인공지능을 위한 기초수학입문 (K-MOOC, SKKU)

Ⅱ. 인공지능과 행렬

week 2. 데이터와 행렬

2.1 순서쌍과 벡터

데이터 - 순서쌍 (ordered pair, tuple)으로 표현가능

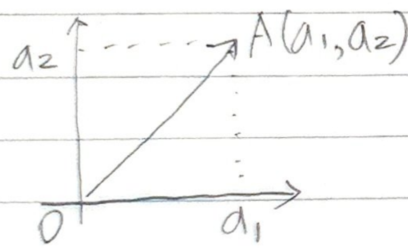
사람	키(cm)	몸무게(kg)	연령(세)	성별(1:남, 2:여)		data
A	160	80	19	1	→	(160, 80, 19, 1)
B	170	70	27	2	→	(170, 70, 27, 2)
C	180	56	30	1	→	(180, 56, 30, 1)

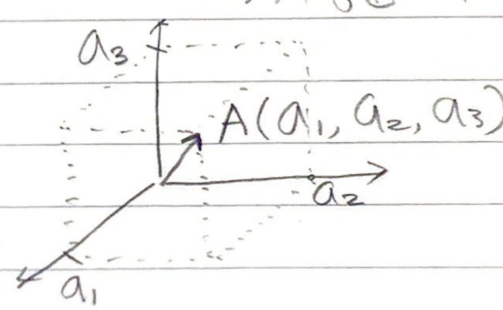
성분 2개 (=2차원) 또는 3개 (=3차원) 데이터는 좌표평면(공간) 상의 한 점

- 시작점은 원점 O, 끝점을 A로 갖는 화살표로 나타낸 것 = $\boxed{\text{vector}}$

$= \overline{OA} = a = (\underline{a_1}, \underline{a_2})$

└ 벡터 각각의 성분 = 하나의 숫자 = $\boxed{\text{scalar}}$





2.2 벡터 연산

(1) 실수배 (scalar multiple) : 실수 k와 벡터 (a,b)에 대하여

$k \times (a,b) = (ka, kb)$, $2 \times (1,2) = (2,4)$

(2) 덧셈 (sum) : 두 벡터 (a,b), (c,d)에 대하여

$(a,b) + (c,d) = (a+b, c+d)$, $(1,2) + (3,4) = (4,6)$

* 벡터의 연산법칙

$\mathbb{R}^n$의 벡터 x, y, z와 스칼라 h, k에 대하여 다음이 성립한다.

① $x + y = y + x$ ② $(x+y)+z = x + (y+z)$

③ $x + 0 = x = 0 + x$ *0 (영벡터) = 성분이 모두 0인 벡터

④ $x + (-x) = 0 = (-x) + x$ *$-x$ (x의 음벡터)는 $-x = (-1)x$

⑤ $k(x+y) = kx + ky$ ⑥ $(h+k)x = hx + kx$

⑦ $(hk)x = h(kx)$ ⑧ $1x = x$

2.3 행렬(Matrix)와 텐서(Tensor)

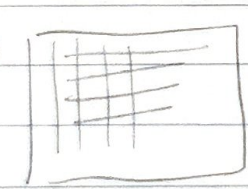
행렬 = 키, 몸무게, 연령, 성별 등 여러 데이터를 모아 직사각형 모양으로 배열
= 벡터를 여러 개 쌓아서 만든 것

가로를 행(row), 세로를 열(column)
행의 개수가 m, 열의 개수가 n인 행렬 = 크기가 $m \times n$인 행렬
∴ 벡터는 $1 \times n$ 행렬 (행벡터) 또는 $n \times 1$ 행렬 (열벡터)

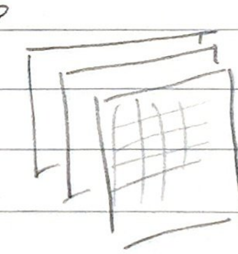
$$A = \begin{bmatrix} 160 & 18 & 19 & 1 \\ 170 & 70 & 27 & 2 \\ 180 & 56 & 30 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

* 디지털 이미지를 표시하는 행렬
- 디지털 이미지를 구성하는 작은 격자 pixel = 밝기를 나타내는 숫자
- 흑백 이미지 = 하나의 행렬 (단색)
- 컬러 이미지 = red, green, blue 3개 행렬이 3차원으로 겹쳐진 cube
  → 3D tensor라고 부름

흑백



컬러



×3

텐서 tensor
- 인공지능 기계학습 시스템의 기본 데이터 구조 // 숫자를 담는 컨테이너.
- 행렬의 일반화된 모습 = 텐서 (1D 텐서 = 벡터, 2D 텐서 = 행렬, etc.

2.4 행렬 연산

(1) 실수배 (scalar multiple)

$$k \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\times a & k\times b \\ k\times c & k\times d \end{bmatrix}$$

(2) 덧셈 (단, 두 행렬 크기 같아야)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

(3) 곱셈 (단, 앞 행렬의 열 개수와 뒤 행렬의 행 개수가 같아야 함)

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}_{2\times 3} \times \begin{bmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} a\times g + b\times i + c\times k & a\times h + b\times j + c\times l \\ d\times g + e\times i + f\times k & d\times h + e\times j + f\times l \end{bmatrix}$$

2.5 행렬의 연산법칙

행렬 A, B, C는 각 연산이 정의될 수 있는 적당한 크기의 행렬이고, a, b가 스칼라일 때, 다음이 성립한다.

① $A+B = B+A$
② $A+(B+C) = (A+B)+C$
③ $A(BC) = (AB)C$
④ $A(B+C) = AB+AC$
⑤ $(B+C)A = BA+CA$
⑥ $a(B+C) = aB+aC$
⑦ $(a+b)C = aC+bC$
⑧ $(ab)C = a(bC)$
⑨ $a(BC) = (aB)C = B(aC)$
⑩ $1A = A$

(4) 전치행렬 (transpose Matrix)

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}^T_{2\times3} = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}_{3\times2} \qquad \begin{bmatrix} k & l & m \end{bmatrix}^T_{1\times3} = \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \end{bmatrix}_{3\times1}$$

두 행렬 A, B와 임의의 스칼라 k에 대하여 전치행렬은 다음 식을 만족한다.

① $(A^T)^T = A$
② $(A+B)^T = A^T + B^T$
③ $(AB)^T = B^T A^T$
④ $(kA)^T = kA^T$

(5) 대각선 행렬 (diagonal matrix)

주대각성분 이외의 모든 성분이 0인 정사각행렬, $diag(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots a_{nn})$

$$diag(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

(6) 단위행렬 (identity matrix) : 주대각성분이 모두 1인 대각선행렬

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

* $m \times n$ 행렬 A에 대하여 $I_m A = A = A I_n$

(7) 삼각행렬

하삼각행렬 (lower triangular matrix) = 주대각선 위의 모든 성분이 0인 정사각행렬

상삼각행렬 (upper triangular matrix) = 주대각선 아래의 모든 성분이 0인 정사각행렬

upper $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$ lower $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

(8) 대칭행렬 symmetric matrix : $A^T = A$를 만족하는 정사각행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

(9) 역행렬 inverse matrix

$n \times n$ 정사각행렬 A에 대하여 다음을 만족하는 행렬 B가 존재하면 A는 가역 (invertible, nonsingular)

$AB = I_n = BA$

$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$

n차의 정사각행렬 A, B가 가역이고 $k = \text{scalar}, \neq 0$일 때 다음이 성립한다.

① A^{-1}은 가역이고, $(A^{-1})^{-1} = A$이다.

② AB는 가역이고, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$이다.

③ kA는 가역이고, $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$이다.

④ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

⑤ A^n은 가역이고, $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$

n차의 정사각행렬 A가 가역이면, A의 역행렬은 유일하다.

proof. 행렬 B, C가 모두 A의 역행렬이라면, $AB = BA = I_n$, $AC = CA = I_n$ 이므로

$B = BI_n = BAC = (BA)C$

$= I_n C = C$

$\therefore B = C$

$\therefore A^{-1}$은 유일하다.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$의 역행렬은 $ad - bc \neq 0$일 때 다음과 같다.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$