3. ODE 소개 및 1^{st} ODE

※ Basic concepts

- Modeling
  - mathmatical model : engineering problem을 풀기 위해 변수에 대한 수학적 표현으로 문제 구성
    시스템을 수학적으로 표현한 것
  - 시간에 대한 변화를 해석 → 미분 방정식의 형태로 표현
- What is "Differential Equations"?
  - 미분 항이 있는 방정식
  - 변수는 시간에 대한 함수로 간주
  - 1^{st} order ODE : $\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) = 0$

    $\rightarrow \frac{dx}{dt} + 3x = 0$

    $\rightarrow x' + 3x = 0$
  - 2^{nd} order ODE : $\frac{d^2x(t)}{dt} - 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = 0$

    $\rightarrow \frac{d^2x}{dt} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$

    $\rightarrow x'' - 3x' + 2x = 0$
- Solution : 시간에 대한 함수
- What is "Ordinary" Differential Equations?
  - 함수로 주어지는 해가 단 하나의 독립변수만 갖는 경우
- First - order ODEs
  - 변수의 역할을 하는 미지의 함수(unknown function)에 대한 1계 미분 항을 포함
    1. 변수의 역할을 하는 미지의 함수가 무엇인지
    2. 그 함수의 독립 변수가 무엇인지
- 1차 ODE의 일반적인 표현법
  1. Implicit form $F(x, y, y') = 0$ (한 쪽에 0)
  2. Explicit form $y' = f(x, y)$ (한 쪽에 y')

※ Solution of an ODE

- Solution of equation
  - 방정식의 변수를 대체할 수 있는 함수
- Solution of ODE
  - 미분 방정식의 미지의 함수 $y(x)$를 대체할 수 있는 $h(x)$
  - 필요시 독립 변수 x의 구간 설정
  - Solution curve : Solution 함수 $h(x)$의 그래프
- Solution의 두 종류 (문제를 푸는 방법)
  - Analytic solution : 기본 함수들로 해를 정확히 표현
  - numerical solution : 수치 해석 방법으로 해를 근사
- General Solution 과 Particular solution
  - 일반해 : 적분 상수를 포함하여 일반적으로 표현
  - 특수해 : 적분 상수에 임의의 상수를 대입하여 특수하게 표현
- 미분 방정식이 고유한 해를 갖기 위해서
  - 적분 상수를 정할 수 있는 조건 필요 → 고유한 해 (unique solution)
    ↳ 초기 조건 (initial solution)
- Initial value problem (IVP)
  - 초기 조건이 주어지는 미분 방정식

* Numerical method for 1st ODE

- Consider the following 1st ODE

$$y'(x) = f(x,y)$$

- Graphic method of 'direction fields'
  - 임의의 x에 대한 도함수 $y'(x)$의 값 $\longrightarrow$ x에서 $y(x)$의 기울기
  - $f(x,y)$의 값으로부터 각 위치에서 함수의 기울기 추정 가능
  - 해당 값들을 대략적으로 좌표 평면에 표현

- Euler's method
  - 초기값 ($y(x_0) = y_0$) 이 주어졌을 때, 일정한 간격으로 다음 값을 계산하는 방식
  - $y'(x)$가 기울기 임을 활용

* Summary for 1st order ODEs

- Simple equations
  - [1] : $y'(x) = f(x)$
  - [2] : $y'(x) = f(x)y(x)$
- Separable equations (분리 가능 방정식)
  - [3] : 분리 가능
  - [4] : 분리 가능 방정식으로 변환 가능한 방정식
- [5] : Exact diffrential equations (전 미분 방정식)
- [6] : 1차 선형 상미분 방정식
- [7] : Non - exact diffrential equations (1 - 6 형태 모두 아님)
- [8] : Bernoulli equations

* Simple equations

[1] 가장 단순한 1차 미분 방정식의 형태

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \longrightarrow y = \int f(x)\,dx$$

양변을 x에 대해 적분

[2] $y'(x) = ky(x) \rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = k$

$$\rightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = kx + c$$

$$\rightarrow \ln|y(x)| = kx + c$$

$$\rightarrow y(x) = e^{kx+c} = Ce^{kx} \quad (e^c \times e^{kx} = C \times e^{kx})$$

$y'(x) = f(x)y(x) \rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = f(x)$

$$\rightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)} = \int f(x)dx + C$$

$$\rightarrow \ln|y(x)| = \int f(x)dx + C$$

$$\rightarrow y(x) = \exp\left(\int f(x)dx + C\right) = C\exp\left(\int f(x)dx\right)$$

\+ 치환 적분

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx$$

$y(x) = t$라 하면 $y'(x) = \frac{dt}{dx}$,

$$\int \frac{dt}{dx} \cdot \frac{1}{t}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C$$

$$\therefore \int \frac{y'(x)}{y(x)} = \ln|y(x)| + C$$

* Separation of variables

[3] 분리 가능 방정식

$$g(y)y' = f(x)$$

- 미지의 함수 y에 대한 식과 독립 변수 x에 대한 분리 (좌변이 y에 관한 함수와 y'로 구성)
- ex)

1. $y' = x + xy^2$ (o)
   $= x(1+y^2)$
   $\rightarrow \frac{y'}{(1+y^2)} = x$
2. $y' = x + y$ (x)
3. $y' = e^{-(x+y)}$ (o)
   $= e^{-x} \cdot e^{-y}$
   $\rightarrow \frac{y'}{e^{-y}} = e^{-x}$

\+ [3] $g(y)y' = f(x)$ 에서 $g(y) = \frac{1}{y}$ 이면

$\frac{y'}{y} = f(x) \rightarrow$ [2]