5.3 선형계획법 문제와 이차계획법 문제

5.1 − 5.2절) 일반적인 최적화 문제

★ 데이터분석 실무에서는 목적함수나 제한조건이 특정한 수식의 최적화 문제 多

<선형계획법 문제>

방정식이나 부등식 제한 조건을 가지는 선형 모형의 값을 최소화하는 문제

→ 선형 계획법 (Linear Programming)

= LP 문제

- 선형 계획법의 목적함수 (내적 → 스칼라)

$$\arg\min_x c^T x$$

- 선형 연립방정식 형태의 등식 제한조건

$$Ax = b$$

- 변수가 음수가 아니어야 하는 부등식 제한조건

$$x \ge 0$$

standard form, 기본형

$$\arg\min_x c^T x$$

$$Ax \le b$$

$$x \ge 0$$

canonical form 정규형

NO.

DATE.

예제

어떤 공장에서 두가지 제품을 생산해야 한다고 하자.

- 제품 A와 제품 B 각각 100개 이상 생산해야 한다.
- 시간은 500시간 밖에 없다.
- 제품 A는 생산하는데 1시간이 걸리고, 제품 B는 2시간이 걸린다.
- 특정 부품이 9800개밖에 없다.
- 제품 A는 생산하는데 특정 부품이 4개 필요, 하나당 이익 3만원
- 제품 B는 생산하는데 특정부품이 5개 필요, 하나당 이익 5만원.

제품 A와 B의 생산량을 각각 x_1, x_2라고 하면

최소화하려는 목적함수는

minimize $\boxed{-3x_1 - 5x_2}$ = maximize $3x_1 + 5x_2$ = 이익의 최대화.

이고 제한조건은 다음과 같다.

$$-x_1 \le -100$$

$$-x_2 \le -100$$

$$x_1 + 2x_2 \le 500$$

$$4x_1 + 5x_2 \le 9800$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

이를 정규형 선형계획법 문제로 표현하면,

$$\min_{x} \begin{bmatrix} -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -100 \\ -100 \\ 500 \\ 9800 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[Scipy.optimize.linprog (c, A, b)

c = 목적함수의 계수벡터
A = 등식 제한조건의 계수행렬
b = 등식 제한조건의 상수벡터]

$x_1 = 300$
$x_2 = 100$
func: -1400.0

[CVXPY 패키지
— 제한조건 최적화문제를 더 직관적으로 작성하여 해를 구할수 있음.]

◦ Symbolic 연산
◦ 작성은 쉽지만 느리다

이차계획법 문제

방정식이나 부등식 제한조건을 갖는 일반화된 이차형식(quadratic form)의 값을 최소화하는 문제 = 이차계획법 (Quadratic Programming) 문제, QP문제.

목적함수

$$\frac{1}{2}x^TQx + c^Tx$$

제한조건

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

◎ 잔차 제곱합을 최소화하는 예측모형에 추가적인 제한조건이 있으면 이차계획법 문제가 된다.

(예제)

앞 절에서 다루었던, 등식 제한조건이 있는 최적화 문제도 사실은 이차계획법 문제.

$$\arg\min_x x_1^2 + x_2^2$$

$$x_1 + x_2 - 1 = 0$$

QP form으로 표현하면,

$$\arg\min_x \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1$$

(CvxOpt 패키지)

- numpy.array 못씀
- 자체 제공하는 matrix 써야 함
- float 숫자만 input 가능.

연습문제 5.3.1 —— "support vector machine"

다음 문제가 QP 문제임을 보이고 $N=3$인 경우에 대해 QP 문제의 Q, c, A, b를 각각 구하라. (문제에서 x는 벡터이고 y는 실수다)

$$\arg\min_{a_i} \left(\sum_{i=1}^{N} a_i - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_i a_j y_i y_j x_i^T x_j}_{\text{Quadratic form.}} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i y_i = 0$$

$$a_i \geq 0$$

So far...

선형대수 / 미적분 / 최적화 part clear!