4.3 적분

$f(x) = x^3$

미분 ↓ ↑ 적분

$f'(x) = 3x^2$

적분(integral)은 미분과 반대되는 개념이다. 적분에는 부정적분 (indefinite integral)과 정적분(definite integral)이 있다.

[부정적분]

부정적분(indefinite integral)은 정확하게 미분과 반대되는 개념, 즉 반-미분 (anti-derivative)이다. 함수 $f(x)$가 어떤 함수를 미분하여 나온 도함수라고 가정하고, 이 도함수 $f(x)$에 대한 미분되기 전의 원래의 함수를 찾는 과정 (integration), 또는 그 결과 (integral)를 말한다.

[부정적분의 표시]

도함수가 $f(x)$이면, 미분 이전의 함수를 $F(x)$ 또는 $\int f(x)dx$로 쓴다.

* dx = x라는 변수로 적분했음을 나타내는 기호

→ 편미분에 대응하는 적분을 표기할 때 필요함.

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \longleftrightarrow F(x) = \int f(x)\,dx + C$$

↳ "x로 미분한 것을 원복해라"

* C = 상수항, 상수항은 미분하면 0이 되므로,
부정적분은 무한개의 해가 있다.
(C는 당연하다고 생각해 생략되는 경우도 있다)

연습문제 4.3.1

다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int 3x^2 dx = x^3$

(2) $\int (3x^2 - 6x + 1) dx = x^3 - 3x^2 + x$

(3) $\int \left(2 + 6x + 4\exp(x) + \frac{5}{x}\right) dx$

$= 2x + 3x^2 + 4\exp(x) + 5\log x$

(4) $\int \frac{2x}{x^2-1} dx$

$= \frac{2x}{\log(x^2-1)} = \frac{\frac{d}{dx}(x^2-1)}{\log(x^2-1)}$

$* \frac{d}{dx} \log f(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$

$\boxed{\log(x^2-1)}$

편미분의 정적분.

편미분은 한 도함수에서 원래의 함수를 찾을 수도 있다. $f(x,y)$가 원래의 함수를 어떻게 미분했는지에 따라 원래의 ~~ㅂ~~ 함수를 도기하는 방법이 달라진다.

만약 $f(x,y)$가 함수 $F_1(x,y)$를 x로 편미분한 함수였다면 이 함수를 나타내는 식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial x} = f(x,y) \longleftrightarrow \underline{F_1(x,y) = \int f(x,y)\,dx + C(y)}$$

"함수일 수도 있다!"
$C(y) = x$ 없이 y로만 이루어진 함수, 또는 숫자상수

연습문제 4.3.2
다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int (1 + xy)\,dx$

$$= x + \frac{x^2 y}{2} + C(y).$$

(2) $\int xy \exp(x^2+y^2)\,dx$

〈다차 도함수와 다중적분〉

미분을 여러번 한 다차 도함수에서 원래함수 찾아내기
→ 다중적분 (multiple integration) 필요함.

$f(x,y)$가 함수 $F_3(x,y)$를 x로 편미분한 후 y로 다시 편미분하여 나온 2차 도함수일 때, 원 함수를 찾으려면 y로 적분한뒤 다시 x로 적분해야 한다.

$$\frac{\partial^2 F_3(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y) \longleftrightarrow F_3(x,y) = \int_x \int_y f(x,y)\, dy\, dx$$

적분기호 아래 변수명 생략하고 표기하면

$$\underbrace{\int \underbrace{\int f(x,y)\, dy}_{y}\, dx}_{x}$$

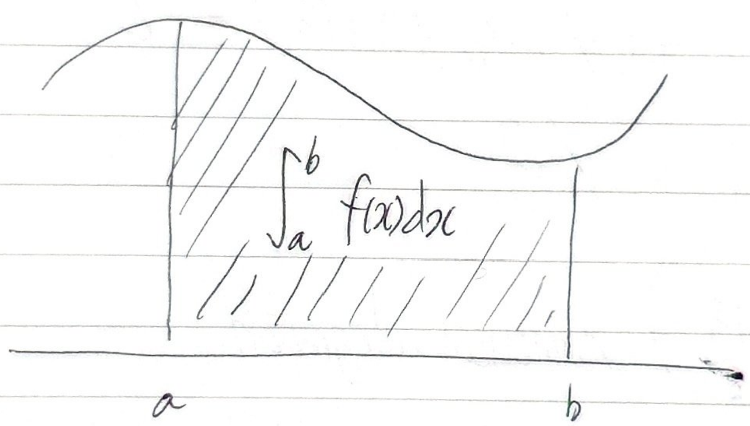
(심파이 적분)

```
sympy.integrate(f)
sympy.integrate(f, x)
```

정적분 definite integral

• 독립변수 x가 어떤 구간 $[a, b]$ 사이일 때, 그 구간에서 함수 $f(x)$의 값과 수평선 (x축)이 이루는 면적을 구하는 행위 (integration) 혹은 그 값 (integral)을 말한다. 수학 기호로는 다음과 같이 표기한다.

$$\int_a^b f(x)dx$$



• 정적분은 미분과 아무런 상관이 없어 보이지만 부정적분으로 구한 함수 $F(x)$를 이용하면 다음처럼 정적분의 값을 구할 수 있다.

미분 ⟷ 부정적분
↕
면적 ⟷ 정적분

$$\boxed{\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{정적분}} = \underbrace{F(b)-F(a)}_{\text{부정적분}}}$$

이를 미적분학의 기본 정리 (Fundamental Theorem of Calculus)라고 부른다.

정적분의 계산 ① sympy 등으로 부정적분을 한 뒤 미적분학의 기본정리를 사용하여 풀기.

② 원 함수의 면적을 잘게 쪼개어 면적을 근사하는 수치적분

예제

$$\int_0^2 (x^3 - 3x^2 + x + 6)\,dx$$

$\downarrow$ integration

$$\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + 6x$$

$F(2) - F(0)$

$= (4 - 8 + 2 + 12) - 0$

$= 10.$

(수치적분) numerical integration.

구적분, 함수를 아주 잘게 나누어 면적의 총합을 근사한다.

scipy. integrate.quad(f, 0, 2)

$\rightarrow$ $(\underbrace{10.0}_{\text{solution.}}, \underbrace{1.1102230246251565e-13}_{\text{오차}})$.

$$\text{면적} \approx \sum \overset{\text{높이}}{f(x_i)}\ \overset{\text{폭}}{\Delta x}$$

$$\int f(x)\ dx$$

연습문제 4.3.5

(1)

$$\int_0^1 (3x^2-6x+1)\,dx$$

$\downarrow$ integral.

$$= (x^3-3x^2+x) + C$$

$$F(1)-F(0) = (1-3+1)+C - (0-0+0)+C$$

$$= -1.$$

(2) $$\int_1^{10} \left(2+6x+4\exp(x)+\frac{5}{x}\right)dx.$$

$\downarrow$ integral

$$(2x+3x^2+4\exp(x)+5\log x + C)$$

$$F(10)-F(1)$$

$$= (20+300+4\exp(10)+5+C)$$

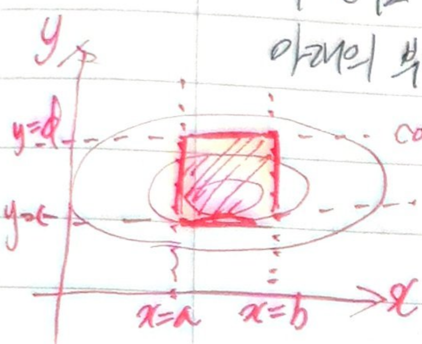
$$-(2+3+4\exp(1)+C)$$

$$= 320+4\exp(10)-4\exp(1)$$

(다변수 정적분)

입력변수가 2개인 2차원 함수 $f(x,y)$의 경우에는 정적분을 다양한 방법으로 정의할 수 있다.

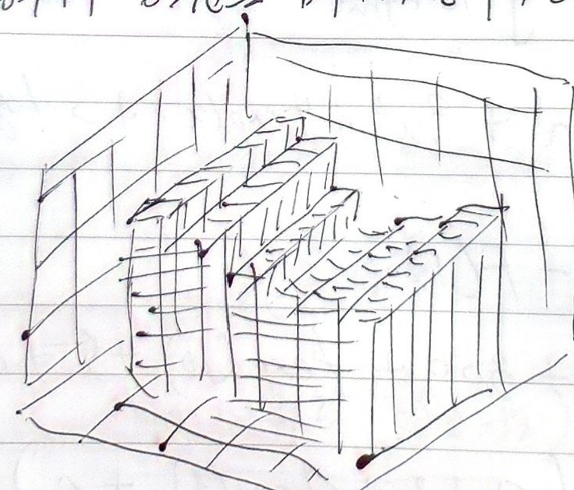
두 변수로 모두 적분하는 것은 2차원 평면에서 주어진 사각형 영역 아래의 부피를 구하는 것과 같다.



$$\boxed{\int_{y=c}^{y=d}\int_{x=a}^{x=b} f(x,y)\,dx\,dy}$$

예제

다음 함수는 $x=2$에서 $x=8$까지, 그리고 $y=0$에서 $y=6$까지의 정사각형 영역에서 정적분으로 함수의 부피를 구하는 모습을 시각화한 것이다.



수치이중적분 scipy.integrate 패키지 – dblquad() 명령 사용.

dblquad(func, a, b, gfun, hfun)

→ a, b는 x의 하한 (lower bound)과 상한 (upper bound)

→ gfun, hfun은 y의 상한과 하한 (gfun, hfun은 x의 함수)

예제)

정적분

$$\int_0^{\infty}\int_1^{\infty}\frac{\exp(-xy)}{y^2}\,dx\,dy$$

을 수치적분으로 계산하려면 다음과 같은 코드를 사용한다.

```
def f(x,y):
    return np.exp(-x*y) / y**2

sp.integrate.dblquad(f, 1, np.inf,
                     lambda x: 0,
                     lambda x: np.inf)
```

[다차원 함수의 단일 정적분]

하나만 진짜 변수, 나머지 하나는 상수로 간주.

$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

→ y에 대한 함수가 나옴!