

■ [공통: 수학 I·수학 II]

- 01.① 02.⑤ 03.⑤ 04.④ 05.③
06.① 07.④ 08.② 09.③ 10.③
11.④ 12.② 13.② 14.⑤ 15.①
16. 2 17. 8 18. 9 19. 11
20. 21 21. 192 22. 108

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \times 3^{-\frac{7}{4}} \\ &= 3^{-\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{7}{4}} \\ &= 3^{-\frac{1}{4} + (-\frac{7}{4})} \\ &= 3^{-2} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

정답 ①

2. 출제의도 : 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & f(x) = 2x^3 + 4x + 5 \text{에서} \\ & f'(x) = 6x^2 + 4 \\ & \text{이므로} \\ & f'(1) = 6 + 4 = 10 \end{aligned}$$

정답 ⑤

3. 출제의도 : 등비수열의 일반항을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_2 a_4 = 36$$

에서 $a_1 = 2$ 이므로

$$2r \times 2r^3 = 36$$

$$\text{즉, } r^4 = 9$$

따라서

$$\frac{a_7}{a_3} = \frac{a_1 r^6}{a_1 r^2} = r^4 = 9$$

정답 ⑤

4. 출제의도 : 함수가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 이용할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = f(-1)$$

이 성립해야 한다. 이때,

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (2x + a) = -2 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (x^2 - 5x - a) = 6 - a$$

$$f(-1) = -2 + a$$

이므로

$$-2 + a = 6 - a$$

$$\text{따라서 } a = 4$$

정답 ④

5. 출제의도 : 다항함수의 극값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

$$= 6(x+2)(x-1)$$

이므로 $f'(x) = 0$ 이 되는 x 의 값은

$x = -2$ 또는 $x = 1$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극댓값

$$M=f(-2)=-16+12+24+1=21$$

을 갖고, $x=1$ 에서 극솟값

$$m=f(1)=2+3-12+1=-6$$

을 갖는다.

따라서 $M+m=15$

정답 ③

6. 출제의도 : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$$

에서

$$\frac{\sin\theta(1+\sin\theta)-\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}=4$$

$$\frac{2\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=4$$

$$\frac{2(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}=4$$

$$1-\cos^2\theta=2\cos^2\theta$$

따라서

$$\cos^2\theta=\frac{1}{3}$$

이고, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 이므로

$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

정답 ①

7. 출제의도 : 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

이때, $\frac{1}{a_{n+1}} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{4}$ 이므로 $n=12$ 를

대입하면

$$\frac{1}{a_{13}} = -\frac{1}{12} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}$$

즉, $a_{13} = -3$

정답 ④

8. 출제의도 : 함수의 극한값을 이용하여 함수값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{에서 } x \rightarrow 0 \text{이면}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

따라서 $f(0)=0$

$$\text{같은 방법으로 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1 \text{에서}$$

$$f(1)=0$$

따라서 삼차함수 $f(x)$ 를

$$f(x)=x(x-1)(ax+b) \quad (a, b \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-1)(ax+b) = -b$$

이므로

$$b=-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x(ax+b) = a+b$$

이므로

$$a+b=1$$

따라서 $a=2$ 이므로

$$f(x)=x(x-1)(2x-1)$$

$$\text{따라서 } f(2)=2 \times 1 \times 3=6$$

정답 ②

[다른 풀이]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{에서 } x \rightarrow 0 \text{이면}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{따라서 } f(0)=0$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) = 1$$

$$\text{같은 방법으로 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1 \text{에서}$$

$$f(1)=0, f'(1)=1$$

함수 $f(x)$ 는 삼차함수이고

$$f'(0)=f'(1)=1 \text{이므로}$$

$$f'(x)=ax(x-1)+1, \text{ 즉}$$

$$f'(x)=ax^2-ax+1$$

이라 놓으면

$$f(x)=\frac{a}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2+x+C \text{ (C는}$$

적분상수)

$$f(0)=0 \text{에서 } C=0$$

$$f(1)=0 \text{에서 } \frac{a}{3}-\frac{a}{2}+1=0$$

$$a=6 \text{이므로 } f(x)=2x^3-3x^2+x$$

$$\therefore f(2)=6$$

9. 출제의도 : 도함수를 활용하여 수직선 위를 움직이는 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 시간 t ($t > 0$)에서의 가속도를 $a(t)$ 라 하면

$$v(t)=-4t^3+12t^2$$

이므로

$$a(t)=v'(t)=-12t^2+24t$$

시간 $t=k$ 에서 점 P의 가속도가 12이므로

$$-12k^2+24k=12$$

$$k^2-2k+1=0$$

$$(k-1)^2=0$$

$$k=1$$

한편, $v(t)=-4t^3+12t^2=-4t^2(t-3)$ 이므로 $3 \leq t \leq 4$ 일 때 $v(t) \leq 0$ 이다.

따라서 $t=3$ 에서 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_3^4 |v(t)| dt &= \int_3^4 |-4t^3+12t^2| dt \\ &= \int_3^4 (4t^3-12t^2) dt \\ &= [t^4-4t^3]_3^4 \\ &= 0 - (-27) = 27 \end{aligned}$$

정답 ③

10. 출제의도 : 삼각함수의 그래프를 이해하고 조건을 만족시키는 삼각함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=a \sin b\pi x$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{b\pi} = \frac{2}{b}$$

이므로 두 점 A, B의 좌표는

$$A\left(\frac{1}{2b}, a\right), B\left(\frac{5}{2b}, a\right)$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이가 5이므로

$$\frac{1}{2} \times a \times \left(\frac{5}{2b} - \frac{1}{2b} \right) = 5, \quad \frac{a}{b} = 5$$

$$a = 5b \cdots \textcircled{7}$$

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기

의 곱이 $\frac{5}{4}$ 이므로

$$\frac{\frac{a}{1}}{\frac{1}{2b}} \times \frac{\frac{a}{5}}{\frac{5}{2b}}$$

$$= 2ab \times \frac{2ab}{5}$$

$$= \frac{4a^2b^2}{5} = \frac{5}{4}$$

$$a^2b^2 = \frac{25}{16}, \quad ab = \frac{5}{4} \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } a = \frac{5}{2}, \quad b = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$a+b=3$$

정답 ③

11. 출제의도 : 정적분과 미분과의 관계를 이용하여 함수값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$xf(x) = 2x^3 + ax^2 + 3a + \int_1^x f(t) dt \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = 2 + a + 3a + 0$$

이므로

$$f(1) = 2 + 4a \cdots \textcircled{2}$$

①의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 = 3a + \int_1^0 f(t) dt$$

즉,

$$0 = 3a - \int_0^1 f(t) dt$$

이므로

$$\int_0^1 f(t) dt = 3a \cdots \textcircled{3}$$

$$f(1) = \int_0^1 f(t) dt \text{이므로 } \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{에서}$$

$$2 + 4a = 3a$$

$$\text{즉, } a = -2, \quad f(1) = -6$$

①의 양변을 미분하면

$$f(x) + xf'(x) = 6x^2 + 2ax + f(x)$$

이므로

$$f'(x) = 6x + 2a = 6x - 4$$

따라서

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= 3x^2 - 4x + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

$$f(1) = 3 - 4 + C = -6 \text{에서}$$

$$C = -5$$

따라서

$$f(3) = 27 - 12 - 5 = 10$$

이므로

$$a + f(3) = -2 + 10 = 8$$

정답 ④

12. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$ 이므로 사인법칙에 의하여

가 $2\sqrt{7}$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = 4\sqrt{7}$$

즉,

$$\overline{BC} = \sin \frac{\pi}{3} \times 4\sqrt{7}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4\sqrt{7} = 2\sqrt{21}$$

또, 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의

길어도 $2\sqrt{7}$ 이므로 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)} = 4\sqrt{7}$$

즉,

$$\begin{aligned}\overline{BD} &= \sin(\angle BCD) \times 4\sqrt{7} \\ &= \frac{2\sqrt{7}}{7} \times 4\sqrt{7} = 8\end{aligned}$$

한편, $\angle BDC = \pi - \angle BAC = \frac{2}{3}\pi$ 이므로

$\overline{CD} = x$ 라 하면 삼각형 BCD에서 코사인 법칙에 의하여

$$(2\sqrt{21})^2 = x^2 + 8^2 - 2 \times x \times 8 \times \cos \frac{2}{3}\pi$$

$$x^2 + 8x - 20 = 0$$

$$(x-2)(x+10) = 0$$

$$x > 0 \text{이므로 } x = 2$$

$$\text{즉, } \overline{CD} = 2$$

$$\text{따라서 } \overline{BD} + \overline{CD} = 8 + 2 = 10$$

정답 ②

13. 출제의도 : 등차수열의 성질과 합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 등차수열의 공차를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$a_1 = -45 < 0 \text{ 이고 } d > 0 \text{이므로}$$

조건(가)를 만족시키기 위해서는

$$a_m < 0, a_{m+3} > 0$$

$$\text{즉, } -a_m = a_{m+3} \text{ 에서 } a_m + a_{m+3} = 0$$

따라서,

$$\{-45 + (m-1)d\} + \{-45 + (m+2)d\} = 0$$

$$-90 + (2m+1)d = 0$$

$$(2m+1)d = 90 \cdots \textcircled{1}$$

이고 $2m+1$ 은 1보다 큰 홀수이므로 d 는 짝수이다.

그런데, $90 = 2 \times 3^2 \times 5$ 이므로 ①을 만족시키는 90의 약수 중에서 짝수인 것은 2, 6, 10, 18, 30 이다.

또한, 조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{n\{2 \times (-45) + (n-1)d\}}{2} > -100$$

$$n\{-90 + (n-1)d\} > -200 \cdots \textcircled{2}$$

따라서 2, 6, 10, 18, 30 중에서 모든 자연수 n 에 대하여 ②을 만족시키는 경우는 18, 30 이므로 구하는 모든 자연수 d 의 값의 합은

$$18 + 30 = 48$$

정답 ②

14. 출제의도 : 다항함수의 미분과 정적분을 활용하여 주어진 명제의 참과 거짓을 판정할 수 있는가?

정답풀이 :

삼차함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0) = f'(2) = 0$ 이므로

$$f'(x) = 3x(x-2) = 3x^2 - 6x$$

이다.

따라서

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= x^3 - 3x^2 + C \text{ (C는 적분상수)}$$

따라서

$$f(x) - f(0) = x^3 - 3x^2$$

이고

$$f(x+p) - f(p)$$

$$= (x+p)^3 - 3(x+p)^2 + C - (p^3 - 3p^2 + C)$$

$$= x^3 + (3p-3)x^2 + (3p^2-6p)x$$

이므로

$$g(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & (x \leq 0) \\ x^3 + (3p-3)x^2 + (3p^2-6p)x & (x > 0) \end{cases}$$

이다.

⊃. $p=1$ 이면

$$g(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & (x \leq 0) \\ x^3 - 3x & (x > 0) \end{cases}$$

이므로

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & (x < 0) \\ 3x^2 - 3 & (x > 0) \end{cases}$$

따라서 $g'(1) = 3 - 3 = 0$ (참)

⊂.

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = g(0) = 0 \text{ 이므로}$$

함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (3x^2 - 6x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g'(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \{3x^2 + 2(3p-3)x + (3p^2-6p)\}$$

$$= 3p^2 - 6p$$

이므로 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$$3p^2 - 6p = 0$$

이어야 한다.

따라서 양수 p 의 값은 $p=2$ 뿐이므로 양수 p 의 개수는 1이다. (참)

⊄.

$$\int_{-1}^0 g(x) dx = \int_{-1}^0 (x^3 - 3x^2) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 \right]_{-1}^0 = 0 - \left(\frac{1}{4} + 1 \right) = -\frac{5}{4}$$

이고,

$$\int_0^1 g(x) dx$$

$$= \int_0^1 \{x^3 + (3p-3)x^2 + (3p^2-6p)x\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + (p-1)x^3 + \frac{3p^2-6p}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} + (p-1) + \frac{3p^2-6p}{2}$$

$$= \frac{3}{2}p^2 - 2p - \frac{3}{4}$$

이므로

$$\int_{-1}^1 g(x) dx$$

$$= \int_{-1}^0 g(x) dx + \int_0^1 g(x) dx$$

$$= \left(-\frac{5}{4} \right) + \frac{3}{2}p^2 - 2p - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{3}{2}p^2 - 2p - 2$$

$$= \frac{1}{2}(3p+2)(p-2)$$

따라서 $p \geq 2$ 일 때 $\int_{-1}^1 g(x) dx \geq 0$ 이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

[다른 풀이]

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고

$$f'(0) = f'(2) = 0$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이고 $x=2$ 에서 극소이다.

이때, 곡선 $y=f(x)-f(0)$ 은 곡선

$y=f(x)$ 를 y 축의 방향으로 $-f(0)$ 만큼

평행이동한 것이고, 곡선

$y=f(x+p)-f(p)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 를

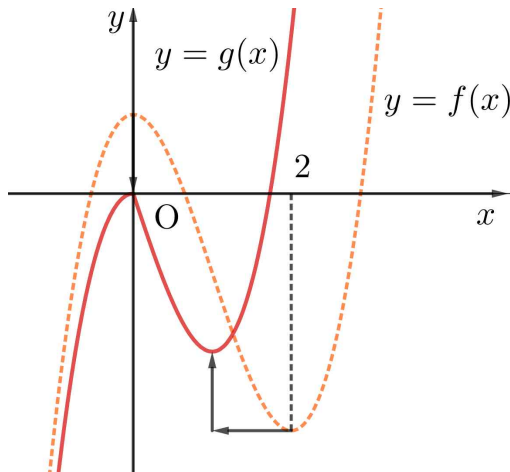
x 축의 방향으로 $-p$ 만큼, y 축의

방향으로 $-f(p)$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 두 곡선 $y=f(x)-f(0)$,

$y=f(x+p)-f(p)$ 는 모두 원점을 지나고

함수 $g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $p=1$ 일 때, 곡선 $y=f(x+1)-f(1)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 $-f(1)$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $g'(1)=0$ 이다. (참)

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = g(0) = 0$ 이므로

함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (3x^2 - 6x) = 0$$

이므로 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g'(x) = 0$$

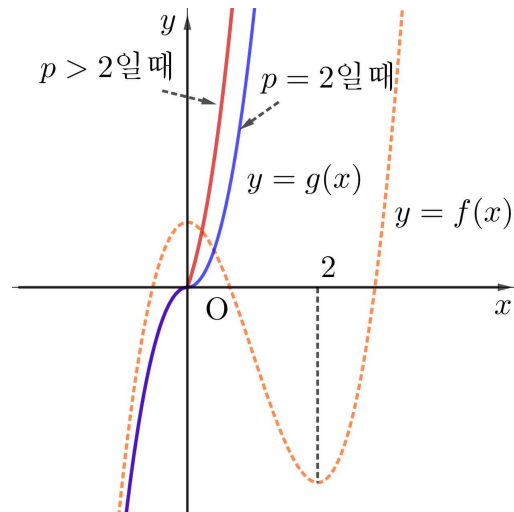
이어야 한다.

그런데 $f'(x)=0$ 인 양수 x 의 값은

2뿐이므로 양수 p 의 값은 2뿐이다.

따라서 양수 p 의 개수는 1이다. (참)

ㄷ. $p \geq 2$ 일 때 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$p=2$ 일 때,

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = 0$$

$p > 2$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x+p) - f(p) \geq f(x+2) - f(2)$$

이므로

$$\int_{-1}^1 g(x) dx \geq 0$$

따라서 $p \geq 2$ 일 때 $\int_{-1}^1 g(x) dx \geq 0$ (참)

15. 출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 첫째항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

먼저 a_5 의 값을 구해 보자.

$$-1 \leq a_5 < -\frac{1}{2} \text{ 이면 } a_6 = -2a_5 - 2 \text{ 이므로}$$

$$a_5 + a_6 = 0 \text{ 에서 } -a_5 - 2 = 0$$

즉, $a_5 = -2$ 이고 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

$$-\frac{1}{2} \leq a_5 \leq \frac{1}{2} \text{ 이면 } a_6 = 2a_5 \text{ 이므로}$$

$$a_5 + a_6 = 0 \text{에서 } 3a_5 = 0$$

$$\text{즉, } a_5 = 0$$

$$\frac{1}{2} < a_5 \leq 1 \text{이면 } a_6 = -2a_5 + 2 \text{ 이므로}$$

$$a_5 + a_6 = 0 \text{에서 } -a_5 + 2 = 0$$

즉, $a_5 = 2$ 이고 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_5 = 0$ 이고 이때 $a_4 = -1$ 또는

$$a_4 = 0 \text{ 또는 } a_4 = 1 \text{이다.}$$

한편 $0 \leq a_{n+1} \leq 1$ 일 때

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n+1} \text{ 또는 } a_n = 1 - \frac{1}{2}a_{n+1}$$

(i) $a_4 = -1$ 인 경우

$a_3 < 0$, $a_2 < 0$, $a_1 < 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_4 = 0$ 인 경우

㉠ $a_3 = -1$ 인 경우

$a_2 < 0$, $a_1 < 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

㉡ $a_3 = 0$ 인 경우

$$a_2 = 0 \text{ 또는 } a_2 = 1 \text{이고,}$$

$a_2 = 0$ 일 때 $a_1 = 1$ 이면 조건을 만족시키고, $a_2 = 1$ 일 때 $a_1 = \frac{1}{2}$ 이고 이 경우도 조건을 만족시킨다.

㉢ $a_3 = 1$ 인 경우

$$a_2 = \frac{1}{2} \text{이고 이때 } a_1 = \frac{1}{4} \text{ 또는}$$

$a_1 = \frac{3}{4}$ 이며, 이것은 조건을 만족시킨다.

(iii) $a_4 = 1$ 인 경우

$$a_3 = \frac{1}{2} \text{이고 이때 } a_2 = \frac{1}{4} \text{ 또는}$$

$$a_2 = \frac{3}{4}$$

㉣ $a_2 = \frac{1}{4}$ 인 경우

$a_1 = \frac{1}{8}$ 또는 $a_1 = \frac{7}{8}$ 이고 이것은 조건을 만족시킨다.

㉤ $a_2 = \frac{3}{4}$ 인 경우

$a_1 = \frac{3}{8}$ 또는 $a_1 = \frac{5}{8}$ 이고 이것은 조건을 만족시킨다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 a_1 의 값의 합은

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{7}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{9}{2}$$

정답 ①

16. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \log_2 100 - 2\log_2 5 \\ &= \log_2 100 - \log_2 25 \\ &= \log_2 \frac{100}{25} \\ &= \log_2 4 \\ &= \log_2 2^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

정답 2

17. 출제의도 : 함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (8x^3 - 12x^2 + 7) dx \end{aligned}$$

$= 2x^4 - 4x^3 + 7x + C$ (C 는 적분상수)
 이때 $f(0) = 3$ 이므로
 $C = 3$
 따라서
 $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 7x + 3$
 이므로
 $f(1) = 2 - 4 + 7 + 3 = 8$

정답 8

18. 출제의도 : 합의 기호의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k) &= 45 \text{에서} \\
 \sum_{k=1}^{10} a_k + 2 \sum_{k=1}^{10} b_k &= 45 \quad \dots\dots \textcircled{7} \\
 \sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k) &= 3 \text{에서} \\
 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} b_k &= 3 \quad \dots\dots \textcircled{8} \\
 \textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서} \\
 3 \sum_{k=1}^{10} b_k &= 42 \\
 \text{즉, } \sum_{k=1}^{10} b_k &= 14 \\
 \text{따라서} \\
 \sum_{k=1}^{10} \left(b_k - \frac{1}{2} \right) &= \sum_{k=1}^{10} b_k - 10 \times \frac{1}{2} \\
 &= 14 - 5 = 9
 \end{aligned}$$

정답 9

19. 출제의도 : 평균변화율과 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ 에서 x 의 값이
 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{64 - 96 + 20}{4} = -3$$

또한, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 5$ 이므로

$$3a^2 - 12a + 5 = -3, \quad 3a^2 - 12a + 8 = 0 \dots \textcircled{9}$$

$\textcircled{9}$ 을 만족시키는 모든 실수 a 는
 $0 < a < 4$ 를 만족시키므로 모든 실수 a 의
 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관
 계에 의하여 $\frac{8}{3}$ 이다.

따라서 $p = 3, q = 8$ 이므로

$$p + q = 11$$

정답 11

20. 출제의도 : 도함수를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = f(x) + |f(x) + x| - 6x$$

라 하면

$$g(x) = \begin{cases} -7x & (f(x) < -x) \\ 2f(x) - 5x & (f(x) \geq -x) \end{cases}$$

이고, 주어진 방정식은

$$g(x) = k \text{와 같다.}$$

$$f(x) = -x \text{에서}$$

$$\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 10x = -x,$$

$$\frac{x}{2}(x^2 - 9x + 22) = 0$$

이때 모든 실수 x 에 대하여

$$x^2 - 9x + 22 = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$$

이므로 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = -x$ 는

오직 원점 (0,0)에서만 만난다.

따라서 함수 $h(x)$ 를

$$\begin{aligned} h(x) &= 2f(x) - 5x \\ &= x^3 - 9x^2 + 15x \end{aligned}$$

라 하면

$$g(x) = \begin{cases} -7x & (x < 0) \\ h(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다.

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3x^2 - 18x + 15 \\ &= 3(x-1)(x-5) \end{aligned}$$

이므로 $h'(x) = 0$ 에서

$$x=1 \text{ 또는 } x=5$$

따라서 함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값

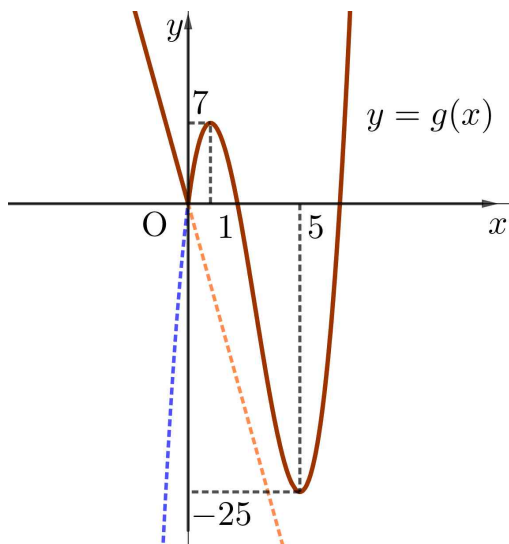
$$h(1) = 1 - 9 + 15 = 7$$

을 갖고, $x=5$ 에서 극솟값

$$h(5) = 125 - 225 + 75 = -25$$

를 갖는다.

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되기 위해서는 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수가 4이어야 하므로 실수 k 의 값의 범위는

$$0 < k < 7$$

이다.

따라서 모든 정수 k 의 값의 합은

$$\begin{aligned} &1 + 2 + 3 + \dots + 6 \\ &= \frac{6}{2}(1+6) = 21 \end{aligned}$$

정답 21

21. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 그래프의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=a^{x-1}$ 은 곡선 $y=a^x$ 을 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=\log_a(x-1)$ 은 곡선 $y=\log_a x$ 를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$ 은 직선 $y=x-1$ 에 대하여 대칭이다.

즉, 두 직선 $y=-x+4$, $y=x-1$ 의 교점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $M\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 이고, 점 M은 선분 AB의 중

점이므로 $\overline{AM} = \sqrt{2}$ 이다.

점 A의 좌표를 $(k, -k+4)$ 라 하면

$$\left(k - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(-k + \frac{5}{2}\right)^2 = 2$$

에서

$$k = \frac{3}{2}$$

즉, $A\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 이므로

$$\frac{5}{2} = a^{\frac{3}{2}-1}$$

$$a^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$$

$$a = \frac{25}{4}$$

이때 점 C의 좌표는 $(0, \frac{1}{a})$, 즉 $(0, \frac{4}{25})$

이고, 점 C에서 직선 $y=-x+4$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 CH의 길이는 점 C와 직선 $y=-x+4$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{CH} = \frac{\left|0 + \frac{4}{25} - 4\right|}{\sqrt{2}} = \frac{48\sqrt{2}}{25}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CH} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{48\sqrt{2}}{25} \\ &= \frac{96}{25} \end{aligned}$$

이므로

$$50 \times S = 50 \times \frac{96}{25} = 192$$

정답 192

22. 출제의도 : 함수의 연속성과 미분가능성 및 삼차함수의 그래프를 이해하고 활용하여 함수값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$i(x) = |f(x)|$ 로 놓으면 함수 $f(x)$ 는 다항함수이므로 모든 x 의 값에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{i(x+h) - i(x)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{i(x+h) - i(x)}{h}$$

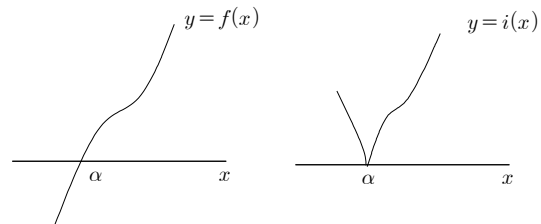
의 값이 항상 존재한다.

따라서,

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|f(x+h)| - |f(x-h)|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|f(x+h)| - |f(x)| - |f(x-h)| + |f(x)|}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{i(x+h) - i(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{i(x-h) - i(x)}{-h}$$

(i) 함수 $f(x)$ 의 극값이 존재하지 않고 $f(\alpha) = 0, f'(\alpha) \neq 0$ 인 경우



$$\begin{aligned} g(x) &= f(x-3) \times \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|f(x+h)| - |f(x-h)|}{h} \\ &= f(x-3) \times \left\{ \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{i(x+h) - i(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{i(x-h) - i(x)}{-h} \right\} \\ &= \begin{cases} f(x-3) \times \{-2f'(x)\} & (x < \alpha) \\ 0 & (x = \alpha) \\ f(x-3) \times \{2f'(x)\} & (x > \alpha) \end{cases} \end{aligned}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

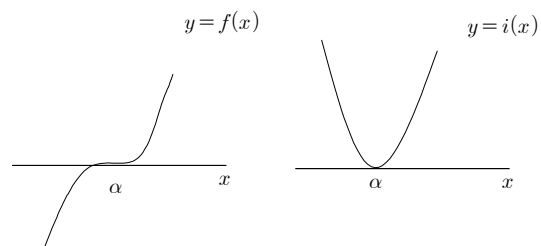
$$\lim_{x \rightarrow \alpha-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha+} g(x) = g(\alpha)$$

이어야 하므로

$$f(\alpha-3) \times \{-2f'(\alpha)\} = f(\alpha-3) \times \{2f'(\alpha)\} = 0$$

그런데 $f'(\alpha) \neq 0, f(\alpha-3) \neq 0$ 이므로 모순이다.

(ii) 함수 $f(x)$ 의 극값이 존재하지 않고 $f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0$ 인 경우



$$\begin{aligned} g(x) &= f(x-3) \times \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|f(x+h)| - |f(x-h)|}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(x-3) \times \\
&\left\{ \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{i(x+h) - i(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{i(x-h) - i(x)}{-h} \right\} \\
&= \begin{cases} f(x-3) \times \{-2f'(x)\} & (x < \alpha) \\ 0 & (x = \alpha) \\ f(x-3) \times \{2f'(x)\} & (x > \alpha) \end{cases}
\end{aligned}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$$\lim_{x \rightarrow \alpha-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha+} g(x) = g(\alpha)$$

이어야 하고 $f'(\alpha) = 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
&f(\alpha-3) \times \{-2f'(\alpha)\} \\
&= f(\alpha-3) \times \{2f'(\alpha)\} = 0
\end{aligned}$$

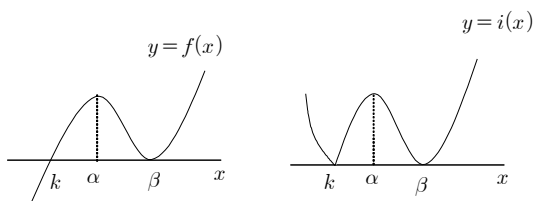
이 성립한다.

그런데, 방정식 $g(x) = 0$ 을 만족시키는 실근은 $x = \alpha$ 또는 $x = \alpha + 3$ 으로 2개 뿐
이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(iii) 함수 $f(x)$ 의 극값이 존재하고
 $f(\alpha) \neq 0$, $f(\beta) \neq 0$, $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ 인
경우

(i)의 경우와 같이 $f(k) = 0$ 을 만족시키는
 $x = k$ 에서 함수 $g(x)$ 는 연속이 아니므로
조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(iv) 함수 $f(x)$ 의 극값이 존재하고
 $f(k) = 0$, $f(\alpha) \neq 0$, $f(\beta) = 0$,
 $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ ($k < \alpha < \beta$) 인 경우



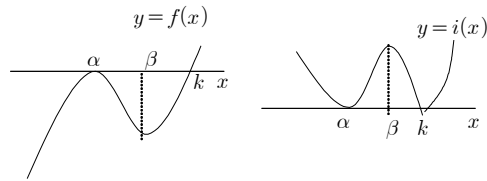
(i)의 경우와 같이 $f(k) = 0$ 을 만족시키는
 $x = k$ 에서 함수 $g(x)$ 는 연속이 아니므로
조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(v) 함수 $f(x)$ 의 극값이 존재하고
 $f(k) = 0$, $f(l) = 0$, $f(m) = 0$,

$f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ ($k < \alpha < l < \beta < m$) 인
경우

(i)의 경우와 같이 $f(k) = 0$ 을 만족시키는
 $x = k$ 에서 함수 $g(x)$ 는 연속이 아니므로
조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(vi) 함수 $f(x)$ 의 극값이 존재하고
 $f(k) = 0$, $f(\alpha) = 0$, $f(\beta) \neq 0$,
 $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ ($\alpha < \beta < k$) 인 경우



$g(x)$

$$\begin{aligned}
&= f(x-3) \times \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|f(x+h)| - |f(x-h)|}{h} \\
&= f(x-3) \times \\
&\left\{ \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{i(x+h) - i(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{i(x-h) - i(x)}{-h} \right\} \\
&= \begin{cases} f(x-3) \times \{-2f'(x)\} & (x < k) \\ 0 & (x = k) \\ f(x-3) \times \{2f'(x)\} & (x > k) \end{cases}
\end{aligned}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$$\lim_{x \rightarrow k-} g(x) = \lim_{x \rightarrow k+} g(x) = g(k)$$

이어야 하므로

$$f(k-3) \times \{-2f'(k)\} = f(k-3) \times \{2f'(k)\} = 0$$

그런데 $f'(k) \neq 0$ 이므로 $f(k-3) = 0$ 이고

$$k-3 = \alpha \cdots \textcircled{7}$$

즉, $k = \alpha + 3$ 이면 조건 (가)를 만족시킨
다.

또한, 방정식 $g(x) = 0$ 의 서로 다른 실근
은

$$x < k \text{ 일 때 } x = \alpha \text{ 또는 } x = \beta$$

$$x = k \text{ 일 때 } x = k$$

$$x > k \text{ 일 때 } x = k+3$$

이고 조건 (나)에서 서로 다른 네 실근의
합이 4이므로

$$\alpha + \beta + k + k + 3 = 7$$

$$\alpha + \beta + 2k = 4 \cdots \textcircled{\text{D}}$$

또한,

$$f(x) = (x - \alpha)^2(x - k)$$

이고 $f'(x) = (x - \alpha)(3x - 2k - \alpha)$ 이므로

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$\beta = \frac{\alpha + 2k}{3}$$

ⓐ에 대입하여 정리하면

$$\alpha + 2k = 3$$

ⓑ, ⓐ에서 $\alpha = -1, k = 2$ 이므로

$$f(x) = (x + 1)^2(x - 2)$$

따라서

$$f(5) = (5 + 1)^2(5 - 2) = 36 \times 3 = 108$$

정답 108

[선택: 확률과 통계]

23. ③ 24. ③ 25. ② 26. ① 27. ⑤
28. ④ 29. 78 30. 218

23. 출제의도 : 이항분포를 따르는 확률 변수의 평균을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$E(X) = 60 \times \frac{1}{4} \\ = 15$$

정답 ③

24. 출제의도 : 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모든 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$4 \times 4 = 16$$

$a \times b > 31$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

$(5, 8), (7, 6), (7, 8)$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{3}{16}$$

정답 ③

25. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^5$ 의 일반항은

$${}_5C_r (x^2)^{5-r} \left(\frac{a}{x}\right)^r$$

$$= {}_5C_r a^r x^{10-3r}$$

(단, $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)

이때, $\frac{1}{x^2}$ 의 계수는

$10 - 3r = -2$ 에서 $r = 4$ 이므로

$${}_5C_4 a^4 = 5a^4$$

또 x 의 계수는

$10 - 3r = 1$ 에서 $r = 3$ 이므로

$${}_5C_3 a^3 = 10a^3$$

따라서 $a > 0$ 이므로

$$5a^4 = 10a^3 \text{에서}$$

$$a = 2$$

정답 ②

26. 출제의도 : 조건을 만족시키는 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주머니에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공

인 사건을 E , 주사위의 눈의 수가 5 이

상인 사건을 F 라 하면

구하는 확률은

$$P(F | E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

$$P(E) = \frac{1}{3} \times \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} + \frac{2}{3} \times \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{15} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{15}$$

$$= \frac{1}{45} + \frac{6}{45}$$

$$= \frac{7}{45}$$

$$P(E \cap F) = \frac{1}{3} \times \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{45}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 P(F | E) &= \frac{P(E \cap F)}{P(E)} \\
 &= \frac{\frac{1}{45}}{\frac{7}{45}} \\
 &= \frac{1}{7}
 \end{aligned}$$

정답 ①

27. 출제의도 : 표본평균의 확률분포를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X 의 표준편차를 a 라 하면
 확률변수 X 는 정규분포 $N(220, a^2)$ 을 따른다.

확률변수 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(220, \left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$

을 따르고, $Z = \frac{\bar{X} - 220}{\frac{a}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면

확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. 이때,

$$P(\bar{X} \leq 215)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{215 - 220}{\frac{a}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= P\left(Z \leq -\frac{5\sqrt{n}}{a}\right)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{5\sqrt{n}}{a}\right)$$

$$= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{5\sqrt{n}}{a}\right)$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{5\sqrt{n}}{a}\right) = 0.1587 \text{에서}$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{5\sqrt{n}}{a}\right) = 0.3413 \text{이므로}$$

$$\frac{5\sqrt{n}}{a} = 1$$

$$\frac{a}{\sqrt{n}} = 5 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편, 조건 (나)에서 확률변수 Y 의 표준
 편차는 $\frac{3a}{2}$ 이므로

확률변수 Y 는 정규분포 $N\left(240, \left(\frac{3a}{2}\right)^2\right)$ 을 따른다.

확률변수 \bar{Y} 는 정규분포

$$N\left(240, \left(\frac{\frac{3a}{2}}{\sqrt{n}}\right)^2\right) \text{을 따르고}$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } \frac{\frac{3a}{2}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \times \frac{a}{\sqrt{n}} = \frac{5}{2} \text{이므로,}$$

$$Z = \frac{\bar{Y} - 240}{\frac{5}{2}} \text{으로 놓으면 확률변수 } Z \text{는}$$

표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서

$$P(\bar{Y} \geq 235)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{235 - 240}{\frac{5}{2}}\right)$$

$$= P(Z \geq -2)$$

$$= P(-2 \leq Z \leq 0) + 0.5$$

$$= P(0 \leq Z \leq 2) + 0.5$$

$$= 0.4772 + 0.5$$

$$= 0.9772$$

정답 ⑤

28. 출제의도 : 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)와 조건 (다)에서

$$f(3) \neq 1, f(4) \neq 6$$

조건 (가)에서 $f(3)+f(4)$ 가 5의 배수인 $f(3), f(4)$ 의 순서쌍 $(f(3), f(4))$ 는 $(4, 1), (2, 3), (3, 2), (6, 4), (5, 5)$

(i) $f(3)=4, f(4)=1$ 인 경우

$f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $3^2 = 9$

$f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $5^2 = 25$

즉 함수 f 의 개수는

$$9 \times 25 = 225$$

(ii) $f(3)=2, f(4)=3$ 인 경우

$f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $1^2 = 1$

$f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $3^2 = 9$

즉 함수 f 의 개수는

$$1 \times 9 = 9$$

(iii) $f(3)=3, f(4)=2$ 인 경우

$f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $2^2 = 4$

$f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $4^2 = 16$

즉 함수 f 의 개수는

$$4 \times 16 = 64$$

(iv) $f(3)=6, f(4)=4$ 인 경우

$f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $5^2 = 25$

$f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $2^2 = 4$

즉 함수 f 의 개수는

$$25 \times 4 = 100$$

(v) $f(3)=5, f(4)=5$ 인 경우

$f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $4^2 = 16$

$f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $1^2 = 1$

즉 함수 f 의 개수는

$$16 \times 1 = 16$$

(i)~(v)에서

구하는 함수 f 의 개수는

$$225 + 9 + 64 + 100 + 16 = 414$$

정답 ④

29. 출제의도 : 확률분포가 표로 주어진 확률변수의 분산을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X 가 갖는 값이 $X=5$ 에 대하여 확률분포가 대칭이므로

$$E(X)=5$$

$$\text{또 } V(X)=\frac{31}{5} \text{ 이므로}$$

$$E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{31}{5} \text{ 에서}$$

$$E(X^2)=25+\frac{31}{5}$$

이때,

$$E(X^2)$$

$$=1^2 \times a + 3^2 \times b + 5^2 \times c + 7^2 \times b + 9^2 \times a \\ =82a + 58b + 25c$$

이므로

$$82a + 58b + 25c = 25 + \frac{31}{5} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편, 확률변수 Y 가 갖는 값이 $Y=5$ 에 대하여 확률분포가 대칭이므로

$E(Y)=5$ 이고,

$E(Y^2)$

$$= 1^2 \times \left(a + \frac{1}{20}\right) + 3^2 \times b + 5^2 \times \left(c - \frac{1}{10}\right) + 7^2 \times b + 9^2 \times \left(a + \frac{1}{20}\right)$$

$$= 82a + 58b + 25c + \frac{1}{20} - \frac{5}{2} + \frac{81}{20}$$

$$= 82a + 58b + 25c + \frac{8}{5}$$

㉠에서

$$E(Y^2) = 25 + \frac{31}{5} + \frac{8}{5}$$

$$= 25 + \frac{39}{5}$$

따라서

$$V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2$$

$$= 25 + \frac{39}{5} - 5^2$$

$$= \frac{39}{5}$$

이므로

$$10 \times V(Y) = 10 \times \frac{39}{5} = 78$$

정답 78

30. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

사인펜이 14개이므로

조건 (가)와 (다)에 의해

네 명의 학생 A, B, C, D 중 2명은 짝수 개의 사인펜을 받고 나머지 2명은 홀수 개의 사인펜을 받거나 네 명의 학생 모두 짝수 개의 사인펜을 받는다.

(i) 네 명의 학생 중 2명은 짝수 개의 사인펜을 받고 나머지 2명은 홀수 개의 사인펜을 받는 경우

4명의 학생 중 짝수 개의 사인펜을 받는 2명의 학생을 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2$$

두 명의 학생 A, B는 짝수 개의 사인펜을 받고 두 명의 학생 C, D는 홀수 개의 사인펜을 받는다고 하면 네 명의 학생 A, B, C, D가 받는 사인펜의 개수는 각각

$2a+2, 2b+2, 2c+1, 2d+1$ (a, b, c, d 는 음이 아닌 정수)이다.

$$(2a+2) + (2b+2) + (2c+1) + (2d+1) = 14$$

에서

$$a+b+c+d=4$$

방정식 $a+b+c+d=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 순서쌍

(a, b, c, d) 의 개수는

$${}_4H_4$$

조건 (나)에 의해 $a \neq 4, b \neq 4$ 이므로

주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times ({}_4H_4 - 2) = {}_4C_2 \times ({}_7C_4 - 2) = 198$$

(ii) 네 명의 학생 모두 짝수 개의 사인펜을 받는 경우

네 명의 학생 A, B, C, D가 받는 사인펜의 개수는 각각

$2a+2, 2b+2, 2c+2, 2d+2$ (a, b, c, d 는 음이 아닌 정수)이다.

$$(2a+2) + (2b+2) + (2c+2) + (2d+2) = 14$$

에서

$$a+b+c+d=3$$

방정식 $a+b+c+d=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 순서쌍

(a, b, c, d) 의 개수는

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

(i), (ii)에서
구하는 경우의 수는
 $198 + 20 = 218$

정답 218

[다른 풀이]

A, B, C, D가 받는 사인펜의 개수를 각각 a, b, c, d 라 하면

$$a + b + c + d = 14$$

조건 (가)를 만족시키는 순서쌍

(a, b, c, d) 의 개수는

$$a = a' + 1, b = b' + 1, c = c' + 1,$$

$$d = d' + 1 \text{로 놓으면}$$

방정식 $a' + b' + c' + d' = 10$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d' 의 순서쌍 (a', b', c', d') 의 개수와 같으므로

$${}_4H_{10} = {}_{13}C_{10}$$

$$= {}_{13}C_3$$

$$= \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2 \times 1}$$

$$= 286$$

한편, 네 명이 모두 홀수 개의 사인펜을 받는 경우의 수는

$$a = 2a'' + 1, b = 2b'' + 1, c = 2c'' + 1,$$

$$d = 2d'' + 1 \text{로 놓으면}$$

방정식 $a'' + b'' + c'' + d'' = 5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a'', b'', c'', d'' 의 순서쌍 (a'', b'', c'', d'') 의 개수와 같으므로

$${}_4H_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

즉 조건 (가)와 조건 (다)를 만족시키는 경우의 수는

$$286 - 56 = 230$$

한편, 조건 (가)와 조건 (다)를 만족시키고, 사인펜을 10개 이상 받은 학생이 있는 경우 각 학생이 받은 사인펜의 개수는 10, 2, 1, 1뿐이고 이 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

따라서 모든 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$230 - 12 = 218$$

정답 218