이상구 | 성균관대학교

6주차. 행렬 분해

* LU 분해
  : 정사각행렬 A를 하삼각행렬 L과 상삼각행렬 U의 곱으로 표현하는 것이다.

$$A=\begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & l_2 & 0 & 0 \\ * & * & l_3 & 0 \\ * & * & * & l_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & * & * & * \\ 0 & u_2 & * & * \\ 0 & 0 & u_3 & * \\ 0 & 0 & 0 & u_4 \end{bmatrix}=LU$$

* QR 분해 : $m\times n$ $(m\ge n)$의 행렬 A에 대하여 정규직교벡터들을 열로 하는 $m\times n$ 행렬 Q 와 $n\times n$의 상삼각행렬 R의 곱 $A=QR$로 표현하는 것이다.

$$A=[\mathrm{q}_1 \ \mathrm{q}_2 \ \cdots \ \mathrm{q}_n]\begin{bmatrix} r_{11} & * & * & * \\ 0 & r_{22} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & r_{nn} \end{bmatrix}=QR$$

* SVD(singular value decomposition, 특잇값 분해) : 행렬을 두 개의 직교행렬과 대각행렬의 곱으로 분해하는 것을 말한다. 구체적으로 크기가 $m\times n$인 행렬 A에 대하여 $m\times m$ 직교행렬(orthogonal matrix) U와 $n\times n$ 직교행렬 V 및 $m\times n$ 대각선 행렬 Σ이 존재하여 다음을 만족한다.

$$A=U\Sigma V^T = U\begin{bmatrix} \Sigma_1 & O \\ O & O \end{bmatrix}V^T$$

$$=[\mathrm{u}_1 \mathrm{u}_2 \cdots \mathrm{u}_k \mathrm{u}_{k+1} \cdots \mathrm{u}_m]\left[\begin{array}{cccc|ccc} \sigma_1 & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \sigma_2 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & \sigma_k & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} \mathrm{v}_1^T \\ \mathrm{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathrm{v}_n^T \end{bmatrix}$$