2025학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

최근 수정일 : 2024.06.10.(월)

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ④	02. ⑤	03. ③	04. ③	05. ⑤
06. ①	07. ④	08. ①	09. ③	10. ⑤
11. ⑤	12. ③	13. ③	14. ④	15. ②
16. 7	17. 23	18. 2	19. 16	
20. 24	21. 15	22. 231		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\left(\frac{5}{\sqrt[3]{25}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{5}{5^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=5^{\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$$

정답 ④

2. **출제의도** : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^2+x+2$에서 $f'(x)=2x+1$

따라서,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$$

$$=2\times 2+1=5$$

정답 ⑤

3. **출제의도** : 합의 기호 $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k+1)=\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}1$$

$$=\sum_{k=1}^{5}a_k+1\times 5$$

$$=9$$

에서

$$\sum_{k=1}^{5}a_k=9-5=4$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{6}a_k=\sum_{k=1}^{5}a_k+a_6$$

$$=4+4=8$$

정답 ③

4. **출제의도** : 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to 0+}f(x)=2,\ \lim_{x\to 1-}f(x)=1$

이므로

$\lim_{x\to 0+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)=2+1=3$

정답 ③

5. **출제의도** : 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=(x^2-1)(x^2+2x+2)$에서

$f'(x)=2x(x^2+2x+2)+(x^2-1)(2x+2)$

이므로

$f'(1)=2\times 5=10$

정답 ⑤

6. 출제의도 : 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{5}$에서

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left\{-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}$$
$$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=-\cos\theta$$

이므로

$-\cos\theta=\frac{3}{5}$

즉 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$

한편, $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서

$\sin\theta<0$

따라서

$$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}$$
$$=-\sqrt{\frac{16}{25}}$$
$$=-\frac{4}{5}$$

정답 ①

7. 출제의도 : 다항함수의 미분을 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-3x^2-9x+k$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$, $x=3$

$f(-1)=k+5$, $f(3)=k-27$

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=-1$에서 극댓값 $k+5$를 갖고, $x=3$에서 극솟값 $k-27$을 갖는다.

이때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 극댓값 또는 극솟값이 0이어야 하므로

$k+5=0$ 또는 $k-27=0$

즉 $k=-5$ 또는 $k=27$

따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은

$-5+27=22$

정답 ④

8. 출제의도 : 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_6=16$

이므로

$a_8=a_6\times r^2=16r^2$, $a_7=a_6\times r=16r$

$2a_8-3a_7=32$이므로

$2\times16r^2-3\times16r=32$

$2r^2-3r-2=0$

$(2r+1)(r-2)=0$

$a_1a_2<0$에서 $r<0$이므로

$r=-\frac{1}{2}$

따라서

$$a_9+a_{11}=a_6\times r^3+a_6\times r^5$$
$$=16\times\left(-\frac{1}{8}\right)+16\times\left(-\frac{1}{32}\right)$$
$$=-2+\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$=-\frac{5}{2}$

정답 ①

9. **출제의도** : 함수가 연속일 조건을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$는 $x=0$에서만 불연속이므로 함수 $(f(x)+a)^2$이 $x=0$에서 연속이 되도록 a의 값을 정한다.

$\lim_{x \to 0-}(f(x)+a)^2=(f(0)+a)^2$

$\lim_{x \to 0-}(x-\frac{1}{2}+a)^2=(3+a)^2$

$\left(-\frac{1}{2}+a\right)^2=(3+a)^2$

$a^2-a+\frac{1}{4}=a^2+6a+9$

$7a=-\frac{35}{4}$

따라서 $a=-\frac{5}{4}$

정답 ③

10. **출제의도** : 사인법칙, 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라 하고, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π이므로

$\pi R^2=9\pi$에서 $R=3$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

조건 (가)에서 $3\sin A=2\sin B$이므로

$3\times\frac{a}{2R}=2\times\frac{b}{2R}$

$b=\frac{3}{2}a$ ······㉠

조건 (나)에서 $\cos B=\cos C$이므로

$b=c$ ······㉡

㉠, ㉡에서 양수 k에 대하여 $a=2k$라 하면 $b=c=3k$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\frac{(3k)^2+(3k)^2-(2k)^2}{2\times3k\times3k}=\frac{7}{9}$

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{4}{9}\sqrt{2}$

$\frac{a}{\sin A}=2R=2\times3=6$에서

$a=6\sin A=6\times\frac{4}{9}\sqrt{2}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$

$b=c=\frac{3}{2}a=\frac{3}{2}\times\frac{8}{3}\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

따라서 구하는 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times4\sqrt{2}\times\frac{4}{9}\sqrt{2}$

$=\frac{64}{9}\sqrt{2}$

정답 ⑤

11. **출제의도** : 미분계수의 정의를 이용하여 삼차함수의 그래프의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이

고 $f(0)=0$이므로

$f(x)=x^3+px^2+qx$ (p, q는 상수)

로 놓을 수 있다.

이때

$f'(x)=3x^2+2px+q$

이다.

삼차함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{x-a}=3$에서

$f(a)=1$이고 $f'(a)=3$이다.

한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

이므로

$y=3(x-a)+1$, 즉 $y=3x-3a+1$이다.

이 접선의 y절편이 4이므로

$-3a+1=4$

에서

$a=-1$

이상에서 $f(-1)=1$, $f'(-1)=3$이므로

$f(-1)=-1+p-q=1$에서

$p-q=2$ ⋯ ㉠

이고,

$f'(-1)=3-2p+q=3$에서

$2p-q=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$p=-2$, $q=-4$

이므로

$f(x)=x^3-2x^2-4x$

이다.

따라서 $f(1)=1-2-4=-5$

정답 ⑤

12. **출제의도** : 지수함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 사각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A, B의 x좌표를 a라 하면

$A(a, 1-2^{-a})$, $B(a, 2^a)$

이므로

$\overline{AB}=2^a-(1-2^{-a})=2^a+2^{-a}-1$

두 점 C, D의 x좌표를 c라 하면

$C(c, 2^c)$, $D(c, 1-2^{-c})$

이므로

$\overline{CD}=2^c-(1-2^{-c})=2^c+2^{-c}-1$

이때 두 점 A, C의 y좌표가 같으므로

$2^c=1-2^{-a}$

즉,

$$\overline{CD}=(1-2^{-a})+\frac{1}{1-2^{-a}}-1$$
$$=-2^{-a}+\frac{2^a}{2^a-1}$$

주어진 조건에 의하여 $\overline{AB}=2\overline{CD}$이므로

$$2^a+2^{-a}-1=-2^{-a+1}+\frac{2^{a+1}}{2^a-1}$$

여기서 $2^a=t$로 놓으면

$$t+\frac{1}{t}-1=-\frac{2}{t}+\frac{2t}{t-1}$$

양변에 $t(t-1)$을 곱하여 정리하면

$t^3-4t^2+4t-3=0$

$(t-3)(t^2-t+1)=0$

t는 실수이므로 $t=3$

즉, $2^a=3$이므로 $a=\log_2 3$

이때

$$2^c=1-2^{-a}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

이므로

$$c=\log_2\frac{2}{3}=1-\log_2 3$$

따라서 조건을 만족시키는 사각형

ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(a-c)\times(2^{a}-1+2^{-c})$$

$$=\frac{1}{2}\times(2\log_2 3-1)\times\left(3-1+\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{7}{4}(2\log_2 3-1)$$

$$=\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$$

정답 ③

13. **출제의도** : 정적분을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$, $g(x)=mx+2$라 하고

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표를 α라 하면

$$A=\int_0^{\alpha}\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$B=\int_{\alpha}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx$$

따라서

$B-A$

$$=\int_{\alpha}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx-\int_0^{\alpha}\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_0^{\alpha}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_0^{2}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_0^{2}\left\{\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x\right)-(mx+2)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^2-\frac{m}{2}x^2-2x\right]_0^2$$

$$=1+1-2m-4$$

$$=-2m-2=\frac{2}{3}$$

따라서 $m=-\frac{4}{3}$

정답 ③

14. **출제의도** : 로그의 성질 및 로그부등식을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}$ 에서

진수 조건에 의하여

$\sqrt{-n^2+10n+75}>0$,

즉 $-n^2+10n+75>0$에서

$n^2-10n-75<0$

$(n+5)(n-15)<0$

$-5<n<15$

이때, n이 자연수이므로

$1\le n<15$ …… ㉠

또 $\log_4(75-kn)$에서

진수 조건에 의하여

$75-kn>0$,

즉 $n<\frac{75}{k}$ …… ㉡

한편,

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)$

의 값이 양수이므로

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)>0$

에서

$\log_4(-n^2+10n+75)-\log_4(75-kn)>0$

$\log_4(-n^2+10n+75)>\log_4(75-kn)$

이때 밑 4가 1보다 크므로

$-n^2+10n+75 > 75-kn$

$n(n-10-k)<0$

k가 자연수이므로

$0<n<10+k$ ······ ㉢

주어진 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 12이므로

㉠, ㉢에서

$10+k>12$

이어야 한다.

즉, $k>2$이어야 한다.

(ⅰ) $k=3$일 때,

㉠, ㉡, ㉢에서

$1 \le n<13$

따라서 자연수 n의 개수가 12이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $k=4$일 때,

㉠, ㉡, ㉢에서

$1 \le n<14$

따라서 자연수 n의 개수가 13이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅲ) $k=5$일 때,

㉠, ㉡, ㉢에서

$1 \le n<15$

따라서 자연수 n의 개수가 14이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅳ) $k=6$일 때,

㉠, ㉡, ㉢에서

$1 \le n<\frac{25}{2}$

따라서 자연수 n의 개수가 12이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ⅴ) $k \ge 7$일 때

$\frac{75}{k}<11$이므로

주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅰ) ~ (ⅴ)에서

$k=3$ 또는 $k=6$

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은

$3+6=9$

정답 ④

15. 출제의도 : 정적분의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼차함수 $f(x)$에 대하여

$g(x)=\begin{cases} 2x-k & (x \le k) \\ f(x) & (x>k) \end{cases}$ 이므로

$g'(x)=\begin{cases} 2 & (x<k) \\ f'(x) & (x>k) \end{cases}$

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수)

라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

또한,

$h_1(t)=|t(t-1)|+t(t-1)$

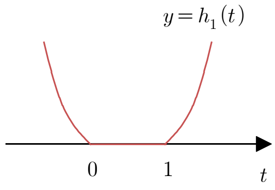
$h_2(t)=|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)$

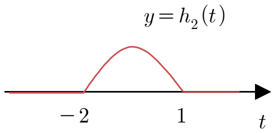
라 할 때,

$h_1(t)=\begin{cases} 2t(t-1) & (t \le 0 \text{ 또는 } t \ge 1) \\ 0 & (0<t<1) \end{cases}$

$h_2(t)=\begin{cases} 0 & (t \le -2 \text{ 또는 } t \ge 1) \\ -2(t-1)(t+2) & (-2<t<1) \end{cases}$

이므로 두 함수 $y=h_1(t)$, $y=h_2(t)$의 그래프는 각각 다음과 같다.





한편,

p가 상수일 때, 모든 실수 x에 대하여

$\int_p^x h(t)dt \geq 0$이기 위해서는

구간 $[p, x]$에서는 $h(t) \geq 0$이고

구간 $[x, p]$에서는 $h(t) \leq 0$

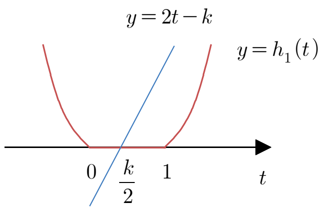
이어야 한다.

(i) 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여

$\int_0^x g(t)h_1(t)dt \geq 0$이므로

그림과 같이 $0 \leq \frac{k}{2} \leq 1$, 즉 $0 \leq k \leq 2$

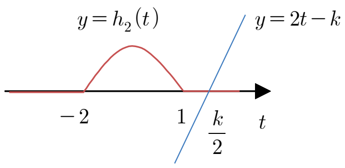
이어야 한다.



(ii) 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여

$\int_3^x g(t)h_2(t)dt \geq 0$이므로

그림과 같이 $\frac{k}{2} \geq 1$, 즉 $k \geq 2$이어야 한다.



(i), (ii)에 의하여 $k=2$

조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=k=2$에서도 미분가능하고 연속이다.

$g'(2) = f'(2) = 2$에서

$12+4a+b=2$, $b=-4a-10$

$g(2)=f(2)=2$에서

$8+4a+2b+c=2$

$c=-4a-2b-6$

$=-4a-2(-4a-10)-6=4a+14$

따라서

$f(x)=x^3+ax^2-(4a+10)x+4a+14$

$\cdots\cdots$㉠

한편,

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 증가하므로 $g'(x) \geq 0$이다.

따라서 $x \geq 2$일 때 $f'(x) \geq 0$이어야 한다.

$f'(x) = 3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2 + b - \frac{a^2}{3}$에서

① $-\frac{a}{3} < 2$, 즉 $a > -6$일 때

$f'(2) = 12+4a+b = 12+4a-4a-10$

$=2>0$이 되어 조건을 만족시킨다.

$a > -6$ $\cdots\cdots$ ㉡

② $-\frac{a}{3} \geq 2$, 즉 $a \leq -6$일 때

$b - \frac{a^2}{3} \geq 0$, 즉 $a^2 - 3b \leq 0$이어야 하므로

$a^2-3b=a^2-3(-4a-10) \leq 0$

$a^2+12a+30 \leq 0$, $(a+6)^2 \leq 6$

$-6-\sqrt{6} \leq a \leq -6+\sqrt{6}$이므로

$-6-\sqrt{6} \leq a \leq -6$ $\cdots\cdots$㉢

㉡, ㉢에서

$a \geq -6-\sqrt{6}$ $\cdots\cdots$㉣

㉠에 $x=3$을 대입하면 ㉣에서

$g(k+1)=g(3)=f(3)$

$=27+9a-12a-30+4a+14$

$=a+11 \geq 5-\sqrt{6}$

따라서 $g(3)$의 최솟값은 $5-\sqrt{6}$이다.

정답 ②

16. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 로그가 포함된 방정식의 해를 구할 수

있는가?

정답풀이 :

로그의 진수의 조건에 의하여

$x+1>0$, $x-3>0$

즉 $x>3$ ……㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(x-3)=-\log_2(x-3)$이므로

$\log_2(x+1)-5=\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$에서

$\log_2(x+1)+\log_2(x-3)=5$

$\log_2(x+1)(x-3)=5$

$(x+1)(x-3)=2^5=32$

$x^2-2x-35=0$

$(x+5)(x-7)=0$

$x=-5$ 또는 $x=7$

이때 ㉠에 의하여

$x=7$

정답 7

17. **출제의도** : 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=6x^2+2$이므로

$f(x)=\int(6x^2+2)dx$

$\quad =2x^3+2x+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=3$이므로

$C=3$

따라서

$f(x)=2x^3+2x+3$

이므로

$f(2)=2\times2^3+2\times2+3$

$\quad =23$

정답 23

18. **출제의도** : 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{9}(ak^2-10k)$

$=a\sum_{k=1}^{9}k^2-10\sum_{k=1}^{9}k$

$=a\times\frac{9\times10\times19}{6}-10\times\frac{9\times10}{2}$

$=285a-450=120$

$285a=570$

따라서 $a=2$

정답 2

19. **출제의도** : 속도와 거리의 관계와 정적분을 이용하여 점 P의 위치를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에서 $v(t)=0$이다.

$0\le t\le3$일 때,

$-t^2+t+2=0$에서 $(t-2)(t+1)=0$

$t>0$이므로 $t=2$

$t>3$일 때,

$k(t-3)-4=0$에서 $kt=3k+4$

$t=3+\frac{4}{k}$

따라서 출발 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각은 $t=3+\frac{4}{k}$

원점을 출발한 점 P의 시각 $t=3+\frac{4}{k}$에

서의 위치가 1이므로

$\int_0^{3+\frac{4}{k}} v(t)dt = 1$에서

$\int_0^3 v(t)dt + \int_3^{3+\frac{4}{k}} v(t)dt$

$= \int_0^3 (-t^2+t+2)dt + \int_3^{3+\frac{4}{k}} (kt-3k-4)dt$

이때

$$\int_0^3 (-t^2+t+2)dt = \left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^3$$

$$= -9+\frac{9}{2}+6 = \frac{3}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\int_3^{3+\frac{4}{k}} (kt-3k-4)dt = \left[\frac{1}{2}kt^2-(3k+4)t\right]_3^{3+\frac{4}{k}}$$

$$= -\frac{8}{k} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\int_0^3 v(t)dt + \int_3^{3+\frac{4}{k}} v(t)dt = \frac{3}{2}+\left(-\frac{8}{k}\right) = 1$$

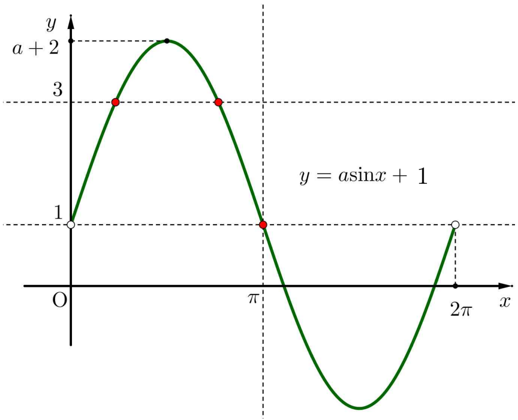
$\frac{8}{k} = \frac{1}{2}$에서 $k=16$

정답 16

20. 출제의도 : 삼각함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 두 자연수의 합의 최댓값과 최솟값의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) $b=1$인 경우



$n(A \cup B \cup C) = 3$을 만족시키려면

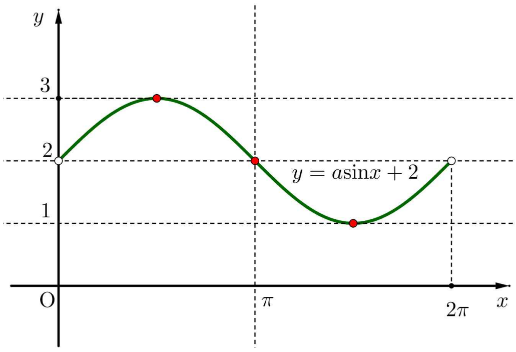
$a+1>3$, 즉 $a>2$

이어야 하므로 5 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

(3,1), (4,1), (5,1)

이다.

(ii) $b=2$인 경우



$n(A \cup B \cup C) = 3$을 만족시키려면

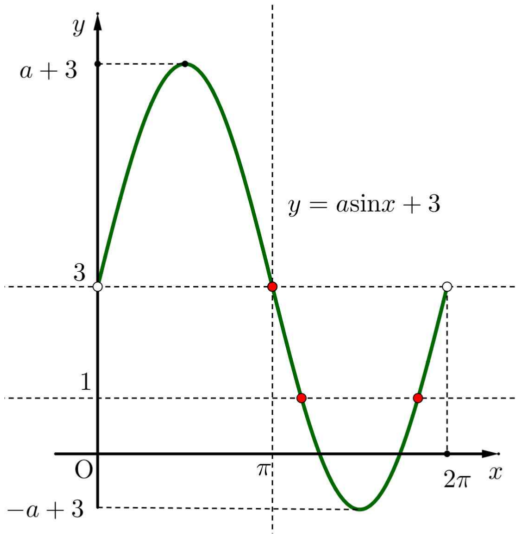
$a=1$

이어야 하므로 5 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

(1, 2)

이다.

(iii) $b=3$인 경우



$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족시키려면

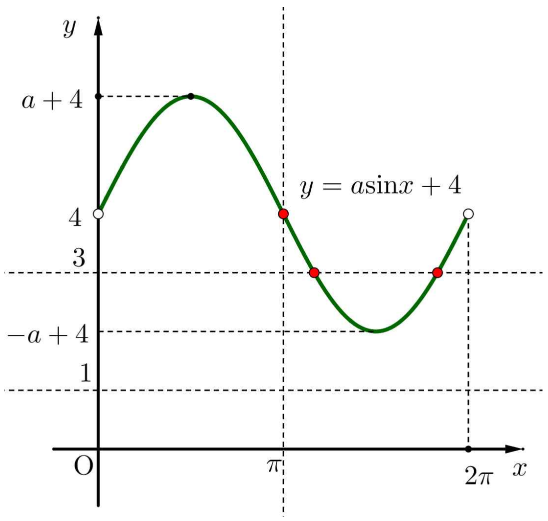
$-a+3<1$, 즉 $a>2$

이어야 하므로 5 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(3,\ 3)$, $(4,\ 3)$, $(5,3)$

이다.

(iv) $b=4$인 경우



$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족시키려면

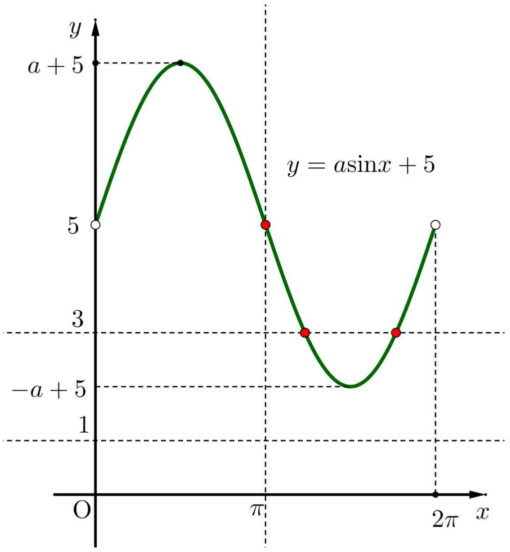
$1<-a+4<3$, 즉 $1<a<3$

이어야 하므로 5 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 4)$

이다.

(v) $b=5$인 경우



$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족시키려면

$1<-a+5<3$, 즉 $2<a<4$

이어야 하므로 5 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(3,\ 5)$

이다.

이상에서 $a+b$의 최댓값과 최솟값은 각각

$M=8$, $m=3$

이므로

$M\times m=24$

정답 24

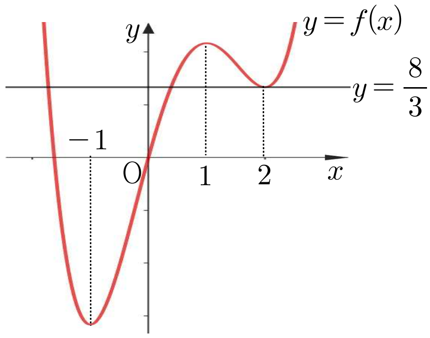
21. **출제의도** : 다항함수의 미분을 활용하여 함수의 그래프에 대한 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

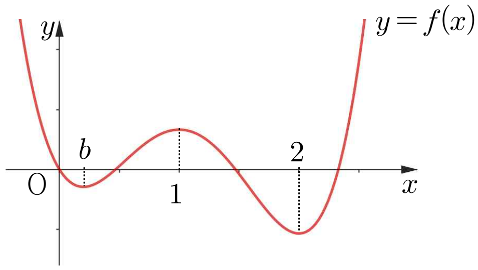
조건 (나)에서 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 3 이상인 실수 k의 값이 존재하므로 삼차방정식 $f'(x)=0$은

서로 다른 세 실근을 갖는다.
삼차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근을 각각 α, β, $\gamma(\alpha<\beta<\gamma)$라 하면 부등식 $f'(x) \le 0$의 해가
$x \le \alpha$ 또는 $\beta \le x \le \gamma$
이므로 조건 (나)에 의하여 $\gamma=2$
$f'(1)=0$, $f'(2)=0$에서 $b \ne 1$, $b<2$인 상수 b에 대하여
$f'(x)=4(x-1)(x-2)(x-b)$
$\quad =4x^3-4(b+3)x^2+4(3b+2)x-8b$
로 놓으면
$f(x)=\int f'(x)dx$
$\quad =x^4-\frac{4}{3}(b+3)x^3+2(3b+2)x^2-8bx+C$
(C는 상수)
$f(0)=0$에서 $C=0$이므로
$f(x)=x^4-\frac{4}{3}(b+3)x^3+2(3b+2)x^2-8bx$
……㉠
이때 조건 (나)를 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(i) $b<1$이고 $f(b)<f(2)$인 경우
조건 (나)에 의하여 $f(2)=\frac{8}{3}$이어야 하므로 ㉠에서
$f(2)=16-\frac{32}{3}(b+3)+8(3b+2)-16b$
$=-\frac{8}{3}b=\frac{8}{3}$
$b=-1$
$f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3-2x^2+8x$에서
$f(-1)=1+\frac{8}{3}-2-8=-\frac{19}{3}<\frac{8}{3}$이므로
조건을 만족시킨다.
따라서
$f(3)=81-72-18+24=15$

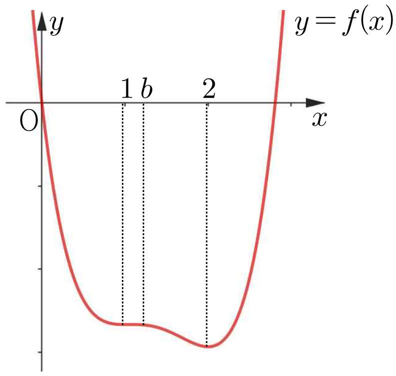


(ii) $b<1$이고 $f(2)<f(b)$인 경우



함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극소이고 $f(0)=0$이므로 $f(b) \le 0$이다.
따라서 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 0 또는 음수이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $1<b<2$인 경우



함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이고 $f(0)=0$이므로 $f(1)<0$이다.
따라서 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 음수이므로 조건 (나)를 만

족시키지 않는다.
(i), (ii), (iii)에서 $f(3)=15$이다.

정답 15

22. 출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 첫째항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
15 이하의 자연수 n에 대하여
$n\neq4$, $n\neq9$이면 $a_{n+1}=a_n+1$이므로
$a_n=a_{n+1}-1$
그러므로 $a_{15}=1$에서 $a_{14}=a_{15}-1=0$,
$a_{13}=a_{14}-1=-1$, $a_{12}=a_{13}-1=-2$
$a_{11}=a_{12}-1=-3$, $a_{10}=a_{11}-1=-4$
i) $a_9>0$일 때
$a_9-\sqrt{9}\times a_{\sqrt{9}}=a_{10}=-4$
그러므로 $a_9=3a_3-4$에서 $a_5=3a_3-8$
i -1) $a_4>0$일 때
$a_5=a_4-\sqrt{4}\times a_{\sqrt{4}}$이므로
$a_4-2a_2=3a_3-8$. 즉, $a_4=3a_3+2a_2-8$
그러므로 $a_4=a_3+1$에서 $a_3=a_4-1$이므로 $a_3=3a_3+2a_2-9$
즉, $a_3+a_2=\frac{9}{2}$
$a_3=a_2+1$이므로 $a_2=\frac{7}{4}$, $a_3=\frac{11}{4}$
$a_9=\frac{33}{4}-4>0$, $a_4=\frac{33}{4}+\frac{14}{4}-8>0$
그러므로 $a_1=-a_2=-\frac{7}{4}$
i -2) $a_4\leq0$일 때
$a_4+1=a_5=3a_3-8$
그러므로 $a_4=3a_3-9$에서
$a_3=a_4-1=3a_3-9-1$
$a_3=3a_3-10$
즉, $a_3=5$
그런데 $a_3=5$이면 $a_4=6>0$이므로 모순이다.
ii) $a_9\leq0$일 때
$a_9=a_{10}-1=-5$에서 $a_5=-9$
ii -1) $a_4>0$일 때
$a_5=a_4-\sqrt{4}\times a_{\sqrt{4}}=a_4-2a_2$
즉, $a_4=a_5+2a_2$이므로 $a_4=2a_2-9$
또, $a_3=a_4-1=2a_2-9-1=2a_2-10$
그런데 $a_3=a_2+1$이므로
$a_2+1=2a_2-10$
$a_2=11$
$a_4=2\times11-9>0$
그러므로 $a_1=-a_2=-11$
ii -2) $a_4\leq0$일 때
$a_5=a_4+1=-9$
그러므로 $a_4=-10$에서
$a_3=-11$, $a_2=-12$
그러므로 $a_1=-a_2=12$
i), ii)에서 모든 a_1의 곱은

$$-\frac{7}{4}\times(-11)\times12=231$$

정답 231

■ [선택: 확률과 통계]
23. ③ 24. ② 25. ④ 26. ③ 27. ①
28. ① 29. 6 30. 108

23. **출제의도** : 같은 것이 포함되어 있는 순열의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
네 개의 숫자 1, 1, 2, 3을 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

정답 ③

24. **출제의도** : 배반사건의 뜻을 알고 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
여사건의 확률에 의하여

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{6}+\mathrm{P}(B)-0$

$=\frac{3}{4}$

따라서

$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{7}{12}$

이므로

$\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)$

$=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$

정답 ②

25. **출제의도** : 이항정리를 이용하여 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
다항식 $(x^2-2)^5$의 전개식에서 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r\times(x^2)^r\times(-2)^{5-r}$

$={}_5\mathrm{C}_r(-2)^{5-r}\times x^{2r}(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

x^6항은 $r=3$일 때이므로 그 계수는

${}_5\mathrm{C}_3(-2)^{5-3}=10\times 4=40$

정답 ④

26. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 문자열의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4$

문자 a가 한 개만 포함되는 사건을 A, 문자 b가 한 개만 포함되는 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)$

이다.

문자 a가 한 개만 포함되는 경우의 수는 문자 a가 나열될 한 곳을 택한 후 나머지 세 곳에는 b, c, d 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\Pi_3 = 4\times 3^3$

그러므로 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{4\times 3^3}{4^4}=\dfrac{27}{64}$

문자 b가 한 개만 포함되는 경우의 수는 문자 a가 한 개만 포함되는 경우의 수와 같으므로

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{4\times 3^3}{4^4}=\dfrac{27}{64}$

한편 사건 $A\cap B$는 문자 a와 문자 b가 각각 한 개만 포함되는 사건이다.
문자 a와 문자 b는 각각 한 개만 포함되는 경우의 수는 문자 a와 문자 b가 나열될 두 곳을 택하여 두 문자 a, b를 나열하고, 나머지 두 곳에는 c, d 중에서 중복을 허락하여 2개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{P}_2 \times {}_2\Pi_2 = (4\times 3)\times 2^2 = 3\times 4^2$

그러므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{3\times 4^2}{4^4}=\dfrac{3}{16}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{27}{64}+\frac{27}{64}-\frac{3}{16}\\&=\frac{21}{32}\end{aligned}$$

정답 ③

27. 출제의도 : 원순열을 이해하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열하는 원순열의 수는
$(6-1)!=120$
이때 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 합이 11이 되려면 5와 6이 적힌 의자가 서로 이웃해야 한다.
따라서 5와 6이 적힌 의자를 묶어서 하나의 의자로 생각하여 모두 5개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열하는 원순열의 수는
$(5-1)!=24$
이때 5와 6이 적힌 의자의 위치를 서로 바꾸는 경우의 수는 2이므로 5와 6이 적힌 의자가 서로 이웃하도록 배열하는 경우의 수는
$24\times 2=48$
따라서 구하는 경우의 수는
$120-48=72$

정답 ①

28. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있는 사건을 A, 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
동전을 왼쪽부터 ① ② ③ ④로 나타내자.
(ⅰ) 시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 경우
㉠ ④만 5번 뒤집는 경우의 수는 1
㉡ ④를 3번, ①, ②, ③ 중에서 1개를 2번 뒤집는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times\dfrac{5!}{3!\,2!}=30$

㉢ ④를 1번, ①, ②, ③ 중에서 1개를 4

번 뒤집는 경우의 수는

$$ {}_3C_1 \times \frac{5!}{4!} = 15 $$

ㄹ ④를 1번, ①, ②, ③ 중에서 서로 다른 2개를 각각 2번씩 뒤집는 경우의 수는

$$ {}_3C_2 \times \frac{5!}{2!\,2!} = 90 $$

ㄱ ~ ㄹ에서

이 경우의 수는

$1+30+15+90=136$

(ii) 시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 뒷면이 보이도록 놓여 있는 경우

ㄱ ①, ②, ③ 중에서 1개를 3번, 나머지 2개를 각각 1번씩 뒤집는 경우의 수는

$$ {}_3C_1 \times \frac{5!}{3!} = 60 $$

ㄴ ①, ②, ③을 각각 1번씩 뒤집고, ④를 2번 뒤집는 경우의 수는

$$ \frac{5!}{2!} = 60 $$

ㄱ, ㄴ에서

이 경우의 수는

$60+60=120$

(i) ~ (ii)에서

$$ \mathrm{P}(A) = \frac{136+120}{4^5} = \frac{1}{4} $$

$$ \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{136}{4^5} = \frac{17}{128} $$

따라서

$$ \mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B|A)} = \frac{\frac{17}{128}}{\frac{1}{4}} = \frac{17}{32} $$

정답 ①

[다른 풀이]

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자.

시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있는 사건을 A, 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)$이다.

시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있는 경우는 다음과 같다.

(i) HHTT−HHHT−HHHH−HHHT−HHHH인 경우

이때의 경우의 수는

$$ {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times {}_4C_1 \times {}_1C_1 = 24 $$

(ii) HHTT−HHHT−HHTT−HHHT−HHHH인 경우

이때의 경우의 수는

$$ {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 = 36 $$

(iii) HHTT−HHHT−HHTT−HTTT−TTTT인 경우

이때의 경우의 수는

$$ {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 = 36 $$

(iv) HHTT−HTTT−HHTT−HHHT−HHHH인 경우

이때의 경우의 수는

$$ {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 = 36 $$

(v) HHTT−HTTT−HHTT−HTTT−TTTT인 경우

이때의 경우의 수는

$$ {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 = 36 $$

(vi) HHTT−HTTT−TTTT−HTTT−TTTT인 경우

이때의 경우의 수는

$$ {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times {}_4C_1 \times {}_1C_1 = 24 $$

(vii) HHHH$-$HHHT$-$HHTT$-$HHHT$-$HHHH인 경우

이때의 경우의 수는

${}_1C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 = 24$

(viii) HHHH$-$HHHT$-$HHTT$-$HTTT$-$TTTT인 경우

이때의 경우의 수는

${}_1C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 = 24$

(ix) HHHH$-$HHHT$-$HHHH$-$HHHT$-$HHHH인 경우

이때의 경우의 수는

${}_1C_1 \times {}_4C_1 \times {}_1C_1 \times {}_4C_1 \times {}_1C_1 = 16$

(i) ~ (ix)에서

$$\mathrm{P}(A) = \frac{256}{4^5} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{136}{4^5} = \frac{17}{128}$$

따라서

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B|A)} = \frac{\frac{17}{128}}{\frac{1}{4}} = \frac{17}{32}$$

29. **출제의도** : 수학적확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$p > 0$이므로 $p = q$에서 $q > 0$이다.

따라서 흰 공의 개수를

$n(2 \le n \le 39)$이라 하면 검은 공의 개수는 $40 - n$ 이다.

이때

$$p = \frac{{}_nC_2}{{}_{40}C_2}, \quad q = \frac{{}_nC_1 \times {}_{40-n}C_1}{{}_{40}C_2}$$

이고, $p = q$이므로

${}_nC_2 = {}_nC_1 \times {}_{40-n}C_1$

$$\frac{n(n-1)}{2} = n \times (40 - n)$$

$n - 1 = 80 - 2n$, $3n = 81$

$n = 27$

따라서 검은 공의 개수는

$40 - 27 = 13$이므로

$$r = \frac{{}_{13}C_2}{{}_{40}C_2} = \frac{\frac{13 \times 12}{2}}{\frac{40 \times 39}{2}} = \frac{1}{10}$$

$$60r = 60 \times \frac{1}{10} = 6$$

정답 6

30. **출제의도** : 중복조합을 이용하여 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 의하여

$f(-2) \ne -2$, $f(-2) \ne -1$, $f(-1) \ne -2$, $f(1) \ne 2$, $f(2) \ne 1$, $f(2) \ne 2$

조건 (나)에 의하여

$f(-2) \ge f(-1) \ge f(0) \ge f(1) \ge f(2)$

(i) $f(-2) = 0$인 경우

$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 경우의 수는 -2, -1, 0 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수에서 $f(-1) = -2$인 경우를 제외하면 되므로

${}_3H_4 - 1 = {}_6C_4 - 1 = {}_6C_2 - 1 = 14$

(ii) $f(-2) = 1$인 경우

$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 경우의 수는 -2, -1, 0, 1 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수에서 $f(-1)=-2$인 경우와 $f(2)=1$인 경우를 제외하면 되므로

${}_4H_4-2={}_7C_4-2={}_7C_3-2=33$

(iii) $f(-2)=2$인 경우

$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$의 값이 될 수 있는 경우의 수는 -2, -1, 0, 1, 2 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수에서 다음 경우의 수를 제외하면 된다.

㉠ $f(-1)=-2$인 경우 1가지

㉡ $f(1)=2$인 경우

$f(2)=-2, -1, 0, 1, 2$의 5가지

㉢ $f(1)\neq 2$, $f(2)=1$인 경우

$f(1)=1$이어야 하므로

$f(0)=1$, $f(-1)=1$

또는 $f(0)=1$, $f(-1)=2$

또는 $f(0)=2$, $f(-1)=2$

의 3가지

그러므로 $f(-2)=2$인 경우의 수는

${}_5H_4-1-5-3={}_8C_4-9=61$

따라서 조건을 만족시키는 함수의 개수는

$14+33+61=108$

정답 108

[다른 풀이]

조건 (나)에 의하여

$f(-2)\geq f(-1)\geq f(0)\geq f(1)\geq f(2)$

이므로 -2, -1, 0, 1, 2에서 조건 (나)를 만족시키도록 $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$의 함숫값을 정하는 경우의 수는

${}_5H_5={}_9C_5={}_9C_4=126$

이때 조건 (가)에 의하여

$f(-2)\neq-2$, $f(-2)\neq-1$, $f(-1)\neq-2$, $f(1)\neq 2$, $f(2)\neq 1$, $f(2)\neq 2$

이므로 다음 경우를 제외해야 한다.

(i) $f(-2)=-2$인 경우

$f(-1)=f(0)=f(1)=f(2)=-2$이어야 하므로 이 경우의 수는 1

(ii) $f(-2)=-1$인 경우

$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$의 값은 -2, -1 중에서만 택할 수 있으므로 이 경우의 수는

${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

(iii) $f(-2)\neq-2$, $f(-2)\neq-1$, $f(-1)=-2$ 인 경우

$f(-2)$의 값은 0, 1, 2 중에서 택할 수 있고,

$f(0)=f(1)=f(2)=-2$이어야 하므로 이 경우의 수는 3

(iv) $f(2)=2$인 경우

$f(-2)=f(-1)=f(0)=f(1)=2$이어야 하므로 이 경우의 수는 1

(v) $f(2)=1$인 경우

$f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$의 값은 1, 2 중에서만 택할 수 있으므로 이 경우의 수는

${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

(vi) $f(2)\neq 2$, $f(2)\neq 1$, $f(1)=2$인 경우

$f(2)$의 값은 -2, -1, 0 중에서 택할 수 있고,

$f(-2)=f(-1)=f(0)=2$이어야 하므로 이 경우의 수는 3

(i)~(vi)에서 중복되는 경우는 없으므로 구하는 경우의 수는

$126-(1+5+3+1+5+3)=108$

■ [선택: 미적분]
23. ② 24. ③ 25. ③ 26. ② 27. ②
28. ④ 29. 55 30. 25

23. **출제의도** : 등비수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{3}\times 0}{\frac{1}{2}+0}$$

$$=2$$

정답 ②

24. **출제의도** : 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$x\sin 2y+3x=3$에서
y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\sin 2y+x\cos 2y\times 2\times\frac{dy}{dx}+3=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin 2y+3}{-2x\cos 2y}\quad (\text{단, } x\cos 2y\neq 0)$$

따라서 점 $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)+3}{-2\times 1\times cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\sin\pi+3}{-2\cos\pi}$$

$$=\frac{3}{-(-2)}=\frac{3}{2}$$

정답 ③

25. **출제의도** : 급수와 일반항 사이의 관계를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3n^2-n}{2n^2+1}\right)=2$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{3n^2-n}{2n^2+1}\right)=0$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{3}{2}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(a_n-\frac{3n^2-n}{2n^2+1}\right)+\frac{3n^2-n}{2n^2+1}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{3n^2-n}{2n^2+1}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n}{2n^2+1}$$

$$=0+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^2+2a_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}a_n+2\lim_{n\to\infty}a_n$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^2+2\times\frac{3}{2}$$

$$=\frac{9}{4}+3=\frac{21}{4}$$

정답 ③

26. 출제의도 : 지수함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이를 로그로 나타내고, 로그함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 A의 x좌표를 a라 하면

$e^{a^2}-1=t$

이므로

$a^2=\ln(1+t)$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{\ln(1+t)}$

또, 점 B의 x좌표를 b라 하면

$e^{b^2}-1=5t$

이므로

$b^2=\ln(1+5t)$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{\ln(1+5t)}$

그러므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$S(t)=\frac{1}{2}\times 5t\times\left(\sqrt{\ln(1+5t)}-\sqrt{\ln(1+t)}\right)$$

따라서

$$\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t\sqrt{t}}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{5t\left(\sqrt{\ln(1+5t)}-\sqrt{\ln(1+t)}\right)}{2t\sqrt{t}}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{5}{2}\left(\sqrt{\frac{\ln(1+5t)}{t}}-\sqrt{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)$$

$$=\frac{5}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

정답 ②

27. 출제의도 : 도함수를 활용하여 접선의 방정식과 함수의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=a^x$에서 $y'=a^x\ln a$

이때 점 $\mathrm{A}(t, a^t)$에서의 접선 l의 기울기는

$a^t\ln a$

이므로 직선 l에 수직인 직선의 기울기는

$$-\frac{1}{a^t\ln a}$$

그러므로 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선의 방정식은

$$y-a^t=-\frac{1}{a^t\ln a}(x-t)$$

이 식에 $y=0$을 대입하면

$$-a^t=-\frac{1}{a^t\ln a}(x-t)$$

$x=t+a^{2t}\ln a$

이므로 점 B의 좌표는

$\mathrm{B}(t+a^{2t}\ln a, 0)$

한편 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 원점을 O라 하면

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{\overline{\mathrm{HO}}}{\overline{\mathrm{HB}}}=\frac{t}{a^{2t}\ln a}$$

$f(t)=\dfrac{t}{a^{2t}\ln a}$라 하면

$$f'(t)=\frac{a^{2t}\ln a-ta^{2t}\times 2(\ln a)^2}{(a^{2t}\ln a)^2}$$

$$=\frac{a^{2t}\ln a(1-2t\ln a)}{(a^{2t}\ln a)^2}$$

$f'(t)=0$에서

$1-2t\ln a=0$

$$t=\frac{1}{2\ln a}$$

이고, 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 조사하면 함수 $f(t)$는 $t=\dfrac{1}{2\ln a}$에서 최댓값을 가짐을 알 수 있다.

따라서 $\dfrac{1}{2\ln a}=1$이므로

$\ln a=\dfrac{1}{2}$

$a=\sqrt{e}$

정답 ②

28. 출제의도 : 역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$h_1(x)=(x-a-2)^2e^x$

$h_2(x)=e^{2a}(x-a)+4e^a$

이라 하면

$$f(x)=\begin{cases} h_1(x) & (x\ge a) \\ h_2(x) & (x<a) \end{cases}$$

이고

$$\begin{aligned} h_1{}'(x)&=2(x-a-2)e^x+(x-a-2)^2e^x \\ &=(x-a)(x-a-2)e^x \end{aligned}$$

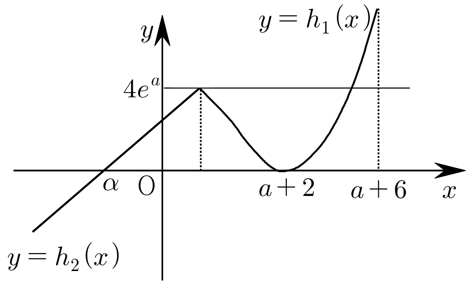
$h_2{}'(x)=e^{2a}$

이므로

$$f'(x)=\begin{cases} (x-a)(x-a-2)e^x & (x>a) \\ e^{2a} & (x<a) \end{cases}$$

이다.

$f(a)=4e^a$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 실수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 최솟값이 $g(t)$이므로

$t\le 4e^a$일 때, $h_2(g(t))=t$

$t>4e^a$일 때, $h_1(g(t))=t$

가 성립한다.

또한, 함수 $g(t)$는 $t=4e^a$에서 불연속이므로

$4e^a=12$, 즉 $e^a=3$

$t=f(a+2)=0<4e^a$이므로

$h_2{}'(g(t))\times g'(t)=1$에서

$h_2{}'(g(f(a+2)))\times g'(f(a+2))=1$

직선 $y=h_2(x)$가 x축과 만나는 점의 x좌표를 α $(\alpha<a)$라 하면 $g(0)=\alpha$이므로

$$\begin{aligned} g'(f(a+2))&=\frac{1}{h_2{}'(g(f(a+2)))} \\ &=\frac{1}{h_2{}'(\alpha)}=\frac{1}{e^{2a}} \qquad \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

$t=f(a+6)=16e^{a+6}>4e^a$이므로

$h_1{}'(g(t))\times g'(t)=1$에서

$h_1{}'(g(f(a+6)))\times g'(f(a+6))=1$

$$\begin{aligned} g'(f(a+6))&=\frac{1}{h_1{}'(g(f(a+6)))} \\ &=\frac{1}{h_1{}'(a+6)}=\frac{1}{6\times 4\times e^{a+6}} \\ &=\frac{1}{24e^{a+6}} \qquad \cdots\cdots ㉡ \end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $e^a=3$이므로

$$\frac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}=\frac{24e^{a+6}}{e^{2a}}=\frac{24e^6}{e^a}$$

$$= \frac{24}{3}e^6 = 8e^6$$

정답 ④

29. **출제의도** : 미분법을 이용하여 함수가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \ln(1+x^2) + a$에서

$$f'(x) = x^2 - 2x + \frac{2x}{1+x^2}$$

$$= \frac{x^2(x-1)^2}{x^2+1}$$

이때 $f'(x) = 0$ 에서

$x = 0$ 또는 $x = 1$

이고 $f'(x) \geq 0$ 이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

또한

$f''(x)$

$$= \frac{(4x^3 - 6x^2 + 2x)(x^2+1) - (x^4 - 2x^3 + x^2) \times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x(x-1)(x^3+2x-1)}{(x^2+1)^2}$$

이고 $h(x) = x^3 + 2x - 1$라 하면

$h'(x) = 3x^2 + 2 > 0$

이므로 $h(x) = 0$을 만족시키는 x의 값을 α라 하면

$h(0) = -1$, $h(1) = 2$

이므로 $0 < \alpha < 1$

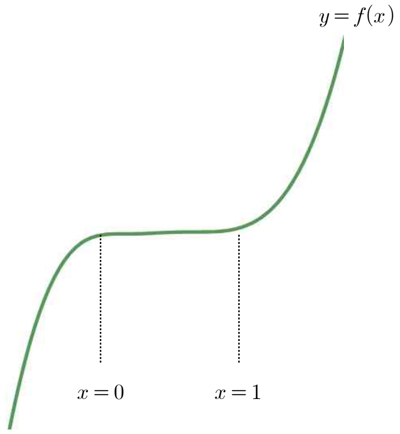
따라서 변곡점은

$(0, f(0))$, $(\alpha, f(\alpha))$, $(1, f(1))$

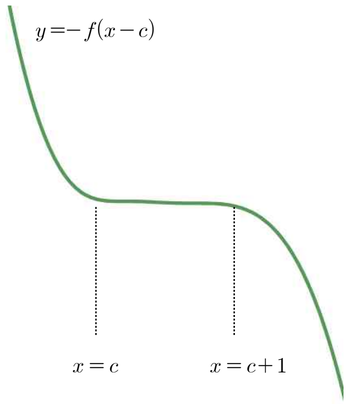
이고 변곡점에서의 미분계수는

$f'(0) = 0$, $f'(\alpha) > 0$, $f'(1) = 0$

즉 곡선 $y = f(x)$의 개형은 그림과 같다.

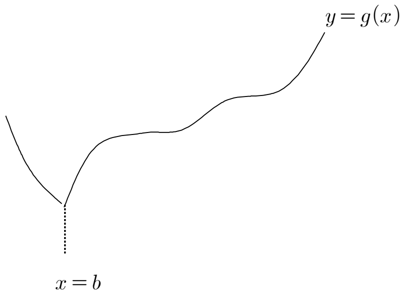


또한, 곡선 $y = -f(x-c)$는 곡선 $y = f(x)$를 x축의 방향으로 c만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 곡선 $y = -f(x-c)$의 개형은 그림과 같다.



이때 함수 $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq b) \\ -f(x-c) & (x < b) \end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x = b$에서 연속이어야 한다.

그런데 $a \geq 0$인 경우에는 함수 $y = g(x)$의 그래프의 개형이 그림과 같다.



즉 $\lim_{x\to b-} g'(x) < 0$, $\lim_{x\to b+} g'(x) \geq 0$ 이므로 함수 $g(x)$는 $x=b$에서 미분가능하지 않다.

$a<0$인 경우

$f(0)=a$, $f'(0)=0$,

$f(1)=-\dfrac{2}{3}+\ln 2+a$, $f'(1)=0$

이고

$x<b$ 에서 $\lim_{x\to b-} g'(x) \leq 0$

$x \geq b$ 에서 $\lim_{x\to b+} g'(x) \geqq 0$

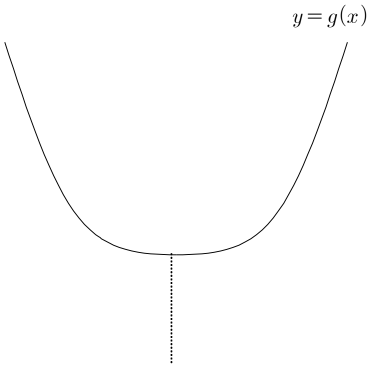
이므로 $x=b$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to b-} g'(x) = \lim_{x\to b+} g'(x) = 0$

즉 $\lim_{x\to b} g'(x)=0$

이어야 한다.

따라서, $|f(0)|=|f(1)|$, $b=1$, $c=1$이면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



즉 $-a=-\dfrac{2}{3}+\ln 2+a$ 에서

$a=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\ln 2$

이므로

$$a+b+c=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln 2\right)+1+1$$
$$=\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\ln 2$$

따라서 $p=\dfrac{7}{3}$, $q=-\dfrac{1}{2}$ 이므로

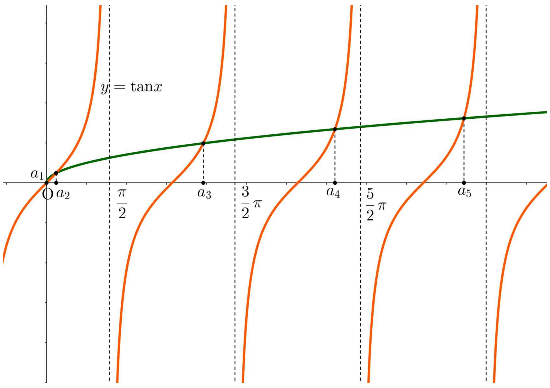
$$30(p+q)=30\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=30\times\frac{11}{6}=55$$

정답 55

30. 출제의도 : 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 함수 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{10}$, $y=\tan x$의 그래프와 수열 $\{a_n\}$을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



이때

$$\frac{\sqrt{a_n}}{10}=\tan a_n$$

이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan(a_{n+1}-a_n)=\frac{\tan a_{n+1}-\tan a_n}{1+\tan a_{n+1}\tan a_n}$$
$$=\frac{\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}}{10}-\dfrac{\sqrt{a_n}}{10}}{1+\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}}{10}\times\dfrac{\sqrt{a_n}}{10}}$$

$$=\frac{\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{10}}{\dfrac{100+\sqrt{a_{n+1}a_n}}{100}}$$

$$=10\times\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{100+\sqrt{a_{n+1}a_n}}$$

$$=\frac{10(a_{n+1}-a_n)}{(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})(100+\sqrt{a_{n+1}a_n})}$$

즉,

$\tan^2(a_{n+1}-a_n)$

$$=\frac{100(a_{n+1}-a_n)^2}{(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})^2(100+\sqrt{a_{n+1}a_n})^2}$$

한편, 곡선 $y=\tan x$의 점근선의 방정식은

$x=\dfrac{2n-1}{2}\pi$ (n은 정수)

이고

$n\to\infty$일 때 $\dfrac{\sqrt{a_n}}{10}\to\infty$

이므로 위의 그래프에서

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{2n-3}{2}\pi\right)=0$

임을 알 수 있다.

이때 $b_n=a_n-\dfrac{2n-3}{2}\pi$로 놓으면

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(b_{n+1}+\frac{2n-1}{2}\pi-b_n-\frac{2n-3}{2}\pi\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_n+\pi)$$

$=0-0+\pi=\pi$

이고

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}+\dfrac{2n-1}{2}\pi}{b_n+\dfrac{2n-3}{2}\pi}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{b_{n+1}}{n}+\dfrac{2n-1}{2n}\pi}{\dfrac{b_n}{n}+\dfrac{2n-3}{2n}\pi}$$

$$=\frac{0+\pi}{0+\pi}=1$$

이다.

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})^2}{a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}}\right)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}}+\sqrt{\frac{a_n}{a_n}}\right)^2$$

$=(\sqrt{1}+\sqrt{1})^2=4$

이고,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(100+\sqrt{a_{n+1}a_n})^2}{{a_n}^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{100}{a_n}+\frac{\sqrt{a_{n+1}a_n}}{a_n}\right)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{100}{a_n}+\sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}}\right)^2$$

$=(0+\sqrt{1})^2=1$

이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}{a_n}^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{100{a_n}^3(a_{n+1}-a_n)^2}{(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})^2(100+\sqrt{a_{n+1}a_n})^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{100(a_{n+1}-a_n)^2}{\dfrac{(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})^2(100+\sqrt{a_{n+1}a_n})^2}{{a_n}^3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{100(a_{n+1}-a_n)^2}{\frac{(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})^2}{a_n}\times\frac{(100+\sqrt{a_{n+1}a_n})^2}{{a_n}^2}}$$

$$=\frac{100\pi^2}{4\times1}=25\pi^2$$

따라서

$$\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty}{a_n}^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)=25$$

정답 25

■ [선택: 기하]

23. ④	24. ②	25. ④	26. ③	27. ②
28. ③	29. 25	30. 10		

23. **출제의도** : 평면벡터의 연산을 이해하여 식을 정리할 수 있는가?

정답풀이 :

$\vec{a}+3(\vec{a}-\vec{b}) = k\vec{a}-3\vec{b}$에서

$\vec{a}+3\vec{a}-3\vec{b} = k\vec{a}-3\vec{b}$

$4\vec{a}= k\vec{a}$

$k=4$

정답 ④

24. **출제의도** : 타원 위의 한 점에서의 접선의 y절편을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 $(3, \sqrt{5})$는 타원 $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로 $\dfrac{3^2}{18}+\dfrac{(\sqrt{5})^2}{b^2}=1$에서

$\dfrac{5}{b^2}=\dfrac{1}{2}$, $b^2=10$

타원 $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{10}=1$ 위의 점 $(3, \sqrt{5})$에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{3x}{18}+\dfrac{\sqrt{5}y}{10}=1$이므로 y절편은 $2\sqrt{5}$

정답 ②

25. **출제의도** : 위치벡터를 이해하여 조건을 만족시키는 벡터의 크기의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$라 하자.

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$이므로

$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{b}|$, 즉 $|\vec{p}-\vec{a}|=\sqrt{2}$에서

점 P는 점 $A(-3, 3)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $r=\sqrt{2}$인 원 위의 점이다.

이때 $|\vec{p}-\vec{b}|$의 값은 점 P와 점 $B(1, -1)$ 사이의 거리와 같으므로 $|\vec{p}-\vec{b}|$의 최솟값은

$\overline{AB}-r=4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

이다.

정답 ④

26. **출제의도** : 쌍곡선의 방정식에서 주어진 조건을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$에서 한 점근선의 방정식이 $y=x$이므로

$a=b$

이때,

$c^2=a^2+b^2=a^2+a^2=2a^2$

에서

$c=\sqrt{2}a$

이고, $\overline{PQ}=8$이므로 점 P의 좌표는

$P(\sqrt{2}a, 4)$

점 P가 쌍곡선 위의 점이므로

$\dfrac{2a^2}{a^2}-\dfrac{4^2}{a^2}=1$

$a^2=16$

$b^2=a^2=16$

$c^2=2a^2=2\times16=32$

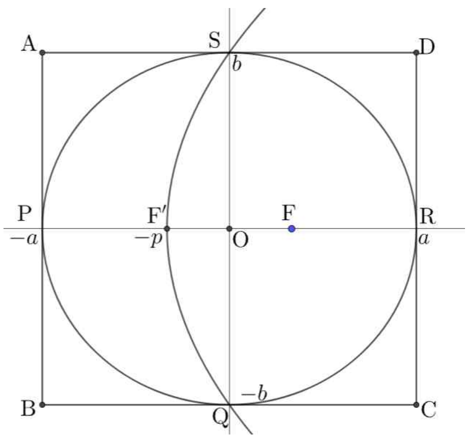
따라서

$a^2+b^2+c^2=16+16+32=64$

정답 ③

27. 출제의도 : 포물선과 타원의 식을 세우고 이를 활용하여 타원의 두 초점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



그림처럼 두 직선 PR, QS의 교점을 원점 O라 하고 점 R의 좌표를 $(a, 0)$, 점 S의 좌표를 $(0, b)$, 초점 F의 좌표를 $(p, 0)$이라고 하면 타원의 방정식은

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

포물선의 방정식은 꼭짓점이 원점이고 초점이 $(2p, 0)$인 포물선 $y^2=8px$를 x축의 방향으로 $-p$만큼 평행이동한 식이므로 $y^2=8p(x+p)$

이 포물선의 준선의 방정식은 $x=-2p$를 x축의 방향으로 $-p$만큼 평행이동한 식이므로 $x+p=-2p$에서

$x=-3p$ ⋯ ㉠이다.

그런데 포물선 $y^2=8p(x+p)$의 준선의 방정식이 직선 AB이므로 $x=-a$와 $x=-3p$가 일치한다. 즉, $3p=a$.

포물선 $y^2=8p(x+p)$는 점 $\mathrm{S}(0, b)$를 지나므로 $b^2=8p^2$에서 $b=2\sqrt{2}\,p$

직사각형 ABCD의 넓이가 $32\sqrt{2}$이므로

$2a\times2b=32\sqrt{2}$에서 $ab=8\sqrt{2}$

즉, $ab=3p\times2\sqrt{2}\,p=8\sqrt{2}$

$p^2=\dfrac{4}{3}$

그러므로 $p=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 $\overline{\mathrm{FF}'}=2p=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

정답 ②

28. 출제의도 : 벡터를 이용하여 나타낸 도형과 주어진 조건을 만족하는 도형 위의 점으로 이루어진 벡터의 내적을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

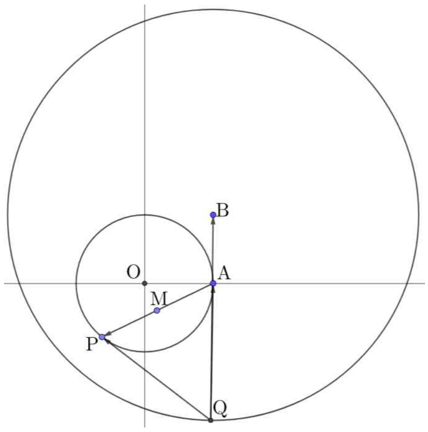
$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1$에서 점 P는 원점 O를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|=3$에서 점 Q는 점 B를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 3인 원 위의 점이다.

선분 AP의 중점을 M이라고 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}})=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot2\overrightarrow{\mathrm{QM}}=0$

그러므로 $\triangle\mathrm{QMP}\equiv\triangle\mathrm{QMA}$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AQ}}$의 최솟값 2와 같고 이때 Q의 좌표는 $(1, -2)$이다. 즉, $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=(0, -3)$



점 P의 좌표를 (a, b)라고 하면

M의 좌표는 $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b}{2}\right)$이고

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{QM} = 0$이므로

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{QM} = (a-1, b) \cdot \left(\frac{a+1}{2} - 1, \frac{b}{2} + 2\right)$

$= \frac{1}{2}\{(a-1)^2 + b(b+4)\} = 0$ ⋯ ㉠

$|\overrightarrow{OP}| = 1$이므로 $a^2 + b^2 = 1$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$-2a + 4b + 2 = 0$, $a = 2b + 1$ ⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(2b+1)^2 + b^2 - 1 = 0$

$b(5b+4) = 0$

$b = 0$ 또는 $b = -\frac{4}{5}$

$|\overrightarrow{AP}| > 0$이므로 $b = -\frac{4}{5}$

($\because$ $b = 0$이면 $|\overrightarrow{AP}| = 0$)

㉢에서 $a = 2b + 1 = -\frac{3}{5}$

점 P의 좌표는 $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$이므로

$\overrightarrow{AP} = \left(-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

따라서

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ} = \left(-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right) \cdot (0, -3)$

$= -\frac{8}{5} \times 0 + \left(-\frac{4}{5}\right) \times (-3)$

$= \frac{12}{5}$

정답 ③

29. 출제의도 : 타원과 쌍곡선의 성질을 이용하여 삼각형의 둘레의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $|y^2 - 1| = \frac{x^2}{a^2}$에서

(i) $|y| \le 1$일 때

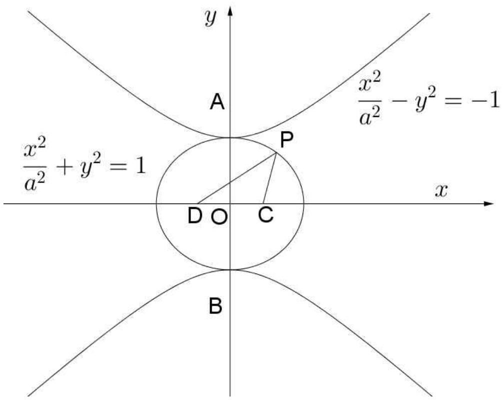
$y^2 - 1 \le 0$이므로

$-(y^2 - 1) = \frac{x^2}{a^2}$, 즉 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ ...... ㉠

(ii) $|y| > 1$일 때

$y^2 - 1 > 0$이므로

$y^2 - 1 = \frac{x^2}{a^2}$, 즉 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = -1$ ...... ㉡



곡선 위의 점 중 y좌표의 절댓값이 1보다 작거나 같은 모든 점 P에 대하여 $\overline{PC} + \overline{PD} = \sqrt{5}$이므로

㉠ 위의 모든 점 P는 $\overline{PC} + \overline{PD} = \sqrt{5}$를 만족시킨다.

즉, ㉠은 두 점 $\mathrm{C}(c,\ 0)$, $\mathrm{D}(-c,\ 0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 $\sqrt{5}$인 타원의 방정식이다.

이때 $2a=\sqrt{5}$이므로

$$a=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

또, $c^2=a^2-1=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$

이므로

$$c=\frac{1}{2}$$

한편, ㉡은

$$\frac{x^2}{\frac{5}{4}}-y^2=-1$$

이 쌍곡선의 초점 중 y좌표가 양수인 점의 y좌표를 $d(d>0)$이라 하면

$$d^2=\frac{5}{4}+1=\frac{9}{4}$$

$$d=\frac{3}{2}$$

즉, ㉡은 두 점 $\mathrm{A}\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(0,\ -\frac{3}{2}\right)$을 초점으로 하고 주축의 길이가 2인 쌍곡선이다.

한편, 타원 $\frac{x^2}{\frac{5}{4}}+y^2=1$과 x축이 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 R라 하면

$$\mathrm{R}\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$$

타원 $\frac{x^2}{\frac{5}{4}}+y^2=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점을 S라 하면

$$\overline{\mathrm{AS}}<\overline{\mathrm{AR}}=\frac{\sqrt{14}}{2}<10$$

이고 $\overline{\mathrm{AQ}}=10$이므로 점 Q는 쌍곡선

$\frac{x^2}{\frac{5}{4}}-y^2=-1$ 위의 점이다.

쌍곡선의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{BQ}}-\overline{\mathrm{AQ}}=2$

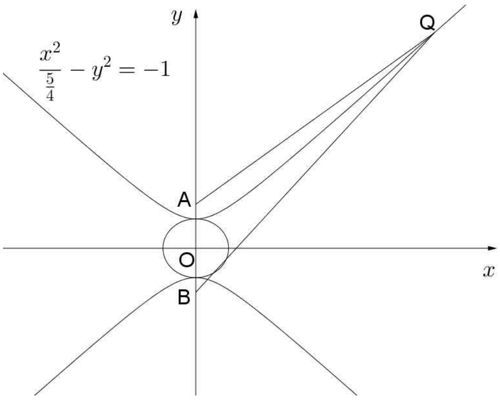
이므로

$\overline{\mathrm{BQ}}=2+\overline{\mathrm{AQ}}=2+10=12$

한편, $\overline{\mathrm{AB}}=3$

따라서 삼각형 ABQ의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BQ}}+\overline{\mathrm{QA}}=3+12+10=25$



정답 25

30. 출제의도 : 쌍곡선의 성질과 평면벡터의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 벡터의 크기의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$이라 하자.

$2a=6$에서 $a=3$

쌍곡선 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}=p$(p는 양수)로 놓으면

$\overline{\mathrm{PF}}<\overline{\mathrm{PF'}}$이고, 쌍곡선의 주축의 길이가

6이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PF}}+6=p+6$

$|\overrightarrow{\mathrm{FP}}|=\overline{\mathrm{PF}}=p$이므로

$(|\overrightarrow{\mathrm{FP}}|+1)\overrightarrow{\mathrm{F'Q}}=5\overrightarrow{\mathrm{QP}}$에서

$\overrightarrow{\mathrm{F'Q}}=\dfrac{5}{p+1}\overrightarrow{\mathrm{QP}}$

즉 세 점 F′, Q, P는 한 직선 위에 있고, 점 Q는 선분 F′P를 $5:(p+1)$로 내분하는 점이다.

이때 $|\overrightarrow{\mathrm{F'P}}|=\overline{\mathrm{PF'}}=p+6$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{F'Q}}|=5$, $|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=p+1$

따라서 점 Q는 중심이 점 F′$(-5,\ 0)$이고 반지름의 길이가 5인 원 C 위의 점이다.

$\overline{\mathrm{AF'}}=\sqrt{(-5+9)^2+(0+3)^2}=5$

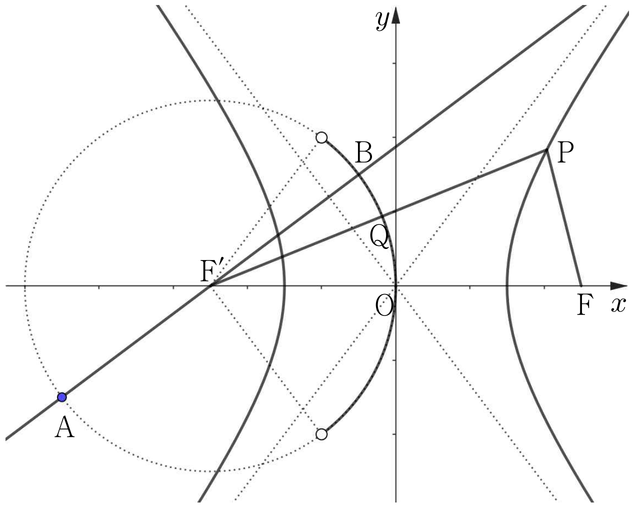
이므로 점 A$(-9,\ -3)$은 원 C 위의 점이다.

직선 AF′이 원 C와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자.

$b=\sqrt{5^2-3^2}=4$이므로 쌍곡선의 기울기가 양수인 점근선의 기울기는 $\dfrac{4}{3}$이고,

직선 AF′의 기울기가 $\dfrac{0-(-3)}{-5-(-9)}=\dfrac{3}{4}$이므로 점 B는 점 Q가 나타내는 도형 위의 점이다.

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$의 값은 점 Q가 점 B의 위치에 있을 때 최대이므로 구하는 최댓값은 10이다.



정답 10