

쉽게 시작하는 기초선형대수학

1-1. 연립일차방정식의 풀이

서울시립대학교 수학과 박의용

1.1 연립일차방정식의 풀이

- ▶ 연립일차방정식의 뜻
- ▶ 연립일차방정식의 풀이
- ▶ 연립일차방정식의 풀이와 행렬과의 관계

연립일차방정식의 뜻

- ▶ 연립일차방정식이란?

여러 개의 미지수를 갖는 일차방정식들의 모임

연립일차방정식의 뜻

▶ 연립일차방정식이란?

여러 개의 미지수를 갖는 일차방정식들의 모임

(예)

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

연립일차방정식의 뜻

- ▶ 연립일차방정식이란?

여러 개의 미지수를 갖는 일차방정식들의 모임

(예)

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

- ▶ “주어진 연립일차방정식의 해를 구하여라.”라는 뜻은?
주어진 연립일차방정식을 모두 만족하는 미지수의 값을 구하는 것이다.

연립일차방정식의 풀이

(예) 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$(1) \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

연립일차방정식의 풀이

(예) 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$(1) \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ -3y = -6 \end{cases}$$

연립일차방정식의 풀이

(예) 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$(1) \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ -3y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

연립일차방정식의 풀이

(예) 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$(1) \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ -3y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

연립일차방정식의 풀이

(예) 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$(1) \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ -3y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

따라서 $x = 3, y = 2$ 가 위의 연립일차방정식의 해이다.

연립일차방정식의 풀이

(예) 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$(1) \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ -3y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

따라서 $x = 3, y = 2$ 가 위의 연립일차방정식의 해이다.

$$(2) \begin{cases} -2x + y = 3 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$$

연립일차방정식의 풀이

(예) 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$(1) \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ -3y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

따라서 $x = 3, y = 2$ 가 위의 연립일차방정식의 해이다.

$$(2) \begin{cases} -2x + y = 3 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 2y = 6 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$$

연립일차방정식의 풀이

(예) 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$(1) \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ -3y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

따라서 $x = 3, y = 2$ 가 위의 연립일차방정식의 해이다.

$$(2) \begin{cases} -2x + y = 3 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 2y = 6 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$$

따라서 위의 연립일차방정식의 해는 없다.

연립일차방정식의 풀이

(예) 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$(1) \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ -3y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

따라서 $x = 3, y = 2$ 가 위의 연립일차방정식의 해이다.

$$(2) \begin{cases} -2x + y = 3 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 2y = 6 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$$

따라서 위의 연립일차방정식의 해는 없다.

$$(3) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

연립일차방정식의 풀이

(예) 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$(1) \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ -3y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

따라서 $x = 3, y = 2$ 가 위의 연립일차방정식의 해이다.

$$(2) \begin{cases} -2x + y = 3 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 2y = 6 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$$

따라서 위의 연립일차방정식의 해는 없다.

$$(3) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases} \Rightarrow x + 2y = 1$$

연립일차방정식의 풀이

(예) 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$(1) \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ -3y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

따라서 $x = 3, y = 2$ 가 위의 연립일차방정식의 해이다.

$$(2) \begin{cases} -2x + y = 3 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 2y = 6 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$$

따라서 위의 연립일차방정식의 해는 없다.

$$(3) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases} \Rightarrow x + 2y = 1$$

따라서 모든 실수 t 에 대해서, $x = 1 - 2t, y = t$ 가 위의 연립일차방정식의 해이다.

연립일차방정식의 풀이

정리 1.1 주어진 연립일차방정식은 아래 세가지 경우 중 하나만 만족한다.

- (1) 해를 갖지 않는다.
- (2) 오직 하나의 해를 갖는다.
- (3) 무수히 많은 해를 갖는다.

연립일차방정식의 풀이

(예) 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

연립일차방정식의 풀이

(예) 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

(풀이) \Rightarrow

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - x_3 & = & 1 \\ x_2 - x_3 & = & 2 \end{array} \quad (\text{Eq1 과 Eq2 자리 바꿈})$$

연립일차방정식의 풀이

(예) 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

(풀이) \Rightarrow

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - x_3 & = & 1 \\ x_2 - x_3 & = & 2 \end{array} \quad (\text{Eq1 과 Eq2 자리 바꿈})$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & - & 2x_3 = 3 \quad (\text{Eq1} + \text{Eq2}) \\ x_2 - x_3 & = & 2 \end{array}$$

연립일차방정식의 풀이

(예) 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

(풀이) \Rightarrow

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - x_3 & = & 1 \\ x_2 - x_3 & = & 2 \end{array} \quad (\text{Eq1 과 Eq2 자리 바꿈})$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & - & 2x_3 = 3 \quad (\text{Eq1} + \text{Eq2}) \\ x_2 - x_3 & = & 2 \end{array}$$

그러므로 $x_1 = 2x_3 + 3$, $x_2 = x_3 + 2$ 이다.

연립일차방정식의 풀이

(예) 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

(풀이) $\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \quad (\text{Eq1 과 Eq2 자리 바꿈})$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \quad (\text{Eq1} + \text{Eq2})$$

그러므로 $x_1 = 2x_3 + 3$, $x_2 = x_3 + 2$ 이다. 따라서 $x_3 = t$ 라 두면,
모든 실수 t 에 대해서

$$x_1 = 2t + 3, \quad x_2 = t + 2, \quad x_3 = t$$

는 위의 연립일차방정식의 해이다.

연립일차방정식의 풀이

(예) 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -6 \end{cases}$$

연립일차방정식의 풀이

(예) 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -6 \end{cases}$$

(풀이)

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \Rightarrow & \begin{aligned} x_2 - x_3 &= -1 && (\text{Eq2} + (-2)\text{Eq1}) \\ -2x_2 - 3x_3 &= -8 && (\text{Eq3} + (-1)\text{Eq1}) \end{aligned} \end{aligned}$$

연립일차방정식의 풀이

(예) 다음 연립일차방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -6 \end{cases}$$

(풀이)

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \Rightarrow & \begin{aligned} x_2 - x_3 &= -1 && (\text{Eq2} + (-2)\text{Eq1}) \\ -2x_2 - 3x_3 &= -8 && (\text{Eq3} + (-1)\text{Eq1}) \end{aligned} \\ & x_1 + 2x_3 = 3 && (\text{Eq1} + (-1)\text{Eq2}) \\ \Rightarrow & \begin{aligned} x_2 - x_3 &= -1 \\ -5x_3 &= -10 && (\text{Eq3} + (2)\text{Eq2}) \end{aligned} \end{aligned}$$

연립일차방정식의 풀이

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_3 = 3 \\ \Rightarrow & \begin{aligned} x_2 - x_3 &= -1 \\ x_3 &= 2 \end{aligned} \quad \left(\left(-\frac{1}{5}\right) \text{Eq3} \right) \end{aligned}$$

연립일차방정식의 풀이

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & + 2x_3 & = 3 \\ x_2 - x_3 & = -1 \\ x_3 & = 2 & \left(\left(-\frac{1}{5}\right) \text{Eq3} \right) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & & = -1 & (\text{Eq1} + (-2)\text{Eq3}) \\ x_2 & & = 1 & (\text{Eq2} + \text{Eq3}) \\ x_3 & & = 2 \end{array}$$

연립일차방정식의 풀이

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & + 2x_3 & = 3 \\ x_2 - x_3 & = -1 \\ x_3 & = 2 & \left((-\frac{1}{5})\text{Eq3} \right) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & & = -1 & (\text{Eq1} + (-2)\text{Eq3}) \\ x_2 & & = 1 & (\text{Eq2} + \text{Eq3}) \\ x_3 & = 2 & \end{array}$$

$$\text{따라서 } \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 & = & -6 \end{array} \right. \text{의 해는 } \begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{array} \text{ 이다.}$$

연립일차방정식의 풀이와 행렬과의 관계

(관찰)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = -6$$

연립일차방정식의 풀이와 행렬과의 관계

(관찰)

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 & = & -6 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \end{array} \right)$$

연립일차방정식의 풀이와 행렬과의 관계

(관찰)

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 & = & -6 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_2 - x_3 & = & -1 \\ -2x_2 - 3x_3 & = & -8 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{array} \right)$$

연립일차방정식의 풀이와 행렬과의 관계

(관찰)

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 & = & -6 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_2 - x_3 & = & -1 \\ -2x_2 - 3x_3 & = & -8 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_3 & = & 3 \\ x_2 - x_3 & = & -1 \\ -5x_3 & = & -10 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array} \right)$$

연립일차방정식의 풀이와 행렬과의 관계

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & & + 2x_3 & = & 3 & & & & \\ & x_2 & - x_3 & = & -1 & \longleftrightarrow & & & \\ & & x_3 & = & 2 & & & & \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

연립일차방정식의 풀이와 행렬과의 관계

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + 2x_3 & = 3 \\ x_2 - x_3 & = -1 \\ x_3 & = 2 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & & = -1 \\ x_2 & & = 1 \\ x_3 & = 2 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

연립일차방정식의 풀이와 행렬과의 관계

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & & + 2x_3 & = & 3 & & & & \\ & x_2 & - x_3 & = & -1 & \longleftrightarrow & & & \\ & & x_3 & = & 2 & & & & \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & & & = & -1 & & & & \\ & x_2 & & = & 1 & \longleftrightarrow & & & \\ & & x_3 & = & 2 & & & & \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

따라서

연립일차방정식의 풀이 \longleftrightarrow 위의 행렬을 “간단하게” 만드는 것

정리하기

- ▶ 연립일차방정식의 뜻

여러 개의 미지수를 갖는 일차방정식들의 모임

- ▶ 연립일차방정식의 풀이

주어진 방정식들의 (i) 순서를 바꾸거나, (ii) 0이 아닌 상수배를 하거나, (iii) 상수배를 한 방정식을 다른 방정식에 더해서 주어진 방정식을 간단하게 만들어 해를 구한다.

- ▶ 연립일차방정식의 풀이와 행렬과의 관계

연립일차방정식의 풀이

↔ 연립방정식으로부터 얻은 행렬을 “간단하게” 만드는 것