Week 4. 선형연립방정식의 해집합

선형대수학 = 모든 문제를 풀이할 수 있는 수학의 몇 안 되는 분야 中 1

"선형대수학은 수학적이론이 추구하는 모델이다" Alan Tucker

4.1 선형연립방정식

미지수 x, y에 대하여 일차식으로 표현되는 방정식 = 일차방정식 (linear equation)

= 선형방정식 (

$$\boxed{2x + 3y = 1}$$

미지수 x, y에 관한 유한개의 선형방정식의 모임 = 선형 연립방정식 (System of Linear Equations)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

선형연립방정식의 해 → 직선의 교점 (x, y)

one and only

* n개의 미지수를 갖는 일반 선형연립방정식은 다음 중 하나만 만족한다.

① 유일한 해를 갖는다. $x + y = 3,\ x - y = 1$ (교차)

② 무수히 많은 해를 갖는다. $2x - y = -2,\ -2x + y = 2$ (중첩)

③ 해를 갖지 않는다. $2x - y = -2,\ 2x - y = -4$ (평행)

4.2 첨가행렬 augmented matrix

선형연립방정식은 행렬을 이용하여 표현할 수 있다.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots\cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots \quad a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots a_{nn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\underset{\displaystyle A}{\underset{\parallel}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}} \cdot \underset{\displaystyle x}{\underset{\parallel}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}} = \underset{\displaystyle b}{\underset{\parallel}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}}$$

이때 행렬 A를 선형연립방정식의 계수행렬 coefficient matrix 이라 하며, A에 b를 붙여서 만든 행렬

$$[A:b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} & \vdots & b_n \end{bmatrix}$$

을 첨가행렬이라고 한다.

Additional Section

Theorem n차의 정사각행렬 A가 가역이고 b가 R^n의 벡터일 때, 연립방정식 $Ax = b$는 유일한 해 $x = A^{-1}b$를 갖는다.

Proof A가 가역이므로 A^{-1}이 존재한다.

$$Ax = b$$
$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$$
$$(A^{-1}A)x = A^{-1}b$$
$$x = A^{-1}b$$

또, x_0가 $Ax=b$의 또 다른 해라고 하면

$$Ax_0 = b$$

이 식의 양변에 A^{-1}을 곱하면

$$(A^{-1}A)x_0 = x_0 = A^{-1}b = x$$

$x_0 = x$ 이므로 $Ax=b$는 유일한 해를 갖는다.

■ 동차선형연립방정식

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

이라 할 때 $Ax = 0$ 으로 나타낼 수 있다.

theorem
동차선형방정식이 자명하지 않은 해를 갖는 경우?
n = 미지수 개수
m = 방정식 개수
$m < n$이면 자명하지 않은 해를 갖는다.

- 이 때 $x = 0$인 해를 자명한 해 (trivial solution), $x \neq 0$인 해를 자명하지 않은 해 (nontrivial solution)라 한다.
- 동차선형연립방정식은 항상 자명한 해를 가지므로 아래 두가지 경우만 해당한다.
  ① 자명한 해를 갖는다 (trivial, unique)
  ② 무수히 많은 해를 갖는다 — 자명하지 않은 해도 포함된다

예제 동차연립방정식

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 + x_4 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

#미지수 $n = 4$
#방정식 $m = 3$
$n > m$

첨가행렬 $A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

*기약행 사다리꼴 행렬

Reduced Row Echelon Form

*RREF $A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$

행사다리꼴행렬은 가우스 소거법을 통해 알 수 있듯, 모든 성립하는 연립방정식으로부터 첨가행렬의 과정을 거쳐 해를 갖는 행사다리꼴행렬 또는 기약행사다리꼴로 변환 가능하다.

이에 대응하는 연립방정식

$$x_1 + x_4 = 0$$
$$x_2 - x_4 = 0$$
$$x_3 + x_4 = 0$$

이때 $x_4 = r$ (임의의 실수)으로 놓으면 선형연립방정식의 해는

$$x_1 = -r,\ x_2 = r,\ x_3 = -r,\ x_4 = r \ (r \in \mathbb{R})$$

이다. 여기서 $r = 0$ 이면 자명한 해 (trivial solution)
$r \neq 0$ 이면 자명하지 않은 해 (non-trivial solution)

def 수반동차 연립방정식 associated homogeneous system of linear equati

; 선형 연립방정식 $Ax = b$에 대하여
$Ax = 0$을 $Ax = b$의 수반동차연립방정식이라고 한다.

4.3 가우스 소거법

- 선형연립방정식의 해집합을 구하는 데 사용

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ x-2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=1 \\ 2x-4y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=1 \\ 2x-4y-2x-3y=8-1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 8 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 7 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3(-1)=1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

위 예시에서 다음 세가지 연산이 이루어지는데, 이를 기본행 연산 (ERO Elementary Row Operations) 이라고 한다.

① 두 식을 교환한다.
② 한 식에 0이 아닌 실수를 곱한다
③ 한 식에 0이 아닌 실수배를 하여 다른 식에 더한다.

행렬에 대해서도 적용가능

① 행렬의 두 행을 서로 바꾼다.
② 행렬의 한 행에 0이 아닌 실수를 곱한다.
③ 행렬의 한 행에 실수배를 하여 다른 행에 더한다.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]}$$

이 형태를 기약행 사다리꼴 (reduced row echelon form), RREF라 한다

4.4 연립방정식의 해집합

[예제] (해가 무수히 AA)

다음 연립방정식의 해를 계산하시오.

$$\begin{cases} 3x-2y+z-u+5v=1 \\ 2x+y-2z+3u=23 \\ x+5y+4z-7u+v=-17 \end{cases}$$

$n = \#$ 미지수 $= 5$
$m = \#$ 방정식 $= 3$
$n > m$

가우스 소거

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 4/71 & 73/71 & 262/71 \\ 0 & 1 & 0 & -13/71 & -42/71 & 107/71 \\ 0 & 0 & 1 & -109/71 & 52/71 & -501/71 \end{array}\right]$$

$$x+\frac{4}{71}u+\frac{73}{71}v=\frac{262}{71} \qquad x=-\frac{4}{71}u-\frac{73}{71}v+\frac{262}{71}$$

$$y-\frac{13}{71}u-\frac{42}{71}v=\frac{107}{71} \Rightarrow y=\frac{13}{71}u+\frac{42}{71}v+\frac{107}{71}$$

$$z-\frac{109}{71}u+\frac{52}{71}v=-\frac{501}{71} \qquad z=\frac{109}{71}u-\frac{52}{71}v-\frac{501}{71}$$

따라서 u와 v의 값이 정해지면 그에 따라 x, y, z의 값이 정해진다.
$u=r$, $v=s$ (r, s는 임의의 실수)를 대입한 뒤 벡터형태로 쓰면,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{71}r-\frac{73}{71}s+\frac{262}{71} \\ \frac{13}{71}r+\frac{42}{71}s+\frac{107}{71} \\ \frac{109}{71}r-\frac{52}{71}v-\frac{501}{71} \\ r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{262}{71} \\ \frac{107}{71} \\ -\frac{501}{71} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} -\frac{4}{71} \\ \frac{13}{71} \\ \frac{109}{71} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -\frac{73}{71} \\ \frac{42}{71} \\ -\frac{52}{71} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

∴ r과 s에 임의의 실수를 대입하여 얻은 (x, y, z, u, v)는 모두 해가 된다.
∴ 무수히 많은 해가 존재한다.

예제
해가 없는 경우

다음 연립방정식의 해를 계산하시오.

$$\begin{cases} x-2y+z=7 \\ 2x-2y+z=5 \\ 3x+y-5z=0 \\ -y+2z=-4 \\ -6x+7z=10 \end{cases} \xrightarrow[\text{소거}]{\text{가우스}} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ \boxed{0z=1} \\ 0z=0 \end{cases}$$

$\boxed{0z=1}$ — 모순 ∵ $0=1$

∴ 해가 존재하지 않는다

"정리 (일반화)"

선형 연립방정식의 첨가행렬은 기본행 연산 (ERO)에 의해
REF or RREF로 변환하면,

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \xrightarrow{\text{ERO}} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1k} & \cdots\ c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & c_{23} & \cdots & c_{2k} & \cdots\ c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \boxed{d_{r+1}} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(1) $d_{r+1} \neq 0$: 모순 → 해가 없다.

(2) $d_{r+1} = 0$:

* r = #선행성분 (leading entry, 각 행에서 최초의 '0'이 아닌 성분)
* n = #미지수

① $r = n$: 해가 유일하다

② $r < n$: 해가 무수히 많다

선행성분 개수의 의미?
→ 모두 0으로 이루어지지 않은 행의 개수.

인공지능 적용시, 주어진 데이터에 대한 적절한 모델을 찾는 문제는
선형 연립방정식으로 귀결되나, 일반적으로 (미지수의 개수) < (방정식의 개수) 이므로
feature instance
유일한 해가 나오기 힘들다. 해가 없는 경우 多

→ Optimal Solution.

<최소제곱해>가 필요한 이유.