부록 B 수치해석 - 2018년 2학기 기말고사

이름: 95

특별한 지시사항이 없으면 계산 과정은 소수점 아래 2자리까지 구한다.

1. 연립 방정식

(20점) 아래의 연립방정식에 대하여 답하라.

15

$$\begin{cases} a + 2b - 3c = 10 \\ 3a + b - 2c = 5 \\ a + 2b + c = 2 \end{cases} \tag{B.1}$$

Jacobi 반복법

위의 연립방정식을 초기값 $a = b = c = 0$으로 하여 Jacobi 반복법을 3 회 반복하여 근사해를 구하라. 단, 각 단계의 계산 과정이 잘 나타나도록 잘 정리한다.

5

$a = 10 - 2b + 3c$
$b = 5 - 3a + 2c$
$c = 2 - a - 2b$

i) $a = 10 - 2\cdot 0 + 3\cdot 0 = 10$
$b = 5 - 3\cdot 0 + 2\cdot 0 = 5$
$c = 2 - 0 - 2\cdot 0 = 2$

ii) $a = 10 - 2\cdot 5 + 3\cdot 2 = 6$
$b = 5 - 3\cdot 10 + 2\cdot 2 = -21$
$c = 2 - 10 - 2\cdot 5 = -18$

iii) $a = 10 - 2\cdot(-21) + 3\cdot(-18) = -2$
$b = 5 - 3\cdot 6 + 2\cdot(-18) = -49$
$c = 2 - 6 - 2\cdot(-21) = 17$

프로그램 구현

위의 Jacobi 반복법을 이용한 풀이를 프로그램으로 작성하여 해결하려 한다. Scilab, C, 또는 Matlab 프로그램으로 이를 작성하라. 단, 프로그램에서 구하는 해가 특정한 값에 수렴하여 변화가 없으면 정확한 해가 구해졌다고 판단한다.

10

```
int a=0, b=0, c=0;
int aa, bb, cc;
int i
for(i=1; i<=100000; i++){
    aa=10-2b+3c;
    bb=5-3a+2c;
    cc=2-a-2b;
    a=aa;
    b=bb;
    c=cc;
  if(aa==a || bb==b || cc=c)
    break;
}
```

25

2. 보간법

(30점) 실험쥐들를 대상으로 독극물 KILLBILL을 1 ml 투여하면서 동시에 해독제 SAVEBILL를 투여할 경우 사망까지의 시간을 측정하여보니 아래 표와 같이 얻을 수 있었다. 하지만, 이 사실을 알아차린 다른 모든 실험쥐가 극적인 탈출을 성공하여 더 이상 실험을 진행할 수가 없다. 하지만, 우리는 보간법을 이용하여 KILLBILL 1 ml와 SAVEBILL "6 ml"를 투여하였을 경우의 생존시간을 예측할 수 있다.

SAVEBILL의 투여량 (ml)	0	1	2	3	6
생존시간 (시간)	1.0	3.0	4.0	4.5	?

뉴턴 보간법

10

차분표에 기반한 뉴턴 보간법을 이용하여 KILLBILL을 1 ml 투여하면서 동시에 해독제 SAVEBILL을 x ml 투여할 경우의 생존시간 $f(x)$를 x에 대한 3차 함수 형태로 구하는 과정을 보이고, $f(6)$을 구하라.

ml time

0 1.0 $\frac{3-1}{1-0}=2$ $\frac{1-2}{2-0}=-\frac{1}{2}$ $\frac{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{3-0}=\frac{1}{12}$

1 3.0 $\frac{4-3}{2-1}=1$ $\frac{0.5-1}{3-1}=-\frac{1}{4}$

2 4.0 $\frac{4.5-4}{3-2}=0.5$

3 4.5

$$f(x)=1+2x+\left(-\frac{1}{2}\right)x(x-1)+\frac{1}{12}(x)(x-1)(x-2)$$

$$f(6)=1+\underset{12}{2\cdot 6}+\underset{-15}{\left(-\frac{1}{2}\right)6\cdot 5}+\frac{1}{12}6\cdot 5\cdot 4=8$$

Lagrange 보간법

10

Lagrange 보간법을 이용하여 KILLBILL을 1 ml 투여하면서 동시에 해독제 SAVEBILL을 x ml 투여할 경우의 생존시간 $f(x)$를 x에 대한 3차 함수 형태로 구하는 과정을 보이고, $f(6)$을 구하라.

$$f(x)=1.0\times\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-1\times -2\times -3}+3.0\times\frac{x(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+4.0\times\frac{x(x-1)(x-3)}{2(2-1)(2-3)}+4.5\frac{x(x-1)(x-2)}{3(3-1)(3-2)}$$

$$f(6)=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{-6}+3\frac{6\cdot 4\cdot 3}{2}+4\frac{6\cdot 5\cdot 3}{-2}+4.5\frac{6\cdot 5\cdot 4}{6}=8$$

비교

5

위에서 구한 두 답이 동일한지 아닌지를 밝히고 그 이유를 설명하라.

동일하다. 소숫점이래 한자리 밖에없으므로 값이 정확히 나온다.

30

3. 적분 응용

(30점) 다음 그림은 $[0, 1]$ 구간에서 함수 $y = x^2$ 그래프를 Y-축을 회전축으로 하여 회전하여 생긴 입체 도형의 부피를 구분구적법을 이용하여 구하기 위한 방법을 나타내고 있다.

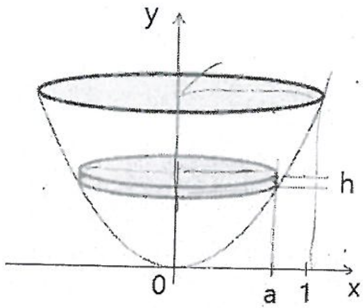

그림 B.1: 회전체의 부피 구하기 예제

원기둥 부피의 수식

임의 위치인 $x = a$에서 만들어지는 높이가 h인 원기둥(디스크)의 부피를 수식으로 표현하라.

$\pi a^2 h$ 10

입체 도형의 부피 - 수식

이 입체 도형의 부피는 구분구적법을 이용하여 높이가 h인 n 개의 원기둥의 부피의 합으로 근사화할 수 있다. 이를 이용하여 해당 입체 도형의 부피의 근사값 $\bar{V} = \sum(\ldots)$ 을 형태의 수식으로 표현하라.

$$\bar{V} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n}\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

10

도형의 부피 - 근사값

이 입체 도형의 부피를 구분구적법을 이용하여 높이가 동일한 5개의 원기둥의 부피의 합으로 근사화한 값으로 구하라.

$$\frac{\pi}{5}\sum_{k=1}^{5}\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

10

$$\frac{\pi}{5}\left(\frac{5}{5} + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{\pi}{\cancel{5}}\left(\frac{15^3}{5}\right) = \frac{3\pi}{5} \doteq 1.88$$

25

4. 미분의 개념을 이용한 응용 문제

(30점) 아래는 $\sqrt{4}=2$를 이용하여 $\sqrt{5}$의 근삿값을 구하는 과정을 설명하고 있다.

> **요점 0.1.** $\sqrt{5}$ 구하기
> $y=f(x)$라고 할 때, $\frac{dy}{dx}=f'(x)$이므로, 양변에 dx를 곱하면, $dy=f'(x)dx$이다. 이제 dx, dy를 변화량인 Δx, Δy로 바꾸어 $\Delta y=f'(x)\Delta x$를 구할 수 있다.
> 즉, $f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta y=f(x)+f'(x)\Delta x$ 이다.
> 따라서, $\sqrt{5}$는 $f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 이며, $x=4$, $\Delta x=1$ 인 경우로 구할 수 있다. 즉, $\sqrt{5}=f(4+1)=f(4)+f'(4)\times 1=2+1/4=2.25$ 이며, 이는 실제의 값($\sqrt{5}=2.236...$)과 큰 차이가 없음을 알 수 있다.

간단한 문제

$40^2=1600$을 알 경우, 위 방법을 이용하여 38^2의 근사값을 구하라. 그리고, 오차는 얼마나 발생하는가? (계산기 불필요)

$f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$

$38^2=f(40-2)=f(40)+f'(40)(-2)=1600-160\simeq 1440$

$E=|1444-1440|=4$

오일러 상수

오일러 상수 e는 $\frac{d}{dx}e^x=e^x$를 만족하는 수이다. 이제 $f(x)=e^x$라 두고 위의 방법을 적용하여 $\sqrt{e}$의 근삿값을 구하여라. 그리고, 이 결과를 이용하여 e의 근삿값을 구하라. (계산기 불필요)

$f(x)=e^x=f'(x)=e^x$

$\sqrt{e}=f(0+0.5)=f(0)+f'(0)\cdot 0.5=1+0.5=1.5$

$e=f(0.5+0.5)=f(0.5)+f'(0.5)\cdot 0.5=1.5+1.5\cdot 0.5=2.25$

오일러 상수

위의 방법을 반복하여 이용하면 정확한 e의 값을 구할 수 있다. 이 방법을 설명하고 이를 위한 프로그램 코드(Scilab, C, 또는 Matlab)를 적어라.

변화량을 더 작게하고 반복하면 정확한 e의값을 구할수있다

5

```
float a=0 , sum=0, i=0.0001 ,summ=0;
 int j;
 for(j=1;j<=100000000;j++)
     sum= a+a*i;
     a=sum;
     summ=summ+i;
 if(summ==1)   break;
 }
 printf("e의 근삿값은 %0.5f", sum);
```