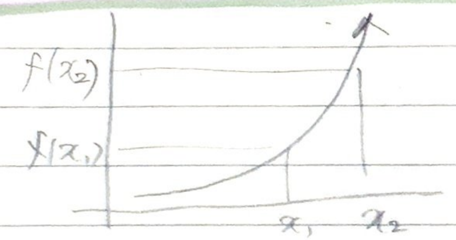
Week 8. 극소, 극대, 최소, 최대

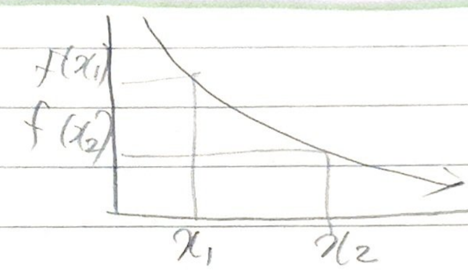
8.1 도함수의 응용

함수 f가 구간 I에서 정의되어 있을 때, I 내의 $x_1 < x_2$인 임의의 두 점 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1) < f(x_2)$를 만족하면 f는 구간 I에서 증가(increasing),

$x_1 < x_2$인 I 내 두 점 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1) > f(x_2)$를 만족하면 f는 구간 I에서 감소(decreasing)

* 도함수는 다음과 같이 함수가 증가하거나 감소하는 상황을 알려준다

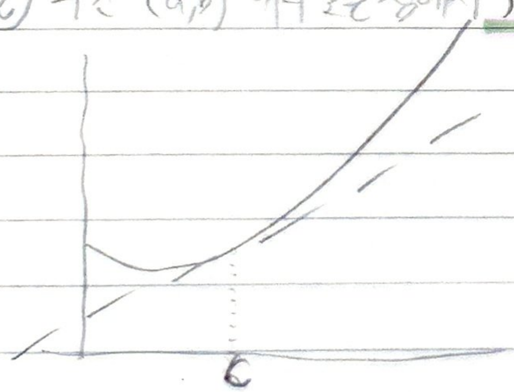


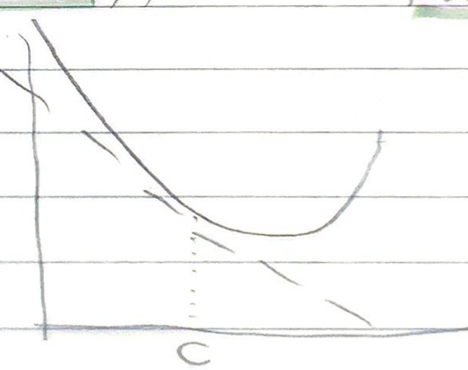


함수 f가 폐구간 $[a,b]$에서 연속 & 개구간 (a,b)에서 미분가능 → 아래가 성립

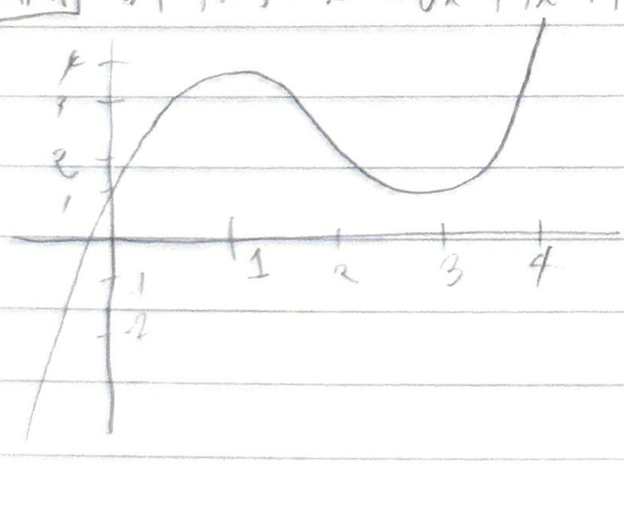
① 구간 (a,b) 내의 모든 점에서 $f'(x) > 0$이면, f는 $[a,b]$에서 증가

② 구간 (a,b) 내의 모든 점에서 $f'(x) < 0$이면, f는 $[a,b]$에서 감소





$\boxed{\text{예제}}$ 함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$의 증가하는 구간과 감소하는 구간



$$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 12x + 9}$$

증가> $f'(x) > 0$, solve

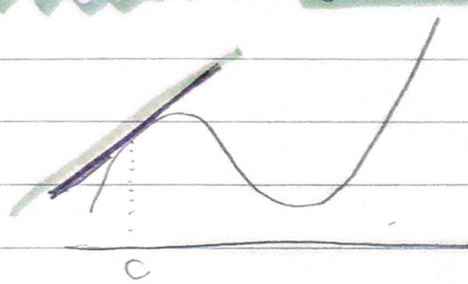
감소> $f'(x) < 0$, solve

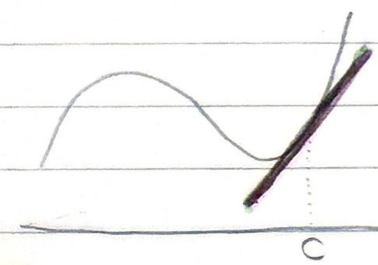
8.2 2계 도함수 응용

함수 f가 $x=c$ 에서 미분가능하고 $(c, f(c))$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이라 할 때, 점 c를 포함하는 적당한 개구간 I가 존재하여, $x \neq c$ 인 구간 I의 각 점 x에 대응하는 곡선 위의 모든 점 $(x, f(x))$가 점 $(c, f(c))$에서의 곡선의 접선 아래쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 점 $(c, f(c))$에서 위로 볼록 또는 아래로 오목하다고 하고, 반대로 접선 위쪽에 있으면 아래로 볼록 또는 위로 오목하다 한다.

"변곡점"

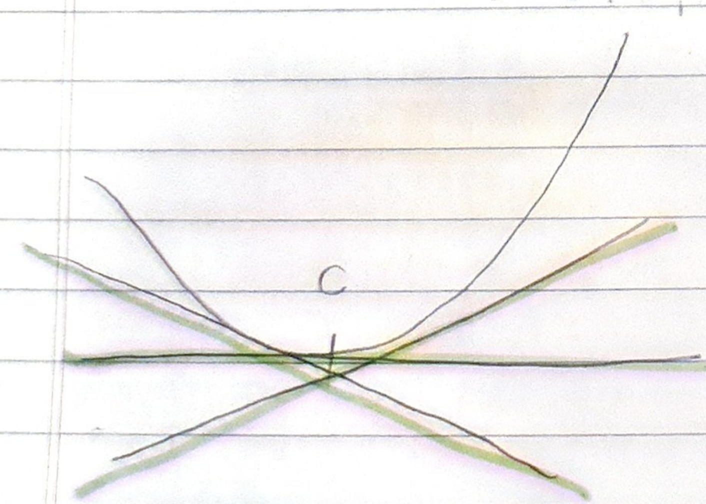
곡선 $y=f(x)$가 점 c에서 연속일 때, ($f'(c)$는 존재하지 않아도 무방) 곡선 위의 점 $(c, f(c))$을 경계로 한쪽에서는 위로 볼록하고 다른 쪽에서는 아래로 볼록할 때, $(c, f(c))$를 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라 한다.

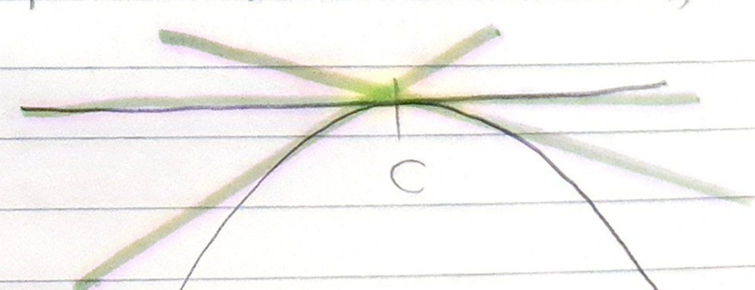




함수 f가 점 c를 포함하는 적당한 개구간 I에서 미분가능하고 $f''(c)$가 존재할 때,
① $f''(c) > 0$이면, 곡선 f는 점 $(c, f(c))$에서 아래로 볼록하다.
② $f''(c) < 0$이면, 곡선 f는 점 $(c, f(c))$에서 위로 볼록하다.

$f''(c) > 0$ 이면 $f'' = (f')'$ 이므로;
→ f'는 $x=c$ 근방에서 증가함
→ f'는 접선의 기울기이므로, 접선 기울기가 증가함 (가팔라짐)
⇒ 따라서 아래 그림과 같이 아래로 볼록임을 알 수 있음 ($f''(c) < 0$이면 위로 볼록)





8_3 극대, 극소, 최대 최소

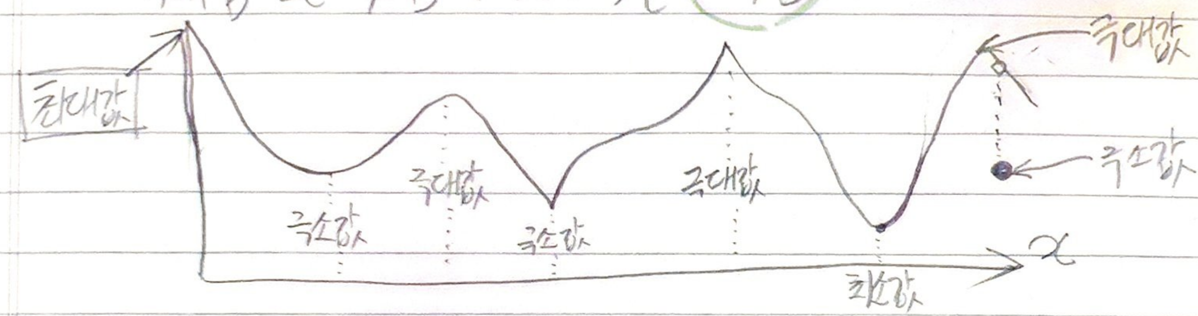
- $f(x)$가 폐구간 $[a,b]$에서 연속이면 이 구간에서 $f(x)$가 최대값을 취하는 점 및 최소값을 취하는 점이 존재 — 이 점을 구하려면 극대, 극소 알아야 함.

[함수 f가 $x=c$ 근방의 모든 점 x에 대하여 $f(x) \le f(c)$가 성립하면 함수 f는 $x=c$에서 극대값 $f(c)$를 갖는다고 한다.

[반대로 함수 f가 $x=c$ 근방의 모든 점 x에 대하여 $f(x) \ge f(c)$가 성립하면 함수 f는 $x=c$에서 극소값 $f(c)$를 갖는다고 한다.

$\Rightarrow$ f의 극대값과 극소값을 "극값"이라 하고,

극대점 또는 극소점 $(c, f(c))$를 "극점"이라 한다.



∴ 극값이 생길 수 있는 후보는

— $f'(c)=0$ 이거나 $f'(c)$가 존재하지 않는 점

* 함수의 미분계수가 0이거나 존재하지 않는 점 = 임계점 (critical point)

[Fermat의 임계점 정리]

함수 f가 개구간 (a,b)에서 연속이고 $x=c \in (a,b)$에서 극값을 갖는다면,

$f'(c)=0$ 이거나 $f'(c)$가 존재하지 않는다.

- 도함수를 이용하면 극대값과 극소값을 쉽게 판정할 수 있다.

함수 f가 정의역 내 한 점 c에서 f'과 f''을 가지며 $f'(c)=0$일 때,

① $f''(c) < 0$ 이면, $f(c) \Rightarrow$ 극대값

② $f''(c) > 0$ 이면, $f(c) \Rightarrow$ 극소값

$f''(c) < 0$ 이면 $(c, f(c))$에서 위로 볼록인데, $f'(c)=0$ 이므로 다음 그림에서 $f(c)$는 함수 f의 극대값임을 알 수 있다. 마찬가지로, $f''(c)>0 \rightarrow$ 아래볼록, $f(c)$ = 극소값