3장 고급(중급) 선형대수

- 기하학적 관점에서 데이터 분해
- 여러 관점에서 데이터를 바라보는 방법
- 고유값 분해, 특이값 분해 등 행렬분석기법

* 엄밀한 수학적 증명은 대부분 생략

* 이후 데이터분석 공부에서 나오므로 정리들은 꼭 암기할것

학습목표

① 벡터와 행렬의 연산이 기하학적으로 어떤 의미인지 이해하고, 벡터를 투영 분해하며 이를 이용하여 직선의 방정식을 벡터 연산으로 나타낼 수 있다.

② 벡터의 선형독립과 벡터공간의 의미를 이해하고, 벡터를 벡터공간에 투영시킬 수 있다. 또, 기저벡터가 바뀌었을 때 이에 해당하게 좌표~~변환을~~ 변환을 할 수 있다.

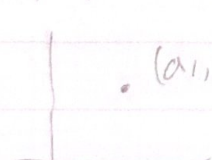
③ 고유값 분해의 정의를 알고, 행렬의 모양과 고유값의 관계에 대한 성질을 암기한다.

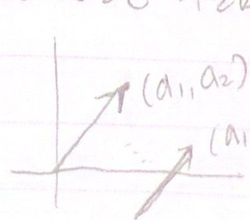
④ 특이값 분해의 정의를 알고, 차원축소문제에 어떻게 응용할 수 있는지 이해한다.

벡터의 기하학적 의미

N차원 벡터 a는 N차원의 공간에서

- 벡터 a의 값으로 표시되는 점 (point) 또는
- 원점과 벡터 a의 값으로 표시되는 점을 연결한 화살표(arrow)





방향 유지하고 (평행이동) 옮겨도 같은 벡터.

벡터의 길이

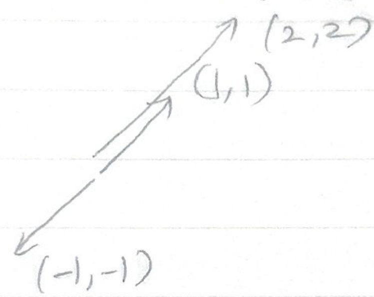
벡터 a의 길이 = ||a|| (norm)

$$||a|| = \sqrt{a^T a} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_M^2}$$

스칼라와 벡터의 곱

실수 multiplication → scale (길이연장)

음수 multiplication → 방향 전환



영벡터가 아닌 임의의 벡터 x에 대한 단위벡터
→ 방향을 가리킨다

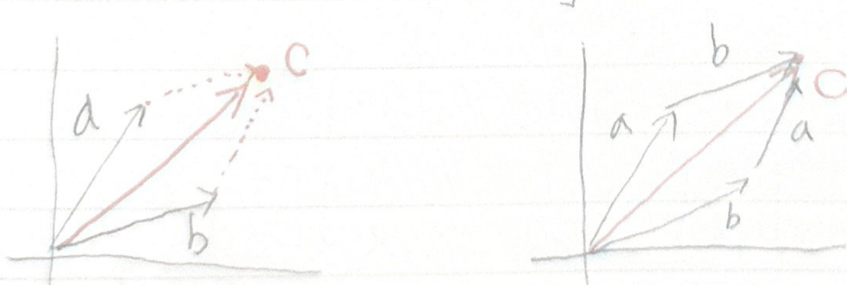
$$\boxed{\frac{x}{||x||}}$$

vector

scalar

벡터의 합

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow c = a + b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

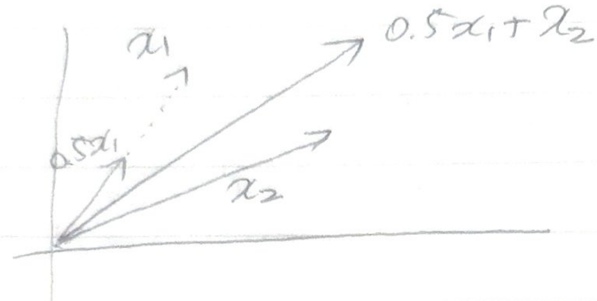


벡터의 선형조합

여러 개의 벡터를 스칼라곱을 한 후 더한 것 = 선형조합 (linear combination

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_Nx_N$$

($c_1, \cdots c_N$은 스칼라계수)



연습문제 3.1.1

벡터 x_1, x_2가 다음과 같을 때, $c_1x_1 + c_2x_2$가 다음 벡터와 같아지는 선형조합 계수 c_1, c_2를 찾아라.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(i) $$c_1x_1 + c_2x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$ad-bc = 1-4 = -3$ 이므로 A^{-1} 존재,

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3-2 \\ -6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

(2) $c_1x_1 + c_2x_2 = \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&+2\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$$

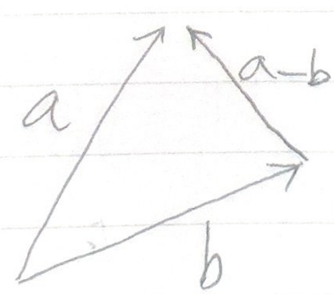
$$= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

벡터의 차 (difference)

$a - b = c$ 는 벡터 b가 가리키는 점으로부터 벡터 a가 가리키는 점을 연결하는 벡터다. 그 이유는 벡터 b에 $a-b$를 더하면, 즉 벡터 b와 벡터 $a-b$를 연결하면 벡터 a가 되어야 하기 때문이다.

$$a - b = c$$

$$b + c = b + (a-b) = a$$

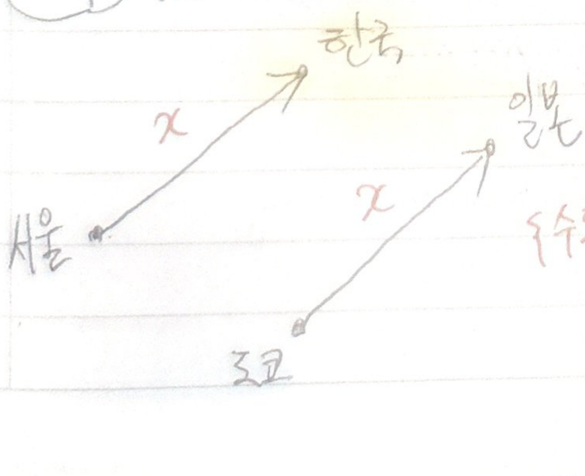


: b를 출발점, a를 끝점으로 하는 벡터

why?

(b를 기준점으로 하여 a가 되기 위해서는 a−b 만큼 + 해야 하기 때문)

example word2vec



{수도} ⟶ {국가}로 가는 벡터(연산)

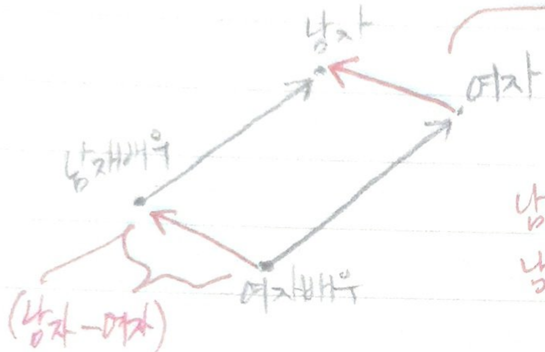
$\boxed{\text{일본} = \text{도쿄} + (\text{한국} - \text{서울})}$

연습문제 3.1.2

남자배우, 여자배우, 남자, 여자 4가지 단어에 대응하는 4개의 벡터에 대해 위와 (아래와) 같은 관계가 성립할 때, 다음 식을 완성하라.

남자배우 = 여자배우 + (남자 − 여자)

"여자"에서 "남자"로 향하는 벡터.



남자배우 − 여자배우 = 남자 − 여자

남자배우 = 여자배우 + (남자 − 여자)

유클리드 거리

- 두 벡터가 가리키는 점 사이의 거리 = 유클리드 거리 (Euclidean distance)
- 벡터의 놈의 정의와 벡터의 차 정의에 의하여 :

$$\|a-b\| = \sqrt{\sum_{i=1}(a_i-b_i)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}(a_i^2-2a_ib_i+b_i^2)}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}a_i^2+\sum_{i=1}b_i^2-2\sum_{i=1}a_ib_i}$$

$$= \sqrt{\|a\|^2+\|b\|^2-2a^Tb}$$

$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2+\|b\|^2-2a^Tb$$

벡터의 내적과 삼각함수

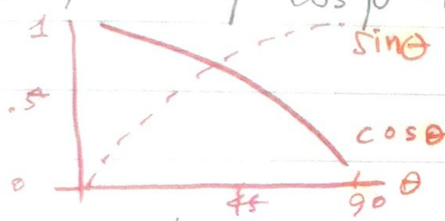
두 벡터의 내적(inner product)

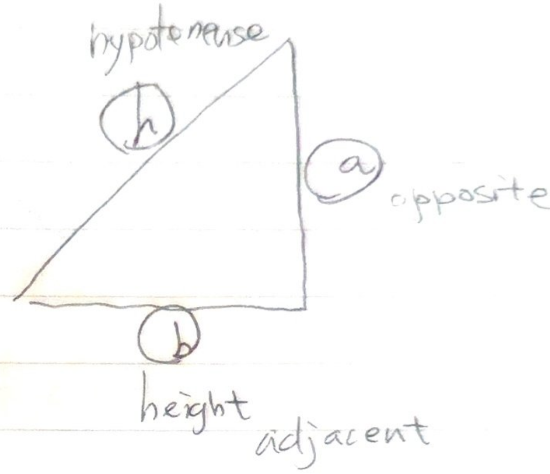
- 벡터의 길이 및 두벡터 사이의 각도 θ 의 코사인 함수값으로 계산 가능

$$a^Tb = \|a\| \|b\| \cos\theta$$

* $\sin\theta = \frac{a}{h}$, $\cos\theta = \frac{b}{h}$

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \sin 0^\circ = 1 & \cos 0^\circ = 1 \\ \sin 90^\circ = 0 & \cos 90^\circ = 0 \end{array} \right\}$$





{ 벡터의 내적과 삼각함수 }

$$\boxed{a^Tb = \|a\| \|b\| \cos\theta}$$

$$a^Tb \propto \cos\theta$$

∴ θ가 작을수록 a^Tb가 커진다.

"직교" ⟸ $\boxed{\therefore \theta = 90^\circ \longrightarrow a^Tb = 0}$

∴ $\theta = 0^\circ \longrightarrow a^Tb = \|a\| \|b\|$

직교(orthogonal)

$$\boxed{a^Tb = b^Ta = 0 \longleftrightarrow a \perp b}$$

연습문제 3.1.3

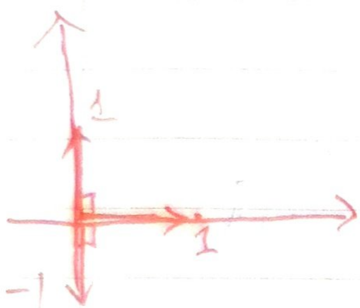
(1) 다음 벡터에 대해 직교하는 단위벡터를 찾아라.

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x^T b = b^T x = 0$ 을 만족하는 벡터 b.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$b_1 = 0$, 단위벡터이므로



$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(2) 다음 벡터에 대해 직교하는 단위벡터를 찾아라.

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

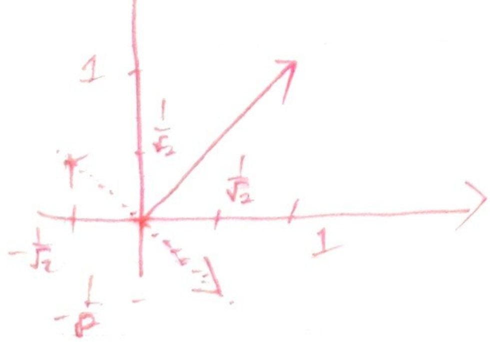
$x^T b = b^T x = 0$ 을 만족하는 벡터 b

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$b_1 + b_2 = 0$$

$$b_1 = -b_2, \quad b_2 = b_1$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$



(3) 다음 두 벡터에 대해 모두 직교하는 단위벡터를 찾아라.

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$ 이라 할때, $x \perp z$ 이면서 $y \perp z$

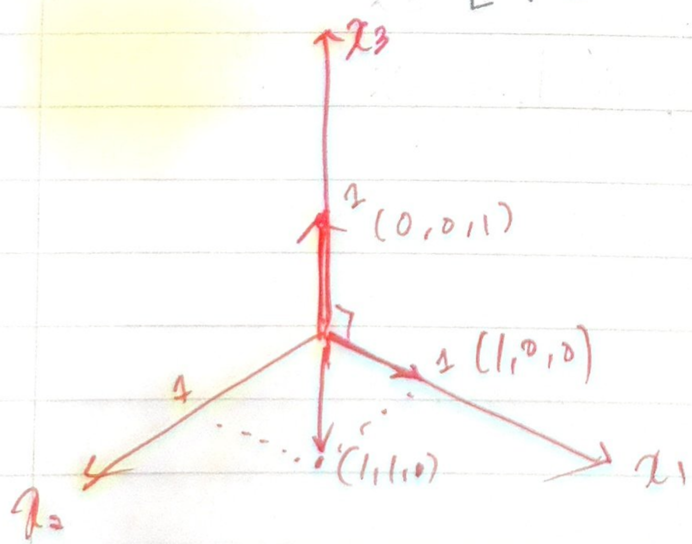
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = 0$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = 0$ 에 의해서 $z_1 = 0$.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = 0$ 에 의해서 $z_2 = 0$

단위벡터이므로 $\sqrt{0^2 + 0^2 + z_3^2} = 1$

$$\therefore z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$



정규직교

만약 N개의 단위벡터 $v_1, v_2, \cdots v_N$가 서로 직교하면 정규직교(orthonormal)라고 한다.

$$\|v_i\| = 1 \longleftrightarrow v_i^T v_i = 1$$ 단위벡터

$$\cancel{v_i^T v_j \neq 0 \ (i \neq j)}$$

$$v_i^T v_j = 0 \quad (i \neq j)$$ 서로 다른 벡터와 직교함

연습문제 3.1.4

직교하는 두 N차원 벡터 a, b에 대해 다음 식이 성립함을 보여라.

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$$

N = 2일 때 이 식은 피타고라스의 정리가 된다.

(N=2일 때)

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\left(\sqrt{(a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right)^2 + \left(\sqrt{b_1^2+b_2^2}\right)^2$$

$$a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + \underline{2a_1b_1 + 2a_2b_2} = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2$$

a, b가 서로 직교하므로,

$$a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

$$\therefore \|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$$

연습문제 3.1.5

정규직교하는 세개의 3차원 벡터 v_1, v_2, v_3로 이루어진 행렬 V에 대해서 다음 등식이 성립함을 보여라.

$$V = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]$$

(1) $V^TV = I$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} [v_1 \ v_2 \ v_3] = \begin{bmatrix} v_1^2 & v_1^Tv_2 & v_1^Tv_3 \\ v_2^Tv_1 & v_2^2 & v_2^Tv_3 \\ v_3^Tv_1 & v_3^Tv_2 & v_3^2 \end{bmatrix}$$

$V^TV = VV^T = I$

$\therefore V^{-1}V = VV^{-1} = I$

$\therefore V^{-1} = V^T$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore v_1v_2 = v_1v_3 = v_2v_3 = 0$

(2) $V^{-1} = V^T$

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix}$$ 일 때,

$V^{-1}V = V^TV$ 이며,

$$V^TV = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix}$$

$\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = 1 \quad \cdots ①$

$v_1^Tv_2 = v_1^Tv_3 = v_2^Tv_3 = 0 \quad \cdots ②$

①, ② 에 의하여 $V^TV = I = V^{-1}V \quad \therefore V^{-1} = V^T$

코사인 유사도

$\boxed{\text{가정}}$ 두 벡터의 방향이 비슷할수록 벡터가 비슷하다

방향 → $\cos\theta$

$\cos\theta$는 각도가 0일 때 가장 커지므로 (1)
두 벡터가 같은 방향을 가리키고 있으면
코사인 유사도가 최대값 1을 갖는다.

$$\text{cosine similarity} = \cos\theta = \frac{x^T y}{\|x\|\|y\|}$$

코사인 유사도는 추후 학습할 추천시스템 (recomender system) 에서
사용자의 취향이 얼마나 비슷한지를 계산할 때 사용된다.

* 코사인 유사도를 이용하여, 다음처럼 코사인 거리 (cosine distance)도
정의할 수 있다.

$$\text{cosine distance} = 1 - \text{cosine similarity} = 1 - \frac{x^T y}{\|x\|\|y\|}$$

연습문제 3.1.6

a, b, c 3명의 사용자가 4개의 영화에 준 평점을 다음처럼 벡터로 표현하였다.

$$a = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) a, b, c 사이의 유클리드 거리를 구하라. 어느 두 사용자가 가장 가까운가? 또 어느 두 사용자가 가장 멀리 떨어져 있는가?

euclidean dist

$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\|$$
$$= 16+25+4+4+16+4-2(7\cdot 2\sqrt{5})$$
$$= 69-14-4\sqrt{5}$$
$$= 55-4\sqrt{5}$$

$$\|a-c\|^2 = \|a\|^2 + \|c\|^2 - 2\|a\|\|c\|$$
$$= (16+25+4+4)+(4+4+1)-2(7\cdot 3)$$
$$= 49+9-42$$
$$= 16$$

$$\|b-c\|^2 = \|b\|^2 + \|c\|^2 - 2\|b\|\|c\|$$
$$= 20+9-2(2\sqrt{5}\cdot 3)$$
$$= 29-6-4\sqrt{5}$$
$$= 23-4\sqrt{5}$$

$$\boxed{\|b-c\|^2 < \|a-c\|^2 < \|a-b\|^2}$$

(2) a, b, c 사이의 코사인 거리를 구하라. 어느 두 사용자가 가장 가까운가? 또 어느 두 사용자가 가장 멀리 떨어져 있는가?

cosine similarity $= \dfrac{x^T y}{\|x\| \|y\|}$

cosine distance $= 1 - \dfrac{x^T y}{\|x\| \|y\|}$

$$\frac{a^T b}{\|a\| \|b\|} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} / 14\sqrt{5}$$

$$= (16 + 4) / 14\sqrt{5}$$

$$= \frac{20}{14\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{7 \cdot 5} = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{7}}$$

$$\frac{b^T c}{\|b\| \|c\|} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} / 6\sqrt{5}$$

$$= \frac{8\sqrt{5}}{6} = \boxed{\frac{4\sqrt{5}}{3}}$$

$$\frac{a^T c}{\|a\| \|c\|} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} / 21$$

$$= \boxed{\frac{20}{21}}$$

cosine distance: $(a-b)\ \ 1 - \dfrac{2\sqrt{5}}{7}$ ← 가장 멀다

$(b-c)\ \ 1 - \dfrac{4\sqrt{5}}{3}$ ← 가장 가깝다

$(a-c)\ \ 1 - \dfrac{20}{21}$

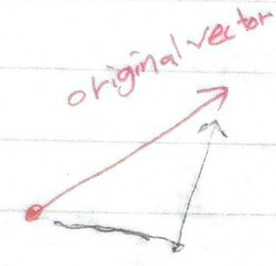
벡터의 분해와 성분

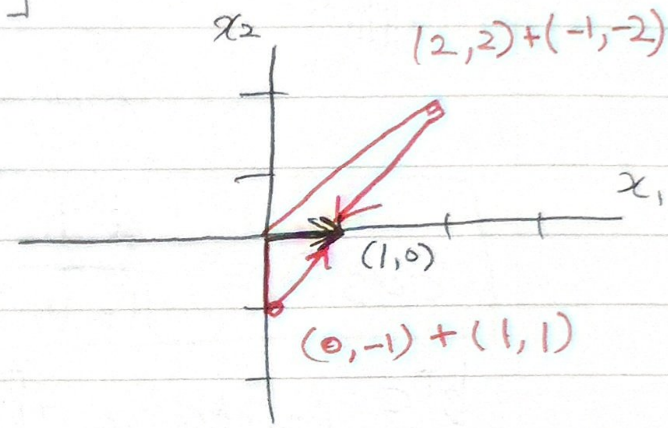
어떤 두 벡터 a, b의 합이 다른 벡터 c가 될 때, c가 두 벡터 성분 (component) a, b로 분해 (decomposition) 된다고 말한다.

연습문제 3.1.7

다음 벡터를 두 개의 벡터로 분해하는 방법을 두 가지 이상 찾고 평면 위에 각각 화살표로 표기하라.

$$x = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$





투영성분과 직교성분

벡터 a를 다른 벡터 b에 직교하는 성분과 성분 b에 평행한 성분으로 분해할 수 있는데, 평행한 성분을 벡터 b에 대한 투영성분(projection), 벡터 b에 직교하는 성분을 벡터 b에 대한 직교성분(rejection)이라고 하며 각각 다음과 같이 표기한다.

$a^{\parallel b}$ — 투영 / 평행성분 for b / projection

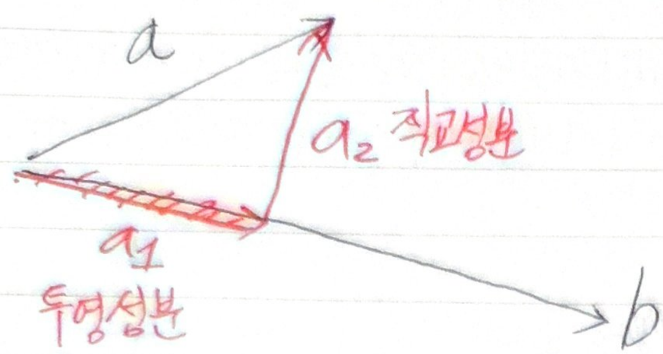
$a^{\perp b}$ — 직교성분 for b / rejection

투영성분의 길이는 다음처럼 구할 수 있다.

$$\|a^{\parallel b}\| = \|a\|\cos\theta = \frac{\|a\|\,\|b\|\cos\theta}{\|b\|} = \frac{a^Tb}{\|b\|} = \frac{b^Ta}{\|b\|} = a^T\frac{b}{\|b\|}$$

* 만약 벡터 b가 단위벡터이면, 단위벡터에 대한 투영길이는 내적이 된다.

$$\|a^{\parallel b}\| = a^Tb \quad (\because \|b\| = 1)$$



$$a = a^{\parallel b} + a^{\perp b}$$

투영 (평행)　　직교 (수직)

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\|a^{\parallel b}\|}{\|a\|}}$$

$$\therefore \|a^{\parallel b}\| = \|a\| \cdot \cos\theta$$

$$= \frac{\|a\|\,\|b\|\cos\theta}{\|b\|}$$

$$= \frac{a^T b}{\|b\|}$$

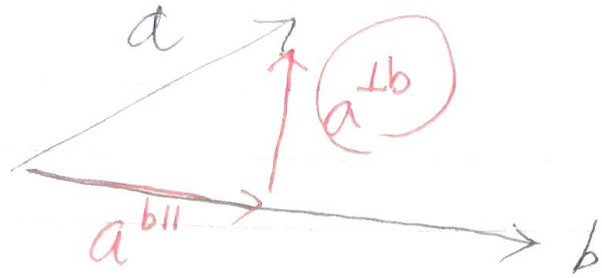
$$= a^T \frac{b}{\|b\|}$$

$$\underbrace{a^{\parallel b}}_{\text{투영성분}} = \underbrace{\|a^{\parallel b}\|}_{\text{투영성분길이}} \times \underbrace{\frac{b}{\|b\|}}_{\text{투영성분 방향}}$$

길이 = 1,
방향을 가리키는
단위벡터

직교성분 벡터는 원래의 벡터에서 투영성분의 성분 벡터를 뺀 나머지다.

$$a^{\perp b} = a - a^{\parallel b}$$



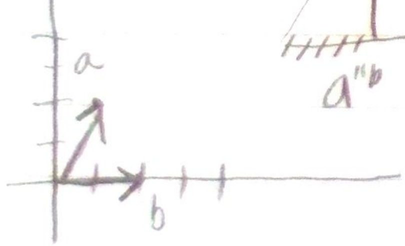
$$a = a^{\parallel b} + a^{\perp b}$$

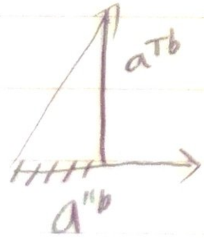
$$\boxed{a^{\perp b} = a - a^{\parallel b}}$$

연습문제 3.1.8

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

일 때, 투영성분 $a^{\parallel b}$, 직교성분 $a^{\perp b}$를 구하여라.





$$\|a^{\parallel b}\| = a^T \frac{b}{\|b\|}$$

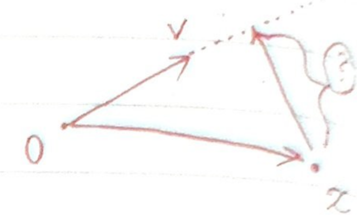
$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$a^{\parallel b} = \|a^{\parallel b}\| \cdot \frac{b}{\|b\|} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a^{\perp b} = a - a^{\parallel b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

연습문제 3.1.9

만약 v가 원점을 지나는 직선의 방향을 나타내는 단위벡터라고 하자. 이때 그 직선 위에 있지 않는 어떤 점 x와 그 직선간의 거리의 제곱이 다음과 같음을 증명하여라.



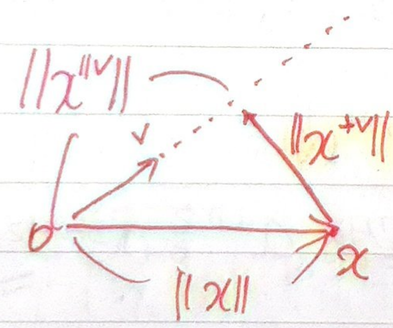
$$\|x\|^2 - (x^Tv)^2$$

v가 단위벡터이므로,

$$\|x^{\parallel v}\| = x^T\frac{v}{\|v\|} = x^Tv$$

따라서,

$$\|x\|^2 - (x^Tv)^2 = \|x\|^2 - \|x^{\parallel v}\|^2$$



피타고라스 정리에 의하여,

$$\|x\|^2 = \|x^{\parallel v}\|^2 + \|x^{\perp v}\|^2$$

$$\therefore \|x^{\perp v}\|^2 = \|x\|^2 - \|x^{\parallel v}\|^2$$

$$= \|x\|^2 - (x^Tv)^2$$

직선의 방정식

어떤 벡터 w가 있을 때,

- 원점에서 출발한 벡터 w가 가리키는 점을 지나면서
- 벡터 w에 수직인

직선의 방정식을 구해보자.

위 두 조건을 만족하는 직선상의 임의의 점을 가리키는 벡터를 x라고 하면, 벡터 x가 가리키는 점과 벡터 w가 가리키는 점을 이은 벡터 $x-w$는 조건에 따라 벡터 x와 직교해야 한다. 따라서 다음 식이 성립한다.

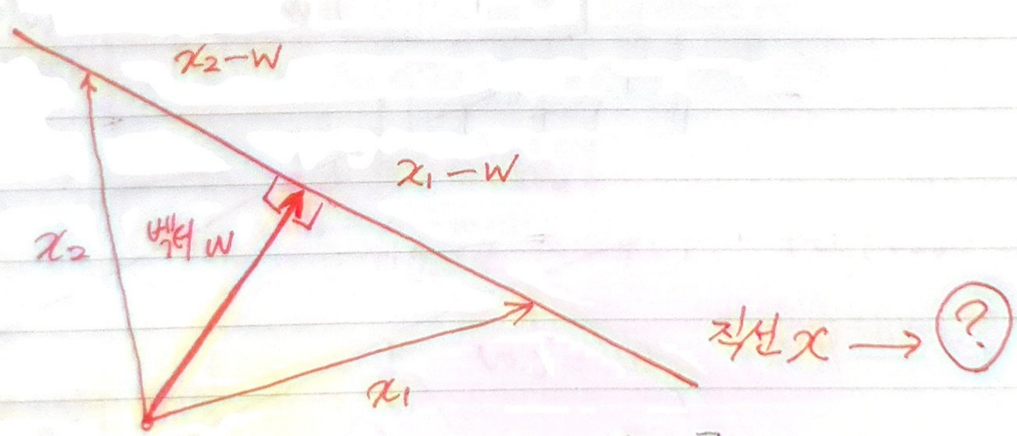
$$w^T(x-w)=0$$

정리하면,

$$w^T(x-w)=w^Tx-w^Tw=w^Tx-\|w\|^2$$

$$\boxed{w^Tx-\|w\|^2=0}$$

이 직선과 원점 사이의 거리는 벡터 w의 놈 $\|w\|$이다.



$w=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$일 때, $w^Tx-\|w\|^2=\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}-5=0$

$\boxed{\therefore x_1+2x_2-5=0}$, 직선-원점 거리 $=\sqrt{5}$

☆ 이번에는 벡터 w가 가리키는 점을 지나야 한다는 조건을 없애고 단순히

• 벡터 w에 수직인

직선 x의 방정식을 구해보자.

이때는 직선이 w가 아니라 w와 방향이 같고 길이가 다른 벡터 $\boxed{w' = cw}$를 지날 것이다. c는 양의 실수이다.

음수면 방향이 뒤집어짐 (반대방향)

앞서 살펴본 방법으로 다시 직선의 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$w'^T x - \|w'\|^2 = c w^T x - c^2 \|w\|^2 = 0$$

$$w^T x - c\|w\|^2 = 0$$

여기에서 $c\|w\|^2$은 임의의 수가 될 수 있으므로 단순히 벡터 w에 수직인 직선의 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$w^T x - c\|w\|^2 = 0$

이런 식에서 x와 원점 사이 거리는 얼마?

$$\boxed{w^T x - w_0 = 0}$$

이 직선과 원점 사이의 거리는 다음과 같다.

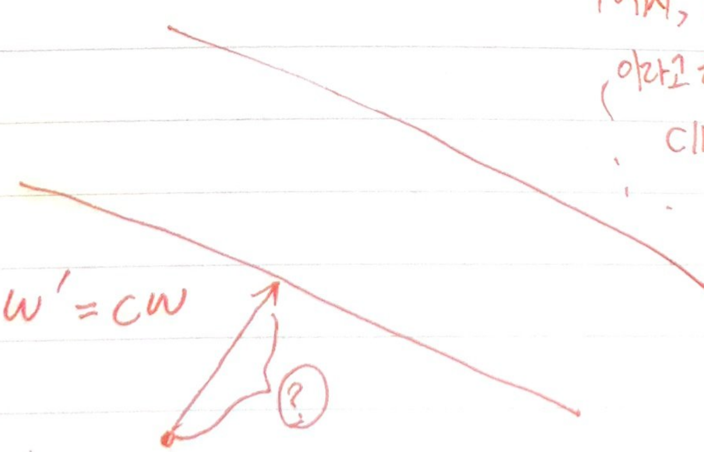
$$\boxed{c\|w\| = \frac{w_0}{\|w\|}}$$

$w^T x - c\|w\|^2 = 0$ 에서, $w_0 = c\|w\|^2$ 이라고 하면, $c\|w\| = \frac{w_0}{\|w\|}$

$w_0 = c\|w\|^2$

$c\|w\| = \frac{w_0}{\|w\|}$

$w' = cw$

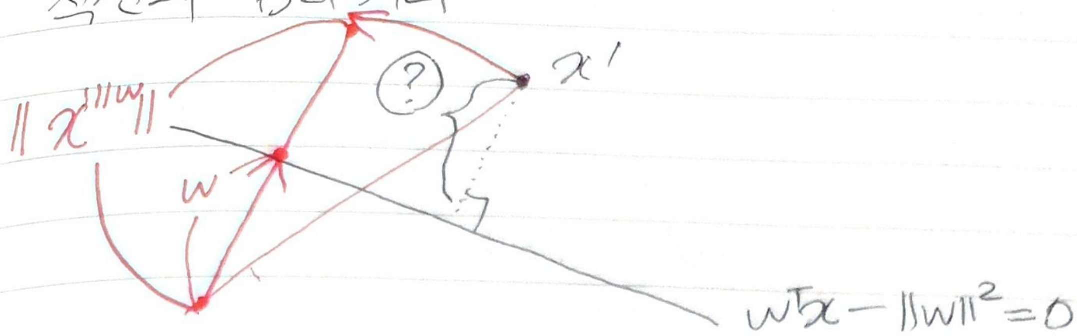


$$w'^T x - \|w'\|^2 = 0$$

$$w^T x - \|w\|^2 = 0$$

$$w^T x - w_0 = 0$$

직선과 점의 거리



① w 라는 벡터를 세운다
② w에 대하여 x'를 투영한다
③ 투영성분 (그림자)의 길이 $= \|x'^{\|w}\|$
④ $\|x'^{\|w}\| = \dfrac{w^Tx'}{\|w\|}$
⑤ $\left| \|x'^{\|w}\| - \|w\| \right|$ = 우리가 구하고자 하는 값

→ 절대값이 붙는 이유?
$\|x'^{\|w}\|$가 $\|w\|$ 보다 짧을 수도 있으므로

$\left| \|x'^{\|w}\| - \|w\| \right|$를 정리하면,

$$\left| \|x'^{\|w}\| - \|w\| \right| = \left| \frac{w^Tx'}{\|w\|} - \|w\| \right| = \frac{|w^Tx' - \|w\|^2|}{\|w\|}$$

직선의 방정식이 $w^Tx - w_0 = 0$이면 직선과 점의 거리는 다음과 같다.

$$\frac{|w^Tx' - w_0|}{\|w\|}$$

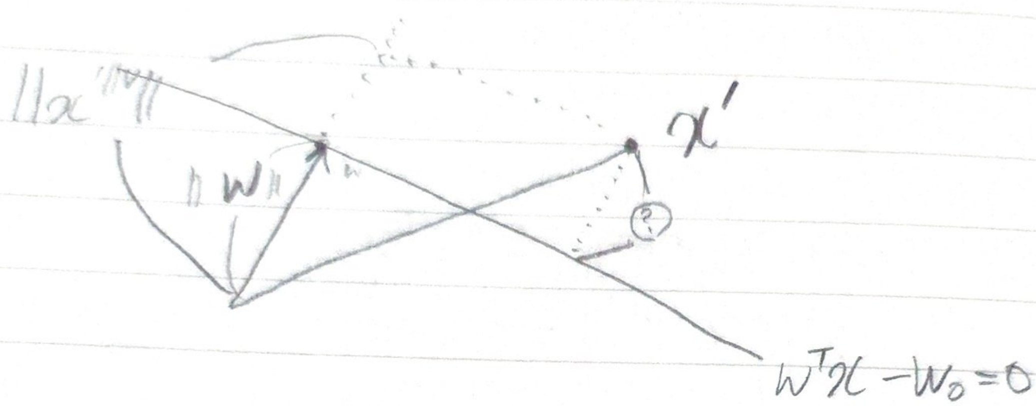
이 공식은 분류 방법 중 하나인 서포트 벡터 머신 (SVM: Support Vector Machine)에서 사용된다.

직선의 방정식의 표현식 $w^Tx - w_0$과 '거의' 비슷함
: x'는 직선 x 선상에 없기 때문임.

연습문제 3.1.11

직선의 방정식이 $w^Tx - w_0 = 0$이면 직선과 점의 거리는 다음과 같다는 것을 증명하라.

$$\frac{|w^Tx' - w_0|}{||w||}$$



직선 바깥 임의의 점 x'를 x' 인근의 임의의 벡터 v에 대하여 투영

$x' \to v$ 투영에 따라 생기는 투영성분 (그림자)의 길이

$$||x'^{||w}|| = \frac{w^Tx'}{||w||}$$

$$\begin{cases} ||x'^{||w}|| - ||w|| & (||x'^{||w}|| \geq ||w||) \\ ||w|| - ||x'^{||w}|| & (||x'^{||w}|| < ||w||) \end{cases}$$

$$\rightarrow \left| ||x'^{||w}|| - ||w|| \right|$$

$$= \left| \frac{w^Tx'}{||w||} - ||w|| \right| = \left| \frac{w^Tx' - ||w||^2}{||w||} \right|$$

직선 방정식이 $w^Tx - w_0$이므로 $\left| \frac{w^Tx' - ||w||^2}{||w||} \right| = \left| \frac{w^Tx' - w_0}{||w||} \right|$