

\*최근 수정일 : 22.03.07

■ [공통: 수학 I·수학 II]

01.② 02.⑤ 03.⑤ 04.④ 05.①  
06.③ 07.① 08.① 09.④ 10.⑤  
11.③ 12.③ 13.② 14.③ 15.②  
16. 3 17. 4 18. 12 19. 6  
20. 110 21. 678 22. 9

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & (2^{\sqrt{3}} \times 4)^{\sqrt{3}-2} \\ &= (2^{\sqrt{3}} \times 2^2)^{\sqrt{3}-2} \\ &= (2^{\sqrt{3}+2})^{\sqrt{3}-2} \\ &= 2^{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} \\ &= 2^{3-4} \\ &= 2^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

정답 ②

2. 출제의도 : 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x + 1 \\ \text{이므로} \\ f'(1) &= 3 + 6 + 1 = 10 \end{aligned}$$

정답 ⑤

3. 출제의도 : 등차수열의 일반항을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하면

$$a_2 = a_1 + d = 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a_4 + a_6 = 36 \text{에서}$$

$$(a_1 + 3d) + (a_1 + 5d) = 36$$

$$2a_1 + 8d = 36$$

$$a_1 + 4d = 18 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①, ②에서

$$a_1 = 2, d = 4$$

따라서

$$a_{10} = 2 + 9 \times 4 = 38$$

정답 ⑤

4. 출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x \rightarrow -1 -$ 일 때,  $f(x) \rightarrow 3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1 -} f(x) = 3$$

또,  $x \rightarrow 2$ 일 때,  $f(x) \rightarrow 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

따라서,

$$\lim_{x \rightarrow -1 -} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 + 1 = 4$$

정답 ④

5. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$a_1 = 1 \text{이므로 } a_2 = 2$$

$$a_2 = 2 \text{이므로 } a_3 = 4$$

$$a_3 = 4 \text{이므로 } a_4 = 8$$

$$a_4 = 8 \text{이므로 } a_5 = 1$$

$$a_5 = 1 \text{이므로 } a_6 = 2$$

$$a_6 = 2 \text{이므로 } a_7 = 4$$

$$a_7 = 4 \text{이므로 } a_8 = 8$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 a_k &= 2 \times (1 + 2 + 4 + 8) \\ &= 2 \times 15 \\ &= 30 \end{aligned}$$

정답 ①

6. 출제의도 : 미분을 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\text{방정식 } 2x^3 - 3x^2 - 12x + k = 0, \text{ 즉}$$

$$2x^3 - 3x^2 - 12x = -k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

에서

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x \text{라 하자.}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$= 6(x+1)(x-2)$$

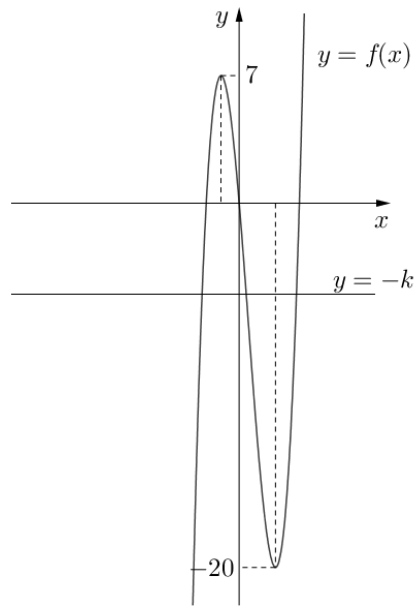
$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	$\dots$	$-1$	$\dots$	$2$	$\dots$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$7$	$\searrow$	$-20$	$\nearrow$

함수  $f(x)$ 는  $x = -1$ 에서 극댓값  $7$ 을 갖고,  $x = 2$ 에서 극솟값  $-20$ 을 갖는다.



방정식  $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 직선  $y = -k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$$-20 < -k < 7$$

$$\text{즉, } -7 < k < 20 \text{ 이다.}$$

따라서 정수  $k$ 의 값은

$$-6, -5, -4, \dots, 19$$

이고, 그 개수는  $26$ 이다.

정답 ③

7. 출제의도 : 삼각함수의 정의와 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\tan \theta - \frac{6}{\tan \theta} = 1 \text{이므로}$$

양변에  $\tan \theta$ 를 곱하면

$$\tan^2 \theta - 6 = \tan \theta$$

$$\tan^2 \theta - \tan \theta - 6 = 0$$

$$(\tan \theta + 2)(\tan \theta - 3) = 0$$

$$\tan \theta = -2 \text{ 또는 } \tan \theta = 3$$

이때,  $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이므로

$$\tan \theta = 3$$

이때,

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 3,$$

$$\sin \theta = 3 \cos \theta$$

이므로

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에 대입하면

$$9 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$10 \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{또는} \quad \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

이때,  $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}} \quad \dots\dots \textcircled{\ominus}$$

이 값을  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에 대입하면

$$\sin^2 \theta + \frac{1}{10} = 1$$

$$\sin^2 \theta = \frac{9}{10}$$

$$\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \text{또는} \quad \sin \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

이때,  $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이므로

$$\sin \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}} \quad \dots\dots \textcircled{\ominus}$$

따라서,  $\textcircled{\ominus}$ 과  $\textcircled{\ominus}$ 에서

$$\begin{aligned} \sin \theta + \cos \theta &= \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \\ &= -\frac{4}{\sqrt{10}} \\ &= -\frac{2\sqrt{10}}{5} \end{aligned}$$

정답 ①

8. 출제의도 : 정적분을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

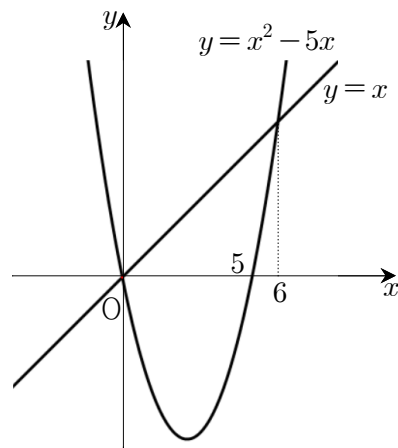
정답풀이 :

$$x^2 - 5x = x \text{에서}$$

$$x(x-6)=0$$

$$x=0 \quad \text{또는} \quad x=6$$

곡선  $y = x^2 - 5x$ 와 직선  $y = x$ 가 만나는 점은 원점과 (6, 6)이다.



곡선  $y = x^2 - 5x$ 와 직선  $y = x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^6 \{x - (x^2 - 5x)\} dx$$

$$= \int_0^6 (6x - x^2) dx$$

$$= \left[ 3x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^6$$

$$= 36$$

따라서 직선  $x = k$ 가 넓이를 이등분하므로

$$18 = \int_0^k \{x - (x^2 - 5x)\} dx$$

$$= \int_0^k (6x - x^2) dx$$

$$= \left[ 3x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^k$$

$$= 3k^2 - \frac{1}{3}k^3$$

정리하면

$$k^3 - 9k^2 + 54 = 0$$

$$(k-3)(k^2 - 6k - 18) = 0$$

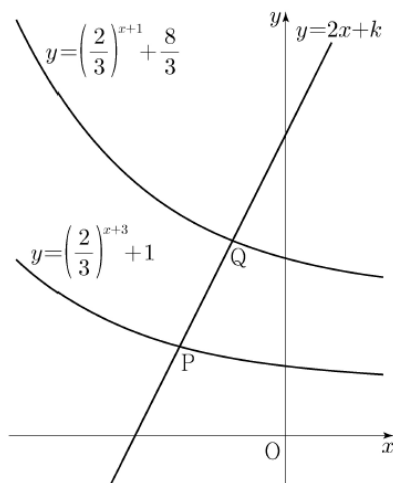
즉,  $0 < k < 6$ 이므로

$$k = 3$$

정답 ①

9. 출제의도 : 지수방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



두 점 P, Q의 x좌표를 각각

$p, q (p < q)$ 라 하면

두 점 P, Q는 직선  $y = 2x + k$  위의 점이므로

$$P(p, 2p+k), Q(q, 2q+k)$$

로 놓을 수 있다.

이때,  $\overline{PQ} = \sqrt{5}$ , 즉  $\overline{PQ}^2 = 5$ 이므로

$$(q-p)^2 + (2q-2p)^2 = 5$$

$$(q-p)^2 = 1$$

$q-p > 0$ 이므로

$$q-p = 1$$

즉,  $q = p+1$ 이다.

한편, 점 P는 함수  $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+3} + 1$ 의

그래프 위의 점이므로

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3} + 1 = 2p+k \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

점 Q는 함수  $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} + \frac{8}{3}$ 의 그래프

위의 점이므로

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2} + \frac{8}{3} = 2p+k+2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2} + \frac{8}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{p+3} + 3$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2} = 1$$

$$p+2=0, \text{ 즉 } p=-2$$

$p=-2$ 를 ㉠에 대입하면

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2+3} + 1 = 2 \times (-2) + k$$

$$\text{따라서 } k = \frac{17}{3}$$

정답 ④

10. 출제의도 : 다항함수의 도함수와 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점  $(0, 0)$ 이 삼차함수  $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

$$f(0) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이때, 점  $(0, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = f'(0)(x-0) + 0$$

$$y = f'(0)x \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

또, 곡선  $y = xf(x)$  위에 점  $(1, 2)$ 가 있으므로

$$1 \times f(1) = 2$$

$$f(1) = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$y = xf(x)$ 에서  
 $y' = f(x) + xf'(x)$ 이므로  
 $(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식은  
 $y = \{f(1) + f'(1)\}(x-1) + 2$   
 $= \{f'(1) + 2\}(x-1) + 2$   
 $= \{f'(1) + 2\}x - f'(1) \dots\dots \textcircled{A}$   
 이때,  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 라 하면  
 $\textcircled{A}$ 에서  
 $d = 0$   
 이때,  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 이므로  
 $\textcircled{A}$ 에서  
 $a + b + c = 2 \dots\dots \textcircled{B}$   
 $\textcircled{A}$ 과  $\textcircled{B}$ 에서  
 두 접선이 일치해야 하므로  
 $f'(0) = f'(1) + 2, f'(1) = 0$   
 따라서  $f'(0) = 2, f'(1) = 0$   
 이때,  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ 이므로  
 $f'(0) = 2$ 에서  
 $c = 2$   
 이때,  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 2$ 이므로  
 $f'(1) = 0$ 에서  
 $3a + 2b + 2 = 0$   
 $\textcircled{B}$ 에서  $c = 2$ 를 대입하면  
 $a + b = 0$ 이므로  
 $b = -a$ 를 위 식에 대입하여  $a, b$ 를 구하  
 면  $a = -2, b = 2$ 이므로  
 $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 2x,$   
 $f'(x) = -6x^2 + 4x + 2$   
 따라서  
 $f'(2) = -14$

정답 ⑤

11. 출제의도 : 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 조건을 만족하는 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{\pi}{\frac{\pi}{a}} = a \text{이므로}$$

함수  $f(x)$ 의 주기는  $a$ 이다.

직선 AB는 원점을 지나고 기울기가  $\sqrt{3}$ 인 직선이므로

양수  $t$ 에 대하여

$B(t, \sqrt{3}t)$ 로 놓으면

$A(-t, -\sqrt{3}t)$ 이고,

$\overline{AB} = 4t$ 이다.

이때, 함수  $f(x)$ 의 주기가  $a$ 이므로

$\overline{AC} = 4t = a$ 이고,

$C(-t + a, -\sqrt{3}t)$ , 즉  $C(3t, -\sqrt{3}t)$ 이다.

점 C가 곡선  $y = \tan \frac{\pi x}{a} = \tan \frac{\pi x}{4t}$  위의

점이므로

$$-\sqrt{3}t = \tan \frac{\pi \times 3t}{4t}$$

$$-\sqrt{3}t = \tan \frac{3\pi}{4} \text{에서}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{4} \times (4t)^2 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

정답 ③

12. 출제의도 : 함수의 연속의 성질을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\{f(x)\}^3 - \{f(x)\}^2 - x^2 f(x) + x^2 = 0 \text{에서}$$

$$\{f(x)-1\}\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}=0$$

이므로

$$f(x)=1 \text{ 또는 } f(x)=-x \text{ 또는 } f(x)=x$$

이때,  $f(0)=1$  또는  $f(0)=0$ 이다.

(i)  $f(0)=1$ 일 때,

함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속  
이고, 최댓값이 1이므로

$$f(x)=1$$

이다. 이때, 함수  $f(x)$ 의 최솟값이 0이  
아니므로 주어진 조건을 만족시키지 못  
한다.

(ii)  $f(0)=0$ 일 때,

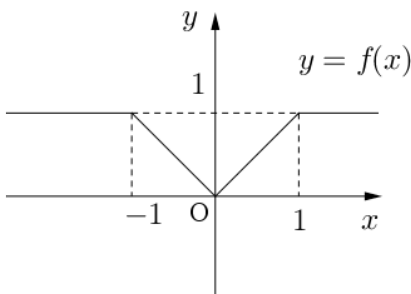
함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속  
이고, 최댓값이 1이므로

$$f(x)=\begin{cases} |x| & (|x| \leq 1) \\ 1 & (|x| > 1) \end{cases}$$

이다.

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases} |x| & (|x| \leq 1) \\ 1 & (|x| > 1) \end{cases}$$



따라서

$$f\left(-\frac{4}{3}\right)=1, f(0)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

이므로

$$f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1+0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

정답 ③

13. 출제의도 : 로그의 정의와 성질을  
활용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점  $(a, \log_2 a)$ ,  $(b, \log_2 b)$ 를 지나는

직선의 방정식은

$$y = \frac{\log_2 b - \log_2 a}{b - a}(x - a) + \log_2 a$$

그러므로 이 직선의  $y$ 절편은

$$-\frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b - a} + \log_2 a \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

두 점  $(a, \log_4 a)$ ,  $(b, \log_4 b)$ 를 지나는

직선의 방정식은

$$y = \frac{\log_4 b - \log_4 a}{b - a}(x - a) + \log_4 a$$

그러므로 이 직선의  $y$ 절편은

$$\begin{aligned} & -\frac{a(\log_4 b - \log_4 a)}{b - a} + \log_4 a \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b - a} + \frac{1}{2} \log_2 a \quad \dots\dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

⑦과 ⑧이 같으므로

$$\begin{aligned} & -\frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b - a} + \log_2 a \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b - a} + \frac{1}{2} \log_2 a \end{aligned}$$

이 식을 정리하면

$$\frac{1}{2} \times \log_2 a = \frac{1}{2} \times \frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b - a}$$

$$\log_2 a = \frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b - a}$$

$$(b - a)\log_2 a = a\log_2 \frac{b}{a}$$

$$\log_2 a^{b-a} = \log_2 \left(\frac{b}{a}\right)^a$$

$$a^{b-a} = \frac{b^a}{a^a}$$

$$a^b = b^a \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

한편,  $f(x) = a^{bx} + b^{ax}$ 이고

$f(1) = 40$ 이므로

$$a^b + b^a = 40$$

㊸을 대입하면

$$a^b + a^b = 40$$

$$a^b = 20$$

따라서  $b^a = 20$ 이므로

$$f(2) = a^{2b} + b^{2a}$$

$$= (a^b)^2 + (b^a)^2$$

$$= 20^2 + 20^2$$

$$= 800$$

정답 ②

14. 출제의도 : 수직선 위를 움직이는 점의 운동에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

$$x(0) = 0, x(1) = 0 \text{이므로}$$

점 P의 위치는  $t=0$ 일 때 수직선의 원점이고,  $t=1$ 일 때도 수직선의 원점이다.

$$\text{또, } \int_0^1 |v(t)| dt = 2 \text{이므로}$$

점 P가  $t=0$ 에서  $t=1$ 까지 움직인 거리가 2이다.

ㄱ. 점 P의  $t=0$ 에서  $t=1$ 까지 위치의 변화량이 0이므로

$$\int_0^1 v(t) dt = 0 \text{ (참)}$$

ㄴ.  $|x(t_1)| > 1$ 이면

점 P와 원점 사이의 거리가 1보다 큰 시각  $t_1$ 이 존재하므로

점 P가  $t=0$ 에서  $t=1$ 까지

움직인 거리가 2보다 크다. (거짓)

ㄷ.  $0 \leq t \leq 1$ 인 모든 시각  $t$ 에서

점 P와 원점 사이의 거리가 1

보다 작고, 점 P가  $t=0$ 에서  $t=1$

까지 움직인 거리가 2이므로

점 P는  $0 < t < 1$ 에서 적어도 한 번

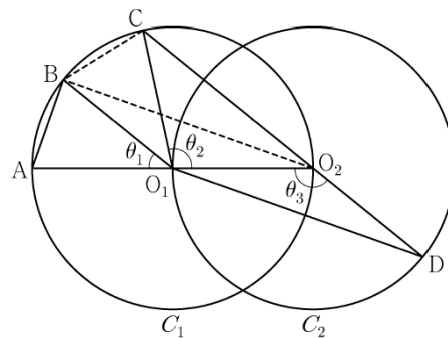
원점을 지나간다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답 ③

15. 출제의도 : 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이의 비를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$$\angle CO_2O_1 + \angle O_1O_2D = \pi \text{이므로}$$

$$\theta_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_2}{2} \text{이고}$$

$$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2 \text{에서 } 2\theta_1 + \theta_2 = \pi \text{이므로}$$

$$\angle CO_1B = \theta_1 \text{이다.}$$

$$\text{이때, } \angle O_2O_1B = \theta_1 + \theta_2 = \theta_3 \text{이므로}$$

삼각형  $O_1O_2B$ 와 삼각형  $O_2O_1D$ 는 합동이다.

$\overline{AB} = k$ 라 할 때,

$$\overline{BO_2} = \overline{O_1D} = 2\sqrt{2}k \text{이므로}$$

$$\overline{AO_2} = \sqrt{k^2 + (2\sqrt{2}k)^2} = \boxed{3k} \text{이고,}$$

$$\angle BO_2A = \frac{\theta_1}{2} \text{이므로}$$

$$\cos \frac{\theta_1}{2} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \text{이다.}$$

삼각형  $O_2BC$ 에서

$$\overline{BC}=k, \overline{BO_2}=2\sqrt{2}k, \angle CO_2B=\frac{\theta_1}{2} \text{이므로}$$

삼각형  $BO_2C$ 에서

$$\overline{O_2C}=x(0 < x < 3k) \text{라 하면}$$

코사인법칙에 의하여

$$k^2 = x^2 + (2\sqrt{2}k)^2 - 2 \times x \times 2\sqrt{2}k \times \cos \frac{\theta_1}{2}$$

$$k^2 = x^2 + (2\sqrt{2}k)^2 - 2 \times x \times 2\sqrt{2}k \times \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$3x^2 - 16kx + 21k^2 = 0$$

$$(3x - 7k)(x - 3k) = 0$$

$$0 < x < 3k \text{이므로}$$

$$x = \frac{7}{3}k$$

$$\text{즉, } \overline{O_2C} = \boxed{\frac{7}{3}k} \text{이다.}$$

$$\overline{CD} = \overline{O_2D} + \overline{O_2C} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2C} \text{이므로}$$

$$\overline{AB} : \overline{CD} = k : \left( \boxed{\frac{3k}{2}} + \boxed{\frac{7}{3}k} \right) \text{이다.}$$

이상에서

$$f(k) = 3k, g(k) = \frac{7}{3}k, p = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이므로

$$\begin{aligned} f(p) \times g(p) &= \left( 3 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \times \left( \frac{7}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \\ &= \frac{56}{9} \end{aligned}$$

정답 ②

16. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \log_2 120 - \frac{1}{\log_{15} 2} \\ = \log_2 120 - \log_2 15 \end{aligned}$$

$$= \log_2 \frac{120}{15}$$

$$= \log_2 8$$

$$= \log_2 2^3$$

$$= 3$$

정답 3

17. 출제의도 : 도함수가 주어진 함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (3x^2 + 2x) dx \\ &= x^3 + x^2 + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)} \end{aligned}$$

$$\text{이때, } f(0) = 2 \text{이므로 } C = 2$$

따라서

$$f(x) = x^3 + x^2 + 2 \text{이므로}$$

$$f(1) = 1 + 1 + 2 = 4$$

정답 4

18. 출제의도 : 합의 기호  $\sum$ 의 성질을 이용하여 수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^7 \frac{a_k}{2} = 56 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^8 a_k = 100 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^8 \frac{a_k}{2} = 50 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 을 하면

$$\frac{a_8}{2} = 6$$



따라서  $a_8 = 12$

정답 12

19. 출제의도 : 미분을 이용하여 함수의 그래프의 개형을 알 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = x^3 + ax^2 - (a^2 - 8a)x + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - (a^2 - 8a)$$

이때, 함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면

$$f'(x) \geq 0$$

이때, 이차방정식  $f'(x) = 0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면  $D/4 \leq 0$ 이어야 하므로

$$D/4 = a^2 - 3(-a^2 + 8a)$$

$$= 4a^2 - 24a$$

$$= 4a(a - 6) \leq 0$$

그러므로

$$0 \leq a \leq 6$$

따라서,  $a$ 의 최댓값은 6이다.

정답 6

20. 출제의도 : 조건을 만족시키는 함수  $f(x)$ 에 대하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x+1) - xf(x) = ax + b \text{에}$$

$x = 0$ 을 대입하면

$$f(1) = b$$

닫힌구간  $[0, 1]$ 에서  $f(x) = x$ 이므로

$$b = 1$$

또,  $f(x+1) - xf(x) = ax + 1$ 이므로

$0 \leq x \leq 1$ 에서

$$f(x+1) = xf(x) + ax + 1$$

$$= x^2 + ax + 1$$

$x+1=t$ 로 치환하면

$$f(t) = (t-1)^2 + a(t-1) + 1$$

$$= t^2 + (a-2)t + 2 - a \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$f'(t) = 2t + (a-2) \text{이고,}$$

닫힌구간  $[0, 1]$ 에서  $f(x) = x$ 이고, 함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로  $f'(1) = 1$ 이므로

$$a = 1$$

따라서  $\textcircled{7}$ 에서  $1 \leq x \leq 2$ 일 때

$$f(x) = x^2 - x + 1 \text{ 이다.}$$

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x^2 - x + 1) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_1^2$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{5}{6} = \frac{11}{6}$$

$$\text{즉, } 60 \times \int_1^2 f(x) dx = 60 \times \frac{11}{6}$$

$$= 110$$

정답 110

21. 출제의도 : 등비수열의 합을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가), (나)에서

수열  $\{|a_n|\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 2인

등비수열이므로

$$|a_n| = 2^n$$

한편,

$$\sum_{k=1}^9 |a_k| = \sum_{k=1}^9 2^k = \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} = 2^{10} - 2,$$

$$|a_{10}| = 2^{10}$$

조건 (다)에서

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = -14$$

를 만족하기 위해서는

$$a_1 = -2, a_2 = -4$$

$$\sum_{k=3}^9 a_k = \sum_{k=3}^9 2^k = \frac{2^3(2^7-1)}{2-1} = 2^{10} - 8,$$

$$a_{10} = -1024$$

이어야 한다.

따라서

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$$

$$= (-2) + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9$$

$$= 678$$

정답 678

## 22. 출제의도 :

함수의 극한을 이용하여 도함수  $f'(x)$ 의 특징을 찾아 조건을 만족시키는 함수  $f(x)$ 를 구할 수 있는가?

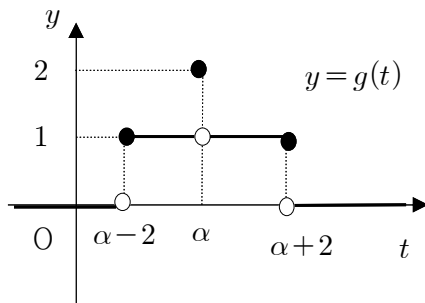
### 정답풀이 :

이차방정식  $f'(x) = 0$ 이 실근을 갖지 않거나 중근을 갖는 경우에는 조건(나)에서 함수  $g(t)$ 가 함숫값 1과 2를 모두 갖는다는 조건에 모순이다.

그러므로 이차방정식  $f'(x) = 0$ 는 서로 다른 두 실근  $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 를 갖는다.

(i)  $\beta = \alpha + 2$ 일 때,

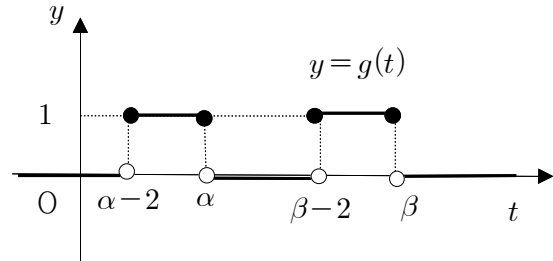
함수  $y = g(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이는 조건 (가)를 만족한다.

(ii)  $\beta > \alpha + 2$ 일 때,

함수  $y = g(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.

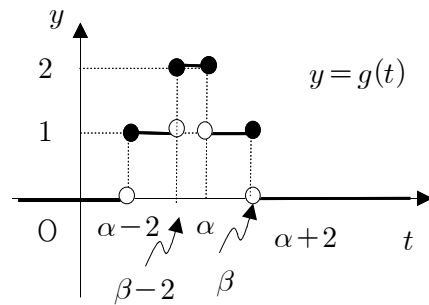


이는 조건 (나)에서

$g(t)$ 가 함숫값 2를 갖는 것에 모순이다.

(iii)  $\beta < \alpha + 2$ 일 때,

함수  $y = g(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때,  $\beta - 2 \leq a \leq \alpha$ 인  $a$ 에 대하여 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

따라서 위에서 조건을 만족시키는 것은 (i)의 경우이다.

한편, 함수  $f(x)$ 의 최고차항의 계수가  $\frac{1}{2}$ 이므로 함수  $f'(x)$ 의 최고차항의 계수는  $\frac{3}{2}$ 이다.

그러므로

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x-\alpha)\{x-(\alpha+2)\}$$

$$= \frac{3}{2}\{x^2 - (2\alpha+2)x + \alpha^2 + 2\alpha\}$$

로 놓을 수 있다.

이때,

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}(\alpha+1)x^2 + \frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)x + C$$

(단,  $C$ 는 적분상수) ..... ㉠

한편, 조건 (나)에서

$$g(f(1)) = g(f(4)) = 2$$

이고  $g(t)$ 의 함숫값이 2인  $t$ 의 값의 개수는 1이므로

$$f(1) = f(4)$$

㉠에서

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2}(\alpha+1) + \frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha) + C$$

$$= 32 - 24(\alpha+1) + 6(\alpha^2+2\alpha) + C$$

따라서

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2}(\alpha+1) + \frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)$$

$$= 32 - 24(\alpha+1) + 6(\alpha^2+2\alpha)$$

양변에 2를 곱하면

$$1 - 3(\alpha+1) + 3(\alpha^2+2\alpha)$$

$$= 64 - 48(\alpha+1) + 12(\alpha^2+2\alpha)$$

이 식을 정리하면

$$3\alpha^2 + 3\alpha - 2 = 12\alpha^2 - 24\alpha + 16$$

$$9\alpha^2 - 27\alpha + 18 = 0$$

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

$$(\alpha-1)(\alpha-2) = 0$$

$$\alpha = 1 \text{ 또는 } \alpha = 2$$

(( i )-㉠)  $\alpha = 1$ 일 때,

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + C$$

이때,  $f(1) = \alpha$ 에서

$$f(1) = 1 \text{ 이어야 하므로}$$

$$\frac{1}{2} - 3 + \frac{9}{2} + C = 1$$

$$2 + C = 1$$

$$C = -1$$

이때,  $f(0) = -1$ 이므로

$$g(f(0)) = g(-1) = 1$$

그러므로 조건을 만족시킨다.

(( i )-㉡)  $\alpha = 2$ 일 때,

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 12x + C$$

이때,  $f(1) = \alpha$ 에서

$$f(1) = 2 \text{ 이어야 하므로}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{9}{2} + 12 + C = 2$$

$$8 + C = 2$$

$$C = -6$$

이때,  $f(0) = -6$ 이므로

$$g(f(0)) = g(-6) = 0$$

그러므로 조건을 만족시키지 못한다.

따라서, (( i )-㉠)에서

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x - 1$$

이므로

$$f(5) = \frac{1}{2} \times 5^3 - 3 \times 25 + \frac{9}{2} \times 5 - 1$$

$$= \frac{125}{2} - 75 + \frac{45}{2} - 1$$

$$= 9$$

정답 9

[선택: 확률과 통계]

23. ④ 24. ④ 25. ① 26. ③ 27. ②  
28. ① 29. 31 30. 191

23. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 전개식의 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(x+2)^7$ 의 전개식의 일반항은

$${}_7C_r x^{7-r} \times 2^r \quad (\text{단, } r=0,1,2,\dots,7)$$

이므로

$x^5$ 의 계수는  $r=2$ 일 때

$${}_7C_2 \times 2^2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} \times 4 = 84$$

정답 ④

24. 출제의도 : 이항분포를 따르는 확률변수의 분산을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$V(X) = n \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}n$$

이므로

$$V(2X) = 4V(X)$$

$$= 4 \times \frac{2}{9}n$$

$$= \frac{8}{9}n = 40$$

따라서,  $n=45$

정답 ④

25. 출제의도 : 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서

$$a^2 - b^2 = -5 \quad \text{또는} \quad a^2 - b^2 = 5$$

즉,

$$(b-a)(b+a) = 5 \quad \text{또는} \quad (a-b)(a+b) = 5$$

이고  $a, b$ 는 자연수이므로

$$b-a=1, \quad b+a=5$$

또는

$$a-b=1, \quad a+b=5$$

따라서,  $a=2, b=3$  또는  $a=3, b=2$ 이다.

또한, 조건 (가)에서

$$a+b+c+d+e=12$$

이므로  $c+d+e=7$  이고  $c, d, e$ 는 자연수

이므로

$$c=c'+1, \quad d=d'+1, \quad e=e'+1$$

( $c', d', e'$ 은 음이 아닌 정수)

로 놓으면

$$(c'+1)+(d'+1)+(e'+1)=7$$

$$c'+d'+e'=4$$

이를 만족시키는 모든 순서쌍 ( $c', d', e'$ )의 개수는

$${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4$$

$$= {}_6C_4$$

$$= {}_6C_2$$

$$= \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

따라서, 구하는 모든 순서쌍 ( $a, b, c, d, e$ )의 개수는

$$2 \times 15 = 30$$

정답 ①

26. 출제의도 : 여사건의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4이하이거나 7이상인 사건을  $A$ 라 하면 사건  $A^C$ 은 카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4보다 크고 7보다 작은 경우이다. 즉, 카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 5 또는 6이므로

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^C) \\ &= 1 - \frac{{}_5C_2 + {}_4C_2}{{}_{10}C_3} \\ &= 1 - \frac{\frac{5 \times 4}{2 \times 1} + \frac{4 \times 3}{2 \times 1}}{\frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1}} \\ &= 1 - \frac{16}{120} \\ &= \frac{13}{15} \end{aligned}$$

정답 ③

27. 출제의도 : 모평균을 추정하여 신뢰구간을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

전기 자동차 100대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이  $\bar{x}_1$ 일 때, 모평균  $m$ 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_1 - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \leq m \leq \bar{x}_1 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}}$$

$$\bar{x}_1 - 1.96 \times \frac{\sigma}{10} \leq m \leq \bar{x}_1 + 1.96 \times \frac{\sigma}{10}$$

전기 자동차 400대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이  $\bar{x}_2$ 일

때, 모평균  $m$ 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_2 - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}} \leq m \leq \bar{x}_2 + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}}$$

$$\bar{x}_2 - 2.58 \times \frac{\sigma}{20} \leq m \leq \bar{x}_2 + 2.58 \times \frac{\sigma}{20}$$

이때,  $a = c$  에서

$$\bar{x}_1 - 1.96 \times \frac{\sigma}{10} = \bar{x}_2 - 2.58 \times \frac{\sigma}{20}$$

이고  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1.34$  이므로

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1.96 \times \frac{\sigma}{10} - 2.58 \times \frac{\sigma}{20}$$

$$= 0.67 \times \frac{\sigma}{10} = 1.34$$

$$\sigma = \frac{1.34 \times 10}{0.67} = 20$$

따라서,

$$b - a = 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{10}$$

$$= 2 \times 1.96 \times 2$$

$$= 7.84$$

정답 ②

28. 출제의도 : 조건을 만족시키는 함수  $f$ 의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 의하여

$$f(1) \geq 1$$

$$f(2) \geq \sqrt{2} > 1$$

$$f(3) \geq \sqrt{3} > 1$$

$$f(4) \geq \sqrt{4} = 2$$

$$f(5) \geq \sqrt{5} > 2$$

이고 조건 (나)에 의하여 치역으로 가능한 경우는

$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}$   
이다.

(i) 치역이  $\{1,2,3\}$ 인 경우

$f(1)=1, f(5)=3$  이므로  $\{2,3,4\}$ 에서  
 $\{2,3\}$ 으로의 함수 중에서 치역이  $\{3\}$ 인  
함수를 제외하면 되므로 조건을 만족시  
키는 함수의 개수는

$${}_2\Pi_3 - 1 = 2^3 - 1 = 7$$

(ii) 치역이  $\{1,2,4\}$ 인 경우

(i)의 경우와 마찬가지로 조건을 만족시  
키는 함수의 개수는 7이다.

(iii) 치역이  $\{1,3,4\}$ 인 경우

$f(1)=1$  이므로  $\{2,3,4,5\}$ 에서  $\{3,4\}$ 로의  
함수 중에서 치역이  $\{3\}, \{4\}$ 인 함수를  
제외하면 되므로 조건을 만족시키는 함  
수의 개수는

$${}_2\Pi_4 - 2 = 2^4 - 2 = 14$$

(iv) 치역이  $\{2,3,4\}$ 인 경우

((iv)-①)  $f(5)=3$  인 경우

$\{1,2,3,4\}$ 에서  $\{2,3,4\}$ 로의 함수 중에서  
치역이  $\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{3,4\}$ 인  
함수를 제외하면 되므로 조건을 만족시  
키는 함수의 개수는

$${}_3\Pi_4 - \{3 + ({}_2\Pi_4 - 2) \times 2\}$$

$$= 3^4 - \{3 + (2^4 - 2) \times 2\}$$

$$= 81 - 31$$

$$= 50$$

((iv)-②)  $f(5)=4$  인 경우

((iv)-①)의 경우와 마찬가지로 조건을  
만족시키는 함수의 개수는 50이다.

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여 구하는 함수  
 $f$ 의 개수는

$$7 + 7 + 14 + 50 \times 2 = 128$$

정답 ①

29. 출제의도 : 확률밀도함수의 그래프를  
이용하여 연속확률변수의 확률을 구할  
수 있는가?

정답풀이 :

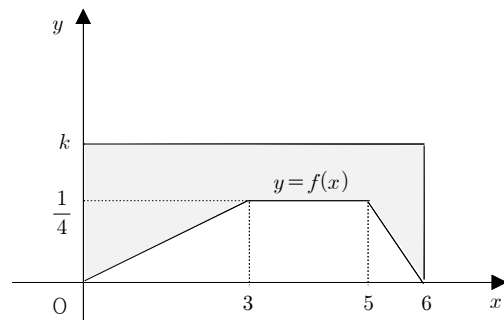
$0 \leq x \leq 6$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$f(x) + g(x) = k \quad (k \text{는 상수})$$

이므로

$$g(x) = k - f(x)$$

이때,  $0 \leq Y \leq 6$ 이고 확률밀도함수의  
정의에 의하여  $g(x) = k - f(x) \geq 0$  즉,  
 $k \geq f(x)$  이므로 그림과 같이 세 직선  
 $x=0, x=6, y=k$  및 함수  $y=f(x)$ 의  
그래프로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이  
는 1이다.



또한,  $0 \leq x \leq 6$ 에서 함수  $y=f(x)$ 의 그  
래프와  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이도  
1이므로

$$k \times 6 = 2$$

따라서,  $k = \frac{1}{3}$

이때,

$$P(6k \leq Y \leq 15k) = P(2 \leq Y \leq 5)$$

이고 이 값은 세 직선  $x=2, x=5,$

$y = \frac{1}{3}$  및 함수  $y=f(x)$ 의 그래프로 둘

러싸인 부분의 넓이와 같고,  $0 \leq x \leq 3$

에서  $f(x) = \frac{1}{12}x$ 이므로

$$P(6k \leq Y \leq 15k)$$

$$= P(2 \leq Y \leq 5)$$

$$= \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \{f(2) + f(3)\} \times 1 \right] + \left( \frac{1}{3} \times 2 - \frac{1}{4} \times 2 \right)$$

$$= \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) \right\} + \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{3}{24} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{7}{24}$$

따라서,  $p = 24$ ,  $q = 7$  이므로

$$p + q = 31$$

정답 31

30. 출제의도 : 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_5 + b_5 \geq 7$ 인 사건을  $A$ ,  $a_k = b_k$ 인 자연수  $k(1 \leq k \leq 5)$ 가 존재하는 사건을  $B$ 라 하자.

사건  $A$ 가 일어나는 경우는

$$a_5 + b_5 = 7 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1$$

$$a_5 + b_5 = 8 = 2 + 2 + 2 + 1 + 1$$

$$a_5 + b_5 = 9 = 2 + 2 + 2 + 2 + 1$$

$$a_5 + b_5 = 10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

이고 주사위의 눈의 수가 5이상일 확률은  $\frac{1}{3}$ , 4이하일 확률은  $\frac{2}{3}$ 이므로

(i)  $a_5 + b_5 = 7$ 일 확률은

$${}_5C_2 \left( \frac{1}{3} \right)^2 \left( \frac{2}{3} \right)^3 = 10 \times \frac{8}{3^5}$$

(ii)  $a_5 + b_5 = 8$ 일 확률은

$${}_5C_3 \left( \frac{1}{3} \right)^3 \left( \frac{2}{3} \right)^2 = 10 \times \frac{4}{3^5}$$

(iii)  $a_5 + b_5 = 9$ 일 확률은

$${}_5C_4 \left( \frac{1}{3} \right)^4 \left( \frac{2}{3} \right)^1 = 5 \times \frac{2}{3^5}$$

(iv)  $a_5 + b_5 = 10$ 일 확률은

$${}_5C_5 \left( \frac{1}{3} \right)^5 = \frac{1}{3^5}$$

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여

$$P(A) = 10 \times \frac{8}{3^5} + 10 \times \frac{4}{3^5} + 5 \times \frac{2}{3^5} + \frac{1}{3^5}$$

또한, 사건  $A \cap B$ 인 경우는 (i), (ii)의 경우 3번째 시행까지 5이상의 눈의 수가 1번, 4이하의 눈의 수가 2번 일어나야 하고 (iii), (iv)인 경우는 사건  $A \cap B$ 은 일어나지 않는다.

$$P(A \cap B)$$

$$= {}_3C_1 \left( \frac{1}{3} \right)^1 \left( \frac{2}{3} \right)^2 \times {}_2C_1 \left( \frac{1}{3} \right) \left( \frac{2}{3} \right) + {}_3C_1 \left( \frac{1}{3} \right) \left( \frac{2}{3} \right)^2 \times \left( \frac{1}{3} \right)^2$$

$$= 3 \times \frac{16}{3^5} + 3 \times \frac{4}{3^5}$$

그러므로, 구하는 확률은

$$P(B|A)$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{3 \times \frac{16}{3^5} + 3 \times \frac{4}{3^5}}{10 \times \frac{8}{3^5} + 10 \times \frac{4}{3^5} + 5 \times \frac{2}{3^5} + \frac{1}{3^5}}$$

---

$$= \frac{48 + 12}{80 + 40 + 10 + 1}$$

$$= \frac{60}{131}$$

이므로

$$p = 131, \quad q = 60$$

$$\text{따라서, } p + q = 131 + 60 = 191$$

정답 191



[선택: 미적분]

23. ⑤ 24. ④ 25. ② 26. ③ 27. ①  
28. ② 29. 11 30. 143

23. 출제의도 : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n} - \frac{2}{n^3}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}\right) \times n}{\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^3}\right) \times n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{3}{n}}{1 - \frac{2}{n^2}} \\ &= \frac{5+0}{1-0} = 5 \end{aligned}$$

정답 ⑤

24. 출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x^3+x) = e^x$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f'(x^3+x) \times (3x^2+1) = e^x \cdots \textcircled{7}$$

이다.

$$x^3+x=2 \text{에서}$$

$$x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)=0$$

이므로  $x=1$ 이다.

따라서 ⑦의 양변에  $x=1$ 을 대입하면

$$f'(1+1) \times (3+1) = e$$

이므로

$$f'(2) = \frac{e}{4}$$

정답 ④

25. 출제의도 : 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ 라 하면

$$a_n = ar^{n-1}$$

이때

$$\begin{aligned} a_{2n-1} - a_{2n} &= ar^{2n-2} - ar^{2n-1} \\ &= ar^{2n-2}(1-r) \\ &= a(1-r)(r^2)^{n-1} \end{aligned}$$

이므로 수열  $\{a_{2n-1} - a_{2n}\}$ 은 첫째항이  $a(1-r)$ 이고 공비가  $r^2$ 인 등비수열이다.

따라서  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n}) = 3$ 에서

$$-1 < r < 1$$

이고

$$\frac{a(1-r)}{1-r^2} = 3$$

이고  $r \neq 1$ 이므로

$$\frac{a}{1+r} = 3 \cdots \textcircled{7}$$

또,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a^2 r^{2n-2} = 6$ 이므로

$$\frac{a^2}{1-r^2} = \frac{a}{1-r} \times \frac{a}{1+r} = 6$$

따라서 ⑦에서

$$\frac{a}{1-r} \times 3 = 6$$

이므로

$$\frac{a}{1-r}=2$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \\ &= \frac{a}{1-r}=2\end{aligned}$$

정답 ②

26. 출제의도 : 급수와 정적분의 관계를 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 2kn}{k^3 + 3k^2n + n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 2 \times \frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1} \times \frac{1}{n} \right\} \\ &= \int_0^1 \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 + 1} dx \\ &= \left[ \frac{1}{3} \ln(x^3 + 3x^2 + 1) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} (\ln 5 - \ln 1) \\ &= \frac{\ln 5}{3}\end{aligned}$$

정답 ③

27. 출제의도 : 평면 위의 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선  $y=x^2$ 과 직선  $y=t^2x - \frac{\ln t}{8}$ 가 만나는 두 점의  $x$ 좌표를 각각  $\alpha, \beta$ 라 하면 두 점의 좌표는

$$(\alpha, \alpha^2), (\beta, \beta^2)$$

이므로 이 두 점의 중점의 좌표는

$$\left( \frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right) \dots \textcircled{7}$$

이다. 두 식  $y=x^2, y=t^2x - \frac{\ln t}{8}$ 를 연립하면

$$x^2 = t^2x - \frac{\ln t}{8},$$

$$x^2 - t^2x + \frac{\ln t}{8} = 0$$

이 방정식의 두 근이  $\alpha, \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = t^2,$$

$$\alpha\beta = \frac{\ln t}{8}$$

따라서

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= t^4 - \frac{\ln t}{4}\end{aligned}$$

이므로 ⑦에서 중점의 좌표는

$$\left( \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{2}t^4 - \frac{\ln t}{8} \right) \text{이다.}$$

그러므로 점 P의 시각  $t$ 에서의 위치는

$$x = \frac{1}{2}t^2, y = \frac{1}{2}t^4 - \frac{\ln t}{8}$$

이다.

이때

$$\frac{dx}{dt} = t, \quad \frac{dy}{dt} = 2t^3 - \frac{1}{8t}$$

이므로

$$\begin{aligned}&\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{t^2 + \left(2t^3 - \frac{1}{8t}\right)^2} \\ &= \sqrt{t^2 + 4t^6 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{64t^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{4t^6 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{64t^2}} \\
&= \sqrt{\left(2t^3 + \frac{1}{8t}\right)^2} \\
&= 2t^3 + \frac{1}{8t}
\end{aligned}$$

따라서 시각  $t=1$ 에서  $t=e$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}
&\int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
&= \int_1^e \left(2t^3 + \frac{1}{8t}\right) dt \\
&= \left[\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{8}\ln|t|\right]_1^e \\
&= \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2} + 0\right) \\
&= \frac{e^4}{2} - \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

정답 ①

28. 출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 극소가 되는  $x$ 의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}
g(x) &= 3f(x) + 4\cos f(x) \text{이므로} \\
g'(x) &= 3f'(x) - 4f'(x)\sin f(x) \\
&= f'(x)\{3 - 4\sin f(x)\} \\
&= 12\pi(x-1)\{3 - 4\sin(6\pi(x-1)^2)\}
\end{aligned}$$

이므로  $g'(x)=0$ 에서

$$x=1 \text{ 또는 } \sin(6\pi(x-1)^2) = \frac{3}{4}$$

(i)  $x=1$ 일 때

$x=1$ 일 때  $\sin(6\pi(x-1)^2)=0$ 이므로  
 $x=1$  부근에서  $3-4\sin(6\pi(x-1)^2) > 0$ 이다.

이때  $x-1$ 은  $x=1$ 의 좌우에서 음에서 양으로 변하므로

$g'(x)=12\pi(x-1)\{3-4\sin(6\pi(x-1)^2)\}$ 도  $x=1$ 의 좌우에서 음에서 양으로 변한다.

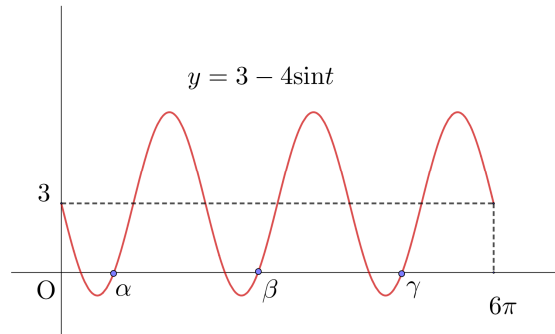
따라서 함수  $g(x)$ 는  $x=1$ 에서 극소이다.

(ii)  $1 < x < 2$ 일 때

$12\pi(x-1) > 0$ 이고, 함수  $f(x)$ 는 구간  $[1, 2]$ 에서 0에서  $6\pi$ 까지 증가한다.

즉,  $f(x)=t$ 라 하면  $x$ 의 값이 1에서 2까지 증가할 때  $t$ 의 값은 0에서  $6\pi$ 까지 증가한다.

이때 함수  $y=3-4\sin t$ 의 그래프는 다음과 같으므로  $t=\alpha, \beta, \gamma$ 의 좌우에서  $y=3-4\sin t$ 의 값은 음에서 양으로 변한다.



따라서  $f(x)=\alpha, \beta, \gamma$ 인  $x$ 의 좌우에서  $y=3-4\sin f(x)$ 의 값은 음에서 양으로 변하고 이러한  $x$ 는 세 수  $\alpha, \beta, \gamma$ 에 대하여 각각 하나씩 존재한다.

따라서 함수  $g(x)$ 가  $1 < x < 2$ 에서 극소가 되는  $x$ 의 개수는 3이다.

(iii)  $0 < x < 1$ 일 때

함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 직선  $x=1$ 에 대하여 대칭이다.

즉, 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$f(1-x) = f(1+x)$$

가 성립한다.

이때

$$\begin{aligned} g(1-x) &= 3f(1-x) + 4\cos f(1-x) \\ &= 3f(1+x) + 4\cos f(1+x) \\ &= g(1+x) \end{aligned}$$

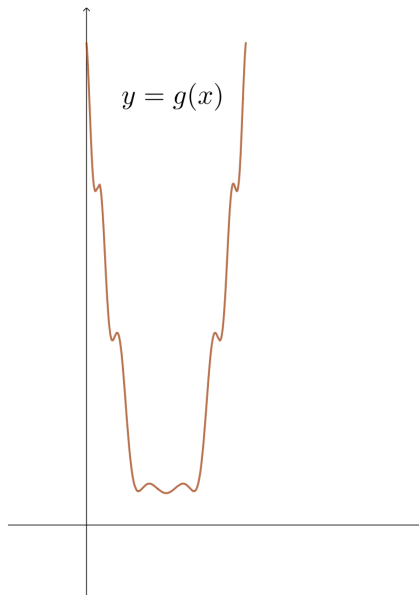
이므로 함수  $y = g(x)$ 의 그래프도 직선  $x=1$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 (ii)와 같이  $0 < x < 1$ 에서 함수  $g(x)$ 가 극소가 되는  $x$ 의 개수도 3이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는  $x$ 의 개수는  $1+3+3=7$ 이다.

<참고>

$0 < x < 2$ 에서 함수  $y = g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



정답 ②

29. 출제의도 : 도형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$$\angle AMQ = 2 \times \angle ABQ = 2 \times 2\theta = 4\theta$$

이므로

(부채꼴 AMQ의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times 1^2 \times 4\theta = 2\theta,$$

(삼각형 MBQ의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin(\pi - 4\theta) = \frac{1}{2} \sin 4\theta$$

삼각형 RAB에서  $\angle ARB = \pi - 3\theta$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{2}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{\overline{BR}}{\sin \theta},$$

즉

$$\overline{BR} = \frac{2\sin \theta}{\sin 3\theta}$$

이므로

(삼각형 RAB의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BR} \times \sin 2\theta$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2\sin \theta}{\sin 3\theta} \times \sin 2\theta = \frac{2\sin \theta \sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

그러므로

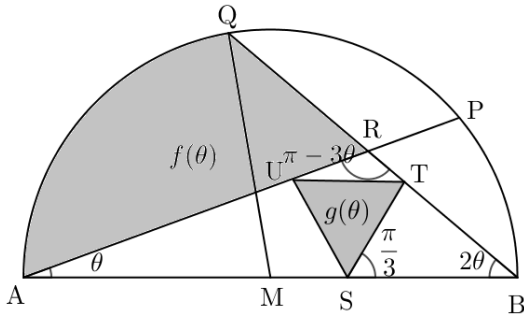
$$f(\theta) = 2\theta + \frac{1}{2} \sin 4\theta - \frac{2\sin \theta \sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

이므로

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left( 2 + 2 \times \frac{\sin 4\theta}{4\theta} - \frac{4 \times \frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{\sin 2\theta}{2\theta}}{3 \times \frac{\sin 3\theta}{3\theta}} \right)$$

$$= 2 + 2 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \dots \textcircled{7}$$



정삼각형 STU의 한 변의 길이를  $a$ 라 하면 삼각형 TSB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin 2\theta} = \frac{\overline{BT}}{\sin \frac{\pi}{3}},$$

즉

$$\overline{BT} = \frac{\sqrt{3}a}{2\sin 2\theta}$$

두 삼각형 RUT, RAB가 서로 닮음이므로

$$\overline{RT} : \overline{RB} = \overline{UT} : \overline{AB}$$

$$\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} - \frac{\sqrt{3}a}{2\sin 2\theta} : \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} = a : 2$$

$$\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}a = \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 2\theta}a$$

$$\left(\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} + \frac{\sqrt{3}}{\sin 2\theta}\right)a = \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

$$\frac{2\sin\theta\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin 3\theta}{\sin 2\theta\sin 3\theta}a = \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

$$a = \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta} \times \frac{\sin 2\theta\sin 3\theta}{2\sin\theta\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin 3\theta}$$

이때

$$g(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

이 고

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{a}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left( \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta} \times \frac{\sin 2\theta\sin 3\theta}{2\sin\theta\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin 3\theta} \times \frac{1}{\theta} \right)$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left( \frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta} \times \frac{\frac{\sin 2\theta\sin 3\theta}{\theta^2}}{\frac{2\sin\theta\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin 3\theta}{\theta}} \right)$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{2 \times 3}{0 + 3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

이므로

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left( \frac{a}{\theta} \right)^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left( \frac{8}{3\sqrt{3}} \right)^2$$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{27} \dots \textcircled{\text{A}}$$

따라서  $\textcircled{\text{A}}$ ,  $\textcircled{\text{B}}$ 에서

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\frac{g(\theta)}{\theta^2}}{\frac{f(\theta)}{\theta}}$$

$$= \frac{\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2}}{\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{f(\theta)}{\theta}}$$

$$= \frac{\frac{16\sqrt{3}}{27}}{\frac{8}{3}}$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{3}$$

이므로

$$p+q=9+2=11$$

정답 11

30. 출제의도 : 치환적분법과 부분적분법을 활용하여 정적분의 값을 구할 수 있

는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서  $f(1)=1$ 이므로 조건 (나)

에 의하여

$$g(2)=2f(1)=2$$

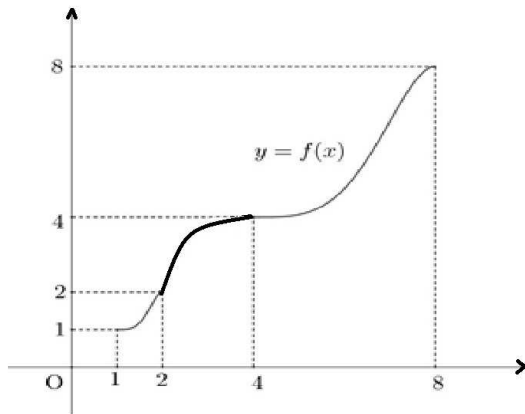
따라서  $f(2)=2$ 이므로

$$g(4)=2f(2)=4$$

따라서  $f(4)=4$ 이므로

$$g(8)=2f(4)=8$$

따라서  $f(8)=8$ 이다.



부분적분법에 의하여

$$\int_1^8 x f'(x) dx$$

$$= [x f(x)]_1^8 - \int_1^8 f(x) dx$$

$$= 8f(8) - f(1) - \int_1^8 f(x) dx$$

$$= 8 \times 8 - 1 - \int_1^8 f(x) dx$$

$$= 63 - \int_1^8 f(x) dx \quad \cdots \textcircled{7}$$

이때

$$\int_1^8 f(x) dx$$

$$= \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx + \int_4^8 f(x) dx$$

$\cdots \textcircled{8}$

이고,

$$\int_1^2 f(x) dx = \frac{5}{4} \quad \cdots \textcircled{9}$$

이다.

이때 두 함수  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 의 그래

프의 대칭성에 의하여

$$\int_2^4 f(x) dx = 4 \times 4 - 2 \times 2 - \int_2^4 g(y) dy$$

$$= 12 - \int_2^4 g(y) dy \quad \cdots \textcircled{10}$$

이때  $y=2t$ 로 놓으면 치환적분법에 의하

여

$$\int_2^4 g(y) dy = 2 \int_1^2 g(2t) dt$$

이므로 조건 (나)에서

$$\int_2^4 g(y) dy = 2 \int_1^2 g(2t) dt$$

$$= 2 \int_1^2 2f(t) dt$$

$$= 4 \int_1^2 f(x) dx$$

$$= 4 \times \frac{5}{4} = 5$$

$\textcircled{10}$ 에서

$$\int_2^4 f(x) dx = 12 - \int_2^4 g(y) dy$$

$$= 12 - 5 = 7 \quad \cdots \textcircled{11}$$

또, 두 함수  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 의 그래프

의 대칭성에 의하여

$$\int_4^8 f(x) dx = 8 \times 8 - 4 \times 4 - \int_4^8 g(y) dy$$

$$= 48 - \int_4^8 g(y)dy \quad \cdots \textcircled{\Xi}$$

이때  $y = 2t$ 로 놓으면 치환적분법에 의하  
여

$$\int_4^8 g(y)dy = 2 \int_2^4 g(2t)dt$$

이므로 조건 (나)에서

$$\int_4^8 g(y)dy = 2 \int_2^4 g(2t)dt$$

$$= 2 \int_2^4 2f(t)dt$$

$$= 4 \int_2^4 f(x)dx$$

$$= 4 \times 7 = 28$$

③에서

$$\int_4^8 f(x)dx = 48 - \int_4^8 g(y)dy$$

$$= 48 - 28 = 20 \quad \cdots \textcircled{\text{Z}}$$

①, ②, ③, ④에서

$$\int_1^8 f(x)dx$$

$$= \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx + \int_4^8 f(x)dx$$

$$= \frac{5}{4} + 7 + 20 = \frac{113}{4}$$

이므로 ⑦에서

$$\int_1^8 xf'(x)dx$$

$$= 63 - \int_1^8 f(x)dx$$

$$= 63 - \frac{113}{4} = \frac{139}{4}$$

따라서

$$p + q = 4 + 139 = 143$$

정답 143

[다른 풀이]

$$\int_1^8 xf'(x)dx \text{에서 } x = g(y) \text{라 하면}$$

$x = 1$ 일 때  $y = 1$ ,  $x = 8$ 일 때  $y = 8$ 이고,

$$\frac{dx}{dy} = g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

이므로

$$\int_1^8 xf'(x)dx = \int_1^8 g(y)dy$$

$$= \int_1^2 g(y)dy + \int_2^4 g(y)dy + \int_4^8 g(y)dy$$

이때

$$\int_1^2 g(y)dy = 2 \times 2 - 1 \times 1 - \int_1^2 f(x)dx$$

$$= 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\text{한편, } \int_2^4 g(y)dy = \int_2^4 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy \text{에서}$$

$$\frac{y}{2} = t \text{라 하면 } y = 2 \text{일 때 } t = 1, y = 4 \text{일}$$

$$\text{때 } t = 2 \text{이고, } \frac{1}{2} = \frac{dt}{dy} \text{이므로}$$

$$\int_2^4 g(y)dy = \int_2^4 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$$

$$= \int_1^2 4f(t)dt = 4 \int_1^2 f(t)dt$$

$$= 4 \times \frac{5}{4} = 5,$$

$$\text{또, } \int_4^8 g(y)dy = \int_4^8 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy \text{에서}$$

$$\frac{y}{2} = t \text{라 하면 } y = 4 \text{일 때 } t = 2, y = 8 \text{일}$$

$$\text{때 } t = 4 \text{이고, } \frac{1}{2} = \frac{dt}{dy} \text{이므로}$$

$$\int_4^8 g(y)dy = \int_4^8 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_2^4 4f(t)dt = 4 \int_2^4 f(t)dt \\
&= 4 \times \left\{ 4 \times 4 - 2 \times 2 - \int_2^4 g(y)dy \right\} \\
&= 4(12 - 5) = 28
\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
\int_1^8 xf'(x)dx &= \int_1^8 g(y)dy \\
&= \int_1^2 g(y)dy + \int_2^4 g(y)dy + \int_4^8 g(y)dy \\
&= \frac{7}{4} + 5 + 28 = \frac{139}{4}
\end{aligned}$$

이므로

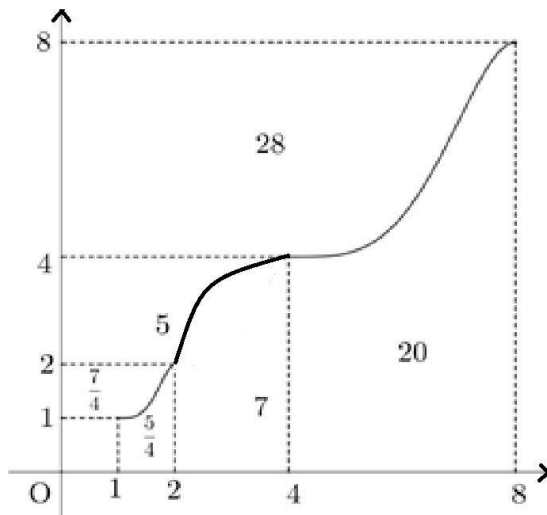
$$p + q = 4 + 139 = 143$$

<참고>

조건 (나)의 성질

$$g(2x) = 2f(x)$$

에서 다음 그림과 같이 각 부분의 넓이가 대각선 방향으로 4배씩 증가함을 알 수 있다.





[선택: 기하]

23. ② 24. ③ 25. ⑤ 26. ② 27. ④  
28. ⑤ 29. 100 30. 23

23. 출제의도 : 좌표공간의 점의 대칭이동을 이해하고 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

좌표공간의 점  $A(2, 1, 3)$ 을  $xy$ 평면에 대하여 대칭이동시킨 점  $P$ 의 좌표는  $P(2, 1, -3)$

점  $A$ 를  $yz$ 평면에 대하여 대칭이동시킨 점  $Q$ 의 좌표는

$Q(-2, 1, 3)$

따라서 구하는 선분  $PQ$ 의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \sqrt{(2+2)^2 + (1-1)^2 + (-3-3)^2} \\ &= \sqrt{52} \\ &= 2\sqrt{13}\end{aligned}$$

정답 ②

24. 출제의도 : 초점의 좌표가 주어진 쌍곡선의 방정식을 이해하여 쌍곡선의 주축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{6} = 1$ 의 한 초점의 좌표가

$(3\sqrt{2}, 0)$ 이므로

$$a^2 + 6 = 18$$

$$a^2 = 12$$

$a > 0$ 이므로

$$a = 2\sqrt{3}$$

따라서 구하는 쌍곡선의 주축의 길이는

$$2a = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

정답 ③

25. 출제의도 : 좌표평면의 두 직선의 방향벡터를 이해하고 이를 이용하여 두 직선이 이루는 예각의 크기에 대한 코사인 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 직선

$$\frac{x+1}{2} = y-3, \quad x-2 = \frac{y-5}{3}$$

의 방향벡터를 각각

$$\vec{u}_1 = (2, 1), \quad \vec{u}_2 = (1, 3)$$

이라 하면

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|} \\ &= \frac{|2 \times 1 + 1 \times 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \times \sqrt{1^2 + 3^2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

정답 ⑤

26. 출제의도 : 타원의 정의를 이해하여 조건을 만족시키는 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

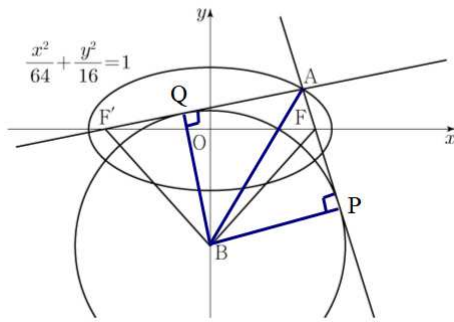
정답풀이 :

$\overline{AF} = p$ ,  $\overline{AF'} = q$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$p + q = 2 \times 8 = 16$$

원  $C$ 가 두 직선  $AF$ ,  $AF'$ 과 접하는 두 점을 각각  $P$ ,  $Q$ , 원  $C$ 의 반지름의 길이를  $r$ 라 하면

$$\overline{BP} = \overline{BQ} = r$$



사각형 AFBF'의 넓이를 삼각형 ABF와 삼각형 ABF'으로 나누어 생각하면

$$\frac{1}{2} \times p \times r + \frac{1}{2} \times q \times r = 72$$

따라서

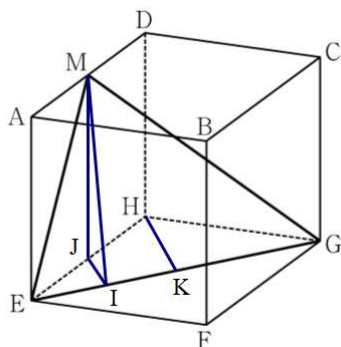
$$\begin{aligned} r &= 72 \times \frac{2}{p+q} \\ &= 72 \times \frac{2}{16} \\ &= 9 \end{aligned}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 삼수선의 정리를 이용하여 주어진 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

그림과 같이 점 M에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 I, 선분 EH에 내린 수선의 발을 J라 하자.



삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{MI} \perp \overline{EG}$$

이므로 점 H에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 K라 하면 점 K는 선분 EG의 중점이고

$$\begin{aligned} \overline{HJ} &= \frac{1}{2} \times \overline{HK} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

한편, 직각삼각형 MJH에서

$$\overline{MJ} = 4$$

이므로

$$\begin{aligned} \overline{MI} &= \sqrt{\overline{MJ}^2 + \overline{HJ}^2} \\ &= \sqrt{16 + 2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 구하는 삼각형 MEG의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{EG} \times \overline{MI} &= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \\ &= 12 \end{aligned}$$

정답 ④

28. 출제의도 : 포물선의 정의와 방정식을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

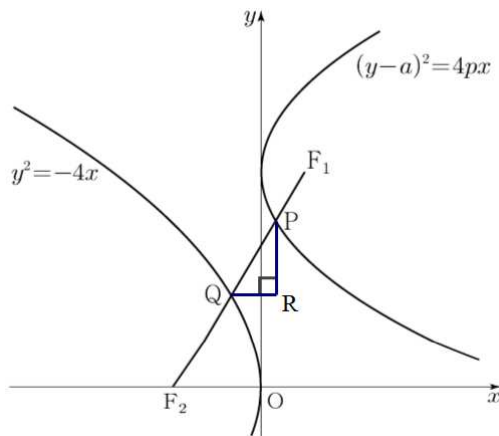
두 점  $F_1, F_2$ 의 좌표가 각각

$$F_1(p, a), F_2(-1, 0)$$

이고,  $\overline{F_1F_2} = 3$ 이므로

$$(p+1)^2 + a^2 = 9 \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

그림과 같이 점 P를 지나고  $x$ 축에 수직인 직선과 점 Q를 지나고  $y$ 축에 수직인 직선이 만나는 점을 R라 하자.



직선 PQ의 기울기는 직선  $F_1F_2$ 의 기울  
기와 같은  $\frac{a}{p+1}$ 이므로 직각삼각형 PQR

에서 양수  $t$ 에 대하여  
 $\overline{PR} = at$ ,  $\overline{QR} = (p+1)t$   
로 놓을 수 있다.

이때  $\overline{PQ} = 1$ 이므로

$$a^2t^2 + (p+1)^2t^2 = 1$$

에서

$$t^2 = \frac{1}{a^2 + (p+1)^2} = \frac{1}{9}$$

$$\text{즉, } t = \frac{1}{3}$$

한편, 두 점 P, Q의  $x$ 좌표를 각각  $x_1$ ,  
 $x_2$ 라 하면

$$\overline{PF_1} = p + x_1,$$

$$\overline{QF_2} = 1 - x_2,$$

$$\overline{PF_1} + \overline{QF_2} = 2$$

이고

$$x_1 - x_2 = (p+1)t = \frac{1}{3}(p+1)$$

이므로

$$(p+x_1) + (1-x_2) = 2$$

에서

$$p = 1 - (x_1 - x_2)$$

$$= 1 - \frac{1}{3}(p+1)$$

$$\text{즉, } p = \frac{1}{2}$$

⊙에서

$$\left(\frac{1}{2} + 1\right)^2 + a^2 = 9$$

이므로

$$a^2 = \frac{27}{4}$$

따라서

$$a^2 + p^2 = \frac{27}{4} + \frac{1}{4} = 7$$

정답 ⑤

29. 출제의도 : 평면벡터의 연산과 내적  
을 이용하여 조건을 만족시키는 벡터의  
크기의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는  
가?

정답풀이 :

조건 (가)에 의하여 점 P는 평행사변형  
OACB의 둘레 또는 내부에 있는 점이다.

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) - |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos(\angle AOB) \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} - \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{4} \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} - 1 = 2 \end{aligned}$$

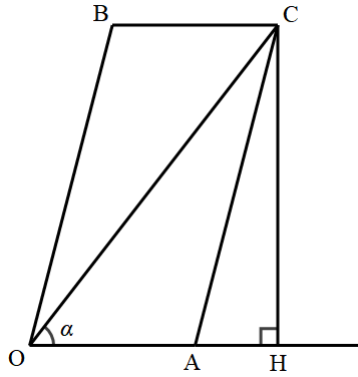
이므로

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = 3$$

(i) 벡터  $3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}$ 의 크기는  $\overrightarrow{OP}$ 의 크  
기가 최대이고  $\overrightarrow{OX}$ 가  $\overrightarrow{OP}$ 와 반대 방  
향일 때 최대가 되고,  $\overrightarrow{OP}$ 의 크기는  
점 P가 선분 OA 위에 있을 때 최

대가 된다.

다음 그림과 같이 점 C에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고  $\angle COA = \alpha$ 라 하자.



$\angle CAH = \angle AOB$ 에서

$$\cos(\angle CAH) = \cos(\angle AOB) = \frac{1}{4}$$

이므로

$$\overline{AH} = \overline{AC} \times \cos(\angle CAH)$$

$$= \overline{OB} \times \frac{1}{4}$$

$$= 2\sqrt{2} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

한편,

$$|\overrightarrow{OC}|^2 = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|^2$$

$$= |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$= (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{4}$$

$$= 2 + 8 + 2 = 12$$

이므로

$$|\overrightarrow{OC}| = 2\sqrt{3}$$

그러므로

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

즉, 점 P가 선분 OA 위에 있을 때

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} &= |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OC}| \cos \alpha \\ &= |\overrightarrow{OP}| \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} |\overrightarrow{OP}| = 3 \end{aligned}$$

이므로

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{2}$$

이때  $\overrightarrow{OX}$ 가  $\overrightarrow{OP}$ 와 반대 방향이면

$$|3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}| = 3|\overrightarrow{OP}| + |\overrightarrow{OX}|$$

이므로

$$M = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

- (ii) 벡터  $3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}$ 의 크기는  $\overrightarrow{OP}$ 의 크기가 최소이고  $\overrightarrow{OX}$ 가  $\overrightarrow{OP}$ 와 같은 방향일 때 최소가 되고,  $\overrightarrow{OP}$ 의 크기는 점 P가 선분 OC 위에 있을 때 최소가 된다.

이때

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} &= |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OC}| \\ &= |\overrightarrow{OP}| \times 2\sqrt{3} = 3 \end{aligned}$$

이므로

$$|\overrightarrow{OP}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때  $\overrightarrow{OX}$ 가  $\overrightarrow{OP}$ 와 같은 방향이면

$$|3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}| = 3|\overrightarrow{OP}| - |\overrightarrow{OX}|$$

이므로

$$m = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}$$

(i), (ii)에 의하여

$$\begin{aligned} M \times m &= 4\sqrt{2} \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} \right) \\ &= 6\sqrt{6} - 8 \end{aligned}$$

이므로

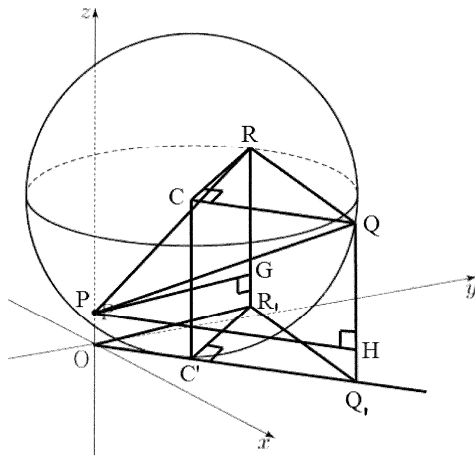
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 6^2 + (-8)^2 \\ &= 100 \end{aligned}$$

정답 100

30. 출제의도 : 좌표공간의 구의 방정식 및 도형의 위치관계를 이해하고 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 C에서  $xy$ 평면에 내린 수선의 발을  $C'$ 이라 하면  $\overline{CC'}=5$ 이므로 구  $S$ 는 점  $C'$ 에서  $xy$ 평면에 접한다.



평면 OPC는 점  $C'$ 을 지나므로 점  $Q_1$ 은 직선  $OC'$  위에 있다. 이때 선분  $OQ_1$ 의 길이가 최대가 되려면 점  $Q$ 가 점  $C$ 를 지나고 직선  $OC'$ 과 평행한 직선이 구  $S$ 와 만나는 점 중  $x$ 좌표가 양수인 점이어야 한다.

이때

$$\overline{OQ_1} = \overline{OC'} + 5 = 3 + 5 = 8$$

한편, 삼각형  $OQ_1R_1$ 의 넓이가 최대가 되려면 점  $R$ 가 점  $C$ 를 지나고 직선  $CQ$ 에 수직인 직선이 구  $S$ 와 만나는 점이어야 한다.

이때  $\overline{R_1C'} \perp \overline{OC'}$ 이고,  $\overline{R_1C'}=5$ 이므로 삼각형  $OQ_1R_1$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 5 = 20$$

이제 삼각형  $PQR$ 의 넓이를 구해 보자.

점 P에서 직선  $QQ_1$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{PH} = \overline{OQ_1} = 8,$$

$$\overline{QH} = \overline{QQ_1} - 1 = 4$$

이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{64 + 16} = 4\sqrt{5} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

직각삼각형  $CQR$ 에서

$$\overline{QR} = \sqrt{\overline{CQ}^2 + \overline{CR}^2} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

직각삼각형  $OC'R_1$ 에서

$$\overline{OR_1} = \sqrt{\overline{OC'}^2 + \overline{R_1C'}^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

이므로 점 P에서 직선  $RR_1$ 에 내린 수선의 발을 G라 하면

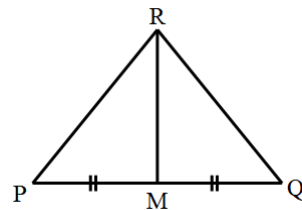
$$\overline{PG} = \overline{OR_1} = \sqrt{34}$$

$$\overline{RG} = \overline{RR_1} - 1 = 4$$

직각삼각형  $RPG$ 에서

$$\overline{PR} = \sqrt{\overline{PG}^2 + \overline{RG}^2} = \sqrt{34 + 16} = 5\sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$\textcircled{7}$ ,  $\textcircled{8}$ ,  $\textcircled{9}$ 에 의하여 삼각형  $PQR$ 는  $\overline{PR} = \overline{QR}$ 인 이등변삼각형이다.



위 그림과 같이 선분  $PQ$ 의 중점을 M이라 하면

$$\begin{aligned} \overline{RM} &= \sqrt{\overline{PR}^2 - \overline{PM}^2} \\ &= \sqrt{50 - 20} \\ &= \sqrt{30} \end{aligned}$$

이므로 삼각형  $PQR$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times \sqrt{30} = 10\sqrt{6}$$

이때 삼각형  $PQR$ 의  $xy$ 평면 위로의 정사

---

영이 삼각형  $OQ_1R_1$ 이므로 두 평면 PQR  
와  $OQ_1R_1$ 이 이루는 예각의 크기를  $\theta$ 라  
하면

$$\cos\theta = \frac{20}{10\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 삼각형  $OQ_1R_1$ 의 평면 PQR 위로  
의 정사영의 넓이는

$$20 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{20}{3} \sqrt{6}$$

이므로

$$p+q = 3+20 = 23$$

정답 23