[K-MOOC] 인공지능에 필요한 기초수학 입문(High school)
(Introductory Math for Artificial Intelligence)

이상구 | 성균관대학교

2주차. 데이터와 행렬

* 스칼라(scalar) : 크기만 주어지면 완전히 표시되는 양

* 벡터 : 크기뿐만 아니라 방향까지 주어져야 완전히 표시되는 양
  시작점을 원점 O, 끝점을 A로 하는 화살표로 나타낸 것을 벡터(vector)라 하고
  $\overrightarrow{OA} = \mathrm{a} = (a_1,\ a_2)$로 표기.

* 행렬(Matrix) : 수를 직사각형 모양으로 배열한 것.

* 텐서(tensor) : 행렬이 3차원으로 겹쳐진 큐브(cube) 형태의 모양을 갖는 것.

* 행렬연산

(1) 실수배(scalar multiple)

$$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\times a & k\times b \\ k\times c & k\times d \end{bmatrix}$$

(2) 덧셈(sum) (단, 두 행렬의 크기가 같아야 한다.)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

(3) 곱셈(product) [King Sejong의 'ㄱ' 법칙]
(단, 앞의 행렬의 열의 개수와 뒤의 행렬의 행의 개수가 같아야 한다.)

$$\underset{2\times3}{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}} \underset{3\times2}{\begin{bmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{bmatrix}} = \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} a\times g+b\times i+c\times k & a\times h+b\times j+c\times l \\ d\times g+e\times i+f\times k & d\times h+e\times j+f\times l \end{bmatrix}}$$

(4) 전치행렬(transpose matrix) : 행렬 A의 행과 열을 바꾸어 얻어진 행렬을 A^T로 나타낸다. A가 2×3 행렬이면 A^T는 3×2의 행렬이 된다.

$$\underset{2\times3}{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}^T} = \underset{3\times2}{\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}} \qquad \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} g & h \\ i & j \end{bmatrix}^T} = \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} g & i \\ h & j \end{bmatrix}} \qquad \underset{1\times3}{\begin{bmatrix} k & l & m \end{bmatrix}^T} = \underset{3\times1}{\begin{bmatrix} k \\ l \\ m \end{bmatrix}}$$

(5) 대각선 행렬(diagonal matrix) : 주대각선성분 이외의 모든 성분이 0인 정사각 행렬. 주대각선성분이 a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}인 대각선행렬 diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})은 다음과 같이 쓴다.

$$\mathrm{diag}(a_{11},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

(6) 단위행렬(identity matrix) : 주대각선성분이 모두 1인 대각선 행렬 I_n

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

(7) 삼각행렬 : 하삼각행렬(lower triangular matrix)은 주대각선 위의 모든 성분이 0인 정사각행렬을 말하고, 상삼각행렬(upper triangular matrix)은 주대각선 아래의 모든 성분이 0인 정사각행렬을 말한다.

(8) 대칭행렬(symmetric matrix) : $A^T = A$를 만족하는 정사각행렬을 대칭행렬(symmetric matrix)이라고 한다.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(9) 역행렬(inverse matrix) : $n\times n$ 정사각행렬 A에 대하여 다음을 만족하는 행렬 B가 존재하면 A는 가역(invertible, nonsingular)이라고 한다.

$$AB = I_n = BA$$

이때 B를 A의 역행렬(inverse matrix)이라고 하며, A^{-1}로 나타낸다. 이러한 B가 존재하지 않으면 A는 비가역(noninvertible) 또는 특이행렬(singular matrix)이라고 한다.