역행렬

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

"역행렬이 존재하는 행렬"	역행렬 X
= 가역행렬 (invertible)	non-invertible (비가역)
= 정칙행렬 (regular)	
= 비특이행렬 (non-singular)	singular (특이)
	degenerate (퇴화)

연습문제 2.4.1

대각행렬의 역행렬은 각 대각성분의 역수로 이루어진 대각행렬과 같다.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_N} \end{bmatrix}$$

N=3일 때 위식을 증명하라.

$$L = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} \end{bmatrix}$$ 라고 할 때,

$$LL^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3}{\lambda_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L^{-1}L = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3}{\lambda_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

역행렬의 성질

- 행렬 A, B, C 모두 각각 역행렬 A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} 존재한다고 가정.

① $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

② $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

역행렬의 계산

cofactor ; ex $(-1)^{i+1} M_{i1} a_{i1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{N1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{M1} & \cdots & C_{NM} \end{bmatrix}$$

연습문제 2.4.2

크래머 식을 이용하여 다음공식을 증명하라.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$C_{1,1} \text{ (cofactor)} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \cdot \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{22}$$

$$C_{1,2} = (-1)^{1+2} M_{12} = -1 \cdot \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} \end{bmatrix} = -a_{21}$$

$$C_{2,1} = (-1)^{2+1} M_{21} = -1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = -a_{12}$$

$$C_{2,2} = (-1)^{2+2} M_{22} = 1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

연습문제 2.4.3

다음 역행렬을 계산하라.

(1)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^{-1} \quad \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(3)

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^{-1} \quad \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{26}}+\frac{2}{\sqrt{26}}}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$$

(4)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

4-1. 3X3 matrix determinant

$$\begin{bmatrix} 1 & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \boxed{a \times (ei - fh)}$$

$$1 \times (1\cdot1 - 1\cdot1)$$

$$= 0$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{1} & 1 & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \boxed{b \times (di - fg)}$$

$$1 \times (0\cdot1 - 1\cdot1)$$

$$= -1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boxed{c \times (dh - eg)}$$

$$0 \times (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1)$$

$$= 0$$

$$\text{determinant} = {\oplus}\, a(ei - fh) \,{\ominus}\, b(di - fg) \,{\oplus}\, c(dh - eg)$$

$$= 0 + 1 + 0 = 1.$$

~~1. 2. cofactor matrix~~ determinant (2nd way)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad aei + bfg + cdh$$

$$\ominus$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad ceg + bdi + afh$$

$$\parallel$$

$$aei + bfg + cdh - (ceg + bdi + afh)$$

$$= 1 + 1 + 0 - (0 + 0 + 1)$$

$$= 2 - 1 = 1$$

<cofactor matrix>

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a \to ei - fh = 0 \\ b \to di - fg = -1 \\ c \to dh - eg = -1 \\ d \to bi - ch = 1 \\ e \to ai - cg = 1 \\ f \to ah - bg = 0 \\ g \to bf - ce = 1 \\ h \to af - cd = 1 \\ i \to ae - bd = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ce \\ fg-di & ai-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{bmatrix} \xleftarrow[T]{\text{transpose}} \begin{bmatrix} \oplus\, ei-fh & \ominus\, di-fg & \oplus\, dh-eg \\ \ominus\, bi-ch & \oplus\, ai-cg & \ominus\, ah-bg \\ \oplus\, bf-ce & \ominus\, af-cd & \oplus\, ae-bd \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

연습문제 2.4.4

두 정방행렬 A, B에 대해서

$AB=I$ 이면 $BA=I$ 임을 증명하라.

$$AB=I \longrightarrow BA=I$$

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_1+a_2b_3 & a_1b_2+a_2b_4 \\ a_3b_1+a_4b_3 & a_3b_2+a_4b_4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ a_1b_1+a_2b_3=a_3b_2+a_4b_4=1,$$
$$a_1b_2+a_2b_4=a_3b_1+a_4b_3=0$$

$$BA=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1a_1+b_2a_3 & b_1a_2+b_2a_4 \\ b_3a_1+b_4a_3 & b_3a_2+b_4a_4 \end{bmatrix}$$

$tr(AB)=tr(BA)$ 이므로,

$$(\cancel{a_1b_1}+a_2b_3)+(a_3b_2+\cancel{a_4b_4})=(\cancel{a_1b_1}+a_3b_2)+(a_2b_3+\cancel{a_4b_4})$$
$$a_2b_3+a_3b_2=a_3b_2+a_2b_3$$

$$tr(A^T)=tr(A) \longrightarrow tr(B^TA^T)=tr(AB)$$

$\times$ $tr(B^T A^T) = tr(AB)$ 이므로,

$$tr\left(\begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}\right)$$

$$tr\left(\begin{bmatrix} \underline{a_1b_1+a_2b_3} & a_3b_1+a_4b_3 \\ a_1b_2+a_2b_4 & \underline{a_3b_2+a_4b_4} \end{bmatrix}\right) = tr\left(\begin{bmatrix} \underline{a_1b_1+a_2b_3} & a_1b_2+a_2b_4 \\ a_3b_1+a_4b_3 & \underline{a_3b_2+a_4b_4} \end{bmatrix}\right)$$

✓ $AB = I \longrightarrow det(AB) = \underbrace{det(A)\,det(B)}_{} = 1.$

$det(A) \neq 0$, $det(B) \neq 0$

$\therefore$ A에 대한 A^{-1} 존재

$\therefore$ B에 대한 B^{-1} 존재

$AB = I$일 때,

$A = IB^{-1} = B^{-1}$ 이며,

$BA = BB^{-1} = I$

$\therefore AB = I \longrightarrow BA = I$

역행렬에 대한 정리

외우기보다 필요할때 찾아서 쓸것 // 고급공식!

① 셔먼-모리스 (Sherman-Morrison) 정리

정방행렬 A와 벡터 u, v에 대해 다음이 성립한다.

$$(A+\underline{uv^T})^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{\underbrace{1+v^TA^{-1}u}}$$

"행렬이 조금 변하면 역행렬도 이만큼 변한다"

② 우드베리 (woodbury) 공식

일반화

정방행렬 A와 이에 대응하는 적절한 크기의 행렬 U, V, C에 대해 다음 공식이 성립한다.

$$(A+\underbrace{UCV}_{\text{셔먼모리스 } uv^T\text{에 대응 (일반화)}})^{-1} = A^{-1} - \underbrace{A^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}}_{\text{셔먼모리스 } \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}\text{에 대응 (일반화)}}$$

분할행렬의 역행렬

필요할때 참고 (암기X)

4개 블록(block)으로 분할된 행렬 (partitioned matrix)의 역행렬은 각 분할행렬을 이용하여 계산할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}(I + A_{12}FA_{11}^{-1}) & -A_{11}^{-1}A_{12}F \\ -FA_{21}A_{11}^{-1} & F \end{bmatrix}$$

위 식에서 F는 다음과 같이 주어진다.

$$F = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}$$

OR

$$F = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$$

역행렬과 선형 연립방정식의 해

- 선형 연립방정식에서 미지수의 수와 방정식의 수가 같다면, 계수행렬 A는 정방행렬이 된다.
- 만약 행렬 A의 역행렬이 존재한다면, 역행렬의 정의로부터 선형 연립방정식의 해는 다음처럼 구할 수 있다.

$$Ax = b$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$Ix = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$

선형 연립방정식과 선형예측모형

N개의 입력차원을 가지는 특징벡터 N개를 입력하고, 이에 대응하는 목표값을 출력하는 선형 예측모형

$$\begin{aligned} x_{11}w_1 + x_{12}w_2 + \cdots + x_{1N}w_N &= y_1 \\ x_{21}w_1 + x_{22}w_2 + \cdots + x_{2N}w_N &= y_2 \\ &\vdots \\ x_{N1}w_1 + x_{N2}w_2 + \cdots + x_{NN}w_N &= y_N \end{aligned}$$

$$Xw = y \longrightarrow X^{-1} \text{ 존재} \longrightarrow w = X^{-1}y$$

미지수의 수와 방정식의 수

1. #방정식 = #미지수 ($N = M$)
2. #방정식 < #미지수 ($N < M$) → 무수히 많은 해 (정보부족)
3. #방정식 > #미지수 ($N > M$)

→ 일반적인 경우 ③이 해당함

: feature보다 sample이 더 많다.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 \phantom{{}+2x_3} &= 2 \\
x_2 + x_3 &= 2 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5
\end{aligned}
$$

"해가 존재하지 않음"

최소자승문제

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 \phantom{{}+2x_3} &= 2 \\
x_2 + x_3 &= 2 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \approx 4.1
\end{aligned}
$$

해가 없다면, 가장 근사한 해는 무엇인가?

#미지수 < #방정식 → 해없음 → 좌변과 우변의 차이 최소화하는 문제

잔차(residual) = $e = Ax - b$

잔차 최소화 = 잔차^2 최소화.

$$\boxed{e^T e = \|e\|^2 = (Ax-b)^T(Ax-b)}$$

잔차^{2}를 최소화하는 x값의 표현

$$\boxed{x = \arg\min_x e^T e = \arg\min_x (Ax-b)^T(Ax-b)}$$

$$Ax \approx b$$

$$\vdots$$

$$A^T A x = A^T b$$

$$\Big\downarrow \ (A^TA)^{-1}\text{이 존재한다면}$$

$$(A^TA)^{-1}(A^TA)x = (A^TA)^{-1}A^Tb$$

$$\Big\downarrow \ \text{정리}$$

$$\boxed{x = \underbrace{((A^TA)^{-1}A^T)}_{\text{행렬 }A\text{의 유사역행렬 (pseudo inverse)}}b}$$

행렬A의 유사역행렬 (pseudo inverse),

$$A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$$

$$x = A^+ b$$

선형대수 기초내용 done.