III. 인공지능과 최적해 (미분)

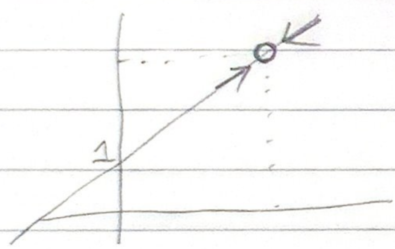
Week 7. 극한과 도함수

- 해 구하기 (root solution) 와 최적화 (optimization)는 둘 다 함수 위의 한 점을 추측하거나 찾는다는 점에서 관련성이 있다.
- 해 구하기는 함수 혹은 함수들의 근들을 구하는 반면 최적화는 최솟값 혹은 최댓값을 찾는 것이다.

$\boxed{\text{필요개념}}$ 극한 / 미분 / 도함수

7.1 함수의 극한 (Limit)

$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ ⟶ $x=0$에서 $\dfrac{0}{0}$꼴로 함숫값이 정의되지 않음.



$x \neq 1$일 때 $f(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$

→ x가 1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워진다.

$\therefore \lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2 \quad \left(\dfrac{x^2-1}{x-1} \to 2 \right)$

* 함수의 극한에서는 $x=a$ 일 때 $f(a)$의 값이 중요하지 않다. $f(a)$가 존재하지 않아도 $\lim_{x\to a} f(x)$는 정의될 수 있다.

* 만일 $f(a)$가 정의되고 $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$이면 함수는 $x=a$에서 연속이라 한다.

7.2 도함수 (derivative) 와 미분 (differentiation)

Q. 점 $P(1,1)$에서 포물선 $y=x^2$에 대한 접선의 방정식을 구하시오.

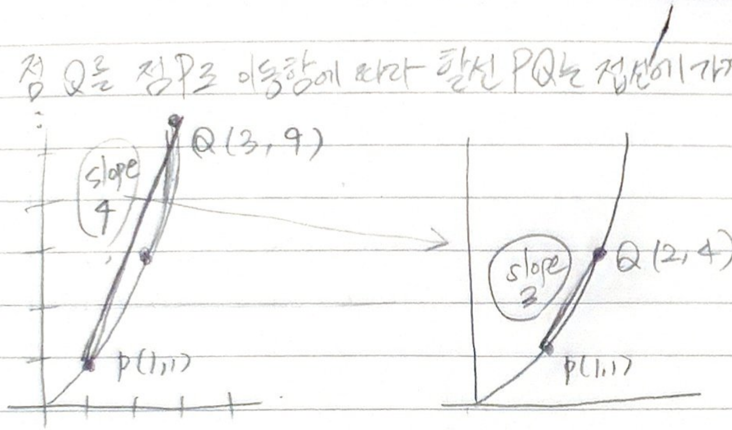
함수 $f(x)$ 위의 점 $P(x_0, f(x_0))$에서 접선의 기울기가 m임을 알면 다음 공식에 의해 접선의 방정식을 쉽게 구할 수 있다.

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

⇒ 포물선 $y=x^2$ 위의 점 $P(1,1)$ 근처에서 한 점 $Q(x, x^2)$을 선택하여 할선 PQ의 기울기를 계산하자.

$$m_{sec} = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

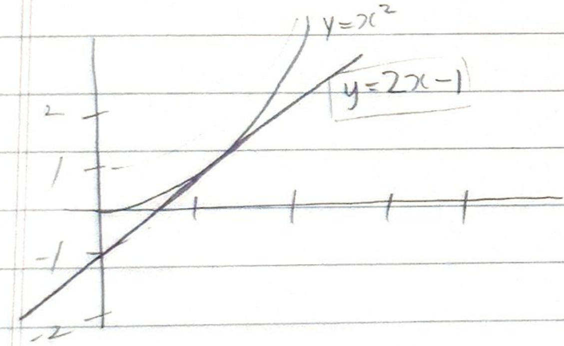
점 Q은 점P로 이동함에 따라 할선 PQ는 접선에 가까워진다.



즉, $m_{tan} = \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1}(x+1) = 1+1 = 2$

포물선 $y=x^2$ 위의 점 $P(1,1)$에서의 접선 방정식은 다음과 같다.

$y-1 = 2(x-1)$, 즉 $y = 2x-1$



*함수 f의 정의역 내 속하는 점 a에 대하여, 극한값

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}$$

이 존재하면 함수 f는 $x=a$에서 "미분가능",

이 극한값 ⇒ $x=a$에서의 함수 f의 "미분계수"

→ $f'(a)$

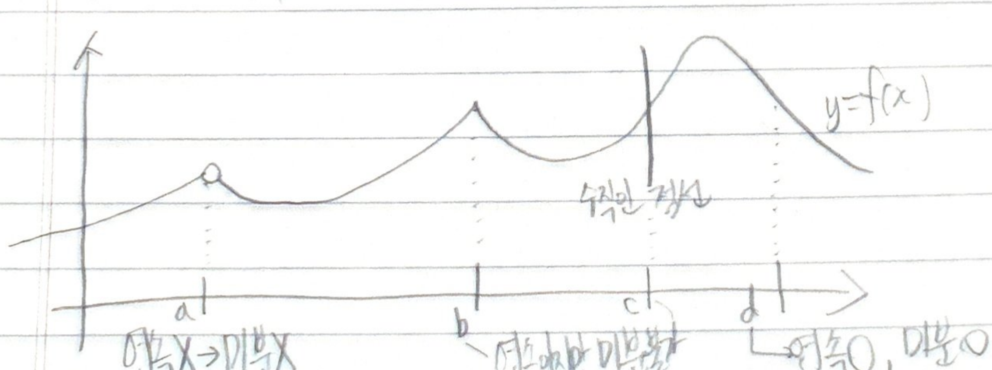
→ 접선 기울기

$(x_0, f(x_0))$에서의 접선의 방정식

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$$

$f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하면 $x=a$에서 연속이다 (역은 성립X)

$x=a$에서 연속이어도 반드시 미분가능한 것은 아니다.



$y=f(x)$가 어떤 구간의 각 점 x에서 미분가능일 때,
$f(x)$는 이 구간에서 미분가능이라고 한다.

미분가능구간 각 점 x에 그 점에서의 미분계수를 대응시킴으로서 정해지는 함수를
도함수 (derivative)라 하고 다음 기호들로 나타낸다.

$$f'(x),\ y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x),\ Dy$$

"미분한다 (differentiate)" = 함수 $f(x)$의 도함수를 구한다

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}$$

∴ 어떤 함수를 미분하면 → 도함수
도함수에 변수의 값을 대입하면 → 그 점(변수)에서의 미분계수

함수 $y=f(x)$의 도함수 $y'=f'(x)$가 다시 미분가능하면
그 도함수 $(y')'$를 $y=f(x)$의 2계 도함수 (2nd derivative)라 하고,
y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ 등으로 표시한다.

이와 같이 $y=f(x)$를 계속하여 n번 미분하면 n계 도함수가 정의되며,
n-th derivative
$$= y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^ny}{dx^n}$$

* $f^n x$가 존재하는 경우 $f(x)$는 n번 미분가능이라 한다
* 미분계수의 응용인 속도나 가속도는 거리함수의 1계, 2계 도함수에 해당한다.
* 미분에 관하여 다음이 성립한다.

① $(cf(x))' = cf'(x)$
② $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
③ $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
④ $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

Additional Section

Derivatives of Functions, The Product and Quotient Rules

THEOREM 1. The Power Rule

If n is a positive integer, then

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Proof Let $f(x) = x^n$, Using the formula

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots xa^{n-2} + a^{n-1})$$

we have

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots xa^{n-2} + a^{n-1})$$

$$= a^{n-1} + a^{n-2}a + \cdots aa^{n-2} + a^{n-1}$$

$$= n \cdot a^{n-1}$$

Hence $f'(x) = nx^{n-1}$

THEOREM 2. The General Power Rule

If a is any nonzero real number, then

$$\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1}$$

Theorem 1, $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$, is a special case of Theorem 2.

THEOREM 3. The Constant Multiple Rule

If c is a constant and f is a differentiable function at x, then cf is differentiable at x and $\boxed{\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)}$

Proof Let $g(x) = cf(x)$ for some constant c. By the limit definition of the derivative

$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ and $cf'(x) = c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = cf'(x)$$

THEOREM 4. The Sum Rule

If f and g are both differentiable at x, then $f+g$ is differentiable at x and

$$\boxed{\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)}$$

proof sum of a finite number of functions,

$$(f+g+h)' = [(f+g)+h]' = (f+g)' + h' = f' + g' + h'$$

In general, $(f_1 + \cdots f_n)' = f_1' + f_2' + \cdots + f_n'$

THEOREM 5. The Difference Rule

If f and g are both differentiable at x, then $f-g$ is differentiable at x and $\boxed{\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)}$

THEOREM 6. The Product Rule

If f and g are both differentiable at x, then fg is differentiable at x and

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

or

$$\boxed{(fg)' = fg' + gf'}$$

proof Let $F(x) = f(x)g(x)$, we use the continuity of $f(x)$ in the proof. Then

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x) \cdot \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f}{h}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

THEOREM 7 The Quotient Rule

If f and g are differentiable at x and $g \neq 0$, then $\frac{f}{g}$ is differentiable at x and

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \left\{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)\right\} / (g(x))^2$$

or

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

proof Let $F(x) = f(x)/g(x)$, then

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\,g(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$