

2021학년도 대학수학능력시험
수학영역 나형 정답 및 풀이

*최근 수정일 : 23.03.17(금)

01.④	02.④	03.③	04.②	05.②
06.①	07.⑤	08.②	09.①	10.⑤
11.④	12.②	13.⑤	14.③	15.③
16.②	17.①	18.③	19.④	20.④
21.③	22. 24	23. 12	24. 2	25.15
26.6	27.36	28.21	29.587	30.39

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$3^0 \times 8^{\frac{2}{3}} = 1 \times (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$$

정답 ④

2. 출제의도 : 등비수열의 뜻을 알고 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_3}{a_2} = r = 2 \text{이고,}$$

첫째항이 $\frac{1}{8}$ 이므로

등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = \frac{1}{8} \times 2^{n-1}$$

이다.

$$\text{따라서 } a_5 = \frac{1}{8} \times 2^{5-1} = 2$$

정답 ④

3. 출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+4)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+4) \\ &= 2+4=6 \end{aligned}$$

정답 ③

4. 출제의도 : 삼각함수의 성질을 알고 함수의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \text{ 이므로}$$

$$-4+3 \leq 4\cos x+3 \leq 4+3 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } -1 \leq 4\cos x+3 \leq 7$$

이므로 함수 $f(x) = 4\cos x + 3$ 의 최댓값은 7이다.

정답 ②

5. 출제의도 : 두 사건이 서로 독립일 조건을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

두 사건 A 와 B 가 서로 독립이므로

$$P(A|B) = P(A)$$

이고

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

이다.

주어진 조건에서 $P(A|B) = P(B)$ 이므로

$$P(A) = P(B)$$

따라서

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(A) = \frac{1}{9}$$

에서

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

정답 ②

6. 출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x) = 4x^3 + 3 \text{ 이므로}$$

$$f'(2) = 32 + 3 = 35$$

정답 ①

7. 출제의도 : 지수부등식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x < 3^{21-4x} \text{에서}$$

$$3^{-2x} < 3^{21-4x}$$

$$-2x < 21 - 4x$$

$$2x < 21$$

$$x < \frac{21}{2}$$

따라서, 자연수 x 는 1, 2, ..., 10이므로 그 개수는 10이다.

정답 ⑤

8. 출제의도 : 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

세 수를 곱해서 4가 나오는 경우는 1, 1, 4 또는 1, 2, 2이므로

(i) 1, 1, 4인 경우의 확률

$$3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{72}$$

(ii) 1, 2, 2인 경우의 확률

$$3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{72}$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{1}{72} + \frac{1}{72} = \frac{1}{36}$$

정답 ②

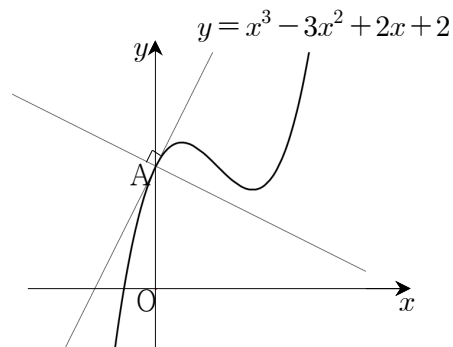
9. 출제의도 : 미분을 이용하여 접선의 x 절편을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y = x^3 - 3x^2 + 2x + 2 \text{에서}$$

$$y' = 3x^2 - 6x + 2$$

따라서 점 $A(0, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 2이므로 이 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.



따라서 점 $A(0, 2)$ 를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 0)$$

$$\text{즉, } y = -\frac{1}{2}x + 2$$

이고 이 직선의 x 절편은

$$0 = -\frac{1}{2}x + 2$$

에서

$$x = 4$$

정답 ①

10. 출제의도 : 시그마의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^5 (2a_k - b_k + 4)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^5 a_k - \sum_{k=1}^5 b_k + \sum_{k=1}^5 4 = 1$$

$$= 2 \times 8 - 9 + 4 \times 5$$

$$= 27$$

정답 ⑤

11. 출제의도 : 표본평균의 분포를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

정규분포 $N(20, 5^2)$ 을 따르는 확률변수를 X 라 하면

$$E(X) = 20, \sigma(X) = 5$$

이 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의 추출하여 구한 표본평균이 \bar{X} 이므로

$$E(\bar{X}) + \sigma(\bar{X})$$

$$= E(X) + \frac{\sigma(X)}{\sqrt{16}}$$

$$= 20 + \frac{5}{4} = \frac{85}{4}$$

정답 ④

12. 출제의도 : 시그마의 정의를 이용하여 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1})$$

$$= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots$$

$$+ (a_n - a_{n+1})$$

$$= a_1 - a_{n+1} = -n^2 + n$$

$$1 - a_{n+1} = -n^2 + n$$

$$a_{n+1} = n^2 - n + 1$$

따라서,

$$a_{11} = 10^2 - 10 + 1 = 91$$

정답 ②

13. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 함수의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(1)$ 은 1, 2, 3, 4 중 어느 것이 되어도 되므로 $f(1)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 4이다.

$f(2) \leq f(3) \leq f(4)$ 를 만족시키도록

$f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 3개를 택한 다음, 크기 않은 수부터 순서대로 $f(2), f(3), f(4)$ 의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3$$

$$= \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$4 \times 20 = 80$$

정답 ⑤

14. 출제의도 : 수직선 위를 움직이는 점의 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$k > 3$ 이므로

$$\int_3^k |2t - 6| dt$$

$$= \int_3^k (2t-6)dt$$

$$= [t^2 - 6t]_3^k$$

$$= (k^2 - 6k) - (9 - 18)$$

$$= k^2 - 6k + 9 = 25$$

$$k^2 - 6k - 16 = 0$$

$$(k-8)(k+2) = 0$$

따라서 $k > 3$ 이므로 $k=8$ 이다.

정답 ③

15. 출제의도 : 원순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

원 모양의 탁자에 우선 A, B가 이웃하여 앉는 경우의 수는

$$2! = 2$$

C가 나머지 4개의 자리 중 B와 이웃하지 않는 3개의 자리에 앉는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

나머지 3명이 나머지 3개의 자리에 앉는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 3 \times 6 = 36$$

정답 ③

다른풀이 :

6명의 학생을 A, B, C, D, E, F라 하자.

조건 (가)에서 A와 B는 이웃하므로

A와 B를 묶어 X라 하면 X, C, D, E, F를

원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$$(5-1)! = 4! = 24$$

이 중에서 C가 B와 이웃하여 둘러앉는

경우는 A, B, C를 이 순서대로 묶어 Y라

놓고 Y, D, E, F를 원 모양의 탁자에

둘러앉는 경우와 같으므로 그 경우의

수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

이때 A와 B는 이웃하고 B와 C는

이웃하지 않는 경우는 C, A, B와

B, A, C의 두 가지 경우가 있으므로

구하는 경우의 수는

$$2 \times (24 - 6) = 36$$

16. 출제의도 : 삼각함수로 표현된 방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \text{이므로 주어진 방정식}$$

은

$$4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$$

$$(2\sin x - 1)(2\sin x + 3) = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

이때, $0 \leq x < 4\pi$ 이므로

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{5}{6}\pi$$

따라서 모든 해의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi + 2\pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi + \frac{5}{6}\pi = 6\pi$$

정답 ②

17. 출제의도 : 극한의 성질과 미분계수의 정의 및 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x)}{x} = 3 \text{에서}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + g(x)\} = 0 \text{이다.}$$

이때 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 는 연속함수이므로

$$f(0)+g(0)=0 \cdots \textcircled{A}$$

따라서

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+g(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+g(x)-f(0)-g(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)-f(0)}{x} + \frac{g(x)-g(0)}{x} \right\} \\ &= f'(0)+g'(0)=3 \cdots \textcircled{B} \end{aligned}$$

이다.

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3}{xg(x)}=2 \text{에서}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+3\}=0 \text{이므로}$$

$$f(0)+3=0 \text{에서}$$

$$f(0)=-3$$

따라서 \textcircled{A} 에서

$$g(0)=3$$

따라서

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3}{xg(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)-f(0)}{x} \times \frac{1}{g(x)} \right\} \\ &= \frac{f'(0)}{g(0)} \\ &= \frac{f'(0)}{3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{에서 } f'(0)=6$$

따라서 \textcircled{B} 에서

$$g'(0)=-3$$

그러므로 곱의 미분법에 의해

$$h'(0)$$

$$= f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$$

$$= 6 \times 3 + (-3) \times (-3) = 27$$

정답 ①

18. 출제의도 : 로그함수의 그래프를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

ㄱ.

점 A의 x 좌표는

$$\log_a x = 1$$

$$x = a$$

이므로 A($a, 1$)

또, 점 B의 x 좌표는

$$\log_{4a} x = 1$$

$$x = 4a$$

이므로 B($4a, 1$)

그러므로 선분 AB를 1:4로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 4a - 4 \times a}{1 - 4}, \frac{1 \times 1 - 4 \times 1}{1 - 4} \right)$$

$$(0, 1) \text{ <참>}$$

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 선분 AB가 x 축과 평행하므로 두 점 A, D의 x 좌표는 같아야 한다.

한편 점 D의 x 좌표는

$$\log_{4a} x = -1$$

$$x = \frac{1}{4a}$$

$$\text{이므로 } D\left(\frac{1}{4a}, -1\right)$$

이때 A($a, 1$)이므로

$$a = \frac{1}{4a}$$

$$a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{이때 } \frac{1}{4} < a < 1 \text{이므로}$$

$$a = \frac{1}{2} \text{ <참>}$$

ㄷ.

$$\overline{AB} = 4a - a = 3a$$

한편, 점 C의 x좌표는

$$\log_a x = -1$$

$$x = \frac{1}{a}$$

이므로

$$C\left(\frac{1}{a}, -1\right)$$

그러므로

$$\overline{CD} = \frac{1}{a} - \frac{1}{4a} = \frac{3}{4a}$$

한편, $\overline{AB} < \overline{CD}$ 이면

$$3a < \frac{3}{4a}$$

$$a^2 < \frac{1}{4}$$

이때 $\frac{1}{4} < a < 1$ 이므로

$$\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2} \quad \text{<거짓>}$$

정답 ③

19. 출제의도 : 정규분포의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X 가 정규분포 $N(8, 3^2)$ 을 따르고 확률변수 Y 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르므로

$$P(4 \leq X \leq 8) + P(Y \geq 8)$$

$$= P\left(\frac{4-8}{3} \leq \frac{X-8}{3} \leq \frac{8-8}{3}\right)$$

$$+ P\left(\frac{Y-m}{\sigma} \geq \frac{8-m}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(-\frac{4}{3} \leq Z \leq 0\right) + P\left(Z \geq \frac{8-m}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(0 \leq Z \leq \frac{4}{3}\right) + P\left(Z \geq \frac{8-m}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

그러므로

$$\frac{8-m}{\sigma} = \frac{4}{3}$$

$$m = 8 - \frac{4}{3}\sigma$$

따라서,

$$P\left(Y \leq 8 + \frac{2\sigma}{3}\right)$$

$$= P\left(\frac{Y - \left(8 - \frac{4\sigma}{3}\right)}{\sigma} \leq \frac{8 + \frac{2\sigma}{3} - \left(8 - \frac{4\sigma}{3}\right)}{\sigma}\right)$$

$$= P(Z \leq 2)$$

$$= \frac{1}{2} + P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 0.5 + 0.4772$$

$$= 0.9772$$

정답 ④

20. 출제의도 : 정적분으로 표현된 함수가 오직 하나의 극값을 가질 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$g'(x) = 2x \int_0^x f(t)dt + x^2 f(x) - x^2 f(x)$$

$$= 2x \int_0^x f(t)dt$$

이고

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-a) \quad (a > 1)$$

이므로

$g'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 좌우에서 $g'(x)$ 의 부호가 변하는 값이 오직 한 개만 존재해야 한다.

이때, $g'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$x=0$ 또는 방정식 $\int_0^x f(t)dt=0$ 의 실근이다.

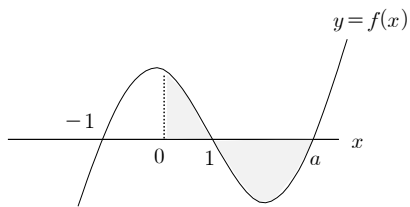
(i) $\int_0^\alpha f(t)dt=0$ 을 만족시키는 실수 α ($\alpha < -1$)가 반드시 존재하고, $x=\alpha$ 의 좌우에서 $g'(x)$ 의 부호는 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $g(x)$ 는 $x=\alpha$ 에서 극값을 갖는다.

(ii) $\int_0^0 f(t)dt=0$ 이고,
 $-1 < x < 0$ 인 임의의 실수 x 에 대하여 $\int_0^x f(t)dt < 0$,
 $0 < x < 1$ 인 임의의 실수 x 에 대하여 $\int_0^x f(t)dt > 0$ 이므로

$x=0$ 의 좌우에서 $\int_0^x f(t)dt$ 의 부호는 음에서 양으로 바뀐다.

따라서 $g'(x)=2x \int_0^x f(t)dt$ 의 부호는 $x=0$ 의 좌우에서 항상 0 이상이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극값을 갖지 않는다.

따라서, a 가 최대가 되는 조건을 만족시키는 경우는 그림과 같이 색칠된 두 부분의 넓이가 같을 때이다.



즉, $\int_0^a f(x)dx=0$ 이어야 하므로

$$\int_0^a (x+1)(x-1)(x-a)dx$$

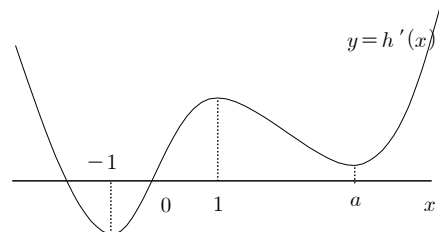
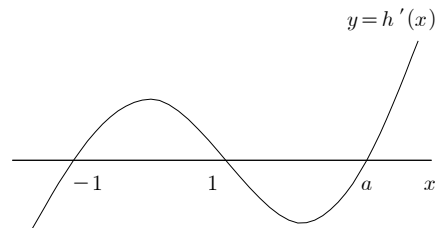
$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax \right]_0^a \\ &= \frac{1}{4}a^4 - \frac{a^4}{3} - \frac{a^2}{2} + a^2 \\ &= -\frac{a^4}{12} + \frac{a^2}{2} = 0 \\ &a^2 = 6 \end{aligned}$$

즉, a 의 최댓값은 $\sqrt{6}$ 이다.

정답 ④

다른풀이 :

함수 $h(x)=\int_0^x f(t)dt$ 라 하면 두 함수 $y=h'(x)$, $y=h(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



따라서, $h(a)=\int_0^a f(t)dt \geq 0$ 이어야 하므로

$$\begin{aligned} &\int_0^a (x+1)(x-1)(x-a)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax \right]_0^a \\ &= \frac{1}{4}a^4 - \frac{a^4}{3} - \frac{a^2}{2} + a^2 \end{aligned}$$

$$= -\frac{a^4}{12} + \frac{a^2}{2} \geq 0$$

$$a^2(a^2 - 6) \leq 0$$

$$a > 1 \text{ 이므로 } 1 < a \leq \sqrt{6}$$

따라서 a 의 최댓값은 $\sqrt{6}$ 이다.

21. **출제의도** : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 항을 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

두 조건 (가), (나)에서 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{2n+1} = a_{2n} - 3 \cdots \textcircled{A}$$

이 성립하므로

$$a_3 = a_2 - 3 \cdots \textcircled{B}$$

$$a_5 = a_4 - 3,$$

$$a_7 = a_6 - 3 \cdots \textcircled{C}$$

이다.

$$a_7 = 2 \text{ 이므로 } \textcircled{C} \text{에서}$$

$$a_6 = 5$$

이때 조건 (가)에서

$$a_6 = a_2 \times a_3 + 1 = 5$$

$$\text{즉, } a_2 \times a_3 = 4$$

이므로 \textcircled{B} 에서

$$a_2(a_2 - 3) = 4$$

$$a_2^2 - 3a_2 - 4 = (a_2 + 1)(a_2 - 4) = 0$$

따라서 $a_2 = -1$ 또는 $a_2 = 4$

(i) $a_2 = -1$ 일 때

조건 (가)에서

$$a_2 = a_2 \times a_1 + 1$$

이므로

$$-1 = -a_1 + 1$$

따라서 $a_1 = 2$ 이므로 $0 < a_1 < 1$ 이라는

조건에 모순이다.

(ii) $a_2 = 4$ 일 때

조건 (가)에서

$$a_2 = a_2 \times a_1 + 1$$

이므로

$$4 = 4a_1 + 1$$

따라서 $a_1 = \frac{3}{4}$ 이므로 $0 < a_1 < 1$ 이라는

조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서

$$a_1 = \frac{3}{4}, a_2 = 4$$

이때 \textcircled{A} 에서

$$a_{25} = a_{24} - 3$$

이고 조건 (가)에서

$$a_{24} = a_2 \times a_{12} + 1$$

$$= 4a_{12} + 1$$

이때

$$a_{12} = a_2 \times a_6 + 1$$

$$= 4a_6 + 1$$

$$= 4 \times 5 + 1 = 21$$

이므로

$$a_{24} = 4 \times 21 + 1 = 85$$

따라서

$$a_{25} = a_{24} - 3$$

$$= 85 - 3 = 82$$

정답 ③

22. **출제의도** : 이항정리를 이용하여 전개식의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(3x+1)^8$ 의 전개식의 일반항은

$${}_8C_r (3x)^r = {}_8C_r 3^r x^r \text{ (단, } r=0,1,2,\dots,8)$$

따라서 x 의 계수는 $r=1$ 일 때이므로

$${}_8C_1 \times 3 = 24$$

정답 24

23. 출제의도 : 부정적분을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 5 \text{에서}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (3x^2 + 4x + 5) dx$$

$$= x^3 + 2x^2 + 5x + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

$$f(0) = 4 \text{이므로}$$

$$C = 4$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 4 \text{이므로}$$

$$f(1) = 1 + 2 + 5 + 4 = 12$$

정답 12

24. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log_3 72 - \log_3 8 = \log_3 9 = 2$$

정답 2

25. 출제의도 : 미분을 이용하여 삼차함수의 그래프를 그릴 수 있는가?

정답풀이 :

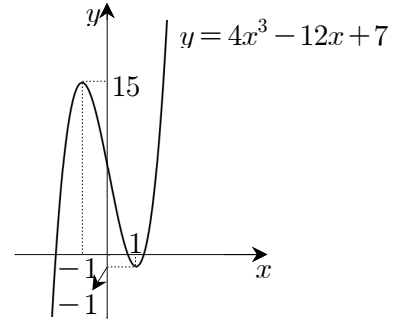
$$y = 4x^3 - 12x + 7 \text{에서}$$

$$y' = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1)$$

이므로 $y' = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$x = -1$ 과 $x = 1$ 이다.

따라서 함수 $y = 4x^3 - 12x + 7$ 은 $x = -1$ 에서 극댓값 15, $x = 1$ 에서 극솟값 -1을 갖는다.



이때 곡선 $y = 4x^3 - 12x + 7$ 과 직선 $y = k$ 의 교점의 개수가 2이므로 직선 $y = k$ 는 점 $(-1, 15)$ 또는 $(1, -1)$ 을 지나야 한다.

따라서 양수 k 의 값은 15이다.

정답 15

26. 출제의도 : 함수가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \text{ 이어야 하고}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -3 + a$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2} = -3 + a$$

즉, $x \rightarrow 1^+$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

따라서 $b = -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x+3}+2)$$

$$= 4$$

즉, $-3 + a = 4$ 이므로 $a = 7$

따라서 $a+b=6$

정답 6

27. 출제의도 : 정적분을 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

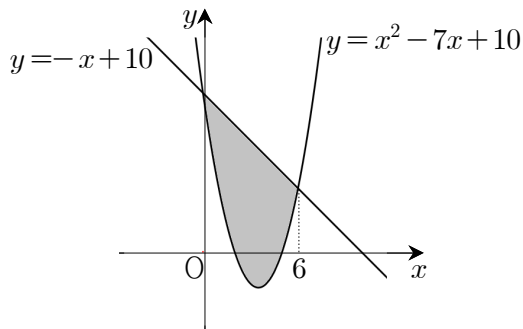
정답풀이 :

곡선 $y=x^2-7x+10$ 과 직선 $y=-x+10$ 이 만나는 점의 x 좌표는

$$x^2-7x+10=-x+10 \text{에서}$$

$$x^2-6x=x(x-6)=0$$

이므로 $x=0$ 과 $x=6$ 이다.



따라서 곡선 $y=x^2-7x+10$ 과 직선 $y=-x+10$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^6 \{(-x+10)-(x^2-7x+10)\} dx$$

$$= \int_0^6 (-x^2+6x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^6$$

$$= -\frac{1}{3} \times 6^3 + 3 \times 6^2$$

$$= -72 + 108 = 36$$

정답 36

28. 출제의도 : 코사인법칙과 사인법칙을 활용하여 삼각형의 한 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2 \times 7$$

$$\overline{BC} = 7\sqrt{3} \quad \text{----}\ominus$$

한편, $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 1$ 이므로

$\overline{AC} = k (k > 0)$ 라 하면 $\overline{AB} = 3k$ 이므로

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos \frac{\pi}{3}}$$

$$= \sqrt{9k^2 + k^2 - 2 \times 3k \times k \times \frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{7k^2}$$

$$= \sqrt{7}k \quad \text{---}\ominus$$

\ominus 과 $\omin�$ 에서

$$7\sqrt{3} = \sqrt{7}k$$

$$k = \sqrt{21}$$

따라서,

$$\overline{AC} = k = \sqrt{21}$$

이므로 $k^2 = 21$

정답 21

29. 출제의도 : 독립일 때의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) 꺼낸 공의 수가 3인 경우

주머니에서 꺼낸 공의 수가 3일 확률은

$$\frac{2}{5} \quad \text{-----}\ominus$$

이때 주사위를 3번 던져 나오는 눈의 수의 합이 10인 경우는 순서를 생각하지 않으면

6, 3, 1 또는 6, 2, 2 또는 5, 4, 1

또는 5, 3, 2 또는 4, 4, 2 또는 4, 3, 3
이때의 확률은

$$\left(3! + \frac{3!}{2!1!} + 3! + 3! + \frac{3!}{2!1!} + \frac{3!}{2!1!}\right) \times \left(\frac{1}{6}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8} \quad \text{----} \textcircled{\text{D}}$$

㉠과 ㉡에서 확률은

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{20}$$

(ii) 꺼낸 공의 수가 4인 경우

주머니에서 꺼낸 공의 수가 4일 확률은

$$\frac{3}{5} \quad \text{-----} \textcircled{\text{E}}$$

이때 주사위를 4번 던져 나오는 눈의 수
의 합이 10인 경우는 순서를 생각하지
않으면

6, 2, 1, 1 또는 5, 3, 1, 1

또는 5, 2, 2, 1 또는 4, 4, 1, 1

또는 4, 3, 2, 1 또는 4, 2, 2, 2

또는 3, 3, 3, 1 또는 3, 3, 2, 2

이때의 확률은

$$\left(\frac{4!}{2!1!1!} + \frac{4!}{2!1!1!} + \frac{4!}{2!1!1!} + \frac{4!}{2!2!} + 4! + \frac{4!}{3!1!} + \frac{4!}{3!1!} + \frac{4!}{2!2!}\right) \times \left(\frac{1}{6}\right)^4$$

$$= 80 \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 \quad \text{-----} \textcircled{\text{F}}$$

㉢과 ㉣에서 확률은

$$\frac{3}{5} \times 80 \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{27}$$

따라서, (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{27} = \frac{47}{540}$$

이므로 $p = 540$, $q = 47$

$p + q = 587$

정답 587

30. 출제의도 : 함수가 실수 전체의 집
합에서 미분가능할 조건을 구할 수 있는
가?

정답풀이 :

$$h(0) = |f(0) - g(0)| = 0 \text{에서}$$

$$f(0) = g(0)$$

또한, $x < 1$ 일 때,

함수 $h(x) = |f(x) - g(x)|$ 가 미분가능하고
 $f(0) = g(0)$ 이므로 $x = 0$ 에서 두 함수
 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프는 접해야
한다.

즉, $f'(0) = g'(0)$ 이다.

또한, $x = 1$ 에서 함수 $h(x)$ 는 미분가능
하므로 $x = 1$ 에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} h(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1-} |f(x) - g(x)| = \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x) + g(x)\} \cdots \textcircled{\text{G}}$$

(i) 1보다 작은 근방 x 에서 $f(x) > g(x)$
일 때, 함수 $h(x)$ 가 $x = 1$ 에서 미분가능
하므로

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{h(1 + \Delta x) - h(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{h(1 + \Delta x) - h(1)}{\Delta x}$$

$$f'(1) - g'(1) = f'(1) + g'(1)$$

$$g'(1) = 0$$

그런데 $g(x)$ 는 일차함수이므로 모순이
다.

(ii) 1보다 작은 근방 x 에서 $f(x) < g(x)$
일 때, 함수 $h(x)$ 가 $x = 1$ 에서 미분가능
해야 하므로

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{h(1 + \Delta x) - h(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{h(1 + \Delta x) - h(1)}{\Delta x}$$

$$-f'(1) + g'(1) = f'(1) + g'(1)$$

$$f'(1) = 0$$

또한, ①에서 $-f(1) + g(1) = f(1) + g(1)$

이므로

$$f(1) = 0$$

따라서,

$$f(x) = (x-1)^2(x+a), \quad g(x) = px+q$$

(a, q 는 상수, p 는 0이 아닌 상수)

로 놓을 수 있으므로

$$f'(x) = 2(x-1)(x+a) + (x-1)^2$$

$$g'(x) = p$$

이때 $f(0) = g(0), f'(0) = g'(0)$ 에서

$$a = q, \quad -2a + 1 = p$$

이고

$$h(2) = f(2) + g(2)$$

$$= (2+a) + 2p + q$$

$$= 2 + a + 2p + q = 5$$

$$a + 2p + q = 3$$

즉, $a = -\frac{1}{2}, \quad p = 2, \quad q = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$f(x) = (x-1)^2\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

$$g(x) = 2x - \frac{1}{2}$$

$$h(4) = f(4) + g(4)$$

$$= 9 \times \frac{7}{2} + 8 - \frac{1}{2}$$

$$= 39$$

정답 39