2020학년도 대학수학능력시험

수학영역 가형 정답 및 풀이

01. ⑤	02. ③	03. ②	04. ⑤	05. ④
06. ③	07. ②	08. ⑤	09. ③	10. ④
11. ④	12. ②	13. ①	14. ④	15. ②
16. ③	17. ⑤	18. ①	19. ⑤	20. ①
21. ⑤	22. 4	23. 15	24. 2	25. 137
26. 5	27. 8	28. 450	29. 29	
30. 64				

1. **출제의도** : 성분으로 주어진 벡터의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=(3,\ 1)+\frac{1}{2}(-2,\ 4)$$
$$=(3,\ 1)+(-1,\ 2)$$
$$=(2,3)$$

따라서, 모든 성분의 합은 5이다.

정답 ⑤

2. **출제의도** : 지수함수의 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x}{e^{4x}-e^{2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{e^{4x}-1}{6x}-\frac{e^{2x}-1}{6x}}$$
$$=\frac{1}{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}=3$$

정답 ③

3. **출제의도** : 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sqrt{(2-0)^2+(0-a)^2+(1-0)^2}$$
$$=\sqrt{(3-0)^2+(2-a)^2+(0-0)^2}$$
$$\sqrt{a^2+5}=\sqrt{a^2-4a+13}$$

양변을 제곱하면

$$a^2+5=a^2-4a+13$$

따라서

$$a=2$$

정답 ②

4. **출제의도** : 이항정리를 이용하여 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^4$의 일반항은

$${}_4\mathrm{C}_r(2x)^{4-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r$$
$$={}_4\mathrm{C}_r 2^{4-r}x^{4-3r}$$

이때, $x^{4-3r}=x$에서

$$4-3r=1$$
$$r=1$$

따라서, x의 계수는

$${}_4\mathrm{C}_1\times 2^3=32$$

정답 ⑤

5. **출제의도** : 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x^2-3xy+y^2=x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-3y-3x\times\frac{dy}{dx}+2y\times\frac{dy}{dx}=1$

$(3x-2y)\times\frac{dy}{dx}=2x-3y-1$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-3y-1}{3x-2y}$ (단, $3x\neq 2y$)

위 식에 $x=1,\ y=0$을 대입하면

$\frac{dy}{dx}=\frac{2-1}{3}=\frac{1}{3}$

정답 ④

6. **출제의도** : 조합의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

구하고자 하는 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_4}=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}$$

$$=\frac{3\times\frac{4\times 3}{2\times 1}}{\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}}$$

$$=\frac{18}{35}$$

정답 ③

7. **출제의도** : 삼각함수가 포함된 방정식과 부등식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$4\cos^2 x-1=0$에서

$(2\cos x+1)(2\cos x-1)=0$

$\cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는

$x=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

한편, $\sin x\cos x<0$이므로 x는 제 2사분면의 각 또는 제 4사분면의 각이다.

따라서, 구하는 x의 값은 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$이므로 모든 합은 $\frac{7}{3}\pi$이다.

정답 ②

8. **출제의도** : 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\int_e^{e^2}\frac{\ln x-1}{x^2}\,dx$에서

$u(x)=\ln x-1,\ v'(x)=\frac{1}{x^2}$으로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=-\frac{1}{x}$이므로

$$\int_e^{e^2}\frac{\ln x-1}{x^2}\,dx$$

$$=\left[-\frac{\ln x-1}{x}\right]_e^{e^2}+\int_e^{e^2}\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$=\left[-\frac{\ln x-1}{x}\right]_e^{e^2}+\left[-\frac{1}{x}\right]_e^{e^2}$$

$$=-\frac{1}{e^2}+\left(-\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e}\right)$$

$$=\frac{e-2}{e^2}$$

정답 ⑤

9. **출제의도** : 좌표평면에서 속력의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 시각 $t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$x=t+\sin t\cos t,\ y=\tan t$

이므로 P의 시각 t에서의 속도 $\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$는

$$\frac{dx}{dt}=1+\cos^2 t-\sin^2 t$$

$$=2\cos^2 t$$

$$\frac{dy}{dt}=\sec^2 t$$

P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(2\cos^2 t)^2+(\sec^2 t)^2}$$

$$=\sqrt{4\cos^4 t+\sec^4 t}$$

이때, $4\cos^4 t>0,\ \sec^4 t>0$이므로

$$4\cos^4 t+\sec^4 t\ \geq\ 2\sqrt{4\cos^4 t\times\sec^4 t}$$

$$=2\sqrt{4\cos^4 t\times\frac{1}{\cos^4 t}}$$

$$=4$$

(단, 등호는 $4\cos^4 t=\sec^4 t$일 때 성립한다.)

따라서 P의 시각 t에서의 속력의 최댓값은 $\sqrt{4}=2$이다.

정답 ③

10. **출제의도** : 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle \mathrm{C}=\gamma$라 하면

$$\tan\gamma=\tan(\pi-(\alpha+\beta))$$

$$=-\tan(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{3}{2}$$

한편, 삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이므로 $\beta=\gamma$이다.

그러므로

$$\tan\beta=\tan\gamma=\frac{3}{2}$$

따라서,

$$\tan\alpha=\tan(\pi-(\beta+\gamma))$$

$$=-\tan(\beta+\gamma)$$

$$=-\tan(2\beta)$$

$$=-\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$$

$$=-\frac{2\times\frac{3}{2}}{1-\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{12}{5}$$

정답 ④

11. **출제의도** : 미분법을 이용하여 곡선이 변곡점을 갖도록 하는 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y'=2ax-4\cos 2x$

$y''=2a+8\sin 2x$

$y''=0$에서

$\sin 2x = -\dfrac{a}{4}$

곡선 $y = ax^2 - 2\sin 2x$가 변곡점을 가져야 하므로

$-1 < -\dfrac{a}{4} < 1$

에서 $-4 < a < 4$

따라서 정수 a의 값은

$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$이고, 그 개수는 7이다.

정답 ④

12. **출제의도** : 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 입체도형의 부피는

$$\int_0^k \left(\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}\right)^2 dx = \int_0^k \frac{e^x}{e^x+1} dx$$

$e^x + 1 = t$로 놓으면

$\dfrac{dt}{dx} = e^x$

이때 $x=0$일 때, $t=2$이고

$x=k$일 때, $t=e^k+1$이므로

$$\int_0^k \frac{e^x}{e^x+1} dx$$

$$= \int_2^{e^k+1} \frac{1}{t} dt$$

$$= \Big[\ lnt\Big]_2^{e^k+1}$$

$$= \ln(e^k+1) - \ln 2$$

$$= \ln\frac{e^k+1}{2}$$

주어진 입체도형의 부피가 $\ln 7$이므로

$\ln\dfrac{e^k+1}{2} = \ln 7$

$\dfrac{e^k+1}{2} = 7,\ e^k = 13$

따라서

$k = \ln 13$

정답 ②

13. **출제의도** : 타원의 정의와 삼각형의 닮음비를 이용하여 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 BFA에서

$\overline{\mathrm{AF}} = 5$

이때, 삼각형 $\mathrm{F'AO}$와 삼각형 $\mathrm{F'BF}$는 길이의 비가 $1:2$인 닮은 삼각형이다.

$\overline{\mathrm{AB}} = 5$

$\overline{\mathrm{BF}} = 2\overline{\mathrm{AO}} = 2a$

그러므로 삼각형 BFA의 둘레의 길이는

$5+5+2a = 10+2a$ ----㉠

한편, 직각삼각형 $\mathrm{F'PF}$에서 $\overline{\mathrm{PF}} = p$라 하면 $\overline{\mathrm{F'P}} = 10-p$이므로

$(10-p)^2 = p^2 + (2c)^2$

$p^2 - 20p + 100 = p^2 + 4c^2$

$20p = 100 - 4c^2$

$p = 5 - \dfrac{1}{5}c^2$

한편, 삼각형 $\mathrm{F'BP}$의 길이는

$\overline{\mathrm{F'B}} + \overline{\mathrm{BP}} + \overline{\mathrm{PF'}}$

$= 10 + (2a-p) + (10-p)$

$= 20 + 2a - 2p$ -----㉡

삼각형 $\mathrm{BPF'}$와 삼각형 BFA의 둘레의

길이의 차가 4이므로 ㉠과 ㉡에서

$(20+2a-2p)-(2a+10)=4$

$10-2p=4$

$p=3$

이때, $p=5-\frac{1}{5}c^2$이므로 대입하면

$3=5-\frac{1}{5}c^2$

$c^2=10$

$c=\sqrt{10}$

또,

$a=\sqrt{5^2-c^2}$

$=\sqrt{15}$

따라서, 삼각형 AFF′의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2c\times a=ac=\sqrt{15}\times\sqrt{10}=5\sqrt{6}$

정답 ①

14. 출제의도 : 확률변수의 평균과 분산을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 모집단의 확률분포에서

$\sigma^2=\mathrm{V}(X)=1\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{3}+9\times\frac{1}{2}-\frac{49}{9}$

$=6-\frac{49}{9}=\frac{5}{9}$

이므로 $p=\frac{5}{9}$

$\overline{X}$는 이 모집단에서 크기가 10인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{10}=\frac{5}{9}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{18}$

즉, $q=\frac{1}{18}$

또,

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(10\overline{X})=100\mathrm{V}(\overline{X})=100\times\frac{1}{18}=\frac{50}{9}$

이므로 $r=\frac{50}{9}$

따라서

$p+q+r=\frac{5}{9}+\frac{1}{18}+\frac{50}{9}=\frac{37}{6}$

정답 ④

15. 출제의도 : 로그방정식의 해를 구한 후 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 할 수 있는가?

정답풀이 :

$a^x=\sqrt{3}$에서

$x=\log_a\sqrt{3}$이므로

점 A의 좌표는 $(\log_a\sqrt{3},\ \sqrt{3})$ 이다.

직선 OA의 기울기는

$\frac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}}$

직선 AB의 기울기는

$\frac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}-4}$

직선 OA와 직선 AB가 서로 수직이므로

$\frac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}-4}=-1$

이어야 한다. 즉,

$(\log_a\sqrt{3})^2-4\log_a\sqrt{3}+3=0$에서

$(\log_a\sqrt{3}-1)(\log_a\sqrt{3}-3)=0$

$\log_a\sqrt{3}=1$ 또는 $\log_a\sqrt{3}=3$

$a=\sqrt{3}$ 또는 $a^3=\sqrt{3}$

따라서 $a=3^{\frac{1}{2}}$ 또는 $a=3^{\frac{1}{6}}$이므로

모든 a의 값의 곱은

$3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=3^{\frac{2}{3}}$

정답 ②

16. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a+b+c-d=9$에서

$a+b+c=9+d$

이때, $d\le 4$이므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) $d=0$일 때,

$a+b+c=9$

이때, $c\ge d$에서 $c\ge 0$이므로 주어진 순서쌍의 개수는

${}_3\mathrm{H}_9={}_{11}\mathrm{C}_9$

$={}_{11}\mathrm{C}_2=55$

(ii) $d=1$일 때,

$a+b+c=10$

이때, $c\ge d$에서 $c\ge 1$이므로 $c=c'+1$ ($c'\ge 0$)로 놓으면

$a+b+c'=9$

그러므로 구하는 순서쌍의 개수는

${}_3\mathrm{H}_9={}_{11}\mathrm{C}_9$

$={}_{11}\mathrm{C}_2=55$

(iii) $d=2$일 때,

$a+b+c=11$

이때, $c\ge d$에서 $c\ge 2$이므로 $c=c'+2$ ($c'\ge 0$)로 놓으면

$a+b+c'=9$

그러므로 구하는 순서쌍의 개수는

${}_3\mathrm{H}_9={}_{11}\mathrm{C}_9$

$={}_{11}\mathrm{C}_2=55$

(iv) $d=3$일 때,

$a+b+c=12$

이때, $c\ge d$에서 $c\ge 3$이므로 $c=c'+3$ ($c'\ge 0$)로 놓으면

$a+b+c'=9$

그러므로 구하는 순서쌍의 개수는

${}_3\mathrm{H}_9={}_{11}\mathrm{C}_9$

$={}_{11}\mathrm{C}_2=55$

(v) $d=4$일 때,

$a+b+c=13$

이때, $c\ge d$에서 $c\ge 4$이므로 $c=c'+4$ ($c'\ge 0$)로 놓으면

$a+b+c'=9$

그러므로 구하는 순서쌍의 개수는

${}_3\mathrm{H}_9={}_{11}\mathrm{C}_9$

$={}_{11}\mathrm{C}_2=55$

따라서, (i)~(v)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$55\times 5=275$

정답 ③

17. 출제의도 : 쌍곡선의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

선분 BC의 중점을 O라 하고,
직선 BC를 x축으로, 직선 OA를 y축으로 하는 좌표평면을 생각하자.
$\mathrm{B}(-5, 0)$, $\mathrm{C}(5, 0)$이고,
점 P는 두 점 B, C를 초점으로 하고, 주축의 길이가 2인 쌍곡선 위의 점이다.
이 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이라 하면
$2a=2$에서 $a=1$
$25=a^2+b^2$에서 $b^2=24$
즉 쌍곡선의 방정식은 $x^2-\dfrac{y^2}{24}=1$
$\mathrm{P}(p, q)$라 하면 $p^2-\dfrac{q^2}{24}=1$이고,
$\mathrm{A}(0, 5\sqrt{3})$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PA}}^2&=p^2+(q-5\sqrt{3})^2\\&=1+\frac{q^2}{24}+(q-5\sqrt{3})^2\end{aligned}$$

$\dfrac{d}{dq}(\overline{\mathrm{PA}}^2)=0$에서 $q=\dfrac{24\sqrt{3}}{5}$이므로
$q=\dfrac{24\sqrt{3}}{5}$일 때 선분 PA의 길이가 최소이다.
따라서 삼각형 PBC의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times10\times\dfrac{24\sqrt{3}}{5}=24\sqrt{3}$

정답 ⑤

18. **출제의도** : 정규분포의 성질을 이용하여 확률의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(12) \le g(20)$이므로
$m-2 \le 20 \le m+2$
이어야 한다. 즉,
$18 \le m \le 22$이므로 $m=22$일 때 확률 $\mathrm{P}(21 \le Y \le 24)$은 최댓값을 갖는다.
이때 $Z=\dfrac{X-22}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 정규분포 $\mathrm{N}(1, 0)$을 따른다.
따라서 구하는 확률의 최댓값은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(21 \le Y \le 24)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{21-22}{2} \le \frac{Y-22}{2} \le \frac{24-22}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-0.5 \le Z \le 1)\\&=\mathrm{P}(-0.5 \le Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)\\&=\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)\\&=0.1915+0.3413\\&=0.5328\end{aligned}$$

정답 ①

19. **출제의도** : 내적을 이용하여 두 벡터의 수직, 벡터의 크기 등을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$는 수직이다. 그러므로 선분 AB는 원의 지름이다.
이때, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=8$이므로 이 원은 지름의 길이가 8인 원이다.
원의 중심을 O라 하면 조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-2\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+2\overrightarrow{\mathrm{CB}}\end{aligned}$$

이때, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}$이므로

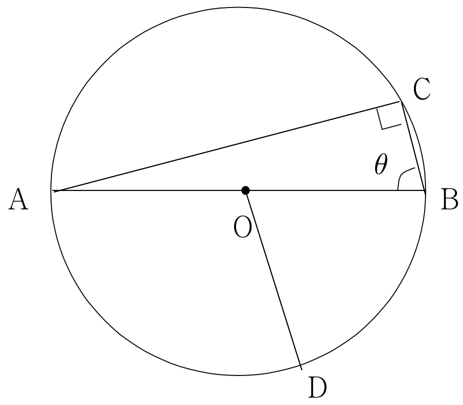
$\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{CB}$

이때, 점 D는 원 위의 점이므로 $|\overrightarrow{OD}|=4$에서

$2|\overrightarrow{CB}|=4$

$|\overrightarrow{CB}|=2$

또, 두 벡터 $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{OD}$는 평행하다.



이때, $\angle ABC=\theta$라 하면

$\cos\theta=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

한편, 두 벡터 $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{CB}$는 평행하므로

$\angle AOD=\pi-\theta$

따라서,

$|\overrightarrow{AD}|^2=|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}|^2$

$=(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})$

$=|\overrightarrow{OD}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2-2\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OA}$

$=|\overrightarrow{OD}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2-2|\overrightarrow{OD}||\overrightarrow{OA}|\cos(\pi-\theta)$

$=|\overrightarrow{OD}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2+2|\overrightarrow{OD}||\overrightarrow{OA}|\cos\theta$

$=4^2+4^2+2\times4\times4\times\frac{1}{4}$

$=40$

정답 ⑤

20. 출제의도 : 독립시행의 확률을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

앞면은 H, 뒷면을 T로 나타내기로 하자.

(i) 앞면이 3번 나오는 경우

H 3개와 T 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_7C_3=35$

H가 이웃하지 않는 경우의 수는 ${}_5C_3=10$

즉 조건 (나)를 만족시킬 확률은

$(35-10)\times\left(\frac{1}{2}\right)^7$

(ii) 앞면이 4번 나오는 경우

H 4개와 T 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_7C_4=35$

H가 이웃하지 않는 경우의 수는 1

즉 조건 (나)를 만족시킬 확률은

$(35-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^7$

(iii) 앞면이 5번 이상 나오는 경우

조건 (나)를 항상 만족시키므로

이 경우의 확률은

$({}_7C_5+{}_7C_6+{}_7C_7)\times\left(\frac{1}{2}\right)^7$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$(25+34+29)\times\left(\frac{1}{2}\right)^7$

$=\frac{88}{128}=\frac{11}{16}$

정답 ①

21. 출제의도 : 미분법과 적분법을 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=e^x$에서 $y'=e^x$

곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(t,\ e^t)$에서의 접선의 방정식이 $y=f(x)$이므로

$f(x)=e^t(x-t)+e^t$

함수 $y=|f(x)+k-\ln x|$에서

$h(x)=f(x)+k$

$\quad =e^t x+(1-t)e^t+k$

라 하자.

함수 $y=|f(x)+k-\ln x|$가 미분가능하고, 실수 k가 최소일 때는

곡선 $y=h(x)$와 곡선 $y=\ln x$가 한 점에서 만날 때이다.

곡선 $y=h(x)$와 곡선 $y=\ln x$가 만나는 점의 x좌표를 p라 하면

$e^t p+(1-t)e^t+k=\ln p \quad \cdots\cdots$ ㉠

또 $h'(x)=e^t$이고, $y=\ln x$에서 $y'=\dfrac{1}{x}$

이므로

$e^t=\dfrac{1}{p} \cdots\cdots$ ㉡

$\ln p=\ln\dfrac{1}{e^t}=-t \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{1}{p}\times p+(1-t)e^t+k=-t$

$k=(t-1)e^t-t-1$

따라서

$g(t)=(t-1)e^t-t-1$

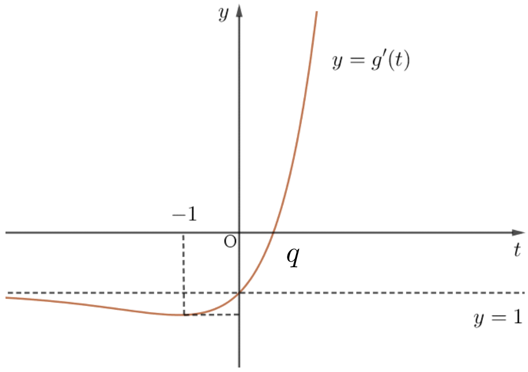
ㄱ.

$g'(t)=e^t+(t-1)e^t-1$

$\quad =te^t-1$

한편, $g''(t)=e^t+te^t=(t+1)e^t$

이므로 함수 $y=g'(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $y=g'(t)$의 그래프와 t축이 만나는 점의 t의 좌표를 q라 하면

$p>0$이므로 함수 $y=g(t)$는 $t=q$에서 극솟값을 갖는다.

$g(q)=qe^q-e^q-q-1$

$\quad =-e^q-q<0$

이므로 $m<0$이 되도록 하는 두 실수 $a,\ b$가 존재한다. (참)

ㄴ. $g(c)=(c-1)e^c-c-1=0$에서

$e^c=\dfrac{c+1}{c-1}$

따라서

$g(-c)=(-c-1)e^{-c}+c-1$

$\quad =-(c+1)\times\dfrac{c-1}{c+1}+c-1$

$\quad =0$ (참)

ㄷ. $g'(t)=te^t-1$이고 ㄴ에서

$\beta=c,\ \alpha=-c$이므로

$\dfrac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)}=\dfrac{1+g'(c)}{1+g'(-c)}=\dfrac{ce^c}{-ce^{-c}}=-e^{2c}$

한편, $g(1)=-2$이므로

$c>1$이다.

이때, $-e^{2c} < -e^2$이므로

$\dfrac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)} < -e^2$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

정답 ⑤

22. 출제의도 : 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3\ln x$이므로

$$f'(x)=3x^2\ln x+x^3\times\frac{1}{x}$$
$$=3x^2\ln x+x^2$$

따라서,

$$f'(e)=3e^2\ln e+e^2$$
$$=4e^2$$

이므로

$$\frac{f'(e)}{e^2}=4$$

정답 4

23. 출제의도 : 이항분포를 따르는 확률변수의 분산을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{E}(X)=80p$이므로

$80p=20$에서 $p=\dfrac{1}{4}$

따라서

$$\mathrm{V}(X)=20\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=15$$

정답 15

24. 출제의도 : 원의 성질을 활용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 좌표가 $(t,\ \sin t)(0<t<\pi)$이므로 점 Q의 좌표는 $(t,\ 0)$이다.

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{PQ}}=\sin t$

$$\overline{\mathrm{OR}}=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{PR}}$$
$$=\sqrt{t^2+\sin^2 t}-\sin t$$

이므로

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OR}}}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{t}{\sqrt{t^2+\sin^2 t}-\sin t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{t\left(\sqrt{t^2+\sin^2 t}+\sin t\right)}{(t^2+\sin^2 t)-\sin^2 t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{t^2+\sin^2 t}+\sin t}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\left\{\sqrt{1+\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2}+\frac{\sin t}{t}\right\}$$
$$=\sqrt{1+1^2}+1$$
$$=1+\sqrt{2}$$

이때, $1+\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}$에서

a, b가 정수이므로

$a=1,\ b=1$

따라서

$a+b=1+1=2$

정답 2

25. 출제의도 : 독립시행의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$a-b=3$이므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.
(ⅰ) $a=5$이고 $b=2$일 때,
주사위를 5번 던질 때, 홀수의 눈이 5번 나오고 동전을 4번 던질 때, 앞면이 2번 나와야 하므로 확률은
$${}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0\times{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2^5}\times\frac{3}{2^3}$$
$$=\frac{3}{2^8}$$
(ⅱ) $a=4$이고 $b=1$일 때,
주사위를 5번 던질 때, 홀수의 눈이 4번 나오고 동전을 4번 던질 때, 앞면이 1번 나와야 하므로 확률은
$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1\times{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$=\frac{5}{2^5}\times\frac{1}{2^2}$$
$$=\frac{5}{2^7}$$
(ⅲ) $a=3$이고 $b=0$일 때,
주사위를 5번 던질 때, 홀수의 눈이 3번 나오고 동전을 4번 던질 때, 앞면이 0번 나와야 하므로 확률은
$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$=\frac{5}{2^4}\times\frac{1}{2^4}$$
$$=\frac{5}{2^8}$$
따라서, 구하는 확률은
$$\frac{3}{2^8}+\frac{5}{2^7}+\frac{5}{2^8}$$
$$=\frac{18}{2^8}=\frac{9}{2^7}=\frac{9}{128}$$
이므로
$p+q=128+9=137$

정답 137

26. 출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$g\left(\frac{x+8}{10}\right)=f^{-1}(x)$에서
$f\left(g\left(\frac{x+8}{10}\right)\right)=x$
양변을 x에 대하여 미분하면
$$f'\left(g\left(\frac{x+8}{10}\right)\right)\times g'\left(\frac{x+8}{10}\right)\times\frac{1}{10}=1$$
이 식에 $x=2$를 대입하면
$f'(g(1))\times g'(1)=10$
$f'(0)\times g'(1)=10$
한편, $f'(x)=2xe^{-x}-(x^2+2)e^{-x}$
$\qquad=(2x-x^2-2)e^{-x}$
이므로 $f'(0)=-2$
따라서 $(-2)\times g'(1)=10$에서
$g'(1)=-5$
즉 $|g'(1)|=|-5|=5$

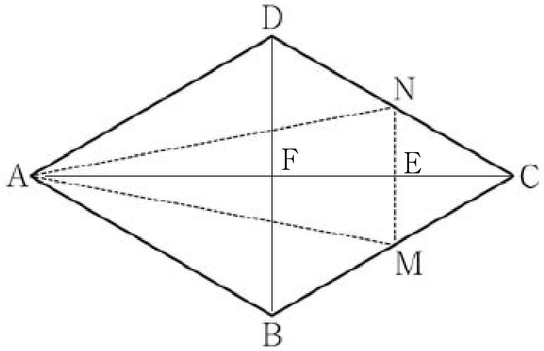
정답 5

27. 출제의도 : 삼수선의 정리를 활용하여 정사영시킨 도형의 넓이를 구할 수

있는가?

정답풀이 :

$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 4=2$



선분 MN의 중점을 E, 선분 AC의 중점 F라 하면

$\overline{AE}=\frac{3}{2}\overline{AF}=\frac{3}{2}\times 2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

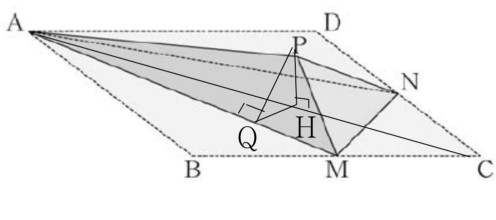
이때 삼각형 AMN의 넓이는

$\triangle AMN=\frac{1}{2}\times\overline{MN}\times\overline{AE}$

$=\frac{1}{2}\times 2\times 3\sqrt{3}$

$=3\sqrt{3}$

점 P에서 평면 AMN에 내린 수선의 발을 H, 점 P에서 선분 AM에 내린 수선이 발을 Q라 하자.



삼각형 AME에서

$\overline{AE}\perp\overline{ME}$이므로

$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{ME}^2}$

$=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+1^2}$

$=2\sqrt{7}$

삼각형 PAM의 넓이에서

$\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{MP}\times\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}\times\overline{AM}\times\overline{PQ}$

이므로

$\frac{1}{2}\times 4\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{7}\times\overline{PQ}$

$\overline{PQ}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$

한편, $\overline{HE}=k$(k는 양수)라 하면

$\overline{AP}^2-\overline{AH}^2=\overline{PE}^2-\overline{HE}^2$

이므로

$4^2-(3\sqrt{3}-k)^2=(\sqrt{3})^2-k^2$

$k=\frac{7\sqrt{3}}{9}$

삼각형 PHE에서

$\overline{PH}=\sqrt{\overline{PE}^2-\overline{HE}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\frac{7\sqrt{3}}{9}\right)^2}$

$=\frac{4\sqrt{6}}{9}$

삼각형 PHQ에서

$\overline{QH}=\sqrt{\overline{PQ}^2-\overline{PH}^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2-\left(\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)^2}$

$=\frac{10\sqrt{21}}{63}$

$\overline{PH}\perp$(평면AMN),

$\overline{PQ}\perp\overline{AM}$

이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{HQ}\perp\overline{AM}$

평면 AMN과 평면 PAM의 이면각의 크기를 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\cos\theta=\frac{\overline{QH}}{\overline{PQ}}$

$$= \frac{\frac{10\sqrt{21}}{63}}{\frac{2\sqrt{21}}{7}}$$

$$= \frac{5}{9}$$

삼각형 AMN의 평면 PAM 위로의 정사영의 넓이는

$3\sqrt{3} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{3}\sqrt{3}$

따라서 $p=3$, $q=5$이므로

$p+q=3+5=8$

정답 8

28. **출제의도** : 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 각각의 홀수가 선택하지 않거나 한 번만 선택되어야 하고 조건 (나)에서 각각의 짝수는 선택되지 않거나 두 번만 선택되어야 하므로 홀수는 1개, 3개 선택되어야 한다.

(ⅰ) 홀수 3개 중 1개가 선택되는 경우

홀수 3개 중 1개를 선택하고 짝수 3개 중 2개가 각각 2번씩 선택되어야 하므로 경우의 수는

${}_3C_1 \times {}_3C_2 = 3 \times 3 = 9$(가지)

이 각각에 대하여 이 수를 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!2!1!} = 30$

그러므로 경우의 수는

$9 \times 30 = 270$(가지)

(ⅱ) 홀수 3개 중 3개가 선택되는 경우

짝수 3개 중 1개가 2번 선택되어야 하므로 경우의 수는

${}_3C_3 \times {}_3C_1 = 3$(가지)

이 각각에 대하여 이 수를 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!1!1!1!} = 60$(가지)

그러므로 경우의 수는

$3 \times 60 = 180$(가지)

따라서, (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$270 + 180 = 450$(가지)

정답 450

29. **출제의도** : 좌표공간에서 직선의 방정식을 이용하여 사면체의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직선 AB의 방정식은

$\frac{x-3}{5} = \frac{y+3}{-10} = \frac{z-3}{5}$

정리하면 $x-3 = \frac{y+3}{-2} = z-3$이므로

직선 AB의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u} = (1,\ -2,\ 1)$

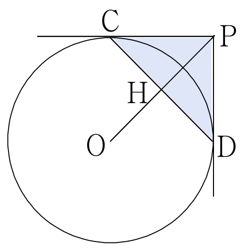
원점 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 P라 하고, 실수 t에 대하여

$\mathrm{P}(t+3,\ -2t-3,\ t+3)$

으로 놓으면

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0$에서 $t=-2$이므로

$\mathrm{P}(1,\ 1,\ 1)$이다.



네 점 $\mathrm{O}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{P}$를 지나는 평면으로 자른 단면에서 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{OC}}=1$이므로

$\overline{\mathrm{PC}}=\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{DH}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

즉 삼각형 CDP의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서 사면체 ABCD의 부피는 두 사면체 $\mathrm{A-PCD}$, $\mathrm{B-PCD}$의 부피의 합과 같으므로 $\overline{\mathrm{AB}}=5\sqrt{6}$에서

$$\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\times5\sqrt{6}=\frac{20}{9}\sqrt{3}$$

즉 $p+q=9+20=29$

정답 29

30. 출제의도 : 두 곡선이 한 점에서 만나도록 하는 관계식을 구한 후, 음함수의 미분법을 활용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=t^3\ln(x-t)$와 곡선 $y=2e^{x-a}$이 만나는 점의 x좌표를 $\alpha(\alpha>t)$라 하면

$t^3\ln(\alpha-t)=2e^{\alpha-a}$ $\cdots\cdots$ ㉠

곡선 $y=t^3\ln(x-t)$와 곡선 $y=2e^{x-a}$이 한 점에서 만나려면 두 곡선이 만나는 점에서의 미분계수가 같아야 한다.

곡선 $y=t^3\ln(x-t)$에서

$y'=t^3\times\dfrac{1}{x-t}$

곡선 $y=2e^{x-a}$에서

$y'=2e^{x-a}$

이때,

$t^3\times\dfrac{1}{\alpha-t}=2e^{\alpha-a}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$3t^2\ln(\alpha-t)+t^3\times\left(-\frac{1}{\alpha-t}\right)=2e^{\alpha-a}\times(-1)\times\frac{da}{dt}$$

$$t^3\ln(\alpha-t)\times\frac{3}{t}-\frac{t^3}{\alpha-t}=2e^{\alpha-a}\times(-1)\times\frac{da}{dt}$$

㉠, ㉡에 의해

$$2e^{\alpha-a}\times\frac{3}{t}-2e^{\alpha-a}=2e^{\alpha-a}\times(-1)\times\frac{da}{dt}$$

$$\frac{3}{t}-1=(-1)\times\frac{da}{dt}$$

$$\frac{da}{dt}=-\frac{3}{t}+1$$

$t=\dfrac{1}{3}$일 때 $\dfrac{da}{dt}=-8$이므로

$f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=-8$

따라서

$$\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2=(-8)^2=64$$

정답 64