des constantes (car elles ont Ã©tÃ© dÃ©finies) qui prennent des propositions pour arguments, et toutes les autres fonctions propositionnelles prenant des propositions pour arguments seront construites par Ã©tapes successives Ã partir de ces quatre fonctions fondamentales avant d'Ãªtre utilisÃ©es dans cet ouvrage. En effet, nous n'utiliserons aucune variable reprÃ©sentant une fonction propositionnelle de ce type ici.

L'Ã©quivalence L'Ã©quivalence est l'exemple le plus simple de construction d'une fonction propositionnelle plus complexe construite Ã partir des quatre propositions fondamentales. Deux propositions q et q sont dites Ã©quivalente si p implique q et q implique p. Cette relation entre p et q est Ã©crite « $p \equiv q$ ». Ainsi « $p \equiv q$ » remplace « $(p \subset q).(q \subset p)$ ». On comprendra aisÃ©ment que deux fonctions sont Ã©quivalentes si et seulement si elles sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses. L'Ã©quivalence deviendra un concept plus important quand nous en serons Ã l' « implication formelle » et par consÃ©quent Ã l' « Ã©quivalence formelle ». On notera par ailleurs qu'il n'est pas supposÃ© que les deux propositions reliÃ©e par l'Ã©quivalence aient quoi que ce soit d'identique, ni mÃªme qu'elles concerne vaguement le mÃªme sujet. Ainsi : « Newton Ã©tait un homme » et « le Soleil est chaud » sont deux propositions Ã©quivalentes Ã©tant donnÃ©e que toutes deux sont vraies. Mais nous anticipons ici le concept de la dÃ©duction, qui viendra plus tard dans notre raisonnement formel. L'Ã©quivalence, Ã l'origine, n'est que l'implication mutuelle telle que nous venons de la dÃ©finir.

Valeur de vÃ©ritÃ© la *valeur de vÃ©ritÃ©* d'une proposition est *Vrai* si la proposition est vraie, *Faux*, si la proposition est fausse[3]. On remarquera que la valeur de vÃ©ritÃ© de $p \vee q$, $p.q$, $p \subset q$, $\sim p$ et $p \equiv q$ dÃ©pend uniquement de celle de p et q. Plus prÃ©cisÃ©ment, la valeur de vÃ©ritÃ© de $p \vee q$ est *Vrai* si celle de p ou celle de q est *Vrai*, *Faux* sinon ; celle de $p.q$ est *Vrai* si celle de p et celle de q est *Vrai*, *Faux* sinon ; la valeur de vÃ©ritÃ© de $p \subset q$ est *Vrai* si celle de p est *Faux* ou si celle de q est *Vrai* ; celle de $\sim p$ est l'opposÃ©e de celle de p ; et celle de $p \equiv q$ est *Vrai* si p et q on exactement la mÃªme valeur de vÃ©ritÃ©, et *Faux* sinon.

3. La formulation initiale, inspirÃ©e de Frege, Ã©tait « *The "truth-value" of a proposition is* truth *if it is true, and* falsehood *if it false* » que l'on pourrait traduire par *vÃ©ritÃ©* et *mensonge*, cependant ces termes ne sont plus utilisÃ©s aujourd'hui par soucis de simplicitÃ© on traduira donc *truth* par *Vrai* et *falshood* par *Faux* dans ce contexte-ci. (*N.d.T.*)

Chapitre 2

La thÃ©orie des types logiques

Chapitre 3

Quelques symboles

Première partie

La logique mathÃ©matique

RÃ©sumÃ© de la premiÃ¨re partie

Chapitre 4

La thÃ©orie de la dÃ©duction

4.1 IdÃ©es primitives et propositions

4.2 ConsÃ©quences immÃ©diates des idÃ©es primitives

4.3 Le produit logique de deux propositions

4.4 Équivalence et rÃ¨gles formelles

4.5 Propositions diverses

Chapitre 5

ThÃ©orie de la variable apparente

5.1 Extension de la thÃ©orie des proposition en fonction du type de proposition

5.2 ThÃ©orie des propositions contenant un variable apparente

5.3 HiÃ©rarchie des types et axiome de rÃ©ductibilitÃ©

5.4 IdentitÃ©

5.5 Description

Chapitre 6

Classes et des relations

6.1 ThÃ©orie gÃ©nÃ©rale des classe

6.2 ThÃ©orie gÃ©nÃ©rale des relations

6.3 Calcul des classes

6.4 Calcul des relations

6.5 La classe universelle, la classe nulle, et l'existence des classes

6.6 La relation universelle, la relation nulle et l'existence des relations

Chapitre 7

Logique des relations

7.1 Fonctions descriptives

7.2 Relations converse

7.3 RefÃ©rent et relatÃ© d'un terme en rapport avec une relation donnÃ©e

7.4 Domaine, domaine converse et champ d'une relation

7.5 Le produit relatif de deux relations

7.6 Relation avec des domaine et des domaines converses limitÃ©s

7.7 Relation avec des champs limitÃ©s

7.8 Fonction descriptives multiples

7.9 Classe et relation issue des fonctions doubles descriptives

Chapitre 8

Produits et sommes de classe

8.1 Produit et somme de classe de classe

8.2 Le produit et la somme des classes de relation

8.3 Propositions variÃ©es

8.4 La relation entre un produit relatif et ses facteurs.