2.3 행렬의 성질

부호/크기와 유사한 행렬의 개념

→ 양의 정부호(positive definite), 양의 준정부호(positive semi-definite)

영벡터가 아닌 모든 벡터 x에 대해 다음 부등식이 성립 → A가 양의 정부호

$$x^T A x > 0$$

등호를 포함한다면 양의 준정부호

$$x^T A x \geq 0$$

예제 2.3.1

다음 행렬이 양의 정부호인지 양의 준정부호인지 혹은 어떤 것에도 해당되지 않는지 판단하라.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$x = [x_1 \ x_2]$, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ 일때

$$[x_1 \ x_2]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= [x_1+x_2 \ \ x_1+x_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= x_1(x_1+x_2) + x_2(x_1+x_2)$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$

$$= (x_1+x_2)^2$$

$x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ 이며, $x_1 = -x_2$일때 0이 된다.

따라서 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$은 양의 준정부호이다.

행렬 놈 (norm)

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}|a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

보통 $p = 1, 2, \infty$ (infinite)

$p=2$ 인 경우가 가장 많이 쓰인다 → $\boxed{\text{Frobenius norm}}$

$$\|A\| = \|A\|_2 = \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}a_{ij}^2}$$

- 놈은 항상 0보다 같거나 크다
- 벡터의 놈의 제곱은 벡터의 제곱합과 같다

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{N}x_i^2 = x^Tx$$

- minimize <u>norm</u> = vector squared minimize

연습문제 2.3.2

행렬 A, $(A \in \mathbb{R}^{N\times M})$의 놈의 제곱 $\|A\|^2$이 2 행렬을 이루는 행 벡터 r_i의 놈의 제곱의 합 또는 열 벡터 c_i의 놈의 제곱의 합과 같음을 증명하라.

$$\|A\|^2 = \sum_{i=1}^{N}\|r_i\|^2 = \sum_{j=1}^{M}\|c_j\|^2$$

$$\|A\|^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}|a_{ij}|^2$$

$$\sum_{i=1}^{N}\|r_i\|^2 = \sum_{i=1}^{N}r_i^Tr_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}a_{ij}^2$$

$$\sum_{j=1}^{M}\|c_j\|^2 = \sum_{j=1}^{M}c_j^Tc_j = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}a_{ij}^2$$

정확한 놈의 정의?

→ 다음 4가지 성질이 성립하는 행렬연산

→ 이러한 연산이 여러 개 존재하므로 놈의 정의도 다양함

① 놈의 값은 0 이상 (영행렬일 때만 0)

$$\|A\| \geq 0$$

② 행렬에 스칼라를 곱하면 놈의 값도 그 스칼라를 곱한 값과 같다.

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$$

③ 행렬의 합의 놈은 각 행렬의 놈의 합보다 작거나 같다.

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

④ 정방행렬의 곱의 놈은 각 정방행렬의 놈의 곱보다 작거나 같다.

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

대각합 (trace)

- 정방행렬에 대해서만 정의된다
- 대각원소의 합

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{NN} = \sum_{i=1}^{N} a_{ii}$$

i.e. N차원 항등행렬 (identity matrix)의 대각합 $= N$

$$tr(I_N) = N$$

- 대각합은 놈과 달리 음수가 될 수 있다
- 대각합은 다음과 같은 성질을 갖는다 (c=스칼라, A, B, C=행렬)

① 스칼라를 곱하면 대각합은 스칼라와 원래의 대각합의 곱이다.

$$tr(cA) = c\,tr(A)$$

② 전치연산을 해도 대각합이 달라지지 않는다.

$$tr(A^T) = tr(A)$$

③ 두 행렬의 합의 대각합은 두 행렬의 대각합의 합이다.

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$$

④ 두 행렬의 곱의 대각합은 행렬의 순서를 바꿔도 달라지지 않는다.

$$tr(AB) = tr(BA)$$

⑤ 세 행렬의 곱의 대각합은 다음과 같이 순서를 순환시켜도 달라지지 않는다.

$$tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB)$$

마지막 식은 곱셈에서 순서가 바뀌어도 대각합이 같다는 것을 이용하여 증명할 수 있다.

$$tr((AB)C) = tr(C(AB)) = tr((CA)B) = tr(B(CA))$$

특히, ⑤는 트레이스 트릭 (trace trick)이라고 하며
이차형식 (quadratic form)의 미분을 구하는데 유용하게 사용된다.

→ $tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB)$ 에서
A, B, C가 각각 정방행렬일 필요는 없다.
최종적으로 대각합을 구하는 행렬만 정방행렬이기만 하면 된다.

$$x^TAx = tr(x^TAx) = tr(Axx^T) = tr(xx^TA)$$

* quadratic form은 스칼라 값이기 때문에 대각합을 취해도 원래값과 같다.

연습문제 2.3.3
x, A가 각각 크기가 2인 벡터, 크기가 2×2인 정방행렬일 때
이차 형식의 트레이스 트릭이 성립함을 보여라.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

$$x^TAx = [x_1 \ x_2]\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= [x_1a_1 + x_2a_3 \quad x_1a_2 + x_2a_4]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= x_1(x_1a_1 + x_2a_3) + x_2(x_1a_2 + x_2a_4) = tr(x^TAx)$$

$$Axx^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}[x_1 \ x_2]$$

$$= \underset{2\times1}{\begin{bmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 \\ a_3x_1 + a_4x_2 \end{bmatrix}}\underset{1\times2}{[x_1 \ x_2]} = \begin{bmatrix} x_1(a_1x_1 + a_2x_2) & x_2(a_1x_1 + a_2x_2) \\ x_1(a_3x_1 + a_4x_2) & x_2(a_3x_1 + a_4x_2) \end{bmatrix}$$

$$tr(Axx^T) = x_1(a_1x_1 + a_2x_2) + x_2(a_3x_1 + a_4x_2)$$

$$xx^TA = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} [x_1 \; x_2] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 \\ x_2x_1 & x_2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1x_1^2 + a_3x_1x_2 & a_2x_1^2 + a_4x_1x_2 \\ a_1x_2x_1 + a_3x_2^2 & a_1x_2x_1 + a_4x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$tr(xx^TA) = a_1x_1^2 + a_3x_1x_2 + a_1x_2x_1 + a_4x_2^2$$

$$\therefore x^TAx = tr(x^TAx) = tr(Axx^T) = tr(xx^TA)$$

연습문제 2.3.4

$N \times M$ 행렬 X에 대하여 다음식을 증명하라.

$$tr(X(X^TX)^{-1}X^T) = M$$

위 식에서 $(X^TX)^{-1}$은 X^TX의 역행렬 (inverse matrix)로,
X^TX와 곱하면 항등행렬이 되는 행렬이다. (이후 자세히 공부)

$$(X^TX)^{-1}X^TX = X^TX(X^TX)^{-1} = I$$

$$X = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NM} \end{bmatrix}$$

$tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB)$ 이므로

$$tr(X(X^TX)^{-1}X^T) = tr(X^TX(X^TX)^{-1})$$

$$= tr(I_{N \times M}) = 1 \times M = M$$

연습문제 2.3.5

행렬 A ($A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$)의 놈의 제곱 $\|A\|^2$이 다음과 같음을 증명하라.

$$\|A\|^2 = tr(A^TA)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\|A\|^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{bmatrix}$$

$$tr(A^TA) = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2$$

$$\therefore \|A\|^2 = tr(A^TA)$$

행렬식 (determinant)

- 정방행렬 A의 행렬식 (determinant)

$$= \det(A) = \det A = |A|$$

"재귀적인 방법으로 정의"

1×1 행렬 (스칼라)의 행렬식은 자기자신

$$\det([a]) = a$$

스칼라가 아니면? → 여인수 전개 (cofactor expansion)

(a_{ij} = A의 i행 j열 원소, i_0 또는 j_0은 임의의 행/열 번호)

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{N} \{(-1)^{i+j_0} M_{ij_0}\} a_{ij_0}$$

결과 같음

OR

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{N} \{(-1)^{i_0+j} M_{i_0j}\} a_{i_0j}$$

- 행렬에서 임의의 행 i_0 하나를 선택하거나 임의의 열 j_0 하나를 선택한 다음 이 값에 가중치 $(-1)^{i+j_0} M_{ij_0}$ 또는 $(-1)^{i_0+j} M_{i_0j}$를 곱하여 더한 것
- 가중치로 사용된 M_{ij}는 마이너 (minor, 소행렬식)
  → 정방행렬 A에서 i행과 j열을 지워서 얻어진 (원래의 행렬보다 크기가 1만큼 작은) 행렬의 행렬식
- minor도 행렬식 (determinant)이므로, 행렬식 정의를 이용하여 구한다
  → 점점 크기가 (1씩) 작아짐
  → 마지막에는 1×1 스칼라 = 자기자신이 determinant
  → "재귀적"

마이너 (minor)에 $(-1)^{i+j}$를 곱한 값 $(-1)^{i+j}M_{ij}$를
여인수 (cofactor)라고 하며 C_{ij}로 표기한다.
여인수를 사용하여 위 여인수 전개식 (cofactor expansion)을
다시 표현하면 다음과 같다.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{N} C_{ij_0} a_{ij_0} = \sum_{j=1}^{N} C_{i_0 j} a_{i_0 j}$$

$\boxed{\text{example}}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

- 임의로 첫번째 행 or 열 선택
- $j_0 = 1$ 이라 할때 $\det(A)$는 다음과 같이 계산한다.
  1열

$$\det(A) = \{(-1)^{1+1}M_{11}\}a_{11} + \{(-1)^{2+1}M_{21}\}a_{21} + \{(-1)^{3+1}M_{31}\}a_{31}$$

$$= M_{11}a_{11} - M_{21}a_{21} + M_{31}a_{31}$$

$$= M_{11} - M_{21}\cdot 4 + M_{31}\cdot 7$$

이때 minor M_{11}, M_{21}, M_{31}은 각각 다음과 같은 행렬의 행렬식이다.

M_{11} — A 1행, 1열 지워서 만든 행렬의 행렬식

$$M_{11} = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\right) \rightarrow M_{11} = \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}\right)$$

M_{21} — A 2행, 1열 지워서 만든 행렬의 행렬식

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow M_{21} = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}\right)$$

M_{31} — A 3행, 1열 지워서 만든 행렬의 행렬식

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow M_{31} = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\right)$$

minor M_{11}, M_{21}, M_{31}은 마찬가지로 여인수 공식으로 계산한다.

M_{11} 계산에서 $i_0 = 1$ (1행) 이라 할 때 (임의),

$$M_{11} = \{(-1)^{1+1} M'_{11}\} a'_{11} + \{(-1)^{2+1} M'_{12}\} a'_{12} \quad \text{(A)}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow M'_{11} = \det([9]) = 9$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow M'_{12} = \det([8]) = 8$$

$$\therefore M_{11} = 9a'_{11} - 8a'_{12}$$

$$= 9 \cdot 5 - 8 \cdot 6$$

$$= -3$$

마찬가지 방법으로 $M_{21} = -6$, $M_{31} = -3$

원래 행렬식 값은 $\det(A) = M_{11} - 4M_{21} + 7M_{31}$

$$= -3 + 24 - 21 = 0$$

위의 정의를 사용하면 크기가 2x2, 3x3인 정방행렬의 행렬식 값은 다음 공식으로 사용할 수 있다.

- 2x2 행렬의 determinant

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$$

- 3x3 행렬의 determinant

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

* 행렬식의 값도 대각합과 마찬가지로 음수가 될 수 있다.

☆ 행렬식의 성질

① 전치 행렬의 행렬식은 원래의 행렬의 행렬식과 같다.

$$\det(A^T) = \det(A)$$

② 항등 행렬의 행렬식은 1이다.

$$\det(I) = 1$$

③ 두 행렬의 곱의 행렬식은 각 행렬식의 곱과 같다.

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

④ 역행렬 A^{-1}은 원래의 행렬 A와 다음 관계를 만족하는 정방행렬을 말한다.
I는 항등행렬 (identity matrix)이다.

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

⑤ 역행렬의 행렬식은 원래의 행렬의 행렬식의 역수와 같다.

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

위 식은 역행렬의 정의와 여인수 전개식을 사용하여 증명할 수 있다.

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det I = 1$$

연습문제 2.3.6

행렬식의 정의를 사용하여 2x2 행렬과 3x3 행렬의 행렬식이 각각 행렬식의 성질 (①~⑤)을 만족함을 증명하라.

$A_{2\times2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B_{2\times2} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ 일 때,

① $\det(A^T) = \det(A)$

$$\det(A^T) = \det\left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right) = ad-bc = \det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \det(A)$$

② $\det(I) = 1$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1\cdot1 - 0\cdot0 = 1$$

③ $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}\right)$$

$\cancel{aef} + aedh + \cancel{bgcf} + \cancel{bgdh}$
$-(\cancel{dfce} + \cancel{afdg} + \cancel{bhce} + \cancel{bhdg})$

$$= (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg)$$

$adeh - adfg$
$- bceh + bcfg$

$$= \det(A)\det(B) = (ad-bc)(eh-fg)$$

$$= adeh - adfg - bceh + bcfg$$

④ $A^{-1}A = AA^{-1} = I$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{ad}{ad-bc} - \frac{bc}{ad-bc} & \frac{-ab+ab}{ad-bc} \\ \frac{cd-dc}{ad-bc} & \frac{-bc+ad}{ad-bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(ad-bc \neq 0)$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} & \frac{bd-bd}{ad-bc} \\ \frac{-ca+ca}{ad-bc} & \frac{-bc+ad}{ad-bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(ad-bc \neq 0)$

⑤ $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{ad}{(ad-bc)^2} - \frac{bc}{(ad-bc)^2} = \frac{ad-bc}{(ad-bc)^2} = \frac{1}{ad-bc}$$

$$= \frac{1}{\det(A)}$$

연습문제 2.3.7

다음 행렬이 양의 정부호인지, 양의 준정부호인지, 혹은 두가지 중 아무것도 아닌지 판단하라. 그리고 행렬의 대각합과 행렬식을 구하라.

(1) $\begin{bmatrix} +2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

영벡터가 아닌 3x1 벡터 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 일 때,

$$\underset{1\times 3}{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}} \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} +2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} +2x_1 - x_2 & -x_1 + 2x_2 - x_3 & -x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_1(+2x_1 - x_2) + x_2(-x_1 + 2x_2 - x_3) + x_3(-x_2 + 2x_3)$$

$$= +2x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - x_2x_3 - x_2x_3 + 2x_3^2$$

$$= +2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$$

$$= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2$$

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 일 경우를 제외하면 항상 0 보다 크다

x는 영벡터가 아니므로, $x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0$

$$tr\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\right)_{i=3,\, j=3}$$

$(j_0 = 1)$ $\quad$ $\overset{\shortparallel}{A}$의 확장 여인자

$$\det(A) = (-1)^{1+1} M_{11}\, a_{11} + (-1)^{1+2} M_{21}\, a_{21} + (-1)^{1+3} M_{31}\, a_{31}$$

$$M_{11} = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 4 - 1 = 3$$

$$M_{21} = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = -2 - 0 = -2$$

$$M_{31} = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right) = 1 - 0 \cdot 2 = 1$$

$$\det(A) = 3 \cdot 2 - (-2)(-1) + 1 \cdot 0$$
$$= 6 - 2$$
$$= 4$$

* 라이사우스 확인

$$\begin{bmatrix} a^{2} & b^{-1} & c^{0} \\ d^{-1} & e^{2} & f^{-1} \\ g^{0} & h^{-1} & i^{2} \end{bmatrix}$$

$$aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 + (-1)(-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1)(-1)$$
$$- 0 \cdot 2 \cdot 0 - (-1)(-1) 2 - 2(-1)(-1)$$

$$= 8 - 2 - 2$$

$$= 4$$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$[x_1 \ x_2]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= [x_1+3x_2 \quad 2x_1+4x_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= x_1^2+3x_1x_2+2x_1x_2+4x_2^2$$

$$= (x_1+2x_2)^2 > 0 \quad (\because x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0)$$

$$tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = 1+4 = 5$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$j_0 = 1$일 때,

$$det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = (-1)^{1+1} M_{11} a_{11} + (-1)^{1+2} M_{21} a_{21}$$

$$M_{11} = det([4]) = 4$$
$$M_{21} = det([2]) = 2.$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -2$$

(약식) $ad-bc = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$