선형종속과 선형독립

선형종속 임의의 실수들로 선형결합 → 영벡터

선형독립 임의의 실수들로 선형결합 → 영벡터 X

(단, $c_1, c_2 \cdots c_N$ 이 모두 0인 경우 제외)

"선형독립"의 수학적 표현

$$c_1x_1 + \cdots + c_Nx_N = 0 \longleftrightarrow c_1 = \cdots = c_N = 0$$

예제

다음 벡터 x_1, x_2는 선형독립이다.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

x_1은 두 성분의 크기가 다르지만 x_2는 두 성분 크기가 같다

→ 어떤 선형결합을 시도해도 0이 나올수없다

예제

다음 벡터 x_1, x_2, x_3은 선형종속이다.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$2x_1 + x_2 - x_3 = 0$, 종속

연습문제 3.2.1

다음 벡터들이 선형독립 인지 종속인지 판별하라.
선형종속이면 영벡터를 만드는 계수값을 찾아라.

(1)

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

x_1과 x_2는 서로의 0 아닌 성분에 영향끼칠수 없다
→ 선형독립

(2)

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

x_1을 x_2 성분으로 상쇄할수 없다
→ 선형독립

(3)

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$2x_1 - x_2 = 0$, 선형종속

* 선형독립은 차원 숫자 = 벡터 숫자일 때만 가능하다
  ex. 선형독립인 2차원 벡터 3개 — 불가능
  선형독립인 3차원 벡터 4개 — 불가능

선형독립과 선형방정식

선형독립관계를 행렬과 벡터의 곱으로 나타낼 수도 있다.

$$c_1x_1 + \cdots c_Nx_N = [x_1 \ x_2 \cdots x_N]\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots \\ c_N\end{bmatrix} = Xc$$

따라서 어떤 벡터들이 선형독립인지 아닌지를 알아내는 문제는
선형 연립방정식을 푸는 문제와 같다.

$$Xc = 0$$

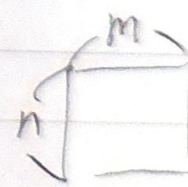
i) 해가 only 영벡터 ⇒ 선형독립
ii) 영벡터 아닌 해가 존재 ⇒ 선형종속
iii) 해가 무한히 많음 ⇒ 선형종속

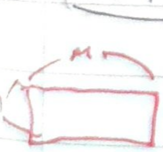
선형종속인 경우

예측모형을 만들기 위한 특징행렬 X의 열벡터들이 선형종속이거나 선형종속에 가까운 현상을 다중공선성 (multicollinearity) 이라고 부른다.

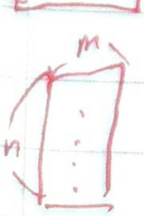
⟶ 모델 예측성능 하락!

$\boxed{\text{경우 1}}$ 벡터의 개수가 벡터의 차원보다 크면 선형종속이다.





$m > n$ ⟶ 해 무한히 多 ⟶ 선형종속



$m \le n$ ⟶ 대부분 선형독립 ⟶ 우리가 분석할 대부분의 데이터.

경우2 값이 같은 벡터가 있으면 반드시 선형종속이다.

if $x_i = x_j$, let $c_j = -c_i$ and $c_{others} = 0$

$$
\begin{aligned}
& 0 \cdot x_1 + \cdots c_i x_i + \cdots c_j x_j + \cdots + 0 \cdot x_N \\
&= 0 \cdot x_1 + \cdots c_i x_i + \cdots (-c_i) x_j + \cdots + 0 \cdot x_N \\
&= 0
\end{aligned}
$$

다음처럼 중복된 데이터가 있으면 선형종속이다.

$$
\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}
\text{ OR }
\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \cdot 2 \\ 3 & 6 & 3 \cdot 2 \\ 4 & 6 & 4 \cdot 2 \end{bmatrix}
$$

* 벡터x_j가 x_i의 실수배인 경우도 마찬가지! — 은근히 실수로 만들어질 수 있다

경우3 어떤 벡터가 다른 벡터의 선형조합이면 반드시 선형종속이다.

$$x_1 = 2x_2 - 3x_3$$

일 때, $c_1 = -1$, $c_2 = 2$ $c_3 = -3$ 이면

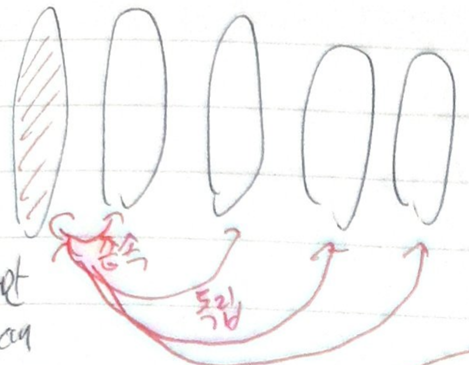
$$-1 \cdot x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$$

이므로 선형종속이다.

* 데이터분석에서 흔히 하기 쉬운 실수!
  - 국어·영어·수학 점수를 각각 별도의 데이터로 포함하면서,
  - 위 3개 점수에 의존하는 총점수나 평균을 다시 데이터로 포함하면

  → 선형종속

랭크



하나만 있을때

→ 영벡터 아니면 무조건 종속.

1개 : 독립

2개 짝지었을때 : 종속, 독립, 독립, 종속

3개 짝지었을때 : 종속, 독립, ...

4개 " : 종속, 종속, 종속 ...

5개 " : 종속, 종속, 종속 ...

모두 종속!

$$3 = RANK$$

다른 벡터와 복수개로 짝지었을때,
선형독립이 가능한 최고 값 (갯수)

· 랭크 ⇒ 행렬의 열벡터 중 서로 독립인 열벡터의 최대 갯수를 열랭크 (column rank)라 한다.

⇒ 행렬의 행벡터 중 서로 독립인 행벡터의 최대갯수를 행랭크 (row rank)라 한다.

기호 $\boxed{\mathrm{rank}\ A}$

행 랭크는 행의 갯수보다 커질 수 없고,
열 랭크는 열의 갯수보다 커질 수 없으므로
행 갯수가 N이고 열의 갯수가 M인 행렬의 랭크는
min(N, M) 보다 커질수 없다.

$$\mathrm{rank}\ A \le \min(M, N)$$

$$A \in R^{N \times M}$$

예제

다음 행렬 X_1 의 두 열벡터는 선형독립이기 때문에 열랭크는 2다.

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(column) (1 2) (3 3)

비율 다르다 = 방향 다르다 = 독립

(row) (1 3) (2 3)

비율 다르다 = 방향 다르다 = 독립

예제

다음 행렬 X_2 의 세 열벡터는 선형종속이므로, 열랭크는 3보다는 작다.
그런데 이 열벡터 중 앞의 두 개는 선형독립이므로, X_2 의 랭크는 2다.

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

독립

독립

" 애초에 X_2의 rank는 2를 초과할 수 없음! "

☆ 풀랭크

예제에서 살펴본 X_1, X_2처럼 랭크가 "행의 개수"와 "열의 개수" 중 작은 값과 같으면 풀랭크(full rank)라고 한다.

$$\text{rank}\, A = \min(M, N)$$

선형독립인 벡터들을 행 또는 열로 갖는 행렬을 만들면, 정의에 의하여 항상 풀랭크다.

연습문제 3.2.4

다음 행렬의 랭크를 구하고 풀랭크인지 말하라.

(1)

×6 ×5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 11 & 14 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

4×3

FULL RANK여도, RANK 3을 초과할 수 없다.

독립

독립

종속

RANK=2

FULL RANK X

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$$

* 두 개의 벡터의 독립/종속 판단 → 실수배 비율만 보면 ok.

* 세 개 이상 벡터의 독립/종속 판단 → 실수배 비율 + 더하기까지 확인.

(2)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 11 & 14 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

독립 독립

독립.

독립 → RANK 3

FULL RANK

로우-랭크 행렬 - 실속없음, 중복정보, 정보량 적다 ([illegible])

N차원 벡터 x 하나를 이용하여 만들어지는 다음과 같은 행렬을 랭크-1 행렬 (rank-1 matrix) 이라고 한다.

$$xx^T = R^{N \times N}$$

이 행렬의 열벡터들은 x라고 하는 하나의 벡터를 x_1배, x_2배, $\cdots$ x_n배한 벡터이므로 독립적인 열벡터는 1개다. 따라서 랭크-1 행렬의 랭크는 1이다.

$$xx^T = x \left[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_N \right]$$

$$= \left[x_1 x \quad x_2 x \quad \cdots \quad x_N x \right]$$

선형독립인 두 개의 N차원 벡터 x_1, x_2를 이용하여 만든 다음과 같은 행렬은 랭크-2 행렬 (rank-2 matrix) 이라고 한다.

$$\left[x_1 \quad x_2 \right] \begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \end{bmatrix} = x_1 x_1^T + x_2 x_2^T \rightarrow \text{rank} 2$$

rank-M matrix

$$[x_1\ x_2\ \cdots\ x_M]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix} = x_1x_1^T + x_2x_2^T + \cdots x_Mx_M^T = \sum_{i=1}^{M} x_i x_i^T$$

→ M rank.

연습문제 3.2.5

(1) 다음 벡터로 랭크-1 행렬을 만들고 NumPy로 랭크를 계산하여 실제로 1이 나오는지 확인하라.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{rank } 1,$$

full-rank

(2) 다음 두 개의 벡터로 랭크-2 행렬을 만들고 NumPy로 계산하여 실제로 2가 나오는지 확인하라.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2.

2.

rank 2, full-rank

랭크와 역행렬

정방행렬의 랭크와 역행렬 사이에는 다음과 같은 정리가 성립한다.

☆ theorem

정방행렬 (square matrix)이 풀랭크 $\longleftrightarrow$ 역행렬이 존재함

정방행렬이 풀랭크가 아님 $\longleftrightarrow$ 역행렬이 존재하지 않음

벡터공간과 기저벡터

- 여러 벡터를 선형조합하면 다른 벡터를 만들 수 있다.
- 벡터 N개가 서로 선형독립이면 이 벡터들을 선형조합하여 만들어지는 모든 벡터의 집합을 벡터공간 (vector space) V라 하고, 이 벡터공간의 차원을 N개라고 한다.
- 그리고 그 벡터 N개는 벡터공간의 기저벡터 (basis vector)라고 한다.

$$V = \{c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_Nx_N \mid c_1, \cdots c_N \in R\}$$

** 벡터공간의 차원(dimension)이 벡터의 차원(길이)이 아니라, 기저벡터의 갯수로 정의된다는 점에 유의하라.

N차원 벡터 N개 $x_1, x_2, \cdots, x_N$이 선형독립이면 이를 선형조합하여 모든 N차원 벡터를 만들 수 있다.

? 독립이 아니면? $\longrightarrow$ 못 만드는 (못 표현하는) 공간이 생긴다.

다음과 같이 증명한다. 임의의 벡터 x가 있다고 하자.
기저벡터 $x_1, x_2, \cdots, x_N$과 이 벡터 x를 열벡터로 사용하여 만든 행렬

$$X = [x_1, x_2, \cdots, x_N, x]$$

는 크기가 $N \times (N+1)$이므로 랭크값은 N보다 클 수 없다.
그런데 N개의 선형독립인 열벡터가 있기 때문에 랭크값은 N이며 풀랭크다.
따라서 어떠한 N차원 벡터를 생각하더라도 기저벡터의 조합으로 표현할 수 있다.

예제

다음 집합은 선형독립이므로 2차원 벡터공간의 기저벡터이다.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

이 기저벡터 $\{x_1, x_2\}$를 선형조합하면 어떠한 2차원 벡터도 만들 수 있다.

예제

다음 벡터의 집합은 선형독립이 아니므로 벡터공간의 기저벡터가 되지 않는다.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

예제

다음 벡터의 집합은 선형독립이므로 벡터공간의 기저벡터이다.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\{x_1, x_2\} \xrightarrow{\text{선형조합}}$ 2차원 V

$\because c_1x_1 + c_2x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 만들수없음

$\rightsquigarrow$ V 차원을 벡터의 차원과 다르게 정의하는 이유!!

연습문제 3.2.6

(1) 다음 기저벡터 x_1, x_2를 선형조합하여 벡터 y_1, y_2를 만들어라.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad y_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x_1 + x_2 = y_1, \quad -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}y_1 = y_2}$$

(2) 2차원 벡터공간을 만드는 2차원 기저벡터의 또다른 예를 들어라.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3) 2차원 벡터공간을 만드는 3차원 기저벡터의 또다른 예를 들어라.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(3) 3차원 벡터공간을 만드는 3차원 기저벡터의 또다른 예를 들어라.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(definition)

정방행렬 full rank $\longleftrightarrow$ 역행렬 존재

(1) 정방행렬 full rank $\longrightarrow$ 역행렬 존재.

↳ 선형독립 & 기저벡터

↳ 어떠한 벡터에 대해서도 그 벡터를 만드는 선형조합 가능

↳ 다음과 같은 벡터 $e_1, e_2, \cdots e_N$을 만드는 $c_1, c_2, \cdots c_N$이 가능

$$Xc_1 = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Xc_2 = e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

위 식들을 모으면,

$$X[c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_N] = XC = I$$

정방행렬의 경우 $XC = I$이면 $CX = I$가 성립한다. (연습문제 2.4.4)

(2) 역행렬이 존재 $\longrightarrow$ full rank

"역행렬이 존재하는 경우에 다음식이 성립함을 증명"

$$Xc = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

(i) 역행렬 존재와 상관없이, $c = 0 \rightarrow Xc = 0$

(ii) 역행렬이 존재할 때 $Xc = 0$ 이면,

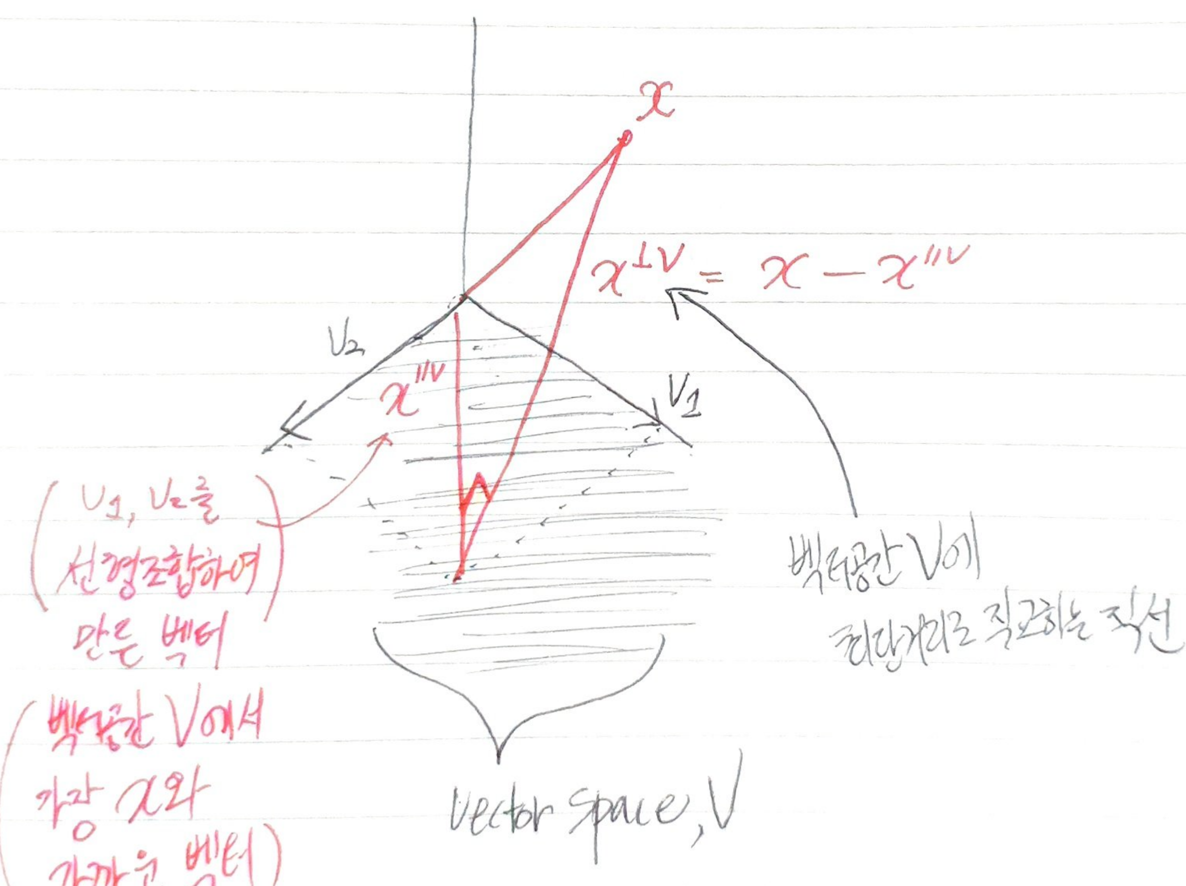
$$X^{-1}Xc = c = 0$$

$\therefore$ 역행렬 존재 $\longrightarrow$ full rank.

벡터공간 투영

- M개의 N차원 기저벡터 $v_1, v_2, \cdots v_M$가 존재한다고 하자.
- M은 N보다 작다.
- 이 때 모든 N차원 벡터 x에 대해 기저벡터 $v_1, v_2, \cdots v_M$을 선형조합하여 만든 벡터 $x^{\parallel V}$와 원래 벡터 x와의 차 $x - x^{\parallel V}$가 모든 기저벡터와 직교하면,
- 그 벡터 $x^{\parallel V}$를 $v_1, v_2, \cdots v_M$ 벡터공간에 대하여 투영벡터라 하고, 차이 벡터 $x - x^{\parallel V} = x^{\perp V}$를 벡터공간에 대한 직교벡터라 한다.

$$(x - x^{\parallel V}) \perp \{v_1, v_2, \cdots v_M\}$$



정규직교하는 기저벡터로 이루어진 벡터공간

길이(norm)=1이면서 ⊥직교

만약 기저벡터 $v_1, v_2, \cdots, v_M$이 정규직교(orthonormal)이면 투영벡터 $x^{\Vert v}$는 각 기저벡터에 대한 내적값으로 표현된다.

계수를 내적값으로 갖는다.

$$\boxed{x^{\Vert v} = (x^T v_1) v_1 + (x^T v_2) v_2 + \cdots + (x^T v_M) v_M}$$

그리고 투영벡터의 길이의 제곱은 각 기저벡터와 내적의 제곱합이다.

$$\| x^{\Vert v} \|^2 = \sum_{i=1}^{M} (x^T v_i)^2$$

벡터 x에서 이 벡터 $x^{\Vert v}$를 뺀 벡터 $x - x^{\Vert v}$, 즉 직교벡터 $x^{\perp v}$가 기저벡터 $v_1, v_2, \cdots v_M$에 모두 직교한다는 것은 다음처럼 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned}
v_i^T (x - x^{\Vert v}) &= v_i^T x - v_i^T \big((x^T v_1) v_1 + (x^T v_2) v_2 + \cdots + (x^T v_M) v_M \big) \\
&= v_i^T x - \big((x^T v_1) v_i^T v_1 + (x^T v_2) v_i^T v_2 + \cdots + (x^T v_M) v_i^T v_M \big) \\
&= v_i^T x - x^T v_i \\
&= 0
\end{aligned}$$

이 사실로부터 벡터 x의 투영벡터 $x^{\Vert v}$는 기저벡터 $v_1, v_2, \cdots, v_M$으로 이루어진 벡터공간의 모든 벡터 중에서 가장 벡터 x와 가까운 벡터라는 것도 알 수 있다.

기저벡터 $v_1, v_2, \cdots v_M$으로 이루어진 벡터공간의 어떤 벡터 y, 그러면 $x^{\Vert v}$와의 차이벡터 $x^{\Vert v} - y$도 $v_1, v_2, \cdots v_M$으로 이루어진 벡터공간에 존재하므로, 직교벡터 $x^{\perp v}$와 직교한다.

$$\begin{aligned}
\|x - y\|^2 &= \|x - x^{\Vert v} + (x^{\Vert v} - y)\|^2 \\
&= \|x^{\perp v} + (x^{\Vert v} - y)\|^2 \\
&= \|x^{\perp v}\|^2 + \|(x^{\Vert v} - y)\|^2 \quad \text{직교하므로 내적}=0 \\
&\geq \|x^{\perp v}\|^2
\end{aligned}$$

표준기저벡터

기저벡터 중에서도 원소 중 하나만 값이 1이고 다른 값은 0으로 이루어진 다음과 같은 기저벡터를 표준기저벡터 (standard basis vector) 라고 한다.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, e_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

표준기저벡터를 열로 가지는 행렬 = 항등행렬

$$[e_1 \ e_2 \cdots e_N] = I_N$$

좌표

어떤 벡터의 좌표 (coordinate)는 기저벡터를 선형조합하여 그 벡터를 나타내기 위한 계수벡터를 말한다.
예를 들어, 다음처럼 기저벡터 $\{e_1, e_2\}$를 선형조합하여 벡터 x를 나타낼 수 있다고 가정하자.

$$x = x_{e1} e_1 + x_{e2} e_2$$

이 때 벡터 x_e

$$x_e = \begin{bmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \end{bmatrix}$$

를 벡터 x의 기저벡터 $\{e_1, e_2\}$에 대한 좌표벡터 혹은 간단히 좌표 (coordinate)라고 한다. 벡터와 기저벡터 그리고 좌표의 관계는 다음과 같다.

$$x = [e_1\ e_2]\begin{bmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \end{bmatrix} = \underbrace{[e_1\ e_2]}_{\text{기저벡터}}\ \underbrace{x_e}_{\text{좌표벡터 (계수)}}$$

예를 들어, 다음 기저벡터 $\{g_1, g_2\}$를 사용하면,

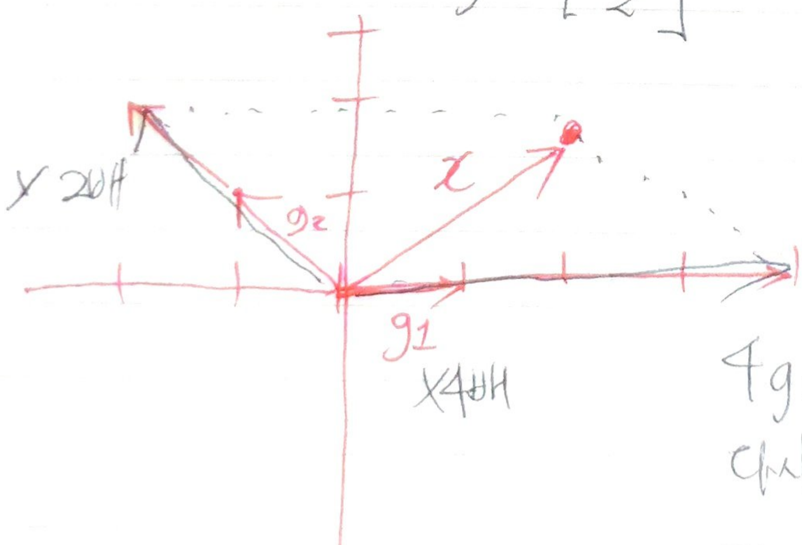
$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

위에 예로 든 벡터 x는 기저벡터 $\{g_1, g_2\}$를 다음처럼 선형조합해서 표현할 수 있다.

$$x = 4g_1 + 2g_2 = [g_1\ g_2]\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{[g_1\ g_2]}_{\text{기저}}\ \underbrace{x_g}_{\text{계수/좌표}}$$

따라서 기저벡터 $\{g_1, g_2\}$에 대한 x의 좌표는 다음과 같다.

$$x_g = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$



$4g_1$ 만큼 가서

다시 $2g_2$ 만큼 가면 x

$$\therefore x = [g_1\ g_2]\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

예제

다음 기저벡터 $\{g_1, g_2\}$를 사용하면,

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

위에 예로 든 벡터 x는 기저벡터 $\{g_1, g_2\}$를 다음처럼 선형조합하여 표현할 수 있다.

$$x = 4g_1 + 2g_2 = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} x_g$$

따라서 기저벡터 $\{g_1, g_2\}$에 대한 x의 좌표는 다음과 같다.

$$x_g = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

변환행렬

$$x = x_{e1} e_1 + x_{e2} e_2 = x_{g1} g_1 + x_{g2} g_2$$

원래의 기저벡터가 아닌 새로운 기저벡터가 있다고 하자. 이 새로운 기저벡터들의 기존 기저벡터에 대한 좌표를 열벡터로 보고 이를 행렬로 묶은 행렬 A를 생각하자.

예를 들어, 기존의 기저벡터가 $\{e_1, e_2\}$이고 새로운 기저벡터 $\{g_1, g_2\}$ 간에 다음과 같은 관계가 성립한다면,

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_2$$

$$g_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_2$$

e_1, e_2에 대한 g_1, g_2의 좌표벡터는 다음처럼 열벡터로 나타낼 수 있다.

$$g_{1e} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad g_{2e} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

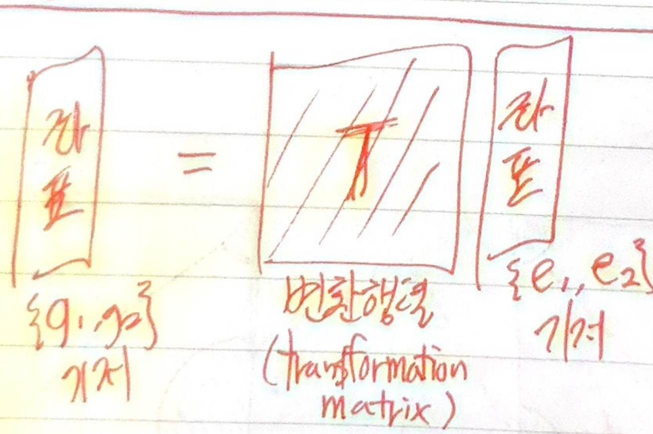
두 좌표벡터들을 합쳐서 행렬로 표시하면 다음과 같다.

$$[g_1\ g_2] = [e_1\ e_2][g_{1e}\ g_{2e}] = [e_1\ e_2]A$$

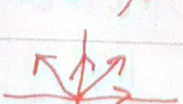
$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

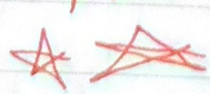
이 식으로부터 다음 식이 성립한다.

$$\boxed{\begin{aligned} x_e &= A x_g \\ x_g &= A^{-1} x_e = T x_e \end{aligned}}$$



좌표변환이 의미하는 것

① 회전 

② Scale 

예를 들어, 벡터 x의 표준기저벡터에 대한 좌표가 다음과 같다고 하자

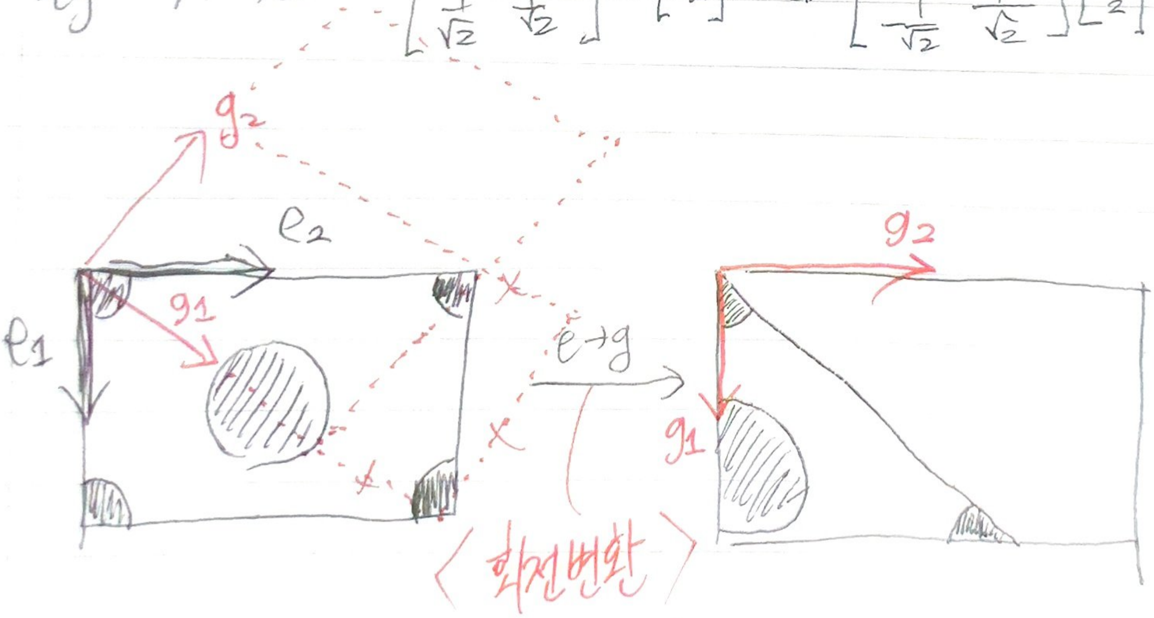
$$x = 2e_1 + 2e_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = x_e$$

표준기저벡터에 대한 새로운 기저벡터의 좌표가 다음과 같다면

$$g_{1e} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad g_{2e} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

새로운 기저벡터에 대한 벡터 a의 좌표는 위의 공식을 이용하여 다음처럼 계산할 수 있다.

$$x_g = A^{-1} x_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$



〈회전변환〉

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_2$$

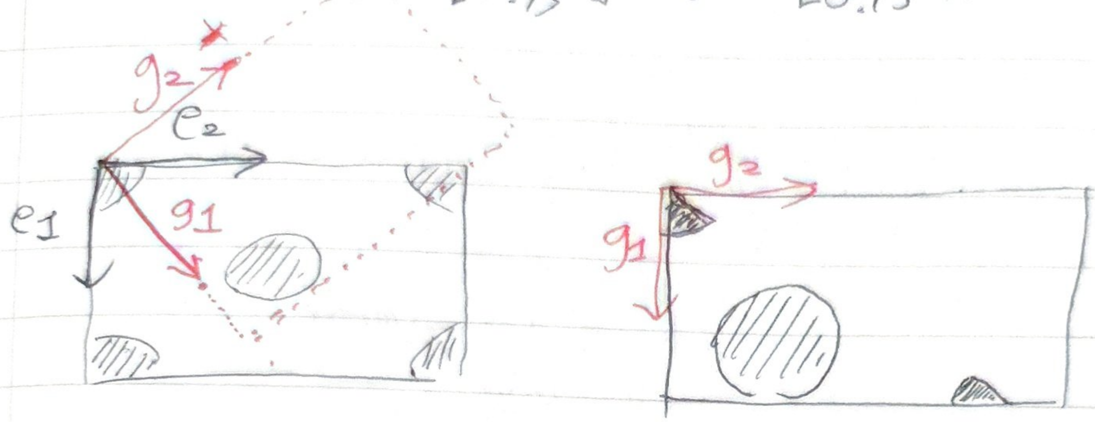
$$g_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_2$$

(scipy) f1 = sp.ndimage.affine_transform(f, A)

연습문제 3.2.9

다음 기저벡터를 이용해 앞의 이미지를 변환하라. 변환할 이미지를 만들기 전에 어떤 이미지가 나올지 생각해보자.

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.75 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$



좌표변환 응용 — "결합확률밀도함수 분포 시각화"

x_1, x_2 간의 결합확률밀도함수