Technische Universität Braunschweig
Institut Computational Mathematics

Verbände getwisteter Involutionen in Coxetergruppen

Christian Hoffmeister

10. Juli 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Zweizykel in der getwisteten schwachen Ordnung

Definition 1.1 (Getwistete und ungetwistete Operation)**.** Seien (W, S) ein Coxetersystem, $w \in W$ und $s \in S$. Falls $w\underline{s} = \theta(s)ws$ ist, so sagen wir, dass s getwistet auf w operiert. Andernfalls sagen wir s operiert ungetwistet auf w.

Definition 1.2. Seien (W, S) ein Coxetersystem und $s, t \in S$ zwei verschiedene Erzeuger. Wir definieren:

$$[st]^n := \begin{cases} (st)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ gerade} \\ (st)^{\frac{n-1}{2}}s, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Definition 1.3 (Zweizykel)**.** Seien (W, S) ein Coxetersystem und $s, t \in S$ zwei verschiedene Erzeuger. Dann definieren wir $\mathcal{C}(w, s, t) := \{w\underline{[st]^n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{w\underline{[ts]^n} : n \in \mathbb{N}\}$. Diese Menge nennen wir den von s und t erzeugten Zweizykel bezüglich w.

Vermutung 1.4. Seien (W, S) ein Coxetersystem und $s, t \in S$ zwei verschiedene Erzeuger von W. Dann gilt:

1. Sei $\operatorname{ord}(st) = m < \infty$. Falls $w\underline{[st]^n} \neq w$ ist für alle $n < 2m$, dann gilt $w\underline{(st)^n} = w$.
2. In $\mathcal{C}(w, s, t)$ existieren keine drei Element mit derselben getwisteten Länge.
3. Falls s ungetwistet of w operiert, dann gilt $ws\underline{t} < w\underline{s}$ oder $w\underline{t} > w$.
4. Sei $w\underline{[st]^n} = w$. Dann ist n gerade und es gilt eine der beiden folgenden Eigenschaften:
   a) Die letzte Operation von $w(\underline{st})^{(m)}$ ist genau dann getwisted, wenn die letzte Operation von $w(\underline{st})^{(n/2+m)}$ getwistet ist.
   b) Die letzte Operation von $w(\underline{st})^{(m)}$ ist genau dann getwisted, wenn die letzte Operation von $w(\underline{st})^{(n-m+1)}$ getwistet ist.

Anmerkung 1.5. Vermutung 1.4.2 bedeutet, dass Zweizykel in einem gewissen Sinne konkav sind. Vermutung 1.4.3 bedeutet, dass innerhalb eines Zweizykels ungetwistete Operationen ausschließlich am bzgl. der getwisteten Länge oberen oder unteren Ende auftreten können. Vermutung 1.4.4 bedeutet, dass in einem Zweizykel die getwisteten und ungetwisteten Operationen achsen- oder punktsymmetrisch verteilt sind.

2 Algorithmus zur Berechnung der getwisteten schwachen Ordnung

Wir wollen nun einen Algorithmus zur Berechnung der getwisteten schwachen Ordnung $Wk(\theta)$ einer beliebigen Coxetergruppe W erarbeiten. Also Ausgangspunkt werden wir den Algorithmus aus [Haas and Helmnick, 2012, Algorithm 3.1.1] verwenden, der im wesentlichen benutzt, dass für jede getwistete Involution $w \in \mathcal{I}_\theta$ entweder $w\underline{s} < w$ oder aber $w\underline{s} > w$ gilt.

Algorithm 2.1 (Algorithmus 1).

```
procedure TwistedWeakOrderingAlgorithm1(W)          ▷ W sei die Coxetergruppe
    V ← {(e,0)}
    E ← {}
    for k ← 0 to k_max do
        for all (w, k_w) ∈ V with k_w = k do
            for all s ∈ S with ∄(·, w, s) ∈ E do     ▷ Nur die s, die nicht schon nach w führen
                y ← ws
                z ← θ(s)y
                if z = w then
                    x ← y                            ▷ s operiert ungetwistet auf w
                    t ← s
                else
                    x ← z                            ▷ s operiert getwistet auf w
                    t ← s̲
                end if
                isNew ← true
                for all (w′, k_w′) ∈ V with k_w′ = k + 1 do   ▷ Prüfen, ob x nicht schon in V liegt
                    if x = w′ then
                        isNew ← false
                    end if
                end for
                if isNew = true then
                    V ← V ∪ {(x, k + 1)}
                    E ← E ∪ {(w, x, t)}
                else
                    E ← E ∪ {(w, x, t)}
                end if
            end for
        end for
        k ← k + 1
    end for
    return (V, E)                                    ▷ The poset graph
end procedure
```

Dieser Algorithmus berechnet alle getwisteten Involutionen und deren getwistete Länge (w, k_w)

und deren Relationen (w', w, s) bzw. $(w', w, \underline{s})$. Zu bemerken ist, dass zur Berechnung der getwisteten Involutionen der Länge k nur die Knoten aus V benötigt werden, mit der getwisteten Länge $k-1$ und k sowie die Kanten aus E, die Knoten der Länge $k-2$ und $k-1$ bzw. $k-1$ und k verbinden. Alle vorherigen Ergebnisse können schon persistiert werden, so dass nie das komplette Ergebnis im Speicher gehalten werden muss.

Eine Operation, die hier als elementar angenommen wurde ist der Vergleich von Elementen in W. Für bestimmte Gruppen wie z.B. die A_n, welche je isomorph zu $Sym(n+1)$ sind, lässt sich der Vergleich von Element effizient implementieren. Will man jedoch mit Coxetergruppen im Allgemeinen arbeiten, so liegt W als frei präsentierte Gruppe vor und der Vergleich von Element is eine sehr aufwendige Operation. Bei Algorithmus 2.1 muss jedes potentiell neue Element x mit allen schon bekannten w' von gleicher getwisteter Länge verglichen werden um zu bestimmen, ob x wirklich ein noch nicht bekanntes Element aus $\mathcal{I}_\theta$ ist.

Algorithm 2.2 (Algorithmus 2)**.**

procedure TwistedWeakOrderingAlgorithm2(W) ▷ W sei die Coxetergruppe
  $V \leftarrow \{(e, 0)\}$
  $E \leftarrow \{\}$
  for $k \leftarrow 0$ **to** $k_{\max}$ **do**
    TODO
  end for
  return (V, E) ▷ The poset graph
end procedure

Literatur

R. Haas and A. G. Helmnick. Algorithms for twisted involutions in weyl groups. *Algebra Colloquium 19*, 2012.

J. E. Humphreys. *Reflection Groups and Coxeter Groups.* Cambridge University Press, 1992.