6.3 확률의 성질

성질 1. 공집합의 확률

공집합인 사건의 확률은 0이다.

$$P(\phi) = 0$$

(Kolmogorov's Axioms)

(증명) $P(A \cup \phi) = P(A) = P(A) + P(\phi)$

$$\therefore P(\phi) = 0$$

성질 2. 여집합의 확률

어떤 사건의 여집합인 사건의 확률은 (1 - 원래 사건의 확률)과 같다.

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Kolmogorov's Axioms

(증명) $P(A \cup A^c) = P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$

$$\therefore P(A^c) = 1 - P(A)$$

위 성질과, $P(A^c)$가 0보다 크거나 같아야 한다는 콜모고로프 정리 1을 결합하면, 확률값은 0과 1 사잇값이 되어야 한다.

$$P(A^c) = 1 - P(A) \geq 0$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

성질3. 포함-배제원리 Kolmogorov's Axiom 3 확장한 버전

두 사건의 합집합의 확률은 각 사건의 확률의 합에서 두 사건의 교집합의 확률을 뺀 것과 같다.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

→ 포함-배제원리 (inclusion - exclusion principle)
OR
덧셈규칙 (sum rule, addition law)

(증명)

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B \cap A^c))$$ 교집합이 없으므로 두개로 나눌수 있음

$$= P(A) + P(B \cap A^c)$$

교집합 없으므로 합칠수있음

$$= P(A) + P(B \cap A^c) + P(A \cap B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P((A^c \cap B) \cup (A \cap B)) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Most Important

성질 4. 전체 확률의 법칙

복수의 사건 C_i가 다음을 만족하는 사건들이라고 가정한다.

① 서로 교집합이 없음 = 상호배타적 = mutually exclusive

$$C_i \cap C_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

② 모든 집합의 합집합이 전체집합 (표본공간) 이다.

→ 완전한 부분집합들 = complete subsets

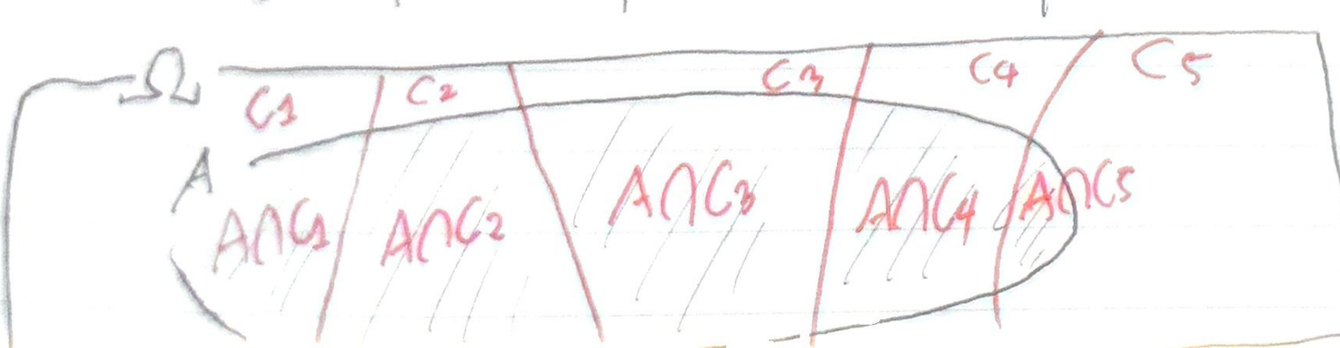
$$C_1 \cup C_2 \cdots = \Omega$$

①, ②를 만족하는 복수의 사건 C_i에 대하여,

$$\boxed{P(A) = \sum_i P(A \cap C_i)}$$

"사건 A의 확률은 사건 A와 사건 C_i가 동시에 발생할 사건들의 확률의 합과 같다."

= 전체확률의 법칙 (law of total probability)



NO.

DATE.

교집합의 확률은 다음처럼 쉼표로 표시하기도 한다.

$$P(A \cap B) = P(A, B)$$

전체 확률의 법칙

$$P(A) = \sum_i P(A, C_i)$$