☆ 선형조합

벡터/행렬에 다음처럼 스칼라값을 곱한 후 더하거나 뺀 것을 벡터/행렬의 선형조합(linear combination)이라고 한다. 벡터나 행렬을 선형조합해도 크기는 변하지 않는다.

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_Lx_L = x$$

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots c_LA_L = A$$

$$c_1, c_2, \cdots c_L \in \mathbb{R}$$

$$x_1, x_2, \cdots x_L, x \in \mathbb{R}^M$$

$$A_1, A_2, \cdots A_L, A \in \mathbb{R}^{M\times N}$$

vector

$$c_1 \begin{bmatrix} x_1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} x_2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}$$

matrix

$$c_1 \boxed{A_1} + c_2 \boxed{A_2} + c_3 \boxed{A_3} = \boxed{A}$$

* 벡터의 내적

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle = x^T y$$

(조건1) 두 벡터의 차원(길이)이 같을 것

(조건2) 앞 벡터는 행 벡터, 뒷 벡터는 열 벡터

$$x^T y = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots x_Ny_N = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

$$x \in \mathbb{R}^{N\times 1}$$

$$y \in \mathbb{R}^{N\times 1}$$

차원축소

$$x^T y \in \mathbb{R}$$

* 가중합 weighted sum

데이터 벡터 $x = [x_1, \cdots, x_N]^T$

가중치 벡터 $w = [w_1, \cdots, w_N]^T$

데이터 벡터의 가중합

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_N x_N = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i x_i = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = w^T x$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} = x^T w$$

ex) 쇼핑을 할 때 물건 가격은 데이터 벡터, 각 물건 수량은 가중치
(가중치 = 1이면 일반적인 sum 계산)

$$w_1 = w_2 = \cdots = w_N = 1$$

OR

$$w = 1_N$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = \boxed{1_N^T x}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = x_1 + x_2 + \cdots x_N$$

연습문제 2.2.2

벡터 x의 평균제거 벡터는 다음과 같이 계산함을 보여라.

$$x - \frac{1}{N}1_N^T x 1_N$$

$\bar{x} = \frac{1}{N}1_N^T x$ 이므로,

$$x - \bar{x}\, 1 = x - \frac{1}{N}1_N^T x 1_N$$

vector　scalar　vector

x　$\frac{1}{N}1_N^T x$　1_N

연습문제 2.2.4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot1+2\cdot4 & 1\cdot2+2\cdot5 & 1\cdot3+2\cdot6 \\ 3\cdot1+4\cdot4 & 3\cdot2+4\cdot5 & 3\cdot3+4\cdot6 \\ 5\cdot1+6\cdot4 & 5\cdot2+6\cdot5 & 5\cdot3+6\cdot6 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5 & 1\cdot2+2\cdot4+3\cdot6 \\ 4\cdot1+5\cdot3+6\cdot5 & 4\cdot2+5\cdot4+6\cdot6 \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ 일 때, AA^T 와 A^TA를 계산하고, 항상 정방행렬이 되는지 확인

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot1+2\cdot2 & 1\cdot3+2\cdot4 & 1\cdot5+2\cdot6 \\ 3\cdot1+4\cdot2 & 3\cdot3+4\cdot4 & 3\cdot5+4\cdot6 \\ 5\cdot1+6\cdot2 & 5\cdot3+6\cdot4 & 5\cdot5+6\cdot6 \end{bmatrix} \quad 3\times3$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot1+3\cdot3+5\cdot6 & 1\cdot2+3\cdot4+5\cdot6 \\ 2\cdot1+4\cdot3+6\cdot5 & 2\cdot2+4\cdot4+6\cdot6 \end{bmatrix} \quad 2\times2$$

$x = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ 일 때, x^Tx 와 xx^T 를 손으로 계산하고,

어떤 것이 스칼라 / 정방행렬이 되는지 확인하라.

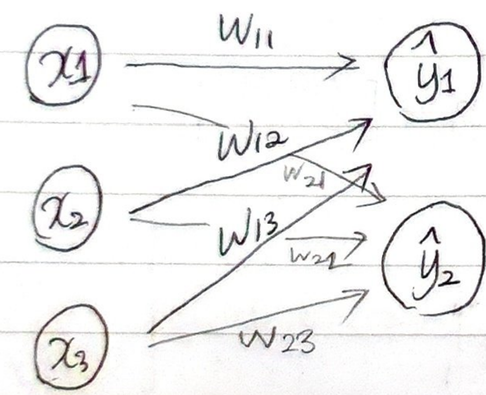
$(1\times3)\cdot(3\times1) = (1\times1)$

$x^Tx = [1\ 2\ 3]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3$, scalar

$xx^T = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[1\ 2\ 3] = \begin{bmatrix}1\cdot1 & 1\cdot2 & 1\cdot3\\ 2\cdot1 & 2\cdot2 & 2\cdot3\\ 3\cdot1 & 3\cdot2 & 3\cdot3\end{bmatrix}$, 정방행렬

$(3\times1)\cdot(1\times3) = (3\times3)$

인공신경망의 기본구조



$$\begin{bmatrix}\hat{y}_1\\ \hat{y}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}w_{11} & w_{12} & w_{13}\\ w_{21} & w_{22} & w_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\hat{y} = Wx}$$

가중치 행렬

연습문제 2.2.5

(1) 길이가 같은 열벡터 $1_N \in R^N$과 행벡터 $x \in R^N$의 곱은
행벡터 x를 반복하여 가지는 행렬과 같음을 보여라.

$$1_N x^T = \begin{bmatrix} x^T \\ x^T \\ \vdots \\ x^T \end{bmatrix}$$

(좌변) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x & \cdots & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & x & \cdots & x \\ x & x & x & \cdots & x \\ \vdots \\ x & x & x & \cdots & x \end{bmatrix}$

$n \times 1 \quad 1 \times n$

(2) 행렬 X ($X \in R^{N \times M}$)가 있을 때, 이 행렬의 각 열의 평균으로 이루어진
벡터 $\bar{x}$ ($\bar{x} \in R^M$)가 다음과 같음을 보여라.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} X^T 1_N$$

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1M} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{NM} \end{bmatrix}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{N1} \\ x_{12} & x_{22} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{1M} & \cdots & \cdots & x_{NM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{N} = \begin{bmatrix} \frac{(x_{11} + x_{21} + \cdots x_{N1})}{N} \\ \frac{(x_{12} + x_{22} + \cdots x_{N2})}{N} \\ \vdots \\ \frac{(x_{1M} + x_{2M} + \cdots x_{NM})}{N} \end{bmatrix}$$

$M \times N \quad N \times 1$

(3) 행렬 $\bar{X}$ ($\bar{X} \in \mathbb{R}^{N \times M}$)는 동일한 벡터 $\bar{x}^T$를 N개 누적하여 만든 행렬이다. 즉, 각 열의 모든 값이 그 열의 평균으로 이루어진 행렬이다.

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{x}^T \\ \bar{x}^T \\ \vdots \\ \bar{x}^T \end{bmatrix}$$

이 때, $\bar{X}$가 다음과 같음을 보여라.

$$\bar{X} = \frac{1}{N} 1_N 1_N^T X$$

(우변)

$$\frac{1}{N} \cdot 1_N 1_N^T X = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{1 \times n} \cdot X$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N} \\ \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N} \end{bmatrix}_{N \times N} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1M} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{NM} \end{bmatrix}_{N \times M}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{x}^T \\ \bar{x}^T \\ \vdots \\ \bar{x}^T \end{bmatrix}$$

연습문제 2.2.6

다음 행렬의 곱셈을 순서를 바꿔 두 가지 방법으로 다시 해본다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

① $\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 7 \cdot 5 + 10 \cdot 6 \end{bmatrix} = 95$

② $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right)$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ 39 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 17 + 2 \cdot 39 \end{bmatrix} = 95$

① = ② = 95.

연습문제 2.2.7

다음 행렬 X와 벡터 w에 대해 곱 Xw가 열벡터 c_1, c_2, c_3의 선형조합 $w_1c_1 + w_2c_2 + w_3c_3$가 됨을 실제 계산으로 보여라.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$Xw = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 \\ 4\cdot 2 + 5\cdot 3 + 6\cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1\cdot c_1 & x_2\cdot c_2 & x_3\cdot c_3 \\ x_4\cdot c_1 & x_5\cdot c_2 & x_6\cdot c_3 \end{bmatrix}$$

연습문제 2.2.8

벡터 v_1, v_2, v_3로 이루어진 행렬 V와 벡터 λ에 대해 다음 식이 성립함을 보여라. 이 식에서 λ_1은 스칼라이다.

$$V\lambda = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 v_1$$

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = v_1 \cdot \lambda_1 + v_2 \cdot 0 + v_3 \cdot 0$$

$$= v_1 \cdot \lambda_1$$

$$= \lambda_1 \cdot v_1$$

여러개의 벡터에 대한 가중합 동시 계산

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 x_{11} + w_2 x_{12} + \cdots + w_N x_{1N} \\ w_1 x_{21} + w_2 x_{22} + \cdots + w_N x_{2N} \\ \vdots \\ w_1 x_{M1} + w_2 x_{M2} + \cdots + w_N x_{MN} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{M1} & x_{M2} & \cdots & x_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_M^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}$$

$$= Xw$$

$$\therefore \hat{y} = Xw$$

연습문제 2.2.9

x_1, x_2가 다음과 같을 때,

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix}$$

다음 등식이 성립함을 보여라.

$$Xw = \begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^T w \\ x_2^T w \end{bmatrix}$$

(좌변)

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}w_1 + x_{21}w_2 + x_{31}w_3 \\ x_{12}w_1 + x_{22}w_2 + x_{32}w_3 \end{bmatrix}$$

(우변)

$$\begin{bmatrix} x_1^T w \\ x_2^T w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [x_{11}\ x_{21}\ x_{31}] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \\ [x_{21}\ x_{22}\ x_{32}] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}w_1 + x_{21}w_2 + x_{31}w_3 \\ x_{12}w_1 + x_{22}w_2 + x_{32}w_3 \end{bmatrix}$$

잔차

: 예측치와 실제값(target) y_i의 차이 = 오차(error), 잔차(residual)

잔차를 모든 독립변수 벡터에 대해 구하면 → 잔차 벡터 e

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - w^T x_i$$

잔차 벡터는 다음처럼 $y - Xw$로 간단하게 표기할 수 있다.

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_M \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1^T w \\ x_2^T w \\ \vdots \\ x_M^T w \end{bmatrix}$$

$$= y - Xw$$

$$\therefore e = y - Xw$$

잔차 제곱합 (RSS : Residual Sum of Squares)

$$\sum_{i=1}^{N} e_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - w^T x_i)^2 = e^T e = (y - Xw)^T (y - Xw)$$

연습문제 2.2.10

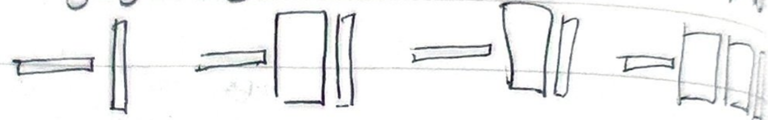
분배법칙을 사용하여 위식 $(y-Xw)^T(y-Xw)$을 풀어쓰면 다음과 같음을 보여라.

$$(y-Xw)^T(y-\cancel{X}w) = y^Ty - w^TX^Ty - y^TXw + w^TX^TXw$$

(좌변)

$$(y-Xw)^T(y-Xw) = (y^T - w^TX^T)(y-Xw)$$

$$= y^Ty - y^TXw - w^TX^Ty + w^TX^TXw$$



Scalar Scalar Scalar Scalar

*이차형식

이차형식 (Quadratic Form)

w^TX^TXw → 이차형식, X^TX는 정방행렬 A 라 할 때 $\boxed{w^TAw}$

• (row vector) (square matrix) (column vector)

$$x^TAx = [x_1\ x_2 \cdots x_N] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{i,j}\, x_i x_j$$

연습문제 2.2.11

다음 3차원 벡터와 행렬에 대해 이차형식을 쓰고 값을 계산하라.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

이차형식

$$x^T A x = \underset{1\times 3}{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}} \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} (x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + x_3 a_{13}) & (x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + x_3 a_{23}) & (x_1 a_{31} + x_2 a_{32} + x_3 a_{33}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= (x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + x_3 a_{13}) x_1 + (x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + x_3 a_{23}) x_2 + (x_1 a_{31} + x_2 a_{32} + x_3 a_{33}) x_3$$

연습문제 2.2.12

다음 식이 성립함을 증명하라.

$$x^T A x = \frac{1}{2} x^T (A + A^T) x$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

우변)

$$\frac{1}{2} x^T (A + A^T) x = \frac{1}{2} \left(x^T A x + x^T A^T x \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(x^T A x + (x^T A x)^T \right)$$

$x^T A x$ 는 scalar 이므로

$$x^T A x = (x^T A x)^T$$

$$\therefore \frac{1}{2} x^T (A + A^T) x$$

$$= \frac{1}{2} \left(x^T A x + (x^T A x)^T \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(x^T A x + x^T A x \right)$$

$$= x^T A x$$

부분행렬

다음과 같은 2차원 정방행렬 A, B가 있다.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

두 행렬의 곱 AB는 A, B의 부분행렬(submatrix)를 이용하여 여러 방법으로 계산할 수 있다.

(1) 앞에 곱해지는 행렬을 행벡터로 나누어 계산

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{bmatrix}$$

즉, $a_1^T = [a_{11} \ a_{12}]$, $a_2^T = [a_{21} \ a_{22}]$ 이면

$$AB = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} a_1^T B \\ a_2^T B \end{bmatrix}$$

(2) 뒤에 곱해지는 행렬을 열벡터로 나누어 계산

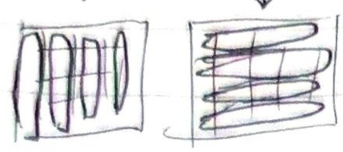
$$B = [b_1 \ b_2]$$

즉, $b_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{22} \end{bmatrix}$ 이면

$$AB = A[b_1 \ b_2] = [Ab_1 \ Ab_2]$$

(3) 앞 행렬을 열벡터로, 뒤 행렬을 행벡터로 나누어 스칼라처럼 계산

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \end{bmatrix} = a_1 b_1^T + a_2 b_2^T$$



* 일반적인 N차원 행렬에서도 위 관계는 성립한다.

연습문제 2.2.13

행렬 V는 열벡터 v_i ($i = 1, \dots, N$)로 이루어진 정방행렬이다. V와 크기가 같은 다른 정방행렬 A, Λ이 있을 때 다음 식이 성립한다.

$$AV = A\begin{bmatrix} v_1 \cdots v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_1 \cdots Av_N \end{bmatrix}$$

$$V\Lambda = \begin{bmatrix} v_1 \cdots v_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_N v_N \end{bmatrix}$$

$N = 3$일 때 위의 식이 성립함을 보여라.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

$$V\Lambda = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1\lambda_1 & v_2\lambda_2 & v_3\lambda_3 \end{bmatrix}$$

연습문제 2.2.14

부분행렬 공식 (3) — 앞행렬 colvector, 뒷행렬 rowvector — 으로부터

A가 행벡터 a_i^T $(i=1, \cdots N)$로 이루어진 N차 정방행렬일 때

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_N^T \end{bmatrix}$$

다음 관계가 성립한다.

$$A^TA = [a_1 \; a_2 \cdots a_N] \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_N^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} a_i a_i^T$$

$N=3$인 경우에 위 식이 성립함을 보여라.

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]$$

$$A^TA = [a_1 \; a_2 \; a_3]_{1\times3} \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$= [a_1a_1^T + a_2a_2^T + a_3a_3^T]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} a_i a_i^T$$