2024학년도 대학수학능력시험

수학영역 정답 및 풀이

*최근 수정일 : 2023.11.20

■ [공통: 수학 I ·수학 II]

01. ①	02. ④	03. ②	04. ①	05. ④
06. ④	07. ⑤	08. ②	09. ④	10. ②
11. ①	12. ③	13. ①	14. ①	15. ③
16. 2	17. 8	18. 9	19. 32	
20. 25	21. 10	22. 483		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sqrt[3]{24}\times 3^{\frac{2}{3}}$

$=(2^3\times 3)^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}$

$=(2^3)^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}$

$=2^{3\times\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$

$=2^1\times 3^1$

$=6$

정답 ①

2. **출제의도** : 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^3-5x^2+3$에서

$f'(x)=6x^2-10x$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$$

$$=24-20$$

$$=4$$

정답 ④

3. **출제의도** : 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin(-\theta)=-\sin\theta=\frac{1}{3}$에서

$\sin\theta=-\frac{1}{3}$

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

정답 ②

4. **출제의도** : 함수의 연속의 정의와 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서도 연속이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$$

이때,

$$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(3x-a)$$

$$=6-a$$

$$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}(x^2+a)$$

$$=4+a$$

$f(2)=4+a$

그러므로

$6-a=4+a=4+a$

따라서

$2a=2$. $a=1$

정답 ①

5. 출제의도 : 다항함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2-6x$이므로

$f(x)=\int(3x^2-6x)dx$

$=x^3-3x^2+C$ (C는 적분상수)

$f(1)=1-3+C=6$ 에서 $C=8$

따라서

$f(2)=8-12+8=4$

정답 ④

6. 출제의도 : 조건을 만족시키는 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$S_4-S_2=a_3+a_4$ 이므로

$a_3+a_4=3a_4$, $a_3=2a_4$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_5=\frac{3}{4}$ 에서 $r\neq 0$이고

$a_3=2a_4$ 에서 $r=\frac{a_4}{a_3}=\frac{1}{2}$

$a_5=a_1\times r^4$ 에서

$a_1=a_5\times\frac{1}{r^4}=\frac{3}{4}\times 2^4=12$

$a_5=a_2\times r^3$ 에서

$a_2=a_5\times\frac{1}{r^3}=\frac{3}{4}\times 2^3=6$

따라서 $a_1+a_2=12+6=18$

정답 ④

7. 출제의도 : 다항함수의 극댓값과 극솟값을 갖는 x의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$에서

$f'(x)=x^2-4x-12$

$=(x+2)(x-6)$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=6$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고, $x=6$에서 극소이다.

따라서

$\alpha=-2$, $\beta=6$

이므로

$\beta-\alpha=6-(-2)=8$

정답 ⑤

8. 출제의도 : 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$에서

$(x-1)f(x)=3x(x-1)(x^2+x+1)$ …… ㉠

$f(x)$가 삼차함수이고

㉠이 x에 대한 항등식이므로

$f(x)=3x(x^2+x+1)$

따라서

$\int_{-2}^{2}f(x)dx$

$= \int_{-2}^{2} 3x(x^2+x+1)dx$

$= \int_{-2}^{2} (3x^3+3x^2+3x)dx$

$= 2\int_{0}^{2} 3x^2 dx$

$= 2 \times \left[x^3 \right]_0^2$

$= 2 \times 2^3$

$= 16$

정답 ②

9. 출제의도 : 로그의 정의와 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1이므로

$\frac{m \times \log_5 12 + (1-m) \times \log_5 3}{m + (1-m)} = 1$

$m \times \log_5 12 + (1-m) \times \log_5 3 = 1$

$m(\log_5 12 - \log_5 3) = 1 - \log_5 3$

$m \times \log_5 \frac{12}{3} = \log_5 \frac{5}{3}$

$m \times \log_5 4 = \log_5 \frac{5}{3}$

이때,

$m = \frac{\log_5 \frac{5}{3}}{\log_5 4}$

$= \log_4 \frac{5}{3}$

따라서,

$4^m = 4^{\log_4 \frac{5}{3}}$

$= \frac{5}{3}$

정답 ④

10. 출제의도 : 적분을 이용하여 수직선 위를 움직이는 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

시각 t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$x_1(t) = 0 + \int_0^t (t^2 - 6t + 5)dt$

$= \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t$,

$x_2(t) = 0 + \int_0^t (2t - 7)dt$

$= t^2 - 7t$

이므로

$f(t) = \left| x_1(t) - x_2(t) \right|$

$= \left| \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 12t \right|$

이다. 함수 $g(t)$를

$g(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 12t$라 하면

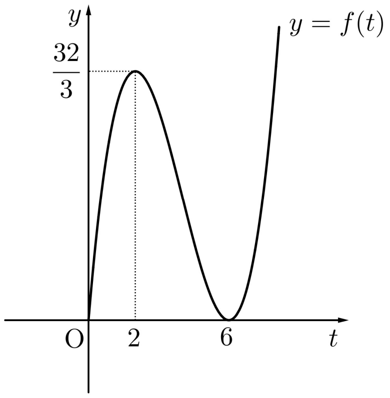
$g'(t) = t^2 - 8t + 12 = (t-2)(t-6)$

$g'(t) = 0$에서 $t = 2$ 또는 $t = 6$

$t \geq 0$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{32}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$t \geq 0$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t) \geq 0$이므로 $f(t) = g(t)$이고 함수 $y = f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(t)$는 구간 $[0,\ 2]$에서 증가하고, 구간 $[2,\ 6]$에서 감소하고, 구간 $[6,\ \infty)$에서 증가한다. 즉, $a=2$, $b=6$이다.
시각 $t=2$에서 $t=6$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_2^6 |v_2(t)|dt = \int_2^6 |2t-7|dt$$
$$= \int_2^{\frac{7}{2}} (7-2t)dt + \int_{\frac{7}{2}}^6 (2t-7)dt$$
$$= \left[7t-t^2\right]_2^{\frac{7}{2}} + \left[t^2-7t\right]_{\frac{7}{2}}^6$$
$$= \frac{9}{4} + \frac{25}{4} = \frac{17}{2}$$

정답 ②

11. **출제의도** : 등차수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$|a_6| = a_8$에서
$a_6 = a_8$ 또는 $-a_6 = a_8$ …… ㉠
등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 0이 아니므로
$a_6 \neq a_8$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$-a_6 = a_8$ 즉,
$a_6 + a_8 = 0$ …… ㉢

한편, $|a_6| = a_8$에서
$a_8 \geq 0$이고, $a_6 + a_8 = 0$이므로
$a_6 < 0 < a_8$이다.
즉, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 양수이다.
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d>0)$이라 하면 ㉢에서
$(a_1+5d)+(a_1+7d)=0$
$a_1 = -6d$ …… ㉣

한편, $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{96}$에서

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$$
$$= \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)+\left(\frac{1}{a_5}-\frac{1}{a_6}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_6}\right)$$
$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1+5d}\right)$$
$$= \frac{1}{d} \times \frac{5d}{a_1(a_1+5d)}$$
$$= \frac{5}{a_1(a_1+5d)}$$

이므로

$$\frac{5}{a_1(a_1+5d)} = \frac{5}{96}$$

$a_1(a_1+5d) = 96$ …… ㉤
㉣을 ㉤에 대입하면
$-6d \times (-d) = 96$
$d^2 = 16$
$d > 0$이므로

$d=4$

$d=4$를 ㉣에 대입하면

$a_1=-6\times4=-24$

따라서

$\sum_{k=1}^{15} a_k$

$=\dfrac{15\{2\times(-24)+14\times4\}}{2}$

$=60$

정답 ①

12. 출제의도 :

곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $g(x)$는 $x\ge t$일 때, 점 $(t, f(t))$를 지나고 기울기가 -1인 직선이므로 이 직선은 x축과 점 $(t+f(t), 0)$에서 만난다.

그러므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\int_0^t f(x)dx+\frac{1}{2}\times\{f(t)\}^2$$

이때, 양변을 미분하면

$$S'(t)=f(t)+f(t)\times f'(t)$$
$$=f(t)\{1+f'(t)\}$$

한편, $f(x)=\dfrac{1}{9}x(x-6)(x-9)$이므로

$0<t<6$에서 $f(t)>0$

또,

$1+f'(t)$

$=1+\dfrac{1}{9}\{(t-6)(t-9)+t(t-9)+t(t-6)\}$

$=1+\dfrac{1}{9}\{(t^2-15t+54)+(t^2-9t)$

$+(t^2-6t)\}$

$=1+\dfrac{1}{9}(3t^2-30t+54)$

$=1+\dfrac{1}{3}(t^2-10t+18)$

$=\dfrac{1}{3}(t^2-10t+21)$

$=\dfrac{1}{3}(t-3)(t-7)$

그러므로 $0<t<6$에서 $S(t)$의 증가와 감소는 다음 표와 같다.

t	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$	(6)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	(극대)	↘	

그러므로 $S(t)$는 $t=3$에서 극대이면서 최대이다.

따라서, 최댓값은

$S(3)$

$=\displaystyle\int_0^3 f(x)dx+\frac{1}{2}\{f(3)\}^2$

$=\displaystyle\frac{1}{9}\int_0^3 x(x-6)(x-9)dx$

$\quad+\dfrac{1}{2}\times\left\{\dfrac{1}{9}\times3\times(-3)\times(-6)\right\}^2$

$=\displaystyle\frac{1}{9}\int_0^3(x^3-15x^2+54x)dx+18$

$=\dfrac{1}{9}\left[\dfrac{1}{4}x^4-5x^3+27x^2\right]_0^3+18$

$=\dfrac{1}{9}\times\left(\dfrac{1}{4}\times81-5\times27+27\times9\right)+18$

$=\left(\dfrac{9}{4}-15+27\right)+18$

$=\left(\dfrac{9}{4}+12\right)+18$

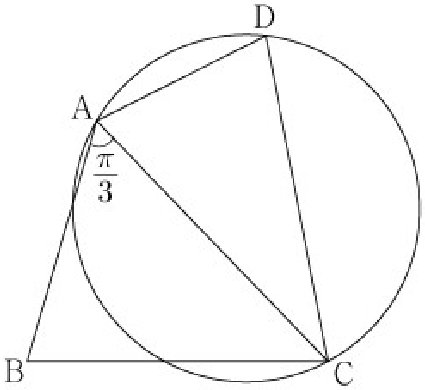
$=\dfrac{9}{4}+30$

$=\dfrac{129}{4}$

정답 ③

13. **출제의도** : 사인법칙, 코사인법칙 및 삼각형의 넓이를 활용하여 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=a(a>0)$

이라 하면

코사인법칙에 의해

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos(\angle BAC)$$

$$(\sqrt{13})^2=3^2+a^2-2\times3\times a\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$a^2-3a-4=0$

$(a+1)(a-4)=0$

$a>0$이므로

$a=4$

즉, $\overline{AC}=4$

삼각형 ABC의 넓이 S_1은

$$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin(\angle BAC)$$

$$=\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=3\sqrt{3}$$

$\overline{AD}\times\overline{CD}=9$

이므로

삼각형 ACD의 넓이 S_2는

$$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\sin(\angle ADC)$$

$$=\frac{9}{2}\sin(\angle ADC)$$

이때, $S_2=\frac{5}{6}S_1$이므로

$$\frac{9}{2}\sin(\angle ADC)=\frac{5}{6}\times3\sqrt{3}$$

$$\sin(\angle ADC)=\frac{5\sqrt{3}}{9}$$

삼각형 ACD에서

사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ADC)}=2R$$

이므로

$$\frac{4}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}=2R$$

$$R=\frac{6\sqrt{3}}{5}$$

따라서

$$\frac{R}{\sin(\angle ADC)}=\frac{\frac{6\sqrt{3}}{5}}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}$$

$$=\frac{54}{25}$$

정답 ①

14. **출제의도** : 새롭게 정의된 함수가 조건을 만족시키도록 하는 두 자연수의 순서쌍을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x \le 2$일 때,

$f(x)=2x^3-6x+1$에서

$f'(x)=6x^2-6=6(x-1)(x+1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x \le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5

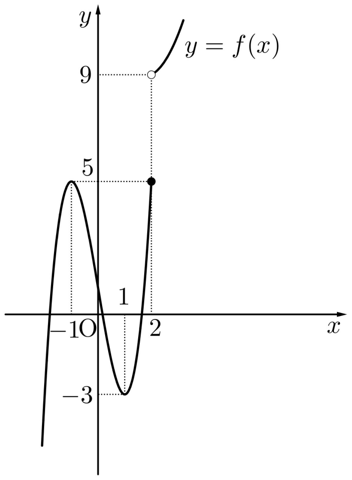
또한, a, b가 자연수이므로 곡선

$y=a(x-2)(x-b)+9$

는 점 $(2, 9)$와 점 $(b, 9)$를 지나고 아래로 볼록한 포물선이다.

(ⅰ) $b=1$ 또는 $b=2$인 경우

함수 $f(x)$는 $x>2$에서 증가하고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $-3<k<5$인 모든 실수 k에 대하여

$$g(k)=\lim_{t \to k-} g(k)=\lim_{t \to k+} g(k)=3 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이므로

$$g(k)+\lim_{t \to k-} g(k)+\lim_{t \to k+} g(k)=9 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 아니다.

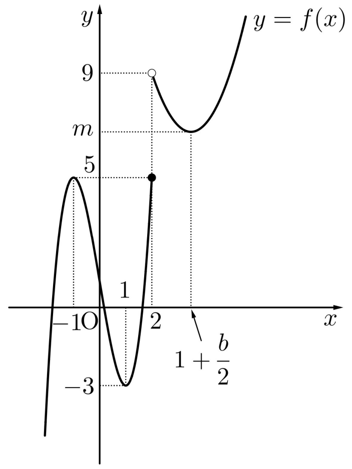
(ⅱ) $b \ge 3$인 경우

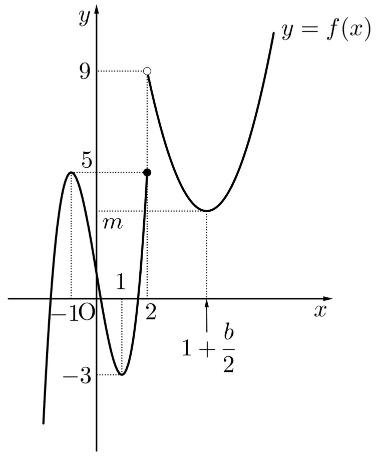
곡선 $y=a(x-2)(x-b)+9$는 직선

$x=\dfrac{2+b}{2}=1+\dfrac{b}{2}$에 대하여 대칭이므로

함수 $f(x)$는 $x=1+\dfrac{b}{2}$에서 극솟값을 갖는다. 이 극솟값을 m이라 하자.

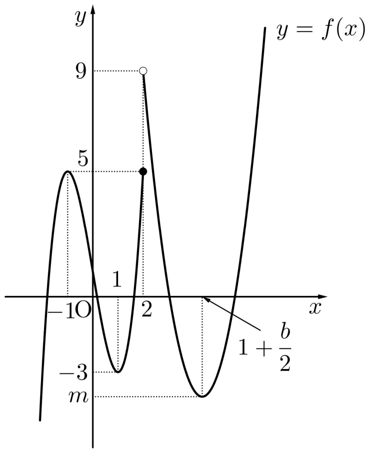
(ⅱ-①) $m>-3$인 경우





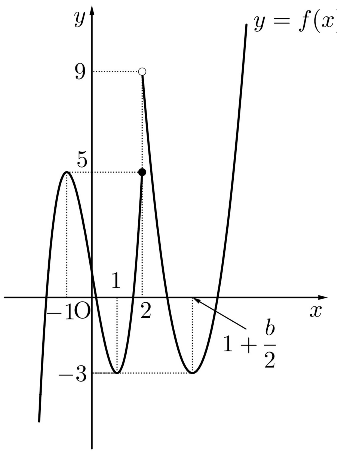
m과 5 중에 크지 않은 값을 m_1이라 하면 $-3<k<m_1$인 모든 실수 k에 대하여 ㉠이 성립하므로 ㉡을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 아니다.

(ⅱ-②) $m<-3$인 경우



$m<k<-3$인 모든 실수 k에 대하여 ㉠이 성립하므로 ㉡을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 아니다.

(ⅱ-③) $m=-3$인 경우



k의 값에 따라 $g(k)$, $\lim\limits_{t\to k-} g(k)$, $\lim\limits_{t\to k+} g(k)$의 값을 구하면 다음과 같다.

	$g(k)$	$\lim\limits_{t\to k-} g(k)$	$\lim\limits_{t\to k+} g(k)$
$k<-3$	1	1	1
$k=-3$	3	1	5
$-3<k<5$	5	5	5
$k=5$	4	5	2
$5<k<9$	2	2	2
$k=9$	1	2	1
$k>9$	1	1	1

즉, ㉡을 만족시키는 실수 k의 값은 -3뿐이므로 문제의 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $b\geq 3$, $m=-3$이다.

$f\left(1+\frac{b}{2}\right)=-3$에서

$a\left(\frac{b}{2}-1\right)\left(1-\frac{b}{2}\right)+9=-3$

$a(b-2)^2=48$

$48=2^4\times 3$이므로 구하는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(48,\ 3)$, $(12,\ 4)$, $(3,\ 6)$

이다.

따라서 $a+b$의 최댓값은 $48+3=51$이다.

정답 ①

15. 출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 첫째항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

a_n이 홀수일 때

$a_{n+1}=2^{a_n}$은 자연수이고

a_n이 짝수일 때

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$은 자연수이다.

이때 a_1이 자연수이므로

수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수이다.

$a_6+a_7=3$에서

$a_6=1$, $a_7=2$ 또는 $a_6=2$, $a_7=1$

이다.

(ⅰ) $a_6=1$일 때,

$a_6=1$이고 a_5가 홀수인 경우

$a_6=2^{a_5}$에서

$1=2^{a_5}$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_5의 값은

없다.

$a_6=1$이고 a_5가 짝수인 경우

$a_6=\frac{1}{2}a_5$에서

$1=\frac{1}{2}a_5$

$a_5=2$

a_4를 구해보자.

$a_5=2$이고 a_4가 홀수인 경우

$a_5=2^{a_4}$에서

$2=2^{a_4}$

$a_4=1$

$a_5=2$이고 a_4가 짝수인 경우

$a_5=\frac{1}{2}a_4$에서

$2=\frac{1}{2}a_4$

$a_4=4$

a_3을 구해보자.

$a_4=1$일 때

$a_3=2$

$a_4=4$이고 a_3이 홀수인 경우

$a_4=2^{a_3}$에서

$4=2^{a_3}$

$a_3=2$

이때, a_3이 짝수이므로 모순이다.

$a_4=4$이고 a_3이 짝수인 경우

$a_4=\frac{1}{2}a_3$에서

$4=\frac{1}{2}a_3$

$a_3=8$

a_2를 구해보자.

$a_3=2$일 때

$a_2=1$ 또는 $a_2=4$

$a_3=8$이고 a_2가 홀수인 경우

$a_3=2^{a_2}$에서

$8=2^{a_2}$

$a_2=3$

$a_3=8$이고 a_2가 짝수인 경우

$a_3=\frac{1}{2}a_2$에서

$8=\frac{1}{2}a_2$

$a_2=16$

a_1을 구해보자.

$a_2=1$일 때

$a_1=2$

$a_2=4$일 때

$a_1=8$

$a_2=3$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2=2^{a_1}$에서

$3=2^{a_1}$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_1의 값은 없다.

$a_2=3$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2=\frac{1}{2}a_1$에서

$3=\frac{1}{2}a_1$

$a_1=6$

$a_2=16$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2=2^{a_1}$에서

$16=2^{a_1}$

$a_1=4$

이때 a_1이 짝수이므로 모순이다.

$a_2=16$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2=\frac{1}{2}a_1$에서

$16=\frac{1}{2}a_1$

$a_1=32$

따라서 a_1의 값은

2 또는 6 또는 8 또는 32이다.

(ⅱ) $a_6=2$일 때,

(i)의 과정을 이용하면

$a_2=2$ 또는 $a_2=6$ 또는 $a_2=8$ 또는 $a_2=32$

a_1을 구해보자.

$a_2=2$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2=2^{a_1}$에서

$2=2^{a_1}$

$a_1=1$

$a_2=2$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2=\frac{1}{2}a_1$에서

$2=\frac{1}{2}a_1$

$a_1=4$

$a_2=6$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2=2^{a_1}$에서

$6=2^{a_1}$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_1의 값은 없다.

$a_2=6$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2=\frac{1}{2}a_1$에서

$6=\frac{1}{2}a_1$

$a_1=12$

$a_2=8$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2=2^{a_1}$에서

$8=2^{a_1}$

$a_1=3$

$a_2=8$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2=\frac{1}{2}a_1$에서

$8=\frac{1}{2}a_1$

$a_1=16$

$a_2=32$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2=2^{a_1}$에서

$32=2^{a_1}$

$a_1=5$

$a_2=32$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2=\frac{1}{2}a_1$에서

$32=\frac{1}{2}a_1$

$a_1=64$

따라서 a_1의 값은

1 또는 3 또는 4 또는 5 또는 12 또는 16 또는 64이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

모든 a_1의 값의 합은

$(2+6+8+32)+(1+3+4+5+12+16+64)$

$=153$

정답 ③

16. 출제의도 : 지수에 미지수가 포함된 방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$3^{x-8}=\left(\frac{1}{27}\right)^x$

$3^{x-8}=\left(3^{-3}\right)^x$

$3^{x-8}=3^{-3x}$

그러므로

$x-8=-3x$

$4x=8$

$x=2$

정답 2

17. 출제의도 : 도함수와 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=(x+1)(x^2+3)$이므로

$f'(x)=(x^2+3)+(x+1)\times 2x$

따라서,

$$f'(1)=(1+3)+2\times 2$$
$$=8$$

정답 8

18. 출제의도 : 수열의 합의 기호의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{10}(2b_k-1)$$
$$=2\sum_{k=1}^{10} b_k-10 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\sum_{k=1}^{10}(3a_k+b_k)=33$에서

$$3\sum_{k=1}^{10} a_k+\sum_{k=1}^{10} b_k=33$$

$$\sum_{k=1}^{10} b_k=-3\sum_{k=1}^{10} a_k+33 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\sum_{k=1}^{10} b_k=-3\left(2\sum_{k=1}^{10} b_k-10\right)+33$$

$$\sum_{k=1}^{10} b_k=-6\sum_{k=1}^{10} b_k+63$$

$$7\sum_{k=1}^{10} b_k=63$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10} b_k=9$$

정답 9

19. 출제의도 : 삼각함수가 포함된 부등식을 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(2+x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x\right)=\cos\frac{\pi}{4}x,$$

$$f(2-x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x\right)=\cos\frac{\pi}{4}x$$

이므로 주어진 부등식은

$$\cos^2\frac{\pi}{4}x<\frac{1}{4}$$

즉,

$$-\frac{1}{2}<\cos\frac{\pi}{4}x<\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이다.

$0<x<16$에서 $0<\frac{\pi}{4}x<4\pi$이므로 ㉠에서

$$\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{4}x<\frac{2}{3}\pi$$

또는 $\frac{4}{3}\pi<\frac{\pi}{4}x<\frac{5}{3}\pi$

또는 $\frac{7}{3}\pi<\frac{\pi}{4}x<\frac{8}{3}\pi$

또는 $\frac{10}{3}\pi<\frac{\pi}{4}x<\frac{11}{3}\pi$

이다. 즉,

$\frac{4}{3}<x<\frac{8}{3}$ 또는 $\frac{16}{3}<x<\frac{20}{3}$ 또는

$\frac{28}{3}<x<\frac{32}{3}$ 또는 $\frac{40}{3}<x<\frac{44}{3}$

이므로 구하는 자연수 x의 값은

2, 6, 10, 14이다.

따라서 구하는 모든 자연수 x의 값의 합은

$2+6+10+14=32$

정답 32

20. 출제의도 : 접선의 방정식을 구하고, 이를 활용하여 두 선분의 길이의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=-x^3+ax^2+2x$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+2$

$f'(0)=2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=2x$

이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 만나는 점의 x좌표를 구해보자.

$f(x)=2x$에서

$-x^3+ax^2+2x=2x$

$x^2(x-a)=0$

$x=0$ 또는 $x=a$

점 A의 x좌표는 0이 아니므로 점 A의 x좌표는 a이다. 즉, 점 A의 좌표는

$(a,\ 2a)$

이다.

점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$\angle\mathrm{OAB}=\frac{\pi}{2}$

이다. 즉, 두 직선 OA와 AB는 서로 수직이다.

이때,

$f'(a)=-3a^2+2a^2+2$

$\quad=-a^2+2$

이므로

직선 AB의 기울기는 $-a^2+2$이다.

$2\times(-a^2+2)=-1$에서

$a^2=\frac{5}{2}$

$a>\sqrt{2}$이므로

$a=\frac{\sqrt{10}}{2}$

점 A의 좌표는

$\left(\frac{\sqrt{10}}{2},\ \sqrt{10}\right)$

이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)+\sqrt{10}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠에 $y=0$을 대입하면

$0=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)+\sqrt{10}$

$x=\frac{5\sqrt{10}}{2}$

점 B의 좌표는

$\left(\frac{5\sqrt{10}}{2},\ 0\right)$

이다.

따라서

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2+(\sqrt{10})^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$,

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2+(0-\sqrt{10})^2}=5\sqrt{2}$

이므로

$\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\times5\sqrt{2}=25$

정답 25

21. 출제의도 : 로그함수의 그래프를 이해하고 함수 $g(t)$가 최솟값을 갖도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$t=0$일 때, 구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 5를 가지므로

$g(0)=5$

한편, 함수 $y=-x^2+6x$는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이고 $f(5)=5$이므로 $1 \le t \le 5$일 때,

$g(t) \ge 5$

한편,

$f(5)=5$이고 $f(6)=0$

또, 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$가 최솟값을 5로 갖기 위해서는 $t=6$일 때, 구간 $[5, 7]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 5이상이어야 하므로

$f(7) \ge 5$

즉,

$a\log_4(7-5) \ge 5$

$a \times \log_{2^2}2 \ge 5$

$a \times \dfrac{1}{2} \ge 5$

$a \ge 10$

따라서, 양수 a의 최솟값은 10이다.

정답 10

22. **출제의도** : 미분법을 이용하여 조건을 만족시키는 삼차함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

문제의 조건으로부터

함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여 $f(k-1)f(k+1) \ge 0$을 만족시켜야 한다.

…… ㉠

함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 방정식 $f(x)=0$은 반드시 실근을 갖는다.

(ⅰ) 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수가 1인 경우

방정식 $f(x)=0$의 실근을 a라 할 때, a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면

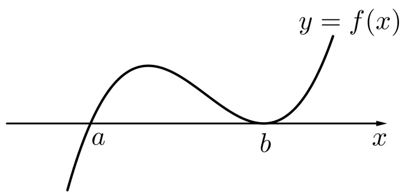
$f(m)<0<f(m+2)$

이므로 $f(m)f(m+2)<0$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

방정식 $f(x)=0$의 실근을 a, $b(a<b)$라 할 때, $f(x)=(x-a)(x-b)^2$ 또는 $f(x)=(x-a)^2(x-b)$이다.

(ⅱ-①) $f(x)=(x-a)(x-b)^2$일 때



a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면

$f(m-1)<0$, $f(m)<0$, $f(m+1) \ge 0$, $f(m+2) \ge 0$

이다. 이때 ㉠을 만족시키려면

$f(m-1)f(m+1) \ge 0$,

$f(m)f(m+2) \ge 0$이어야 하므로

$f(m+1)=f(m+2)=0$이어야 한다.

그러므로 $a=m+1$, $b=m+2$이다.

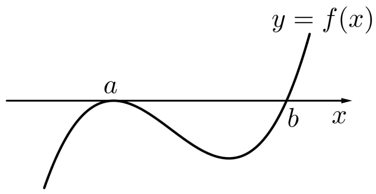
$f'\left(\dfrac{1}{4}\right)<0$이므로 $m+1<\dfrac{1}{4}<m+2$이고

정수 m의 값은 -1이다. …… ㉢

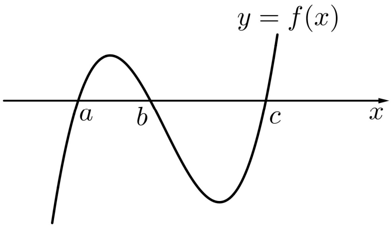
즉, $f(x)=x(x-1)^2$

그러나 이때 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f'\left(-\dfrac{1}{4}\right)>0$이므로 $f'\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{4}$을 만족시키지 않는다.

(ⅱ-②) $f(x)=(x-a)^2(x-b)$일 때



만약 $a<n<b$인 정수 n이 존재한다면 그 중 가장 큰 값을 n_1이라 하자. 그러면
$f(n_1)<0<f(n_1+2)$
이므로 $f(n_1)f(n_1+2)<0$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다. 즉, $a<n<b$인 정수 n은 존재하지 않는다. …… ㉣
그러므로 a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면
$f(m-1)<0$, $f(m)<0$, $f(m+1)\geq 0$,
$f(m+2)\geq 0$
이고, ㉢과 마찬가지로 $a=m+1$, $b=m+2$, 정수 m의 값은 -1이다.
즉, $f(x)=x^2(x-1)$
그러나 이때 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f'\left(-\frac{1}{4}\right)>0$이므로 $f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$을 만족시키지 않는다
(ⅲ) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우
$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ $(a<b<c)$
라 하자.



이때 ㉣과 마찬가지로 $b<n<c$인 정수 n은 존재하지 않는다. 그러므로 a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면
$f(m-1)<0$, $f(m)<0$, $f(m+1)\geq 0$,
$f(m+2)\geq 0$
이다. 이때 ㉠을 만족시키려면
$f(m-1)f(m+1)\geq 0$,
$f(m)f(m+2)\geq 0$이어야 하므로
$f(m+1)=f(m+2)=0$이어야 한다.
즉, $a=m+1$, $b=m+2$
또는 $a=m+1$, $c=m+2$
또는 $b=m+1$, $c=m+2$이다.
또, $f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}<0$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$이므로
$f'(0)<0$이다.
(ⅲ-①) $a=m+1$, $b=m+2$일 때
$a<n<b$ 또는 $b<n<c$인 정수 n은 존재하지 않고, $f'(0)<0$이므로 $b=m+2=0$이다. 이때 $a=m+1=-1$이므로
$f(x)=x(x+1)(x-c)=(x^2+x)(x-c)$
이다.
$f'(x)=(2x+1)(x-c)+(x^2+x)$
이므로
$$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{4}-c\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{4}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}c-\frac{5}{16}$$
$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$에서
$-\frac{1}{2}c-\frac{5}{16}=-\frac{1}{4}$, $c=-\frac{1}{8}$
그러나 이는 $b<c$에 모순이다.
(ⅲ-②) $a=m+1$, $c=m+2$일 때
$m+1$, $m+2$는 연속하는 두 정수이므로 $f'(n)<0$을 만족시키는 정수 n은 존재하지 않는다. 그러나 이는 $f'(0)<0$에 모순이다.
(ⅲ-③) $b=m+1$, $c=m+2$일 때
$a<n<b$ 또는 $b<n<c$인 정수 n은 존재하지 않고, $f'(0)<0$이므로 $b=m+1=0$이다. 이때 $c=m+1=1$이므로
$f(x)=(x-a)x(x-1)=(x-a)(x^2-x)$
이다.
$f'(x)=(x^2-x)+(x-a)(2x-1)$
이므로

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{16}+\left(-\frac{1}{4}-a\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{11}{16}+\frac{3}{2}a$$

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$ 에서

$\frac{11}{16}+\frac{3}{2}a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{5}{8}$

그리고 $a=-\frac{5}{8}$ 이면

$f'\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{16}+\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{8}$

이므로 $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$ 도 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 함수 $f(x)$는

$f(x)=\left(x+\frac{5}{8}\right)(x^2-x)$이다.

따라서 $f(8)=\frac{69}{8}\times 56=483$

정답 483

■ **[선택: 확률과 통계]**
23. ③ 24. ④ 25. ⑤ 26. ② 27. ②
28. ④ 29. 196 30. 673

23. 출제의도 : 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
문자 x 2개, 문자 y 2개, 문자 z 1개를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로
$$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$$

정답 ③

24. 출제의도 : 서로 독립인 두 사건에 대하여 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$\mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(A)$에서
$1-\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(A)$이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$
두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$에서
$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$
$\frac{1}{3}\times\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$
따라서
$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

정답 ④

25. 출제의도 : 여사건의 확률을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 사건의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
두 수의 합이 10 보다 큰 경우는
$5+6=11$
뿐이므로 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 10 이하인 사건을 A라 하면 사건 A^C는 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수가 $5, 6$인 사건이다.
따라서
$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{2!\times 4!}{6!}=\frac{1}{15}$$
이므로
$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$$

정답 ⑤

26. 출제의도 : 이산확률변수 Y의 평균을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$$\mathrm{P}(Y=0)=\mathrm{P}(X=0)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$
$$\mathrm{P}(Y=1)=\mathrm{P}(X=1)={}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(Y=2)=1-\mathrm{P}(Y=0)-\mathrm{P}(Y=1)$$
$$=1-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}$$
$$=\frac{11}{16}$$

확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	0	1	2	계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{16}$	1

따라서

$$\mathrm{E}(Y)=0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{11}{16}$$
$$=\frac{13}{8}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 표본을 이용하여 모평균을 추정하고 표본평균을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모표준편차가 5이고, 표본의 크기가 49, 표본평균이 $\overline{x}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{5}{\sqrt{49}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{5}{\sqrt{49}}$$

$$\overline{x}-1.4\le m\le\overline{x}+1.4$$

따라서 $a=\overline{x}-1.4$이고 $\frac{6}{5}a=\overline{x}+1.4$이므로

$$\frac{a}{5}=(\overline{x}+1.4)-(\overline{x}-1.4)=2.8$$

따라서

$$a=5\times2.8=14$$

이므로

$$\overline{x}=a+1.4=14+1.4=15.4$$

정답 ②

28. 출제의도 : 주어진 시행에서 조건부 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

상자 B에 들어있는 공의 개수가 8인 사건을 E, 상자 B에 들어있는 검은 공의 개수가 2인 사건을 F라 하면

구하는 확률은 $\mathrm{P}(F|E)=\dfrac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}$이다.

한 번의 시행에서 상자 B에 넣는 공의 개수는 1 또는 2 또는 3이므로

4번의 시행 후 상자 B에 들어있는 공의 개수가 8인 경우는

$8=3+3+1+1$

$8=3+2+2+1$

$8=2+2+2+2$

뿐이다.

(ⅰ) $8=3+3+1+1$인 경우

상자 B에 들어있는 검은 공의 개수는 2이다.

주머니에서 숫자 1이 적힌 카드 2장, 숫자 4가 적힌 카드 2장을 꺼내야 하므로 이 경우의 확률은

$$\frac{4!}{2!\times2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$$
$$=6\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

(ⅱ) $8=3+2+2+1$인 경우

상자 B에 들어있는 검은 공의 개수는 3이다.

주머니에서 숫자 1이 적힌 카드 1장, 숫자 2 또는 3이 적힌 카드 2장, 숫

자 4가 적힌 카드 1장을 꺼내야 하므로 이 경우의 확률은

$$\frac{4!}{2!}\times\left\{\left(\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{2}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)\right\}$$

$$=48\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

(iii) $8=2+2+2+2$인 경우

상자 B에 들어있는 검은 공의 개수는 4이다.

주머니에서 숫자 2 또는 3이 적힌 카드 4장을 꺼내야 하므로 이 경우의 확률은

$$\left(\frac{2}{4}\right)^4$$

$$=16\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

(i), (ii), (iii)에서

$$\mathrm{P}(E)=6\times\left(\frac{1}{4}\right)^4+48\times\left(\frac{1}{4}\right)^4+16\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$$=70\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$$\mathrm{P}(E\cap F)=6\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

따라서

$$\mathrm{P}(F|E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}$$

$$=\frac{6\times\left(\frac{1}{4}\right)^4}{70\times\left(\frac{1}{4}\right)^4}$$

$$=\frac{3}{35}$$

정답 ④

29. **출제의도** : 중복조합을 이용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) $a\le b\le c\le d$인 순서쌍의 개수

1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 4개를 택한 다음 크지 않은 순서대로 a, b, c, d의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6\mathrm{H}_4={}_{6+4-1}\mathrm{C}_4={}_9\mathrm{C}_4$$

$$=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$$

(ii) $b\le a\le c\le d$인 순서쌍의 개수

(i)과 마찬가지이므로

${}_6\mathrm{H}_4=126$

(iii) $a=b\le c\le d$인 순서쌍의 개수

1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 3개를 택한 다음 크지 않은 순서대로 $a\,(=b)$, c, d의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6\mathrm{H}_3={}_{6+3-1}\mathrm{C}_3={}_8\mathrm{C}_3$$

$$=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$126+126-56=196$

[다른 풀이]

(i) $a\le b\le c\le d$인 순서쌍의 개수

1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 4개를 택한 다음 크지 않은 순서대로 a, b, c, d의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6\mathrm{H}_4={}_{6+4-1}\mathrm{C}_4={}_9\mathrm{C}_4$$

$$=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$$

(ii) $b<a\le c\le d$인 순서쌍의 개수

① $b=1$일 때 $1<a\le c\le d$인 순서쌍의 개수는 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 3개를 택한

다음 크지 않은 순서대로 a, c, d의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$_5\mathrm{H}_3 = {}_{5+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_7\mathrm{C}_3 = 35$

② $b=2$일 때 $2 < a \le c \le d$인 순서쌍의 개수는 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 3개를 택한 다음 크지 않은 순서대로 a, c, d의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$_4\mathrm{H}_3 = {}_{4+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_6\mathrm{C}_3 = 20$

③ $b=3$일 때 $3 < a \le c \le d$인 순서쌍의 개수는 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 3개를 택한 다음 크지 않은 순서대로 a, c, d의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$_3\mathrm{H}_3 = {}_{3+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = 10$

④ $b=4$일 때 $4 < a \le c \le d$인 순서쌍의 개수는 5, 6 중에서 중복을 허락하여 3개를 택한 다음 크지 않은 순서대로 a, c, d의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$_2\mathrm{H}_3 = {}_{2+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_4\mathrm{C}_3 = 4$

⑤ $b=5$일 때 $5 < a \le c \le d$이려면 $a=c=d=6$이어야 하므로 순서쌍의 개수는 1

이상에서 $b < a \le c \le d$인 순서쌍의 개수는

$35+20+10+4+1=70$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$126+70=196$

정답 196

30. **출제의도** : 정규분포를 표준화하여 확률의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X의 평균이 1이므로

$\mathrm{P}(X \le 5t) \ge \dfrac{1}{2}$에서

$5t \ge 1$, 즉 $t \ge \dfrac{1}{5}$ … ㉠

확률변수 X의 평균이 1, 표준편차가 t이므로 $Z = \dfrac{X-1}{t}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\,1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(t^2-t+1 \le X \le t^2+t+1)$

$= \mathrm{P}\left(\dfrac{t^2-t}{t} \le \dfrac{X-1}{t} \le \dfrac{t^2+t}{t}\right)$

$= \mathrm{P}(t-1 \le Z \le t+1)$ … ㉡

이때 $(t+1)-(t-1)=2$로 일정하므로 t의 값이 확률변수 Z의 평균 0에 가까울수록 ㉡의 값은 증가한다.

따라서 ㉠에서 $t=\dfrac{1}{5}$일 때 ㉡의 최댓값은

$k = \mathrm{P}\left(\dfrac{1}{5}-1 \le Z \le \dfrac{1}{5}+1\right)$

$= \mathrm{P}(-0.8 \le Z \le 1.2)$

$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.8) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.2)$

$= 0.288 + 0.385$

$= 0.673$

이므로

$1000 \times k = 673$

정답 673