# 수학 주제탐구활동 보고서

| | | | |
|---|---|---|---|
| 조 이름 | 컴퓨터와 수학 조 | 조원 | 학번 : 10428 이름 : 최명국 |
| 탐구주제 | 좌표 및 함수를 이용한 원주율 계산 프로그램 | | |
| 탐구분야<br>(중복 체크 가능) | ☐ 타 교과와의 연계<br>■ 진로희망분야 관련<br>■ 수학 내적 심화<br>☐ 기타 ( ) | 관련 단원<br>(중복 체크 가능) | ☐ 다항식<br>☐ 방정식과 부등식<br>■ 도형의 방정식<br>☐ 집합과 명제<br>■ 함수<br>☐ 경우의 수 |
| 주제탐구내용 요약<br>(5줄 내외) | 정사각형에 내접한 $x^2+y^2=1$의 그래프 위에 무작위로 점을 찍어 정사각형과 원그래프의 넓이를 구하여 원주율의 근삿값을 계산한다.<br>원에 내접한 정육각형을 그리고, 피타고라스 정리를 응용한 증명을 통해 정$6\times 2^n$각형의 한 변의 길이를 구할 수 있는 공식을 만든다. 이를 함수로 만들고, 함수의 합성을 통해 원주율의 근삿값을 계산한다. | | |

**서론**

**이 주제를 선정한 이유는 무엇인가?**

이전에 확률을 이용해 원주율을 구하는 방법을 소개하는 영상을 본 적이 있다. 나는 컴퓨터의 시뮬레이션을 통해 이 실험을 직접 구현해 볼 수 있겠다고 생각하였고, 학교 수학 수업 시간 때 배운 개념들을 조금씩 응용하여 실제 프로그램을 완성하였다. 프로그램을 완성하고 나서, 또한 확률을 통한 계산 이외에 다각형을 이용하여 원주율을 계산해볼 수도 있으리라 생각하였고, 다각형을 이용한 원주율 계산 프로그램 또한 완성하였다.

**이 주제의 탐구(연구) 가치는 무엇인가?**

이번 탐구를 통해 고1 수학 내용을 이용하여 원주율의 근삿값을 구하는 시뮬레이터를 만들어 볼 수 있다. 몬테카를로법의 경우, 원주율뿐만 아니라 사회, 경제 등 다양한 분야에서 시뮬레이션을 통한 결과를 얻을 수 있는 유용한 방법이다. 다각형에서 피타고라스 정리와 같은 방법을 사용하여 증명을 통해 원하는 결과를 얻을 수 있다.

**탐구 주제가 우리가 배운 교육과정 또는 다른 교과목 및 진로희망분야와 어떠한 관련이 있는가?**

확률을 이용한 원주율 계산에서는 $x^2+y^2=1$형태의 원의 방정식을 좌표평면 위에 나타내고, 제1 사분면의 범위에서 무작위로 좌표를 생성한다. 그 좌표와 원점 사이의 거리를 계산하여 그래프 안쪽에 있는지 판단함으로써 원과 정사각형의 넓이를 구한다.
다각형을 이용한 원주율 계산에서는 증명을 통해 정육각형의 한 변의 길이를 이용해 정십이각형의 한 변의 길이를 구하는 공식을 찾아내고, 이를 함수로써 생각하여 이 함수를 여러 번 합성하여 원주의 근삿값을 구한다.



**본론**

**탐구 방법 및 절차**

1. 확률을 이용한 원주율 계산 프로그램 원리 탐구 및 구현
2. 다각형을 이용한 원주율 계산 프로그램 원리 탐구 및 구현

**탐구 내용 및 결과**

1. 확률을 이용한 원주율 계산 프로그램

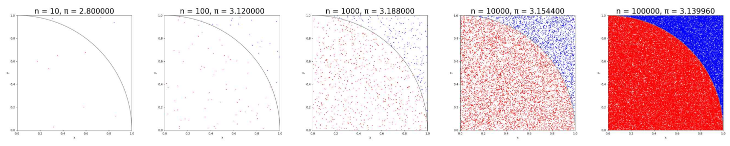
-원리 : 확률을 이용해 원주율을 구하기 위해 몬테카를로법(Monte Carlo method)을 사용할 것이다. 원리는 매우 간단하다. 원에 외접하는 정사각형을 그린 후, 그 정사각형에 무작위로 점을 무수히 많이 찍는다. 찍은 점의 개수를 정사각형의 넓이라 하면, 정사각형에 내접해있는 원의 넓이는 그 원 안에 찍힌 점의 개수와 같다. 정사각형의 넓이의 제곱근은 내접해있는 원의 지름과 같으므로 이를 이용하면 원주율의 근삿값을 구할 수 있다. 실제 프로그램을 만들 때는 계산을 빠르게 하도록 $x^2+y^2=1$의 그래프의 제1 사분면에 있는 부분만을 이용하여 계산할 것이다.

```
import random  #난수 생성 함수 라이브러리

sq_size = int(input("반복 수 입력 : "))  #찍을 점의 개수 입력
cr_size =0  #원의 넓이 저장하는 변수 선언

for i in range(sq_size):  #입력한 만큼 반복
    x =random.random()  #랜덤 x좌표 생성
    y =random.random()  #랜덤 y좌표 생성
    len =(x*x) +(y*y)  #원점으로부터의 거리 계산

    if(len <=1):  #만약 거리가 1보다 작거나 같으면
        cr_size +=1  #원의 넓이에 1만큼 더하라

pi =4*(cr_size/sq_size)  #원주율 계산
print("pi : %.15lf"%pi)  #결괏값 출력
```

위 코드는 몬테카를로법을 이용해 원주율의 근삿값을 계산하는 코드이다. matplotlib이라는 라이브러리를 사용하면 그래프도 그릴 수 있지만, 그래프를 그리는 코드까지 포함하면 너무 길어지므로 필요한 부분만 적었다. 우선 코드의 초반부에서 사용자가 직접 사각형에 찍을 점의 개수를 입력한다. 그러면 컴퓨터는 입력한 값만큼 0~1 범위에서 랜덤한 좌표를 생성한다. 범위를 더 늘릴 수도 있지만, 정수부분을 통일시키는 것이 계산하기 간편하므로 0~1 범위로 설정하였다. 랜덤 좌표를 생성하면 그 점이 그래프의 안쪽에 있는지, 바깥쪽에 있는지 판단한다. 원점에서 점까지의 거리를 계산하여 거리가 1보다 작거나 같으면 원 안에 있는 점으로 간주한다. 그렇게 반복하면 사각형과 원의 넓이가 나온다.

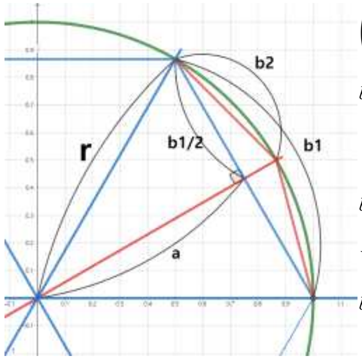
$$(\text{반지름}) = \sqrt{(\text{정사각형 넓이})}$$
$$(\text{원 넓이}) = \pi \times (\text{반지름})^2$$
$$\pi = \frac{(\text{원 넓이})}{(\text{반지름})^2} = \frac{(\text{원 넓이})}{(\text{정사각형 넓이})}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10회 | 2.80 | 100,000회 | 3.139960 |
| 100회 | 3.120 | 1,000,000회 | 3.142964000 |
| 1,000회 | 3.1880 | 100,000,000회 | 3.141579880 |
| 10,000회 | 3.15440 | | |




그래프를 그리는 코드를 포함하여 실제 시뮬레이션을 돌린 결과이다.

2. 다각형을 활용한 원주율 계산 프로그램




$$\left(\frac{b_n}{2}\right)^2 = r^2 - a^2,\ a = \sqrt{r^2 - \left(\frac{b_n}{2}\right)^2}$$

$$b_{n+1}^2 = \left(\frac{b_n}{2}\right)^2 + \left(r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{b_n}{2}\right)^2}\right)^2$$

$$= \frac{b_n^2}{4} + r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \left(\frac{b_n}{2}\right)^2} + r^2 - \frac{b_n^2}{4}$$

$$b_{n+1} = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \left(\frac{b_n}{2}\right)^2}}$$

반지름은 1이므로,

$$b_{n+1} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{b_n^2}{4}}}$$

$$\therefore b_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - b_n^2}}$$

(아이디어는 이미 존재했으나 증명은 직접 계산하였다) 다각형을 이용한 방법은 원에 내접한 육각형을 이용한다. 반지름이 1인 원에 내접하는 정육각형의 한 변의 길이는 1이 되고, 피타고라스 정리를 적절히 이용한 위의 증명을 이용한 식을 이용하면 정12각형의 한 변의 길이를 구할 수 있다. (약 0.517638) 또 정12각형의 한 변의 길이를 위의 식에 대입하면 정24각형의 한 변의 길이를 구할 수 있다. 이 식을 함수로 생각하면,

$f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{4 - x^2}}$

이처럼 나타낼 수 있다. x가 0일 때는 변의 길이가 0임을 의미하므로 해당 식이 성립하지 않고, x가 정육면체의 변의 길이인 1이 될 때, 정12면체의 변의 길이는 f(1)이 된다. 마찬가지로 x에 f(1)을 넣으면 f(f(1))이 되고, 이는 정24면체의 변의 길이가 된다. 이 과정을 계속 반복하면 원주의 근삿값을 구할 수 있는데,

$(\text{원주}) \fallingdotseq (f \circ f \circ f \circ \ldots \times n\text{번})(1) \times 6 \times 2^n$

이렇게 표현할 수 있다. n의 값이 커질수록 값은 원주에 더욱 가까워지게 된다.

```python
num = int(input("반복 횟수 입력 : "))  #반복할 횟수 입력
angle_num = 6*2**num  #다각형 변 개수 계산
side_length = 1  #변 개수 초기화

for i in range(num):  #입력한 값만큼 반복
    side_length =(2-(4-side_length*side_length)**.5)**.5  #식 대입
pi =angle_num*side_length/2  #pi=(변의 길이)*(변의 개수)/2

print("%d회, 정%d각형, pi : %.15lf"%(num,side_length,pi))  #결과 출력
```

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1회 | 정6각형 | 3.000000000000000 | 8회 | 정768각형 | 3.141583892148936 |
| 2회 | 정12각형 | 3.105828541230250 | 9회 | 정1536각형 | 3.141590463236762 |
| 3회 | 정24각형 | 3.132628613281237 | 10회 | 정3072각형 | 3.141592106043048 |
| 4회 | 정48각형 | 3.139350203046872 | 11회 | 정6144각형 | 3.141592516588155 |
| 5회 | 정96각형 | 3.141031950890530 | 12회 | 정12288각형 | 3.141592618640789 |
| 6회 | 정192각형 | 3.141452472285344 | 13회 | 정24576각형 | 3.141592645321216 |
| 7회 | 정384각형 | 3.141557607911622 | | | |

**탐구 결과에 대한 해석**

지금까지 두 가지 방법을 이용해 원주율의 근삿값을 구해보았다. 몬테카를로법을 이용하면 직접 그래프에 나타내어 시각적으로 보여줄 수 있다는 장점이 있지만, 다각형을 이용한 방법에 비해 계산한 양에 대비해서 원주율의 정확도가 높지 않다. 다각형을 이용한 원주율을 구하는 방법은 일정한 공식을 이용해 계산하기 때문에 확률을 이용하는 방법보다 높은 정확도를 가지고 있다. 하지만 다양한 다각형을 이용하지 못하고 $6 \times 2^n$형태의 정다각형만 이용할 수 있다는 단점이 있다. 그 외에도 한계가 있는데, 바로 소수점 아래 15자리까지밖에 계산하지 못한다는 점이다. 이는 컴퓨터에서 값을 저장하는 자료형인 double이 최대 15자리밖에 표현하지 못하기 때문이다. 이 때문에 연구원들은 슈퍼컴퓨터를 이용하여 소수점 아래 수조 자리까지 계산할 수 있는 소프트웨어(메커니즘은 위의 방법과는 다르지만)를 자체적으로 만들어 원주율을 계산한다.



**결론**

**본론에 대한 정리**

첫 번째 확률을 이용한 원주율 계산에서는 몬테카를로법을 이용해 원주율을 계산하였다. 정사각형과 그 안에 내접한 원에 무작위로 점을 찍고, 그 점의 개수를 넓이로 생각하여 정사각형과 내접한 원의 넓이의 비율을 알아내어 원주율을 구하였다. 다각형을 이용한 원주율 계산에서는 원에 내접한 정육각형에서 피타고라스 정리를 적절히 사용하여 정십이각형의 한 변의 길이를 구하는 방법을 알아내고, 이를 일반화하여 공식으로 만들었다. 이것을 계속 합성하여 원주율의 근삿값을 알아내었다.

**주제탐구활동을 통해 배운 점(알게된 점)은 무엇인가?**

확률을 이용한 원주율 계산 프로그램을 만들면서 반복된 무작위 추출을 통해 함수의 값을 근사하는 알고리즘인 몬테카를로법에 대해 알게 되었다.

확률을 이용해 원주율을 계산하는 프로그램을 만들 때 점을 찍고 그 점이 원의 안에 있는지 밖에 있는지 판별하는 방법에서 고민하였고, 고1 수학에서 배운 내용을 활용하여 이를 해결하였다.

다각형을 이용한 원주율 계산 프로그램을 구현하기 위해 고민하는 과정에 많은 것들을 알게 되었다. 처음에는 한 변의 길이가 1인 정육각형만을 가지고 어떻게 다른 정다각형의 변의 길이를 알아낼 것인지 많은 고민이 있었고, 여러 시행착오를 거치면서 피타고라스 정리를 이용해 다른 정다각형의 변의 길이를 알아내는 방법을 알아내었고, 이를 공식으로 일반화할 수 있었다.

**탐구주제의 내용이 확장 가능한가? (수학 내적 심화, 타 교과목, 진로희망분야 등)**

이번 탐구에서는 원주율을 가지고 그것을 구해내는 활동을 하였지만, 이것 이외에도 컴퓨터를 활용하면 다양한 활동들을 할 수 있다. 수학적 개념들을 컴퓨터로 구현하고, 증명하는 활동들을 하고, 이를 실제 문제를 풀이하는 데 활용할 수도 있다.

**참고문헌**

이것이 C언어다:서현우의 C 프로그래밍 정복/서현우 저/한빛미디어
파이썬 for Beginner/우재남 저/한빛아카데미
모두의 인공지능 기초수학/서지영 저/길벗
달콤새콤, 수학 한입/팀 샤르티에 저/프리렉

**상호평가**

10428 최명국 : A

**작성 시 유의사항**

1. 함초롱바탕체 10pt 또는 수기로 작성할 것
2. 2~3쪽 내외의 분량으로 작성(그림, 도표 등 포함)
3. 11/28(일) 자정까지 구글 클래스룸에 업로드(조장) 또는 메일 제출