1.1 그리스 문자

upper	lower	eng	ko	`$$` 주의점 `$$` → 마크다운표기
A	α	alpha	알파	A, \alpha
B	β	beta	베타	B, \beta
Γ	γ	gamma	감마	\Gamma, \gamma
Δ	δ	delta	델타	\Delta, \delta
E	ϵ	epsilon	엡실론	E, \epsilon
Z	ζ	zeta	제타	Z, \zeta
H	η	eta	에타	H, \eta
Θ	θ	theta	쎄타	\Theta, \theta
K	κ	kappa	카파	K, \kappa
Λ	λ	lambda	람다	\Lambda, \lambda
M	μ	mu	뮤	M, \mu
N	ν	nu	누	N, \nu
Ξ	ξ	xi	크사이	\Xi, \xi
Π	π	pi	파이	\Pi, \pi
P	ρ	rho	로	P, \rho
Σ	σ	sigma	시그마	\Sigma, \sigma
T	τ	tan	타우	T, \tau
Φ	ϕ	phi	파이/피	\Phi, \phi
X	χ	chi	카이	X, \chi
Ψ	ψ	psi	프사이	\Psi, \psi
Ω	ω	omega	오메가	\Omega, \omega

1.2 수열의 집합과 합의 곱

- 데이터를 분석하기 위해서는 많은 숫자의 합이나 곱을 계산해야 함
- 따라서 숫자의 합과 곱을 나타내는 수학 기호에 익숙해지는 것은 데이터분석의 첫걸음
- 이 절의 기호와 수식들은 앞으로 계속 반복하여 나오므로 반드시 외우고 손으로 여러번 쓸 것

수열

수열(sequence)은 N개의 숫자 또는 변수가 순서대로 나열된 것이다.

$$1, 2, 3, 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$$

$x_i \rightarrow$ index, 순서를 표시하는 숫자

$$x_1, x_2, \ldots, x_N$$

① 수열의 길이가 아주 길거나 ② 수열길이가 문자인 경우 생략

집합

순서가 중요하지 않은 숫자들은 집합(set)으로 표시한다.

$$\{1, 2, 3, 4\}$$

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$$

데이터 분석에서는 1부터 N까지의 수열 or 집합이 많이 나오기 때문에, 간단하게 표현하기도

$$x_{1:N}$$

$$\{x_i\}_N$$

실수 집합은 알파벳 대문자 R이라는 이름을 가진다. 어떤 숫자 x가 실수이면,

$$x \in R$$

두 개로 이루어진 숫자 쌍 (x_1, x_2) 각각이 모두 실수라면

$$(x_1, x_2) \in R \times R$$

$$(x_1, x_2) \in R^2$$

수열의 합과 곱

수열 합연산 - Σ (sigma) 모양 - 'sum' ~~produc~~

수열 곱연산 - Π (pi) 모양 - 'product'

- 기호 아래에는 인덱스 시작값, 기호 위는 인덱스 끝값
- 곱셈은 알파벳 x 와 혼동될 수 없으므로 $a \cdot b$ (dot) 또는 기호 생략 (ab)

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_N$$

$$\prod_{i=1}^{N} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_N$$

더하거나 곱하기를 반복해서 써야할 때, 합/곱 기호 사용 → 간결, 명확

$$\sum_{i=1}^{4} i = 1+2+3+4$$

$$\sum_{k=1}^{9} 10k = 10 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + \cdots + 10 \cdot 9$$

$$\prod_{i=10}^{20} i = (10) \cdot (11) \cdot \cdots \cdot (20)$$

합과 곱을 중첩 (= nested loop)

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{M} x_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} x_{ij}$$

합과 곱을 중첩한 수식의 예:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(i+j) = \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3}(i+j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\left((i+1)+(i+2)+(i+3)\right)$$

$$= \left((1+1)+(1+2)+(1+3)\right)+\left((2+1)+(2+2)+(2+3)\right)$$

$$\prod_{m=1}^{3}\prod_{n=1}^{2}(m+2n) = \prod_{m=1}^{3}\left(\prod_{n=1}^{2}(m+2n)\right)$$

$$= \prod_{m=1}^{3}\left((m+2\cdot 1)\cdot(m+2\cdot 2)\right)$$

$$= \left((1+2\cdot 1)\cdot(1+2\cdot 2)\right)\cdot\left((2+2\cdot 1)+(2+2\cdot 2)\right)\cdot$$
$$\left((3+2\cdot 1)\cdot(3+2\cdot 2)\right)$$

* 수학 공부는 눈으로 읽기만 하고 손으로 쓰지 않으면 의미 X

* 수식을 꼭 손으로 반복해서 쓰면서 의미를 익히기

연습문제 1.2.1
다음 수식을 풀어 써라. 이 수식들은 이후 머신러닝 모형에 등장한다.

(1) 서포트 벡터 머신 (support vector machine) 수식

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i a_j y_i y_j x_i x_j$$

$$\begin{aligned}
=&\left((a_1 a_1 y_1 y_1 x_1 x_1) + (a_1 a_2 y_1 y_2 x_1 x_2) + (a_1 a_3 y_1 y_3 x_1 x_3)\right) \\
&+\left((a_2 a_1 y_2 y_1 x_2 x_1) + (a_2 a_2 y_2 y_2 x_2 x_2) + (a_2 a_3 y_2 y_3 x_2 x_3)\right) \\
&+\left((a_3 a_1 y_3 y_1 x_3 x_1) + (a_3 a_2 y_3 y_2 x_3 x_2) + (a_3 a_3 y_3 y_3 x_3 x_3)\right)
\end{aligned}$$

(2) 특잇값 분해 (singular value decomposition) 수식

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \sigma_i^2 (v_i w_k)^2$$

$$\begin{aligned}
=&\left(\sigma_1^2 (v_1 w_1)^2 + \sigma_2^2 (v_2 w_1)^2 + \sigma_3^2 (v_3 w_1)^2\right) \\
&+\left(\sigma_1^2 (v_1 w_2)^2 + \sigma_2^2 (v_2 w_2)^2 + \sigma_3^2 (v_3 w_2)^2\right) \\
&+\left(\sigma_1^2 (v_1 w_3)^2 + \sigma_2^2 (v_2 w_3)^2 + \sigma_3^2 (v_3 w_3)^2\right)
\end{aligned}$$

(3) 카테고리 분포 (categorical distribution) 추정에 사용하는 식

$$\prod_{i=1}^{4}\prod_{k=1}^{4} \theta_k^{x_{i,k}}$$

$$\begin{aligned}
=&\left(\theta_1^{x_{1,1}} \cdot \theta_2^{x_{1,2}} \cdot \theta_3^{x_{1,3}} \cdot \theta_4^{x_{1,4}}\right) \\
&\cdot\left(\theta_1^{x_{2,1}} \cdot \theta_2^{x_{2,2}} \cdot \theta_3^{x_{2,3}} \cdot \theta_4^{x_{2,4}}\right) \\
&\cdot\left(\theta_1^{x_{3,1}} \cdot \theta_2^{x_{3,2}} \cdot \theta_3^{x_{3,3}} \cdot \theta_4^{x_{3,4}}\right) \\
&\cdot\left(\theta_1^{x_{4,1}} \cdot \theta_2^{\theta_{4,2}} \cdot \theta_3^{x_{4,3}} \cdot \theta_4^{x_{4,4}}\right)
\end{aligned}$$

(4) 가우시안 혼합 모형 (Gaussian mixture model) 등장 수식

$$\prod_{i=1}^{4} \sum_{k=1}^{2} \pi_k x_i \mu_k$$

$$= (\pi_1 x_1 \mu_1 + \pi_2 x_1 \mu_2) \cdot (\pi_1 x_2 \mu_1 + \pi_2 x_2 \mu_2) \cdot (\pi_1 x_3 \mu_1 + \pi_2 x_3 \mu_2) \cdot (\pi_1 x_4 \mu_1 + \pi_2 x_4 \mu_2)$$

연습문제 1.2.2

수열의 곱은 여러개의 값 중 하나를 선택하는 경우에도 쓰일 수 있다.
수열 x_i가 다음과 같다고 하자.

$$x_i : x_1, x_2, x_3, x_4$$

이중 하나의 값만 선택하고 싶다면 다음처럼 모두 0이고 하나만 1인 수열 y_i를 사용하면 된다.

$$y_i : 0, 1, 0, 0$$

(1) x_i와 y_i가 위와 같을 때 다음 값을 계산하라.

$$\prod_i x_i^{y_i} = x_1^0 \cdot x_2^1 \cdot x_3^0 \cdot x_4^0 = x_2$$

(2) 만약 수열 y_i에서 $y_3 = 1$이고 나머지가 0이라면 답은?

$$\prod_i x_i^{y_i} = x_1^0 \cdot x_2^0 \cdot x_3^1 \cdot x_4^0 = x_3$$

수열의 합과 곱 연산은 다음과 같은 성질을 가지고 있다.

(1) 인덱스 문자가 바뀌어도 실제 수식은 달라지지 않는다

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{j=1}^{N} x_j$$

(2) 상수 c를 곱한 후에 합을 한 결과는
먼저 합을 구하고 상수를 곱한 것과 같다

$$\sum_{i=1}^{N} c x_i = c \sum_{i=1}^{N} x_i$$

(3) 더해야 하는 값들이 여러 항의 합으로 되어 있으면
각각의 합을 먼저 구한 후에 더해도 된다.

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=1}^{N} y_i$$

(4) 합이나 곱을 중첩하는 경우에는 중첩의 순서를 바꾸어도 결과가 같다.

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N}$$

예를 들어, 다음 두 식은 항들의 순서만 바뀌었고 합은 같다.

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = (x_{11} + x_{12} + x_{13}) + (x_{21} + x_{22} + x_{23})$$

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} x_{ij} = (x_{11} + x_{21}) + (x_{12} + x_{22}) + (x_{13} + x_{23})$$

연습문제 1.2.3

다음 두 식의 좌변과 우변이 같음을 증명하라.
이 수식들은 선형대수에서 벡터 및 행렬의 곱에 유용하게 사용된다.

(1)

$$\left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i x_j$$

(좌변) $\left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right)^2 = (x_1+x_2+x_3)^2$

$= x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$

(우변) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i x_j = (x_1x_1+x_1x_2+x_1x_3)$

$+(x_2x_1+x_2x_2+x_2x_3)$

$+(x_3x_1+x_3x_2+x_3x_3)$

$=2(x_1x_2)+2(x_1x_3)+2(x_2x_3)$

$+x_1^2+x_2^2+x_3^2$

(2)

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i y_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\left(x_i \sum_{j=1}^{3} y_{ij}\right)$$

(좌변) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i y_{ij}$

$=(x_1y_{11}+x_1y_{12}+x_1y_{13})$

$+(x_2y_{21}+x_2y_{22}+x_2y_{23})$

$+(x_3y_{31}+x_3y_{32}+x_3y_{33})$

$= x_1(y_{11}+y_{12}+y_{13})+x_2(y_{21}+y_{22}+y_{23})$

$+x_3(y_{31}+y_{32}+y_{33})$

(우변)

$$\sum_{i=1}^{3}\left(x_i \sum_{j=1}^{3} y_{ij}\right)$$

$$= x_1 \sum_{j=1}^{3} y_{1j} + x_2 \sum_{j=1}^{3} y_{2j} + x_3 \sum_{j=1}^{3} y_{3j}$$

$$= x_1(y_{11}+y_{12}+y_{13}) + x_2(y_{21}+y_{22}+y_{23})$$
$$+ x_3(y_{31}+y_{32}+y_{33})$$

집합의 합과 곱

수열이 아니라 집합의 원소들의 합과 곱을 구할 때는
인덱스 대신 집합 기호를 사용한다.
만약 집합 X의 원소가 다음과 같다면,

$$X = \{x_1, x_2, x_3\}$$

이 집합의 원소의 합과 곱은 다음처럼 표시한다 (인덱스 표시 X)

$$\sum_X x = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\prod_X x = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

원소 중에서 특정한 조건을 가진 원소만 포함시키거나 제외하여 합과 곱을 구하는 경우도 있다. 이 때는 인덱스 위치에 조건을 표시한다. 예를 들어, 다음 식은 집합 X의 원소 중 0이 아닌 것만 곱한 값을 뜻한다.

$$\prod_{x \in X,\, x \neq 0} x$$

연습문제 1.2.4

두 집합 X_1, X_2가 있고, x_1은 X_1의 원소들, x_2는 X_2의 원소들을 가리킬 때 다음 두 식의 좌변과 우변이 같음을 증명하라.

* 문제를 간단하게 하기위해 여기에서는 각각의 집합이 3개 원소만 가졌다고 가정
* 이 식의 확장된 버전은 향후 베이지안 네트워크의 합-곱(sum-product) 알고리즘에 사용된다.

$$\prod_{i=1}^{2} \sum_{X_i} x_i = \sum_{X_1 \times X_2} \prod_{i=1}^{2} x_i$$

$$X_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$$
$$X_2 = \{y_1, y_2, y_3\}$$

(좌변) $\prod_{i=1}^{2} \sum_{X_i} x_i = (x_1+x_2+x_3)\cdot(y_1+y_2+y_3)$

$$\begin{aligned} &= (x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3) \\ &\quad + (x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3) \\ &\quad + (x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3) \end{aligned}$$

(우변) $\sum_{X_1 \times X_2} \prod_{i=1}^{2} x_i = \sum_{X_1 \times X_2} (x_1 x_2)$

$$\begin{aligned} &= x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 \\ &\quad + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 \\ &\quad + x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3 \end{aligned}$$