

4.1 함수

함수 (function)

- 입력과 출력 간의 관계 (relationship)
- 비슷한 용어: map, mapping, dictionary

정의역 (domain) \xrightarrow{f} 공역 (range)

(ex) 서로 관계를 가지며 맵이지는 모든 숫자의 쌍 = 함수

- 레프의 조절나사 (knob)를 돌린 각도 x 와 조리의 크기 y
- 등산할 때 출발점에서 간 지상거리 x , 해발고도 y

(표를 사용한 함수 주제)

domain 위 함수 \rightarrow 함수는 일종의 lookup table

~ python dictionary 를 구현 가능!

(연속과 불연속)

함수의 값이 값과 값 사이에 있다 = input과 output 범위랑 // 연속적이지 않다

= 불연속

values, input-output // 서로 부드럽게 이어지면 연속

부호함수

$$\text{Sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

~~numpy.sign~~ (numpy, sign())

단위계단함수

Heaviside step function

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

지시함수 indicator function

지정값이 들어오면 1 출력, 아니면 0 출력.

$$\Pi_i(x) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } x=i \\ 0 & \text{if } x \neq i \end{cases}$$

지시함수는 다음과 같이 표기하기도 한다.

$$\Pi(x=i) = \begin{cases} 1 & \text{if } x=i \\ 0 & \text{if } x \neq i \end{cases}$$

$\{x_1, \dots, x_N\}$ 인구

0인 대로의 개수 세기.

$$N_0 = \sum_{i=1}^N \Pi(x_i=0)$$

역함수

여연함수의 "증례관계와 정반대관계"

$$y=f(x), \rightarrow x=f^{-1}(y)$$

* 함수의 "역함수"와 함수의 "역수"는 기호와 의미 모두 다르다.

$$f^{-1}(x) \neq f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$$

* 역함수는 항상 존재하는 것은 아니다.

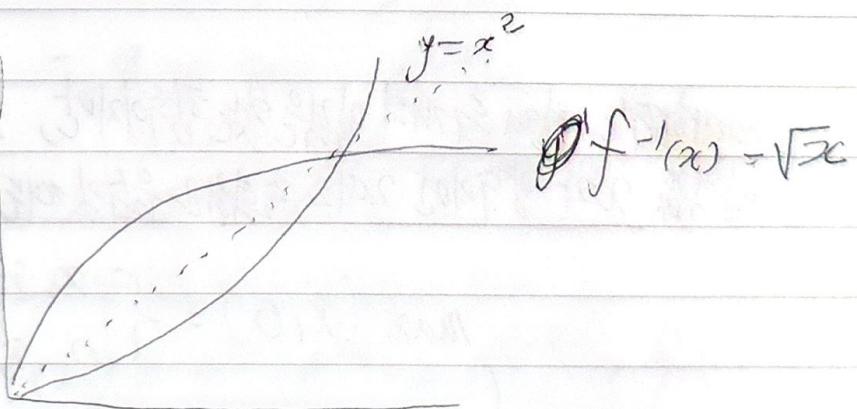
$$f(x_1) = y^*$$

$$f(x_2) = y^*$$

$f^{-1}(y^*) \rightarrow x_1$ x_2 하나의 출력으로 정의X, 역함수 존재하지 않음.

$$(f(x) = x^2) \rightarrow \text{역함수 없음.}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \rightarrow \text{이연축을 받을지 지정(점수)한다면 가능.}$$



데이터 분석에서 많이 사용되는 함수들.

<다항식함수>

다항식 (polynomial) 함수는 상수항 c_0 , 일차항 c_1x , 이차항 c_2x^2 ,
등의 차수제곱 항의 선형조합으로 이루어진 함수다.

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$$

<최대함수와 최소함수>

최대함수는 두 개의 인수 중에서 큰 값을 출력하는 함수다.

$$\max(x, y) = \begin{cases} x & \text{if } x \geq y \\ y & \text{if } x < y \end{cases}$$

최소함수는 최대함수와 반대,

$$\min(x, y) = \begin{cases} x & \text{if } x \leq y \\ y & \text{if } x > y \end{cases}$$

최대함수는 원래 두 개의 입력을 갖는 함수이지만, 만약 $y=0$ 으로 고정해서
입력값 x 가 양수이면 2로 출력하고 음수일 때는 0으로 만들 때 주로 사용된다.

$$\max(x, 0) = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

인공신경망에서 이 함수를 ReLU (Rectified Linear Unit)라 부른다.

<지수함수>

값이 오일러 수 e (약 2.718)가 되는

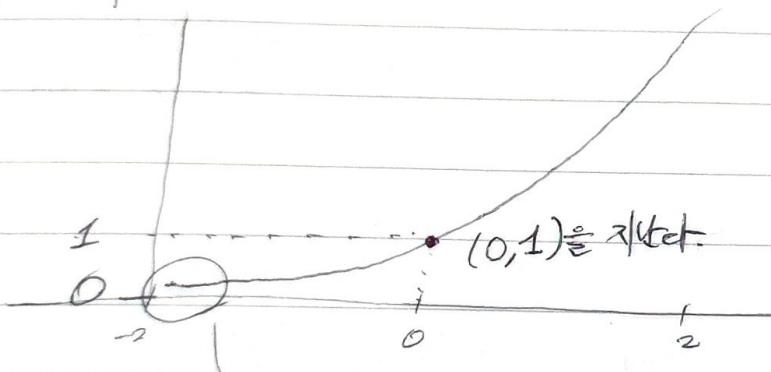
기울기공간수 = 지수함수 (exponential function)

$$y = e^x$$

$$y = \exp(x) = \exp x$$

numpy.e = 2.71828

numpy.exp() = 지수함수.



- 절대 0이 되지 않는다.

- 항상 양수다.

- $(0, 1)$ 을 지나는.

- $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$

- $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow 0$

- $x_1 > x_2$ 라면 $\exp x_1 > \exp x_2$ 이다.

* 단조증가함수.

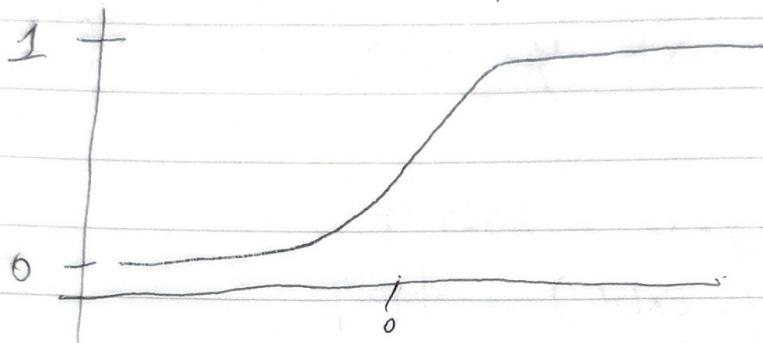
두 지수함수의 곱의 값은 일정한 항의 지수함수와 같다.

$$f(x_1) \cdot f(x_2) = e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2} = f(x_1+x_2)$$

<3자스택함수>

- 지수함수를 변형, 차기분석이나 인공신경망 등에서 자주 사용.
- 3자스택함수는 원래 시그모이드 (sigmoid) 함수의 일종
- 시그모이드가 3자스택함수가 가장 널리 쓰여있고, 보통 Sigmoid = logistic

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$



* 단조증가

* 최소 0, 최대 1.



<32함수>

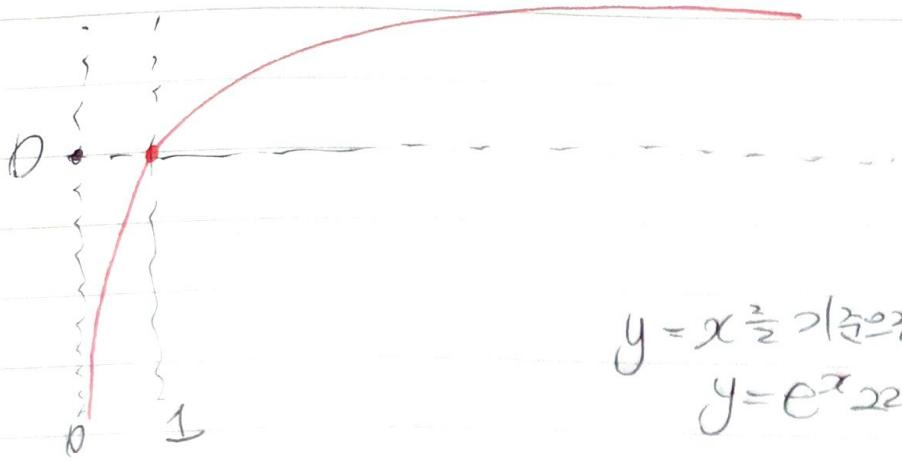
지수함수의 반대. 0을 거듭제곱하여 특정한 추가식으로 하는 x를 찾는 함수이다.

$$\left(\begin{array}{l} \text{np.exp}(2.3025851) = 10,00000072059542 \\ \text{np.log}(10) = 2.302585092994046 \end{array} \right)$$

즉 e^x 의 경우,

$$y = a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}$$

"32는 지수함수의 역함수!"



$$y = x^{\frac{1}{2}} \text{ 기준으로}$$

$y = e^x$ 교환 대칭.

- 입력변수가 양수여야 함 (0과 음수면 정의X)
- $x > 1$ 이면 $y > 0$
- $x = 1$ 이면 $y = 0$
($0 < x < 1$ 이면 $y < 0$)
- $x_1 > x_2$ $\Rightarrow \log x_1 > \log x_2$ (단조증가)

* 32학수의 성질 1 32학수는 곱셈자를 더하기로 변환된다.

✓ $\log(x_1 \cdot x_2) = \log x_1 + \log x_2$

✓ $\log \prod_i x_i = \sum_i (\log x_i)$

$$x_1 = x_2 = \dots = x \text{ 라면},$$

✓ $\log x^n = n \cdot \log x$

연습문제 9.1.2

$\log 2$ 의 값은 약 0.69, $\log 3$ 의 값은 약 1.10이다. $\log 12 = ?$

$$\begin{aligned} \log 12 &= \log 4 \cdot 3 = \log 4 + \log 3 \\ &= \log 2 \cdot 2 + \log 3 \\ &= 2 \log 2 + \log 3 \end{aligned}$$

임습문제 4.1.3

3지스택 함수 $y = \frac{1}{1+e^{-x}}$ 의 역함수를 구하시오.

$$y = \sigma(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)}$$

$$1 + \exp(-x) = \frac{1}{y}$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{y} - 1 = \frac{1-y}{y}$$

$$\log \exp(-x) = -x = \log \frac{1-y}{y}$$

$$x = -\log \frac{1-y}{y} = \log \frac{y}{1-y} = \log \frac{y}{1-y}$$

$$\therefore \sigma^{-1}(x) = \log \frac{x}{1-x}$$

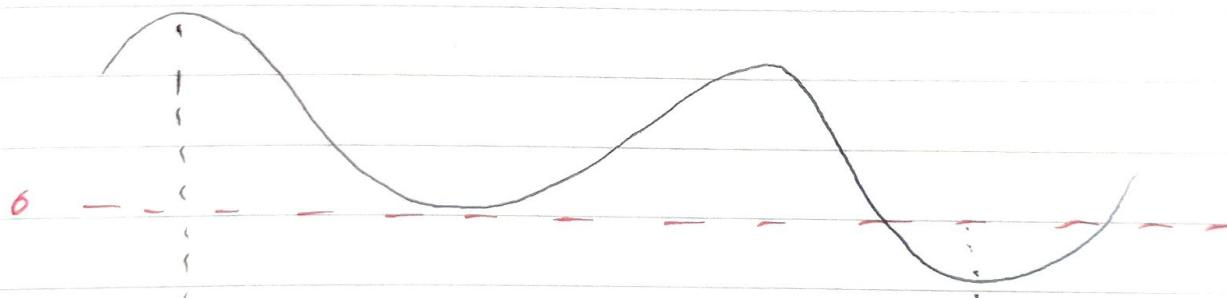
32 함수의 성질 ②

어떤 함수에 32를 적용해도 함수의 최고점, 최저점의 위치는 바뀌지 않는다.

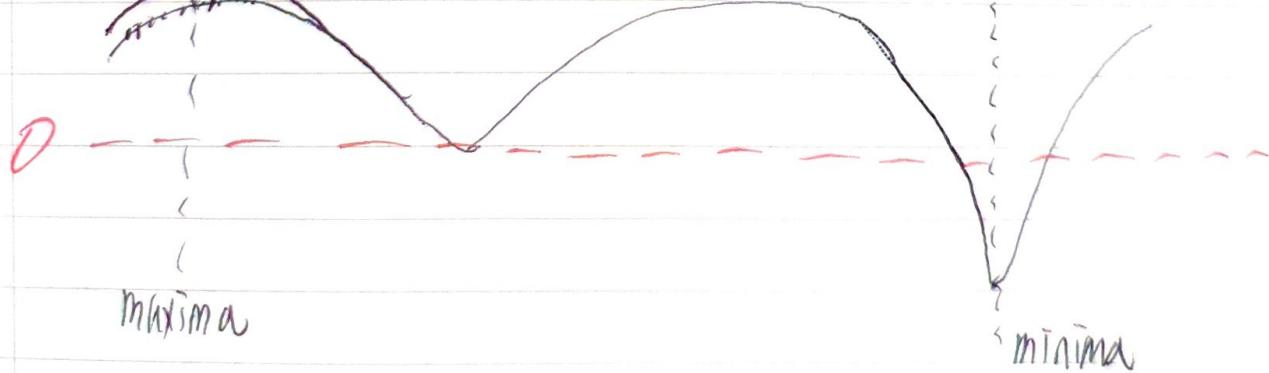
가수만을 갖는 함수가 있을 때, 이 함수에 다시 32함수를 적용하면
높낮이는 바뀌지만 최고·최저점 위치는 바뀌지 않는다. 그래서
최적화할 때 원래의 함수가 아니라 32를 취한 함수에 최적화를 하는
경우가 많다.

$$\arg \max_x f(x) = \arg \max_x \log f(x)$$

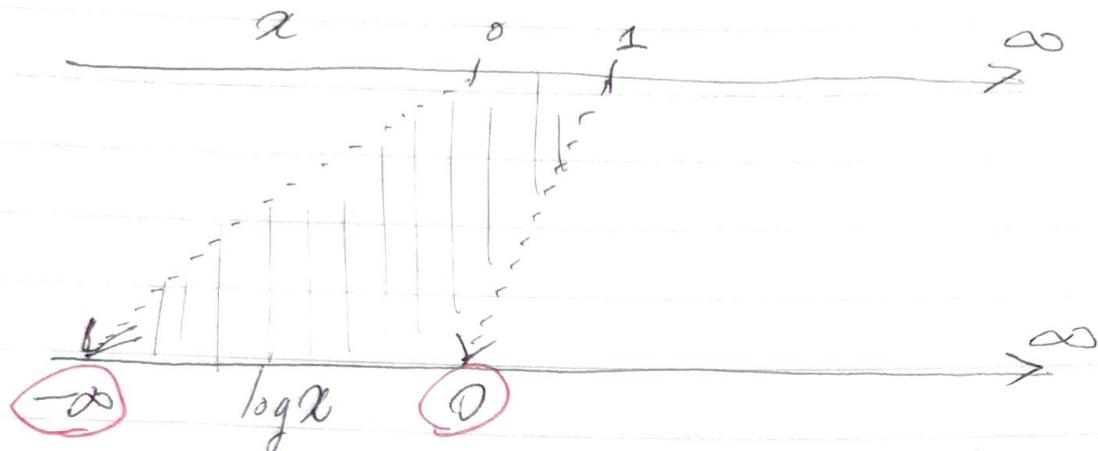
($f(x)$)



($\log f(x)$)



[32함수의 성질] 32함수는 0에서 1 사이의 확률값을 확대시켜 보여준다.



(넓은 구간을 좁은 구간으로 확장)

(0~1 사이 확률값을 더 구별하기 쉽게됨)

(일관성 또한 구별하기 용이한 편이) (resolution error)

(underflow 문제 방지 — 일정 소수점 아래 값이 나온
경우에 간접화(암호화현상))

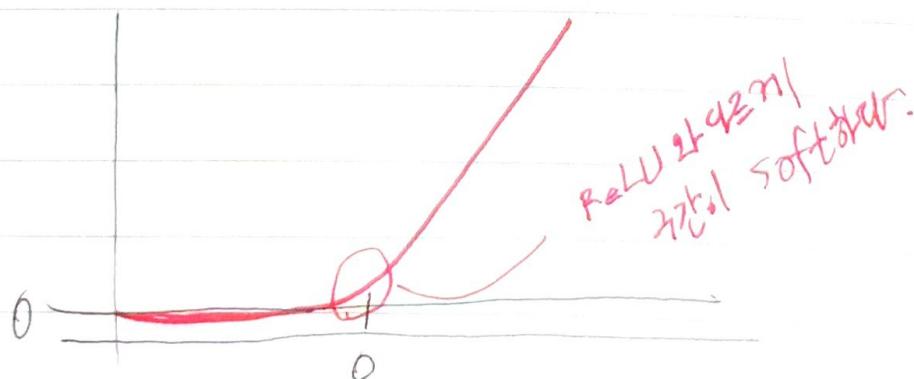
[소프트플러스 함수]

Softplus 함수는 자주 32함수를 결합하여 만든 함수로,

0을 입력값으로 갖는 최대함수와 비슷하지만 $x=0$ 근처에서 값이 부드럽게

변환되는 장점이 있다.

$$\xi(x) = \log(1 + \exp(x))$$



<다변수함수>

함수는 복수의 입력변수를 가질 수도 있다. 이러한 함수를 다변수함수(multivariate function)라고 한다. 예를 들어 다음 수식은 f 가 2개의 입력변수 x, y 를 받아서 변수 z 를 출력하는 다변수함수라는 뜻이다. (2차원(다변수)함수)

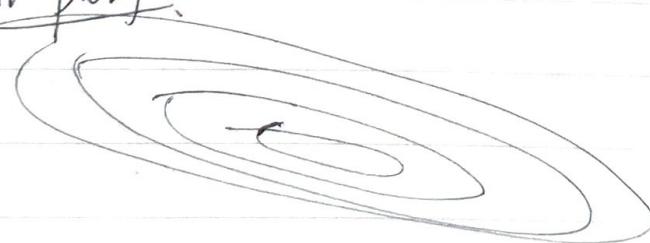
$$z = f(x, y)$$

Surface plot으로 표현가능

→ 2차원 값 입력하면 높이를 출력.



Contour plot.



* 2차원함수를 넘어서면

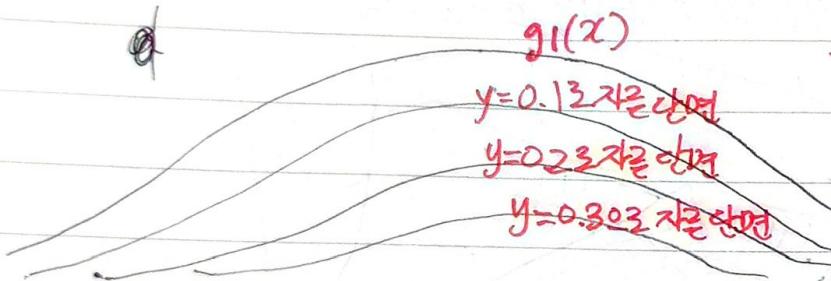
시각화하기 힘든 세상!

분리가능 확률변수 함수

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

(문제)

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \exp(-x^2 - 16y^2) = \exp(-x^2) \exp(-16y^2) \\ &= g_1(x)g_2(y) \end{aligned}$$



분리가능 확률변수 함수는
하나의 원인 고정하고
자른 결과 확률이
Scale 차이를 제외하고
동일한 형태를 갖는다.



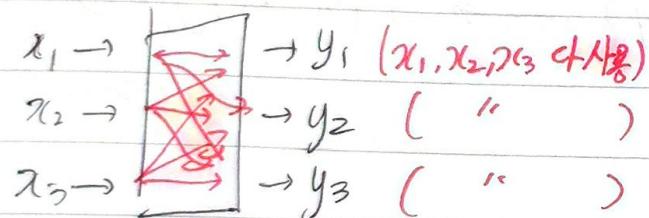
다변수 확률 함수

입력 변수를 아니라 출력 변수로 보면. — 출력을 벡터나 행렬로 나타낼 수 있다.

④ Softmax 함수*

(아래 식은 3차원 벡터로 표현)

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = S(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \frac{\exp(w_1x_1)}{\exp(w_1x_1) + \exp(w_2x_2) + \exp(w_3x_3)} \\ \frac{\exp(w_2x_2)}{\exp(w_1x_1) + \exp(w_2x_2) + \exp(w_3x_3)} \\ \frac{\exp(w_3x_3)}{\exp(w_1x_1) + \exp(w_2x_2) + \exp(w_3x_3)} \end{bmatrix}$$



- ① 모든 출력 원소는 0과 1 사이의 값을 갖는다.
- ② 모든 출력 원소의 합은 1이다.
- ③ 입력 원소의 크기 순서와 출력 원소의 크기 순서가 같다.

→ 다변수 입력을 확률 비례한 값으로 출력.

→ 인공신경망에서 레이어 출력을 고정 확률로 변형하는데 사용

함수의 평행이동

"오른쪽으로 a 만큼 평행이동"

$$f(x) \rightarrow f(x-a)$$

"위로 b 만큼 평행이동"

$$f(x) \rightarrow f(x)+b$$

(2차원평면)

오른쪽 a 만큼, 위로 b 만큼 이동

$$f(x,y) \rightarrow f(x-a, y+b)$$

←(+) ↗(+) ↘(→)

함수 \times 계산기

x 축 방향으로 a 씩 늘리기 (경사↓)

$$f(x) \rightarrow f\left(\frac{x}{a}\right)$$

y 축 방향으로 b 씩 늘리기 (경사↑)

$$f(x) \rightarrow b f(x)$$

$\sigma(2x)$ hyper tangent f.

↑경사↑경사↑

$\sigma(x)$ 경사 f

