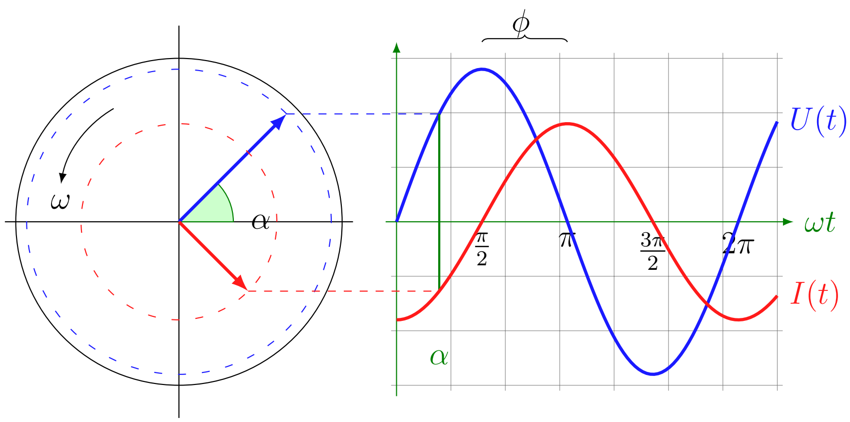
Análisis de Circuitos Eléctricos

CONCEPTOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Versión 1



Creado por: **Franco Berríos Núñez**

Estudiante de Ingeniería Civil Industrial

fnberrios@uc.cl

Índice

1. Introducción

Este documento fue desarrollado con el objetivo de entregar material de apoyo y estudio para los estudiantes del curso IEE2123 - Circuitos Eléctricos. Esta es la primera versión de este compilado que fue creado como un regalo de estudiantes para otros estudiantes, con la intención de que las futuras generaciones tengan más herramientas de las que nosotros y nosotras, los estudiantes más viejos, tuvimos.

Al ser esta la primera versión de este documento se recomienda especial atención a cualquier error que él pueda presentar. Tomen las soluciones como guías, pero siempre recordando que fueron estudiantes los que desarrollaron los ejercicios y estos podrían tener errores. Es por esto que se solicita que si encuentras algún error de redacción o en la resolución de algún problema lo comuniques a fnberrios@uc.cl para mejorar las futuras versiones.

Agradecimientos

Quiero agradecer de manera especial a los ayudantes del curso de Circuitos Eléctricos del 2020-2:

1. Elena Contardo
2. Sebastián Maureira
3. Ziqi Yan
4. Carlos Sáez

que colaboraron en el desarrollo de muchos de los ejercicios que hay este compilado.

Dedicatoria

Para todos los estudiantes que colaboran en la educación de otros y otras.

2. Ley de Ohm

Problema 1

a. Encuentra la corriente I que transita por el circuito de la Figura 1. Además, encuentra la potencia que disipan ambas resistencias.

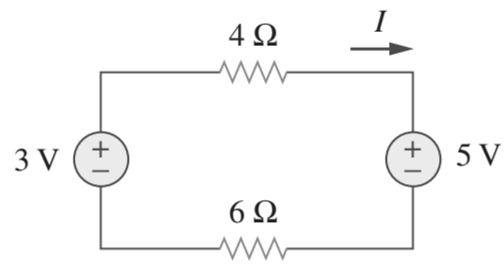


Figura 1: Circuito Básico

b. ¿Qué ocurre con el voltaje de las demás resistencias si disminuye o aumenta la resistencia R_3? ¿Qué ocurre con la corriente que pasa por cada resistencia en esta misma situación?

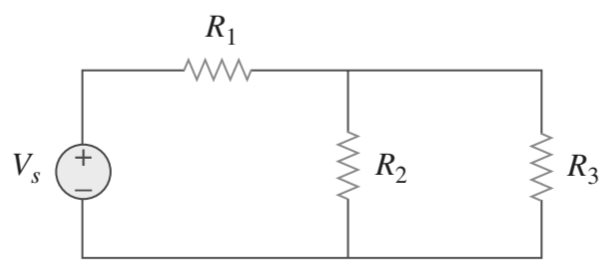


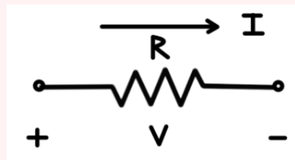
Figura 2: Análisis Cualitativo

Solución:

Conocimiento Previo

1. La ley de Ohm describe el comportamiento entre voltaje, corriente e impedancia $V = I * Z$ y la resistencia corresponde a la parte real de la impedancia. Se verá el concepto de impedancia más en profundidad en capítulos posteriores.

$$V = V_+ - V_- = I * Re\{Z\} = I * R$$



Para aplicar Ley de Ohm debemos respetar la siguiente convención: la corriente se mueve del terminal con mayor potencial (positivo) al de menor potencial (negativo). Entonces, si definimos la corriente como en la imagen anterior, estamos diciendo que el voltaje tiene su terminal positivo en el punto de más a la izquierda.
Podríamos definir la convención inversa, pero en general en libros y cursos se define así. Esta convención será de suma importancia en los Métodos de Mallas y Nodos de capítulos posteriores.

2. El punto de referencia del circuito, es decir, el nodo con voltaje cero o tierra en general se suele indicar. Sin embargo, si el circuito no posee la tierra expresada en él, asumimos que la tierra será el terminal negativo de la primera fuente de voltaje que aparezca de izquierda a derecha.

3. Recordar que la potencia que disipa un resistor se calcula como:

$$P = V * I = \frac{V^2}{R} = I^2 * R$$

a. Por **convención de Ley de Ohm**, como se define la corriente en la Figura 1, se deben respetar las polaridades de la Figura 3:

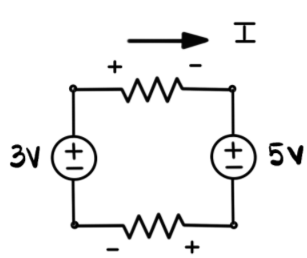


Figura 3: Circuito con Polaridad según convención

Ahora, realizamos la siguiente estrategia: en el sentido de la corriente sumamos aquellos voltajes que respetan la convención (la corriente entra por terminal positivo) y restamos aquellos voltajes en los que no se cumple la convención (la corriente entra por el terminal negativo) y por **conservación de energía** la suma de estos debe ser igual a cero.

$$\begin{aligned} -3V + V_{4\Omega} + V_{6\Omega} + 5V &= 0 \\ V_{4\Omega} + V_{6\Omega} + 5V &= 3V \end{aligned}$$

Tenemos que darnos cuenta que las resistencias están en **serie**. Por lo tanto, reciben la misma corriente. Esto se debe a que el circuito solo tiene una rama así es que la corriente I no se divide o pierde (**conservación de la materia**).
Entonces, por Ley de Ohm

$$V_{4\Omega} + V_{6\Omega} = I(R_{4\Omega} + R_{6\Omega}) = I(4\Omega + 6\Omega) = I(10\Omega) = -2V \rightarrow I = \frac{-2V}{10\Omega} = -200mA$$

Este resultado nos indica que en realidad, la corriente I definida inicialmente, va en el **otro sentido**. Esto no significa que la convención tomada esté errónea, sino que es la misma convención la que nos permite darnos cuenta de este resultado. Ya hace aquí la importancia de respetar la convención.

Finalmente, la potencia total disipada es:

$$P_{Total} = P_{4\Omega} + P_{6\Omega} = (-200mA)^2(4\Omega) + (-200mA)^2(6\Omega) = 0{,}4W$$

Notar que la potencia nunca será negativa. Sin embargo, la corriente nos indica hacia donde está fluyendo la energía. Como $-200mA$ la energía fluje desde derecha a izquierda.

b. Hay dos situaciones de interese en estos caso: cuando $R_3 = 0\Omega$ y cuando $R_3 \approx \infty$.

a) Si $R_3 = 0$ esta rama no ejerce nada de oposición al paso de los electrones. Por lo tanto, la corriente al buscar el camino de menor resistencia, se irá toda por esta rama. Esta situación se denomina **corto-circuito** y se representa en la Figura 4.

En este caso, el voltaje que disipa R_3 es igual a cero por Ley de Ohm ($V_{R3} = I * R_3 = I * 0\Omega$) y, ya que la corriente I continua por el camino de menos resistencia ($R_3 = 0\Omega$), el voltaje de R_2 también es igual a cero ($I_{R2} * R_2 = 0 * R_2 = V_{R2} = 0$). De aquí se desprende que el voltaje $V_{R1} = V_S$.

b) Si $R_3 \approx \infty$ no podría circular la corriente por la rama de la resistencia R_3 ya que está ejerce demasiada oposición al paso de los electrones. Esta situación se denomina **circuito abierto** y se representa en la Figura 5.

En este caso es fácil notar que la corriente que circula por R1 y R2 es idéntica, es decir, $I_{R1} = I_{R2} = I$. Esto se debe a que, como $R_3 \approx \infty$, la corriente por esta rama será igual a cero.

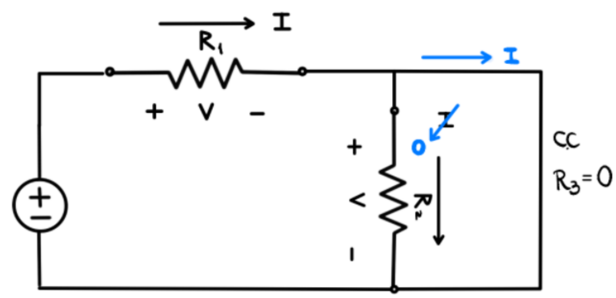


Figura 4: Corto-Circuito

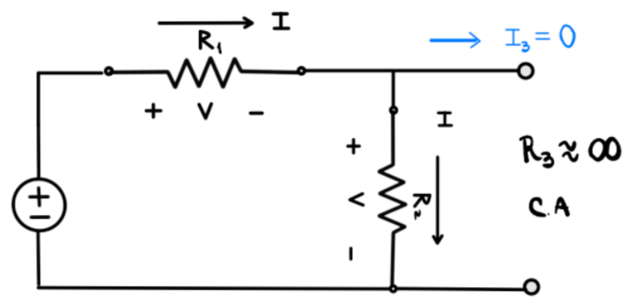


Figura 5: Circuito Abierto

Problema 2

Encuentra el voltaje V_{ab} y la corriente I que posee el circuito.

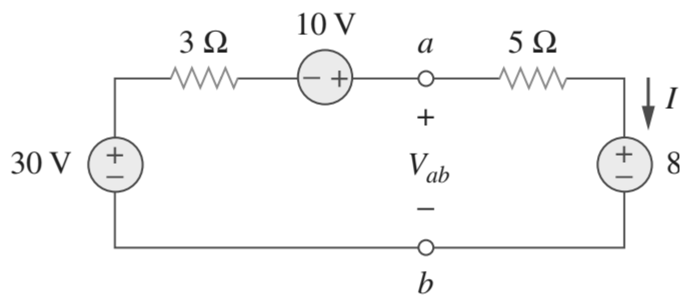


Figura 6: Voltaje en terminales arbitrarios

Solución:

Conocimiento Previo

1. Ley de Ohm y aplicar la estrategia mencionada en el Problema 1.

Siguiendo la misma estrategia que en el Problema 1 obtenemos la siguiente ecuación:

$$
\begin{aligned}
-30V + V_{3\Omega} - 10V + V_{5\Omega} + 8V &= 0 \\
30V + 10V &= V_{3\Omega} + V_{5\Omega} + 8V
\end{aligned}
$$

Por Ley de Ohm tenemos que:

$$32V = I * R_{3\Omega} + I * R_{5\Omega} = I(3\Omega + 5\Omega) = I(8\Omega) \rightarrow I = \frac{32V}{8\Omega} = 4A$$

Ahora, para determinar el voltaje entre dos terminales recorremos cada componente desde el terminal positivo (a) hasta el terminal negativo (b) y sumando o restando los voltajes de estos componentes. Si al recorrer los componente entramos por un terminal positivo el voltaje se suma y si entramos por el terminal negativo el voltaje se resta.

Hacia la derecha (flecha verde) en la Figura 7:

$$V_{ab} = 10V - V_{3\Omega} + 30V = 40V - (4A)(3\Omega) = 28V$$

Hacia la izquierda (flecha morada) en la Figura7:

$$V_{ab} = V_{5\Omega} + 8V = (4A)(5\Omega) + 8V = 28V$$

Ambos resultados son idénticos. De aquí se desprende que, sin importar el camino que sigamos, **el voltaje que obtenemos siempre será el mismo**.

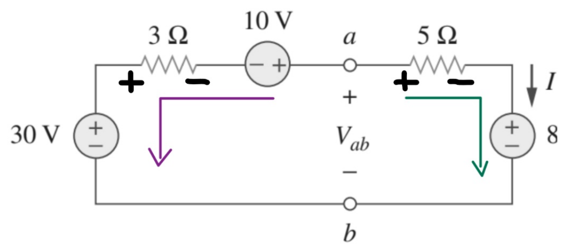


Figura 7: Circuito con Polaridad

Problema 3

a Encuentra el voltaje V_x y la corriente que transita por el circuito.

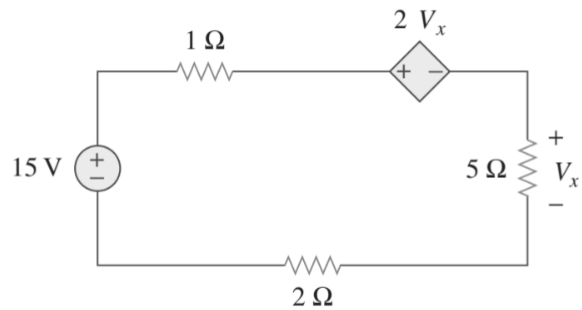


Figura 8: Fuentes de Voltaje Dependientes

b. Si todas la resistencias tiene valor $R[\Omega]$, encuentra la relación V_o/V_s.

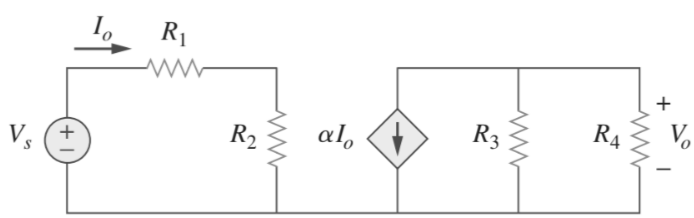


Figura 9: Fuentes de Corriente Dependientes

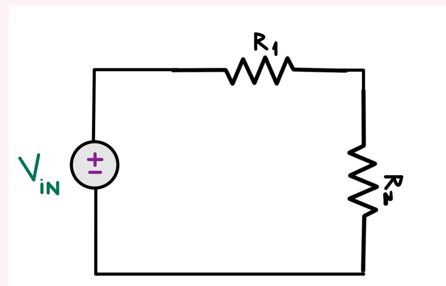
Solución:

Conocimiento Previo

1. Las fuentes dependientes de voltaje y corriente son fuentes en las cuales la cantidad de energía que entregan al sistema está determinadas según algún otro parámetro del circuito.

2. El voltaje se divide cuando hay dos elementos en serie, la intuición es que entre ellos se reparten la energía. Esto se conoce como **divisor de voltaje** y posee la siguiente forma:

$$V_{R_1} = V_{in}\frac{R_1}{R_1+R_2}$$
$$V_{R_2} = V_{in}\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

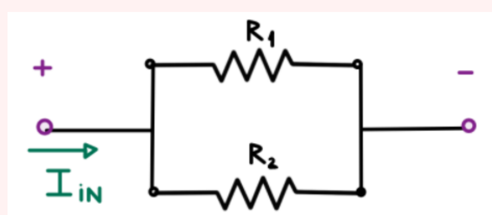


Sin embargo, si hay dos ramas en paralelo (figura de abajo), la suma de los voltaje de todos los elementos de una rama es idéntica a la suma de los voltajes de la otra rama.

$$V_+ - V_- = \sum_i^{rama1} V_i = \sum_j^{rama2} V_j$$
$$= V_{R_1} = V_{R_2}$$

3. La corriente se divide al llegar a un nodo del que surjan múltiples ramas. Si pensamos en una cañería que al llegar a un punto se divide en dos, notamos que el flujo se divide y la cantidad de materia se conserva. Esto se conoce como **divisor de corriente** y posee la siguiente forma:

$$I_{R_1} = I_{in}\frac{R_2}{R_1+R_2}$$
$$I_{R_2} = I_{in}\frac{R_1}{R_1+R_2}$$



A pesar de que parezca contra-intuitivo, sí, las ecuaciones están correctas. En la resolución del ejercicio b ahondamos más en la demostración.

En caso de tener componentes en serie, como ya te habrás dado cuenta de ejercicios anteriores, la corriente es idéntica ya que son parte de una misma rama.

a. Comenzamos por definir una corriente y la polaridad que posee cada resistencia del circuito:

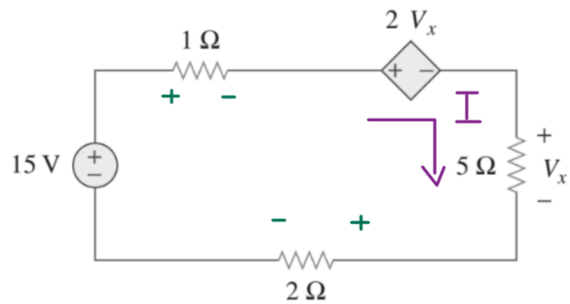


Figura 10: Circuito con la convención

Utilizamos la misma estrategia de ejercicios anteriores para plantear las ecuaciones de voltaje:

$$15V = V_{1\Omega} + 2v_x + V_x + V_{2\Omega} = I * R_{1\Omega} + 3V_x + I * R_{2\Omega} = I(3\Omega) + 3V_x$$

Por Ley de Ohm tenemos que la corriente del circuito será:

$$15V = I(3\Omega) + 3V_x = I(3\Omega) + 3 * (I * 5\Omega) = I(18\Omega) \rightarrow I = \frac{15V}{18\Omega} = 833{,}33mA$$

Finalmente, $V_x = I * 5\Omega = 4{,}1666V$.

b. **Recordar:** Cuando no se presenta el nodo de tierra en algún circuito se asume que está presente en el terminal negativo de la fuente de más a la izquierda.

La corriente I_o la podemos representar por Ley de Ohm como:

$$I_o = \frac{V_s}{R_1 + R_2}$$

$R_1 + R_2$ es lo que se conoce como **resistencia equivalente** (R_{eq} o R_{th}) de esa parte del circuito.

Ahora que tenemos I_o podemos analizar el lado derecho del circuito. Por conservación de materia, podemos decir que la corriente que αI_o corresponde a la suma de las corrientes que transitan por R_3 y R_4.

$$\alpha I_o = I_{R_3} + I_{R_4}$$

Como R_3 y R_4 están en paralelo **poseen el mismo voltaje**, así podemos utilizar ley de Ohm de la siguiente manera:

$$\alpha I_o = I_{R_3} + I_{R_4} = \frac{V_o}{R_3} + \frac{V_o}{R_4} = V_o\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) = V_o\left(\frac{R_4 + R_3}{R_3 R_4}\right)$$

$\frac{R_3 R_4}{R_3+R_4}$ es lo que se conoce como la **resistencia equivalente** (R_{eq} o R_{th}) de la parte izquierda del circuito.

Paréntesis para Demostración

Con las relaciones obtenidas hasta este momento ya podemos demostrar las ecuaciones de **divisor de corriente** mencionadas en el Conocimiento Previo. Utilizando Ley de Ohm obtenemos que:

$$I_{R_3} = \frac{V_o}{R_3} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}\frac{\alpha I_o}{R_3} = \alpha I_o \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$
$$I_{R_4} = \frac{V_o}{R_4} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}\frac{\alpha I_o}{R_4} = \alpha I_o \frac{R_3}{R_3 + R_4}$$

Finalmente, obtenemos la relación solicitada como:

$$\alpha I_o = \alpha \frac{V_s}{R_1 + R_2} = V_o\left(\frac{R_4 + R_3}{R_3 R_4}\right) \to \frac{V_o}{V_s} = \alpha \frac{R_3 R_4}{(R_1 + R_2)(R_4 + R_3)}$$

Problema 4

a Encuentra el valor de la resistencia equivalente del circuito. Calcula el valor de cada corriente que posee la figura.

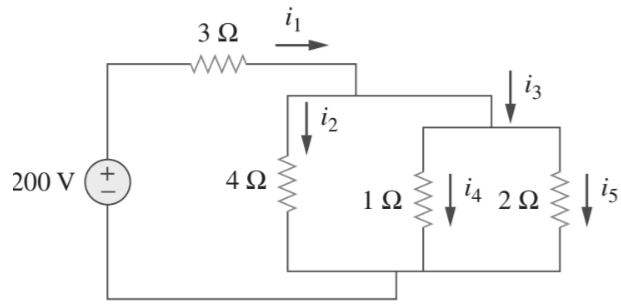


Figura 11: Resistencia Equivalente y Divisor de Corriente/Voltaje

b. Encuentra el valor de la resistencia equivalente R_{eq} y la corriente I_o de entrada.

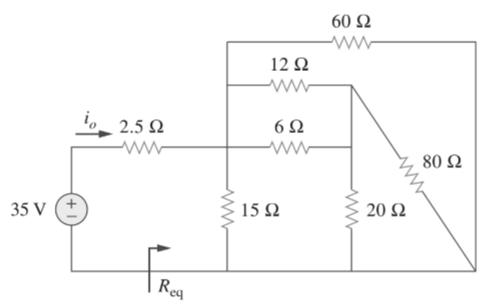


Figura 12: Resistencia Equivalente y Divisor de Corriente/Voltaje

Solución:

Conocimiento Previo

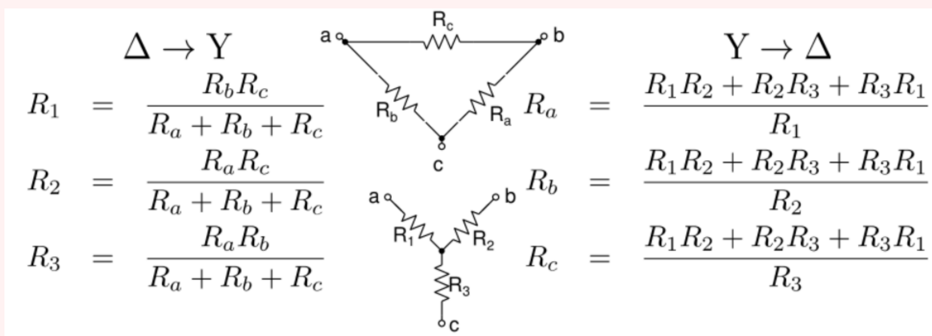
1. La **Resistencia Equivalente** (R_{eq} o R_{th}) es aquel valor de resistencia que representa a un conjunto de otras resistencia en una configuración cualquiera. La resistencia equivalente de dos resistencias en serie es:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

La resistencia equivalente de dos resistencias en paralelo es:

$$R_{eq} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2}$$

2. En ocasiones las resistencias no se encuentran ni en serie ni en paralelo sino que tienen una configuración en Delta. Es muy difícil trabajar con resistencias en Delta, sin embargo, existe la **Transformación Delta-Estrella** que nos permite simplificar los circuitos para trabajar de forma más sencilla con las técnicas ya mencionadas.



a. La resistencia equivalente R_{eq} de este circuito es aquella que se ve desde los terminales de la fuente de voltaje. Si hubiesen múltiples fuentes se debe especificar alguna fuente como referencia u cualquier otros dos terminales para calcularla.

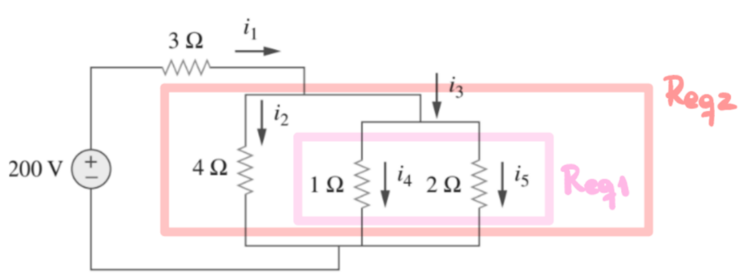


Figura 13: Posibles Transformación Resistencias Equivalentes

Notamos que 1Ω y 2Ω están en paralelo, por lo que definimos una resistencia equivalente:

$$R_{eq1} = 1\Omega // 2\Omega = \frac{2}{3}\Omega$$

Ahora, tenemos que 4Ω está en paralelo con R_{eq1} así que definimos otra resistencia equivalente:

$$R_{eq2} = 4\Omega // R_{eq1} = 0{,}57153\Omega$$

Finalmente encontramos que 3Ω está en serie con R_{eq2} y definimos:

$$R_{eq} = 3\Omega + R_{eq2} = 3{,}57153\Omega$$

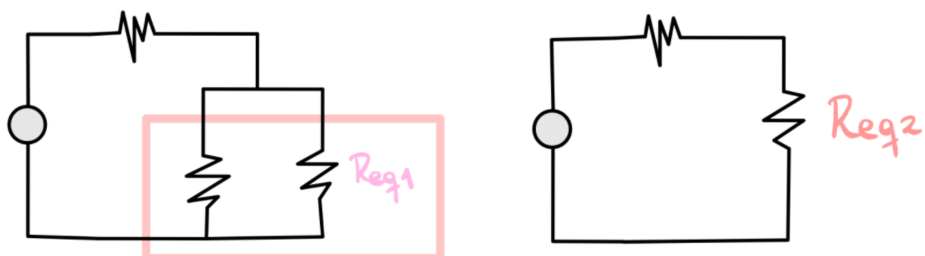


Figura 14: Transición del Circuito Paso a Paso

Para calcular las corrientes tenemos que por Ley de Ohm:

$$i_1 = \frac{200V}{R_{eq}} = 56A$$

Usando divisor de corriente tenemos que:

$$i_2 = i_1 \frac{R_{eq1}}{4\Omega + R_{eq1}} = 8A$$
$$i_3 = i_1 \frac{4\Omega}{4\Omega + R_{eq1}} = 48A$$

Notar que, por conservación de materia, se cumple:

$$i_1 = i_2 + i_3$$

Finalmente, usando divisor de corriente nuevamente, tenemos que:

$$i_4 = i_3 \frac{2\Omega}{1\Omega + 2\Omega} = 32A$$
$$i_5 = i_3 \frac{1\Omega}{1\Omega + 2\Omega} = 16A$$

Notar que, por conservación de materia, se cumple:

$$i_3 = i_4 + i_5$$

b. Un primer acercamiento podría darse al notar que 12Ω, 60Ω y 80Ω están en configuración Delta. Si seguimos este camino notaremos que a medida que eliminamos una configuración Delta aparece otra. Los invito a que lo intenten un par de veces para aprender la transformación Delta a Estrella y adjunto una posible transformación $\Delta - Y$ para que noten cual es el problema:

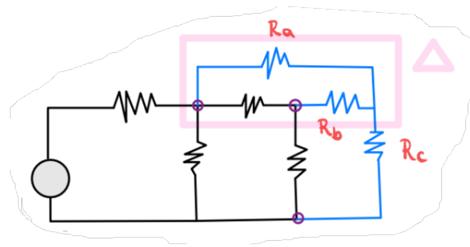


Figura 15: Posible Transformación Delta-Estrella

Yo logré resolver este problema al notar que 12Ω y 6Ω están en paralelo al igual que lo están 20Ω con 80Ω.
A continuación marco los nodos para que sea más evidente:

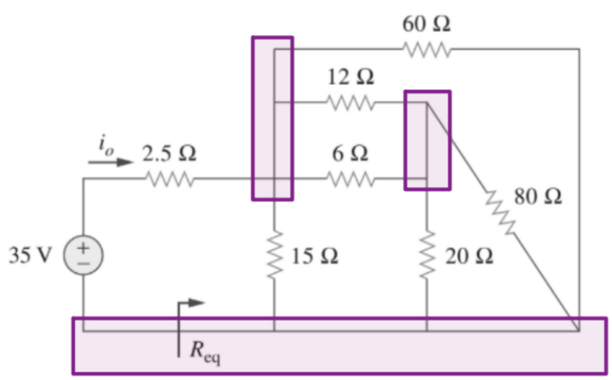


Figura 16: Nodos del Circuito

Así obtenemos el siguiente circuito:

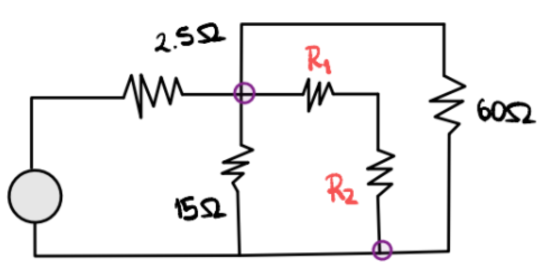


Figura 17: Circuito Simplificado

donde:

$$R_1 = 6\Omega//12\Omega = 4\Omega$$
$$R_2 = 20\Omega//80\Omega = 16\Omega$$

Ahora, $R_{eq1} = R_1 + R_2$ está en paralelo con 60Ω. Definimos:

$$R_{eq2} = (R_1 + R_2)//60\Omega = 20\Omega//60\Omega = 15\Omega$$

Notar que R_{eq} que nos solicitan corresponde a:

$$R_{eq} = 15\Omega//R_{eq2} = 7{,}5\Omega$$

Finalmente, para obtener la corriente podemos decir que:

$$R_{th} = 2{,}5\Omega + R_{eq} = 2{,}5\Omega + (15\Omega//15\Omega) = (2{,}5 + 7{,}5)\Omega = 10\Omega$$

Así, la corriente de entra al circuito es:

$$i_o = \frac{V_{in}}{R_{eq}} = \frac{35V}{10\Omega} = 3{,}5A$$

Problema 5

Para el circuito de la figura de abajo, calcule:

1. La resistencia equivalente que enfrenta la fuente independiente.
2. La corriente que circula por la resistencia R_3 y el voltaje V_x. ¿Podemos considerar al punto donde se ubica V_x como un nodo?
3. La corriente por todas la ramas del circuito.

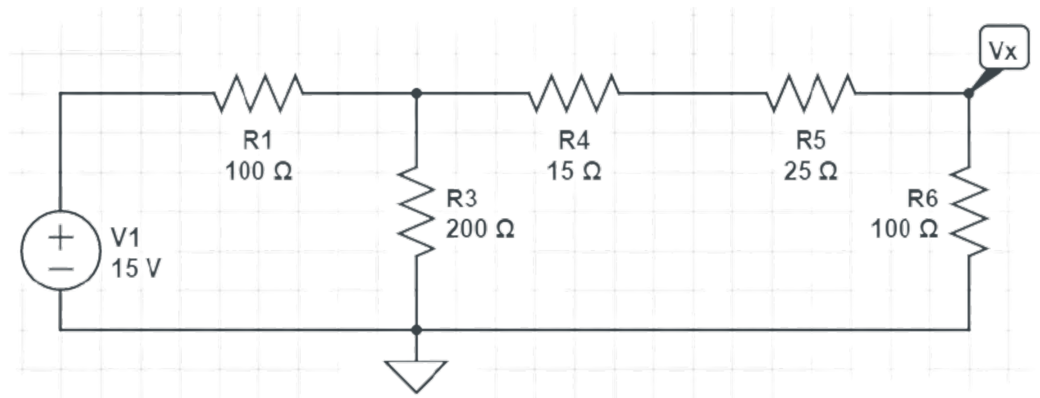


Figura 18: Circuito con fuente independiente

Solución:

1. Primero notar que:
   - R_4, R_5 y R_6 están en serie, es decir, $R_{eq1} = R_4 + R_5 + R_6$.
   - Luego, R_3 está en paralelo con R_{eq1}. Así defino $R_{eq2} = \frac{R_{eq1} * R_3}{R_{eq1} + R_3}$.
   - Ahora, R_1 está en serie con R_{eq2}. Así finalmente, la resistencia que observa la fuente de voltaje, es $R_{eq}^{in} = R_{eq2} + R_1 = 182{,}35\Omega$.
2. Podemos obtener la corriente que entrega la fuente de voltaje al circuito por medio de la ley de ohm. Defino la corriente de entrada como $I_{in} = V1/R_{eq}^{in} = 82{,}25mA$.
   Como R_1 está en serie con la fuente de voltaje, la corriente de entrada es la misma corriente que pasa por R_1. Así, el voltaje de la resistencia R_1 es $V_{R1} = I_{in} * R_1 = 8{,}225V$. Este voltaje se le resta a la fuente independiente pues la resistencia consume parte de la tensión de entrada. Con este análisis comprendemos que a las ramas en paralelo se les suministrará $V = V1 - V_{R1} = 6{,}775V$.
   Como R_3 recibe el voltaje restante (V) por ley de Ohm podemos obtener la corriente que circula por ella. $I_{R_3} = \frac{V}{R_3} = 33{,}88mA$. Y para obtener el valor de V_x solo debemos realizar un divisor de voltaje entre R_4, R_5 y R_6 que están en serie. Asi, $V_x = V * \frac{R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = 4{,}84V$.

3. La corriente de entrada I_{in} y la corriente por la resistencia R_3 (I_{R3}) ya fueron calculadas en el apartado anterior. Solo nos faltaría conocer el valor de la corriente que circula por la rama de la derecha (corriente por R_4, R_5 y R_6). Si de puntos anteriores sabemos que esta rama recibía un voltaje $V = V1 - V_{R1} = 6{,}775V$ y $R_{eq1} = R_4 + R_5 + R_6 = 140\Omega$ la corriente será $I = \frac{V}{R_{eq1}} = 48{,}39mA$.

Problema 6

Si se sabe que el potenciómetro de la figurta de más abajo, puede tomar valores entre $[7k\Omega - 15k\Omega]$, calcule:

1. El valor del potenciómetro R_{12} para que el voltaje en la resistencia R_{13} sea 5V. ¿Tiene sentido esto?
2. Si ahora el potenciómetro posee el valor obtenido en el punto anterior y en ese instante se cierra el switch SW1, calcule la potencia que consume R11.

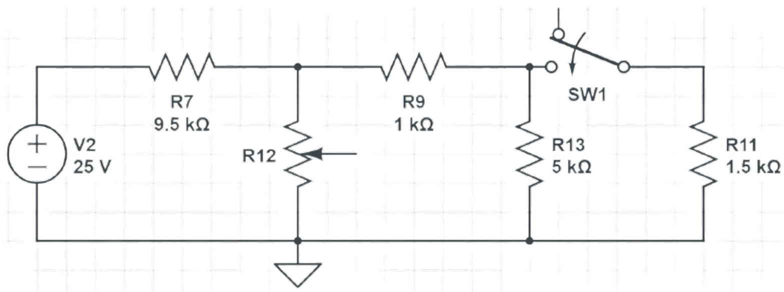


Figura 19: Circuito con switch

Solución:

1. Si se desea que $V_{R13} = 5V$ asumamos que esto es así. Entonces, la corriente que circula por $R13$ y $R9$ es $I = V_{R13}/R13 = 5V/5k\Omega = 1mA$.
   Sabemos que el voltaje que recibe $R12$ es el mismo voltaje que disipa la resistencia R_9 y $R13$ (esto pasa porque están en paralelo). El voltaje que consumen R_9 y $R13$ es $V = I * (R9 + R13) = 1mA * 6k\Omega = 6V$.
   Como el voltaje que consumen ambas ramas es de $6V$, por conservación de energía, el resto de voltaje debe ser consumido por $R7$. Entonces, $V_{R7} = V2 - V = 19V$, asi la corriente por $R7$ es $I_{R7} = 19V/9{,}5k\Omega = 2mA$.
   Finalmente, por conservacion de masa, la corriente no desaparece, es decir que la corriente que entra las ramos en paralelo debe conservarse (divisor de corriente). Es por esto que la corriente por $R12$ es $I_{R12} = I_{R7} - I = 1mA$. Con esto podemos decir que el potenciometro debe tener una resistencia de $R_{pot} = V/I_{R12} = 6k\Omega$. **Supera los limites del enunciado**.
2. Necesitamos conocer la corriente que suministra la fuente. $I_{in} = V2/R_{eq} = 2{,}256mA$, donde $R_{eq} = (((R11//R13) + R9)//R12) + R7 = 11{,}08k\Omega$. Así el voltaje que disipa $R7$ es $V_{R7} = I_{in} * R7 = 21{,}43V$. Asi, el voltaje que recibe el resto de las ramas será $V_x = 25V - 21{,}43V = 3{,}568V$.
   La corriente que se desvía por $R12$ será $I_{R12} = 3{,}568V/6k\Omega = 0{,}6mA$. Entonces la

corriente que circula por $R9$ es $I_{R9} = I_{in} - I_{R12} = 1{,}656mA$. Es por esto que $V_{R9} = 1{,}656mA * R9 = 1{,}656V$. Así, $V_{R13} = V_{R11} = V_x - V_{R9} = 1{,}912V$.
Finalmente, la potencia por $R11$ es $P_{R11} = \frac{V_{R11}^2}{R11} = 2{,}44mW$

Problema 7

Dada la figura de abajo, calcule

1. El voltaje V_x.
2. Si en t_1 los switch cambian de posición, ¿Cuál es la potencia que entrega la fuente? Obtén la resistencia equivalente del circuito para esto asume que todas las resistencias valen R.

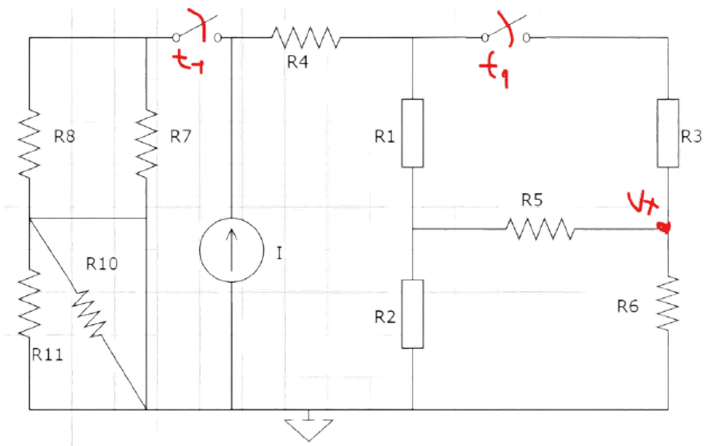


Figura 20: Circuito con CC y CA

Solución:

1. Sea $R_{eq} = (R5 + R6)//R2$. El voltaje V_{R2} se puede calcular como:

$$V_{R2} = I * R_{eq}$$

Finalmente, realizando un divisor resistivo entre $R5$ y $R6$:

$$V_x = V_{R2} * \frac{R6}{R5 + R6}$$

2. Luego de los cambios de los switches (existe un cortocircuito a la izquierda y una configuración delta a la derecha). Luego de analizar el circuito obtendremos que:

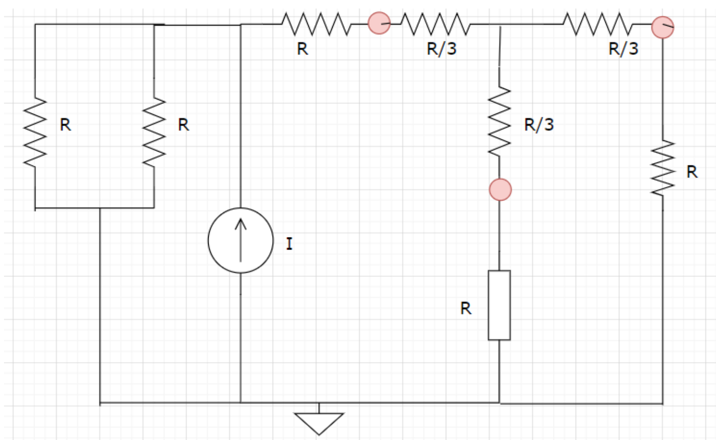


Figura 21: Circuito luego de transformación

Saber que $R_u = R + R/3 = 4R/3$ y que $R//R = R/2$. Así notamos que la resistencia equivalente que enfrenta la fuente de corriente será $R_{eq} = (R/2)//((4R/3//4R/3) + 4R/3)$.
La potencia entregada será $P = I^2 * R_{eq} = I^2 * \frac{2R}{5}$

Problema 8

Para el siguiente circuito:

1. ¿Es el voltaje de la resistencia de $18K\Omega$ mayor que el voltaje de la resistencia de $9K\Omega$? ¿Por qué?
2. Calcula la corriente por cada rama.
3. Obtén la potencia total que reciben las resistencias.

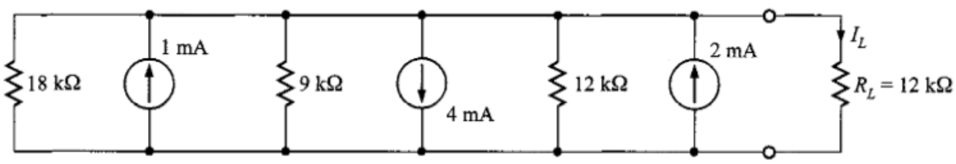


Figura 22: Trabajar con Fuentes de Corrientes.

Solución:

1. No. Como cada resistencia está en paralelo poseen el mismo voltaje, se divide la corriente, pero el voltaje es idéntico.
2. Obtenemos una resistencia equivalente a partir de todas la resistencias en paralelo. $R_{eq} = 3k\Omega$. Definimos la corriente que pasaría por R_{eq} como I_{eq}. Ahora, si hacemos $\Sigma i_n = 0$ en el nodo tendremos que:

$$1mA - 4mA + 2mA + I_{eq} = 0 \rightarrow I_{eq} = 1mA$$

Asi, el voltaje en cada rama paralela será de $V_x = I_{eq} * R_{eq} = 3V$. Finalmente, por ley de Ohm podemos decir que:

$$\frac{V_x}{R_{18k\Omega}} = 0{,}167mA$$
$$\frac{V_x}{R_{9k\Omega}} = 0{,}334mA$$
$$\frac{V_x}{R_{12k\Omega}} = 0{,}25mA$$

3. Utilizando datos obtenidos en el item anterior tendremos que:
$P_{total} = I_{eq}^2 R_{eq} = (1mA)^2 3k\Omega = 3mW$

Problema 9

A partir de la figura de abajo:

1. Obtén la resistencia equivalente del circuito
2. Si en los terminales AB se conecta un voltaje $V_{AB} = 15V$. ¿Cuál es el voltaje que recibe la resistencia de $9k\Omega$?
   Hint: La resistencia de $9k\Omega$ ¿con qué resistencia equivalente está en serie?

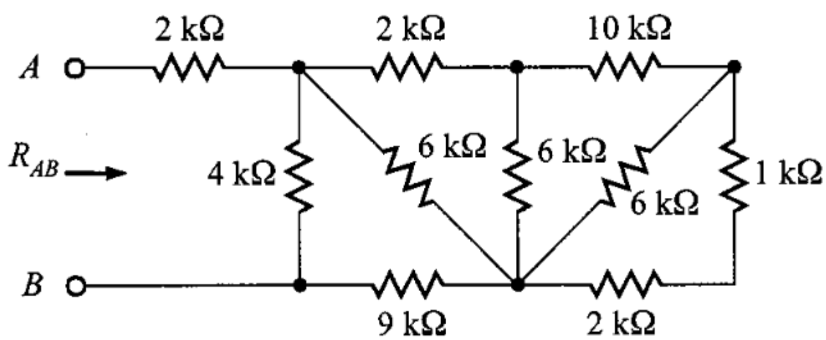


Figura 23: Resistencia Equivalente

Solución:

1. La resistencia equivalente es: $R_{eq} = R_{AB} = 5k\Omega$.
2. Nota lo siguiente: La resistencia equivalente del circuito encerrado en tinta celeste es

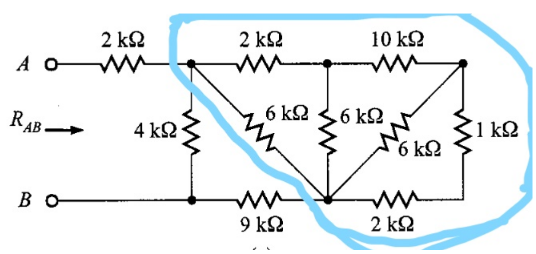


Figura 24: Resistencia Equivalente

$R_x = 3k\Omega$ y está en serie con la resistencia de $9K\Omega$. Así, el circuito se simplifica y solo hay que hacer dos divisores de voltaje. Con eso obtienes que: $V_{R_{9k\Omega}} = 6{,}75V = 15 * \frac{3}{5} * \frac{9}{12}$.

Problema 10

Para la siguiente figura encontrar V_a, V_b y V_c.

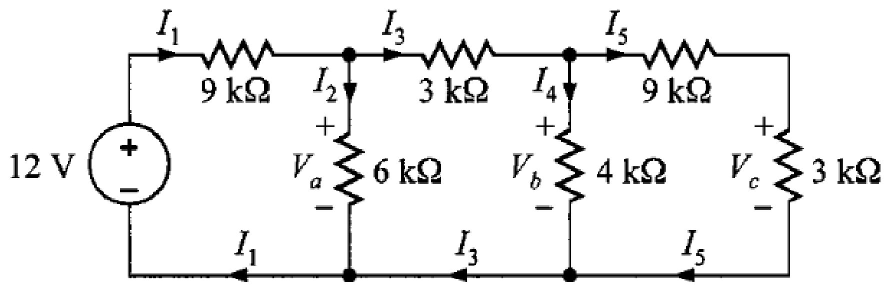


Figura 25: Circuito Clásico

Solución:

Solo debías realizar divisor de voltaje varias veces y obtenías lo siguiente:

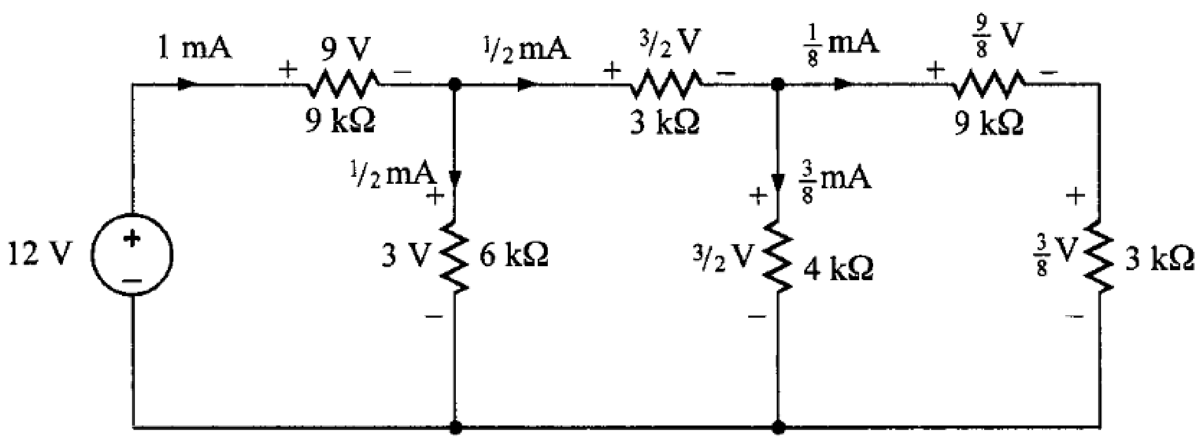


Figura 26: Circuito Clásico

Problema 11

Para el circuito siguiente:

1. Encuentre la corriente que circula por $9k\Omega$
2. Encuentre V_o.
3. Simula el circuito en Ltspice y encuentra el valor de la corriente que pasa por cada resistencia.

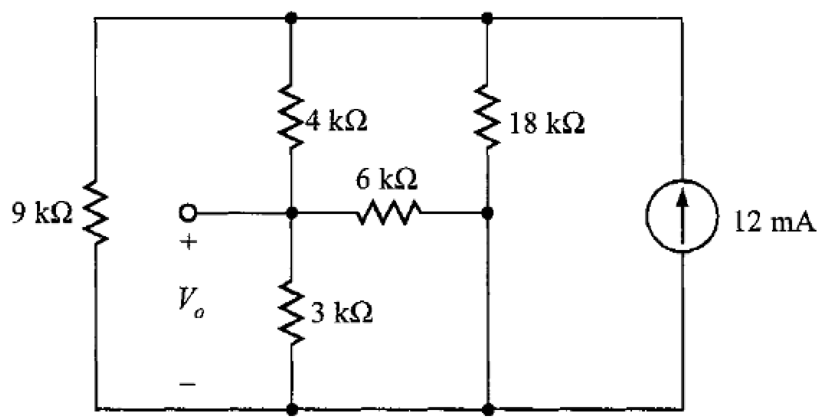
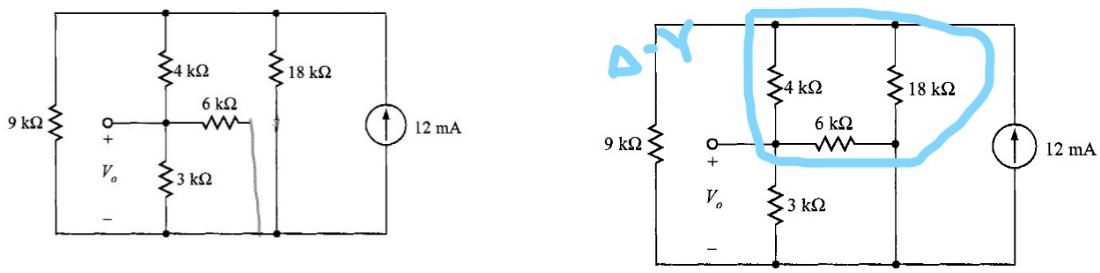


Figura 27: Circuito para LtSpice

Solución:

1. Este problema puede ser abordado desde dos maneras diferentes.
   La primera forma es notar que $18k\Omega$ está conectado al mismo nodo (tierra) que $3k\Omega$ y $6k\Omega$. Además, $3k\Omega$ y $6k\Omega$ están en paralelo. Se puede calcular resistencia equivalente y usando divisor de corriente obtener la corriente solicitada.



(a) Mismo circuito visualizado de una forma diferente

(b) Circuito para $\Delta - Y$

Figura 28: Sistemas Matriciales

   Como en ejercicios anteriores ya nos hemos enfrentado a situaciones como esta resolveremos este problema de otra manera.
   La segunda manera de resolver el problema es notar que existe una configuración $\Delta - Y$ (en celeste). Luego de la transformación obtenemos el siguiente circuito:

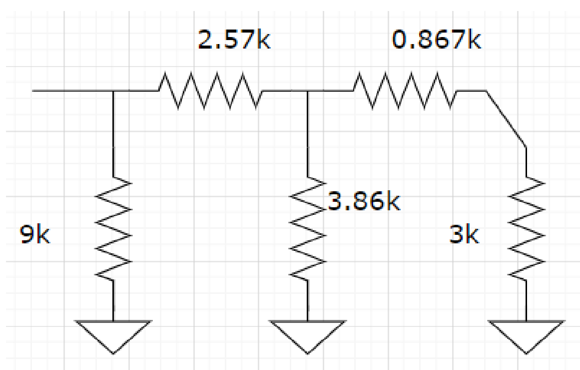


Figura 29: Circuito luego de Transformación $\Delta - Y$

   Solo por comodidad volteé el circuito y no coloqué la fuente de corriente, pero debe seguir conectada en el mismo nodo. Ahora, es sencillo decir que la resistencia equivalente es $R_{eq} = 3k\Omega$, por lo tanto el voltaje que entrega la fuente será $V_{in} = 12mA * 3k\Omega = 36V$. Finalmente, la corriente será $I_{9K\Omega} = 36V/9k\Omega = 4mA$.

2. Corroboraremos que el voltaje $V_o = 12V$ por medio de Ltspice.

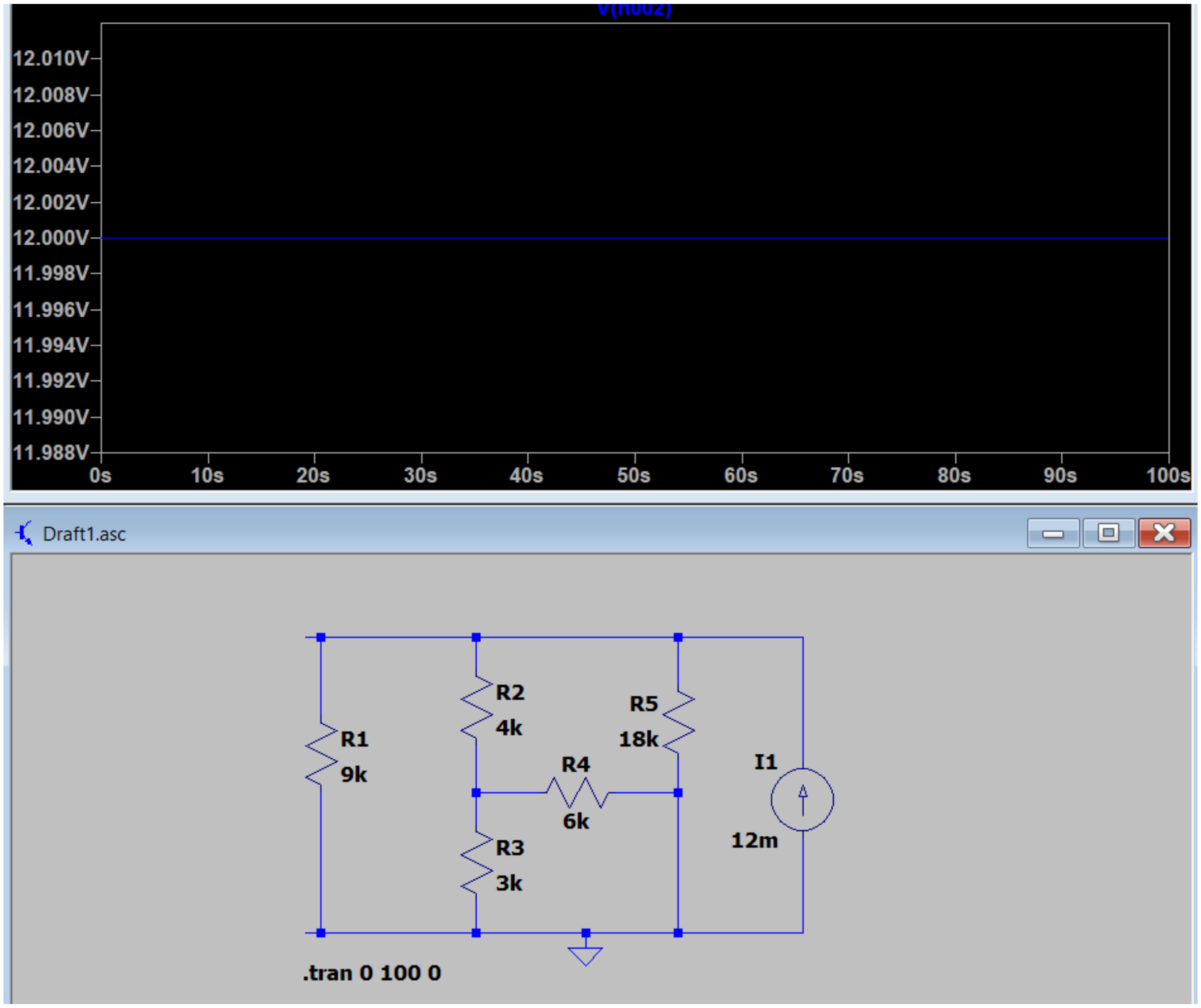


Figura 30: Circuito para $\Delta - Y$

3. Usando la simulación de Ltspice tenemos que $I_{9k\Omega} = 4mA$, $I_{4k\Omega} = 6mA$, $I_{6k\Omega} = +-2mA$, $I_{18k\Omega} = +-2mA$. Se aceptan ambos valores de las corrientes ya que depende de la convención el signo de la corriente.

Problema 12

Obtén V_a, V_c, i_b y i_d del siguiente circuito.

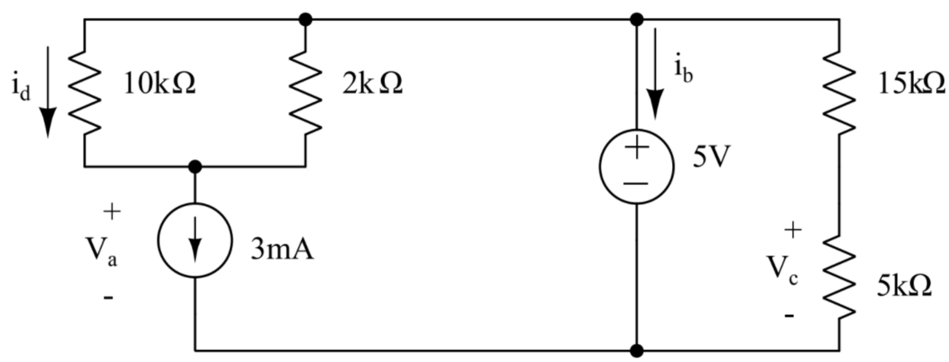


Figura 31: Leyes Circuitales y Resistencias Equivalentes

Solución:

Nota que por Ley de Ohm podemos expresar V_a como:

$$V_a = 5 - 3mA\frac{10k * 2k\Omega^2}{(10+2)k\Omega} = 0V$$

La corriente que pasa por la fuente de voltaje es:

$$i_b = -3mA - 0{,}25mA = 3{,}25mA$$

Usando divisor de voltaje obtenemos V_c como:

$$V_c = 5V\frac{5k\Omega}{20k\Omega} = 1{,}25V$$

Finalmente, podemos expresar i_d como:

$$i_d = \frac{5V}{10k\Omega} = 0{,}5mA$$

Este último resultado se debe a que $V_a = 0V$.

3. Leyes de Kirchhoff

Problema 1

¿Cuántos nodos hay? Encuentra la corriente de cada tramo del circuito.

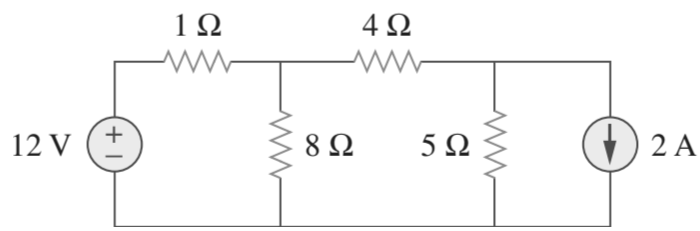


Figura 32: Múltiples fuentes, KCL y KVL

Solución:

Conocimiento Previo

1. La Ley de Corrientes de Kirchhoff (**KCL**) dice que la suma de las corrientes que salen y entra a un nodo deben ser igual a cero (**Conservación de Materia**).

$$\sum_{i}^{nodo} I_i = 0$$

En ejercicios del capítulo anterior ya hemos utilizado esta Ley sin saberlo. Aquí

2. La Ley de Voltajes de Kirchhoff (**KVL**) dice que, en un camino cerrado, la suma de voltajes de los componentes es igual a cero (**Conservación de Energía**). Creamos un circuito cerrado cuando terminamos un recorrido del circuito en el mismo punto que en el que empezamos.

$$\sum_{i}^{c.cerrado} V_i = 0$$

En ejercicios del capítulo anterior ya hemos utilizado esta Ley sin saberlo. Aquí

Comenzamos por identificar todos los nodos del circuito. Los nodos son aquellos puntos del circuito donde una corriente puede seguir múltiples caminos, es decir, se divide el flujo de electrones. El siguiente circuito presenta los **nodos en morado** y define **corrientes en**

verde.

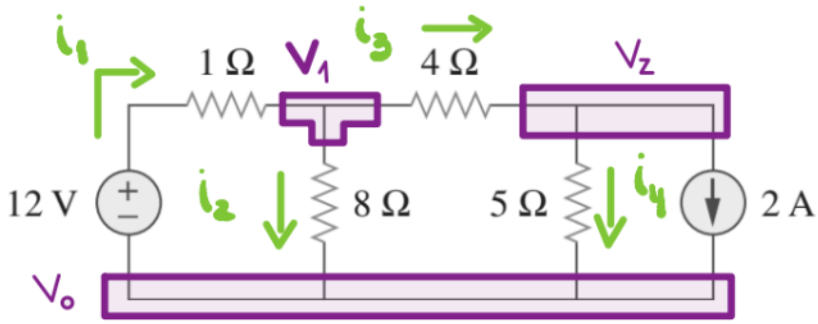


Figura 33: Múltiples fuentes, KCL y KVL

Recordar: la corriente se mueve del potencial más alto al más bajo. Entonces, si definimos el sentido de una corriente, al mismo tiempo estamos determinando cual de sus nodo posee el potencial más alto.

Definimos V_o como tierra o referencia ($V_o = 0$). Utilizando KCL planteamos las siguientes ecuaciones.

- Para el nodo V_1

$$\begin{aligned} 0 &= i_1 - i_2 - i_3 \\ i_1 &= i_2 + i_3 \\ \frac{V_o - (-12V) - V_1}{1\Omega} &= \frac{V_1 - V_o}{8\Omega} + \frac{V_1 - V_2}{4\Omega} \\ \frac{12V - V_1}{1\Omega} &= \frac{V_1}{8\Omega} + \frac{V_1 - V_2}{4\Omega} \end{aligned}$$

  Notar: $(-12V)$ debido a que la corriente entra por el terminal negativo.

- Para el nodo V_2

$$\begin{aligned} 0 &= i_3 - i_4 - 2A \\ i_3 &= i_4 + 2A \\ \frac{V_1 - V_2}{4\Omega} &= \frac{V_2 - V_o}{5\Omega} + 2A \\ \frac{V_1 - V_2}{4\Omega} &= \frac{V_2}{5\Omega} + 2A \end{aligned}$$

- Para el nodo V_0

$$\begin{aligned} 0 &= -i_1 + i_2 + i_4 + 2A \\ i_1 &= i_2 + i_4 + 2A \\ \frac{V_o - (-12V) - V_1}{1\Omega} &= \frac{V_1 - V_o}{8\Omega} + \frac{V_2 - V_o}{5\Omega} + 2A \\ \frac{12V - V_1}{1\Omega} &= \frac{V_1}{8\Omega} + \frac{V_2}{5\Omega} + 2A \end{aligned}$$

Tenemos 3 ecuaciones para 2 incógnitas, por lo que si resolvemos el sistema tenemos:

$$V_1 \approx 8{,}809V \qquad\qquad V_2 \approx 0{,}449V$$

Por Ley de Ohm podemos determinar que:

$$i_1 \approx 3{,}191A \qquad i_2 \approx 1{,}101A \qquad i_3 \approx 2{,}09A \qquad i_4 \approx 0{,}0898A \tag{1}$$

Problema 2

Calcule las corrientes en las ramas de los siguientes circuitos

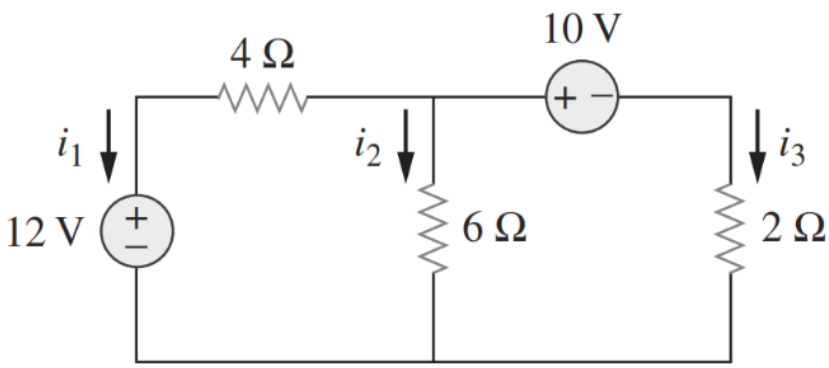
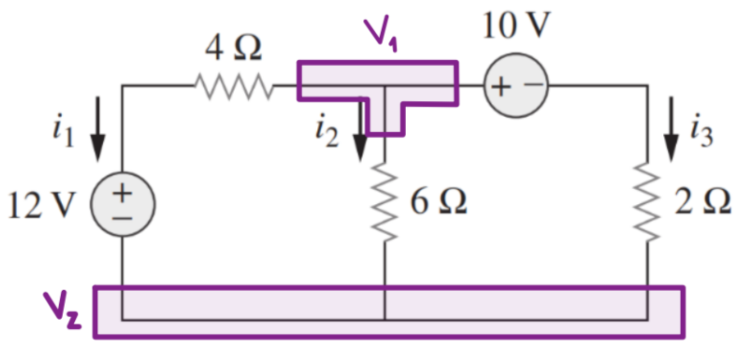


Figura 34: Ley de Voltajes

Solución:

Primero definimos los nodos en el siguiente circuito:



Definimos V_2 como tierra o referencia ($V_2 = 0$). Luego, se plantean las siguientes ecuaciones:

- Para el nodo V_1

$$
\begin{aligned}
0 &= i_1 + i_2 + i_3 \\
0 &= \frac{V_1 - (+12V) - V_2}{4\Omega} + \frac{V_1 - V_2}{6\Omega} + \frac{V_1 - (+10V)}{2\Omega} \\
0 &= \frac{V_1 - 12V}{4\Omega} + \frac{V_1}{6\Omega} + \frac{V_1 - 10V}{2\Omega}
\end{aligned}
$$

Notar: $-(+12V)$ y $-(+10V)$ debido a que la corriente entra por el terminal positivo, es decir, al pasar la corriente siente una caída $(-)$ de voltaje.

- Para el nodo V_2 es redundante plantear las ecuaciones ya que serán idénticas.

Resolviendo se obtiene $V_1 = 8{,}727272V$. Finalmente si ocupamos Ley de Ohm obtenemos: Es decir,

$$
i_1 = -\frac{9}{11}A \qquad i_2 = \frac{16}{11}A \qquad i_3 = \frac{-7}{11}A
$$

Problema 3

Determine el voltaje V_o del circuito de la figura:

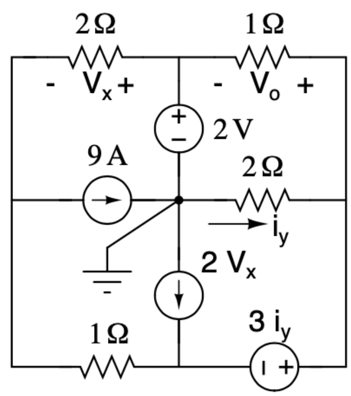


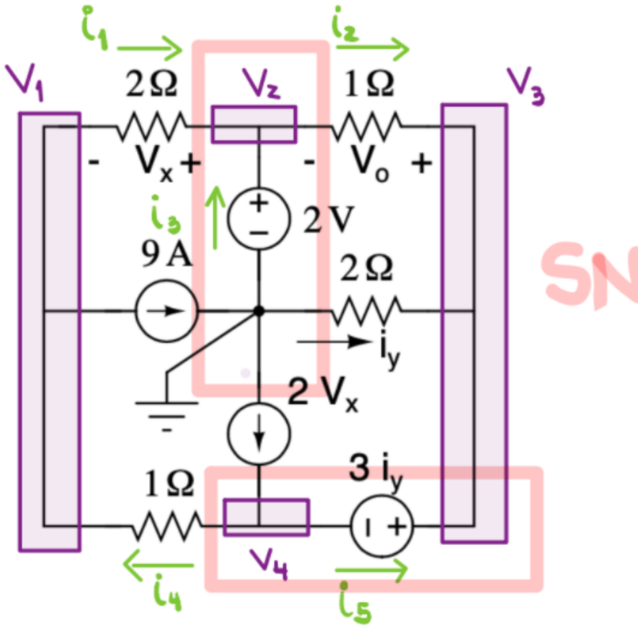
Figura 35: Ley de Nodos

Solución:

Conocimiento Previo

1. Cuando entre dos nodos de un circuito podemos determinar inmediatamente (con solo "mirar el circuito") la diferencia de potencial entre ellos, nos encontramos en la presencia de un **Super-Nodo** (SN). Solemos encontrarlos cuando hay una fuente de voltaje entre dos nodos de un circuito.
   Al encontrar un SN podemos considerar a los dos nodos que forman parte de él como un solo nodo. Esto simplifica nuestras ecuaciones.

1. Definiremos los siguientes nodos y super-nodos:



Luego, se podrán plantear las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
v_2 &= 2 \\
v_3 &= v_4 + 3i_y \\
V_x &= v_2 - v_1 \\
i_y &= \frac{0 - v_3}{2} \\
0 &= 9 + \frac{v_1 - v_2}{2} + \frac{v_1 - v_4}{1} \\
9 &= \frac{v_2 - v_1}{2} + \frac{v_2 - v_3}{1} + \frac{0 - v_3}{2} + 2V_x \\
2V_x &= \frac{v_4 - v_1}{1} + \frac{v_3 - 0}{2} + \frac{v_3 - v_2}{1}
\end{aligned}$$

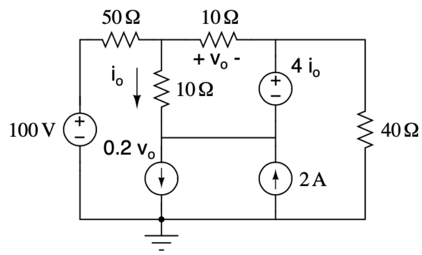
Resolviendo el sistema, podemos llegar a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
v_1 &= -2V \qquad & v_2 &= 2V \\
v_3 &= 2V \qquad & v_4 &= 5V
\end{aligned}$$

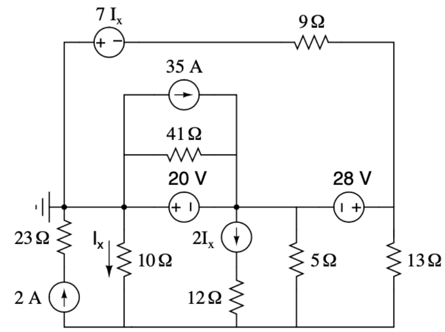
Es decir: $V_o = V_3 - V_2 = 0V$

Problema 4

Determine los sistema $Ax = b$ para los siguientes circuitos. Identifique qué método es más conveniente para cada caso (nodos o mallas).



(a)



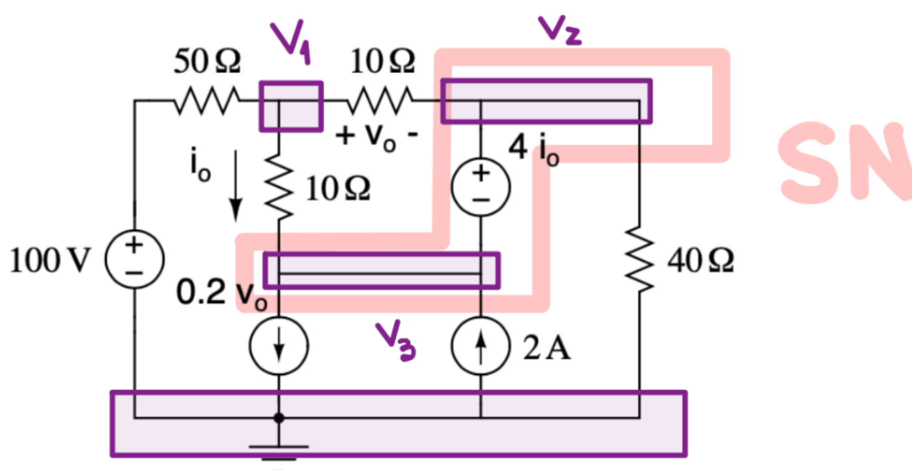
(b)

Figura 36: Sistemas Matriciales

Solución:

Lo van a ver con mas detalle la proxima clase, pero aquí va de todos modos: Ambos los haremos con KCL.

a. Definiremos los siguientes voltajes y super-nodos:



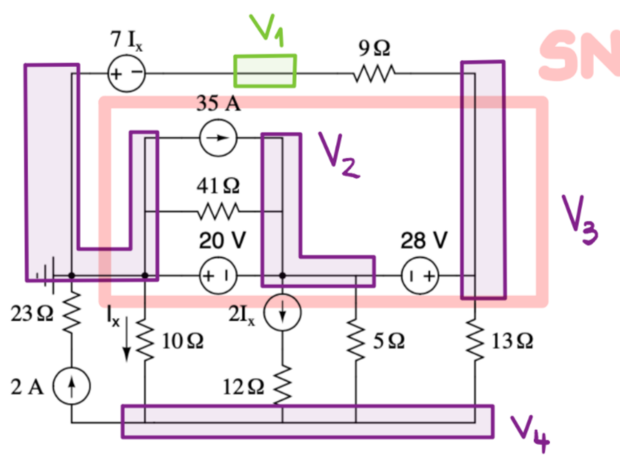
Luego, se podrán plantear las siguientes ecuaciones

$$
\begin{aligned}
\frac{v_1 - 100}{50} + \frac{v_1 - v_3}{10} + \frac{v_1 - v_2}{10} &= 0 \\
0{,}2V_o + \frac{v_3 - v_1}{10} + \frac{v_2 - v_1}{10} + \frac{v_2}{40} &= 2 \\
v_2 = v_3 + 4\frac{v_1 - v_3}{10} \\
V_o = v_1 - v_2
\end{aligned}
$$

sí, se puede formar el siguiente sistema

$$
\begin{bmatrix} \frac{11}{50} & \frac{-1}{10} & \frac{-1}{10} \\ 0 & \frac{-3}{40} & \frac{1}{10} \\ \frac{4}{10} & -1 & \frac{6}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

b. Definiremos los siguientes voltajes y super-nodos:



Luego, se podrán plantear las siguientes ecuaciones

$$
\begin{aligned}
v_2 &= -20 \\
v_3 &= 8 \\
2I_x + I_x &= 2 + \frac{v_4 + 20}{5} + \frac{v_4 - 8}{13} \\
v_1 &= -7I_x \\
I_x &= \frac{-v_4}{10}
\end{aligned}
$$

Así, se puede formar el siguiente sistema

$$
\begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{10} \\ 0 & \frac{-15}{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{70}{13} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Problema 5

Para el siguiente circuito, calcule el valor de V_o

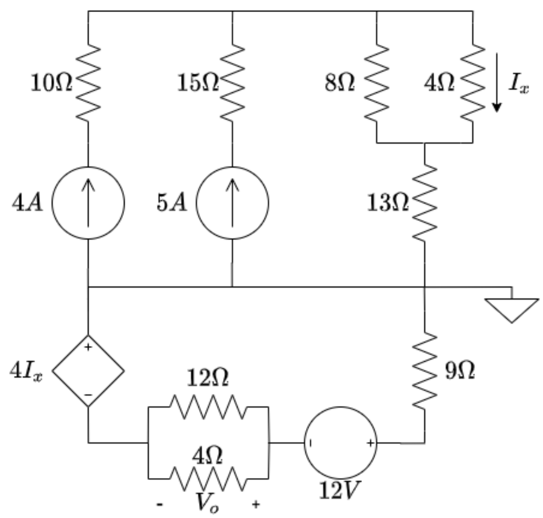


Figura 37: Circuito 1

Solución

Primero, aplicaremos ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo superior:

$$4 + 5 = I_{8\Omega} + I_{4\Omega} = I_{13\Omega}$$

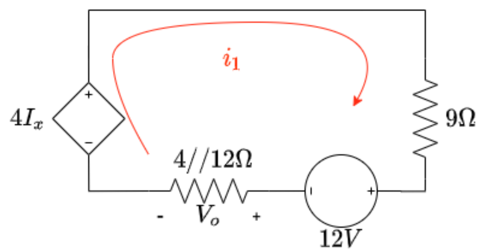
Podemos notar que $I_x = I_{4\Omega}$.
Por divisor de corriente

$$I_x = \frac{8}{8+4} I_{13\Omega}$$

Luego, $I_x = \frac{8}{12} I_{13\Omega} = \frac{2}{3} 9 = 6A$

Ahora, mirando a la parte inferior del circuito, podemos aplicar mallas. Se vería algo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 4I_x - 12 &= 9i_1 + (4//12)i_1 \\ 24 - 12 &= 9i_1 + 3i_1 \\ 12 &= 12i_1 \\ i_1 &= 1A \end{aligned}$$



Así, $V_o = (4//12)i_1$, entonces:

$$V_o = 3V$$

Problema 6

Usando Leyes de Kirchhoff, encuentre el valor de V_o en el siguiente circuito

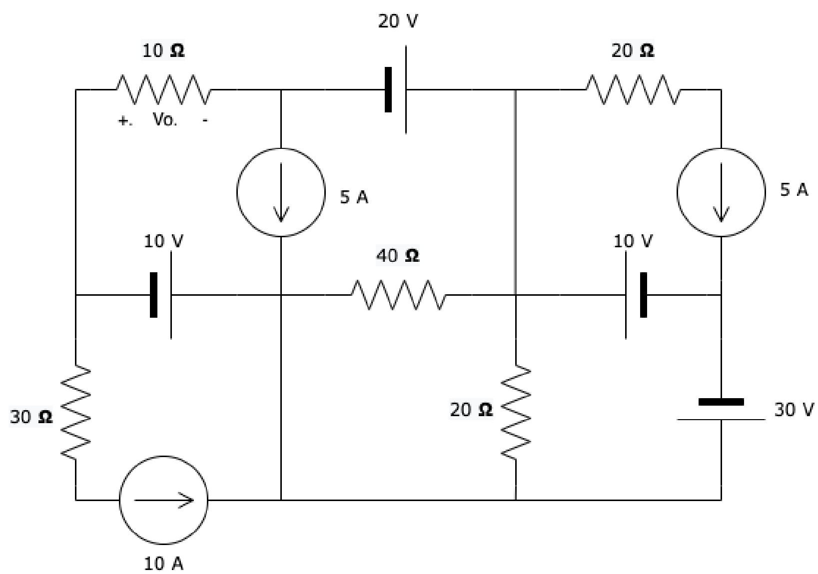
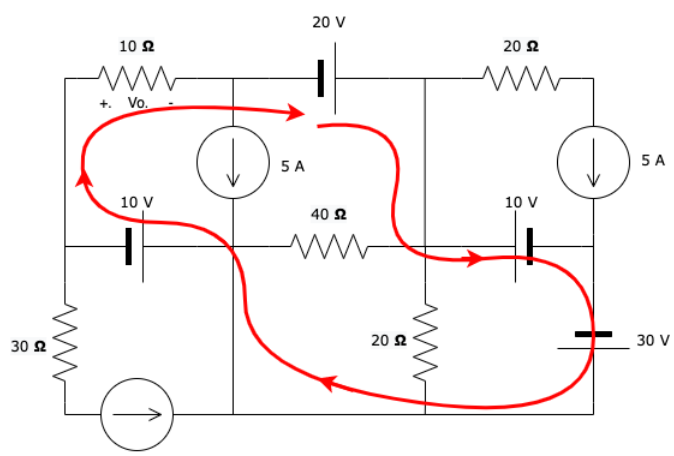


Figura 38: Leyes de Kirchhoff

Solución

No es necesario encontrar ninguna corriente, sino que solo saber que en una malla cerrada, sin importar los componentes, la suma de las diferencias de potencial es cero. La clave de este ejercicio es viajar a través de las fuentes de voltaje que tienen un voltaje fijo. Aplicando la siguiente supermalla, el problema sale de inmediato:



Luego, aplicando KVL:

$$20 - 10 + 30 - 10 - V_o = 0$$

Luego, $V_o = 30V$

Problema 7

Si $R = 1k$, $V_1 = 2V$, $V_2 = 1V$ y $I = 100mA$, calcule la potencia disipada por el resistor $3R$. Para esto, **calcule el voltaje usando el método de nodos, y la corriente usando el método de mallas**.

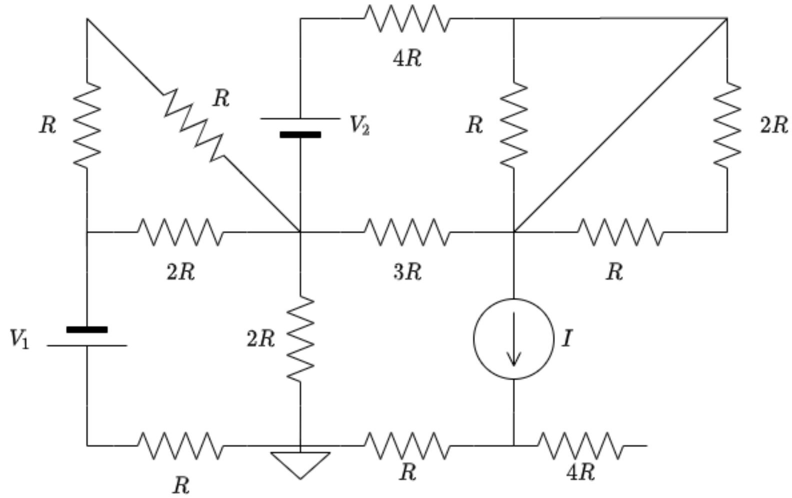


Figura 39: Circuito

Solución

Primero que todo, podemos simplificar los circuitos:

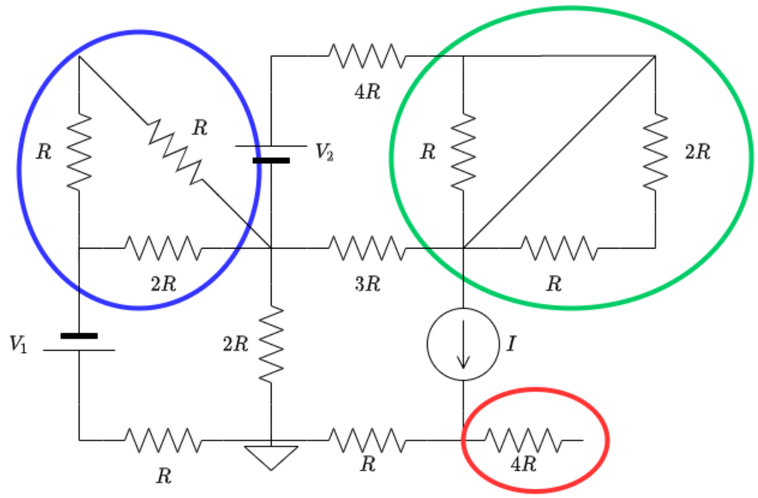
- La resistencia de valor $4R$ está mal conectada, por lo que se puede eliminar.
- Se puede calcular una resistencia equivalente de valor R
- El cable cortocircuita las resistencias, por lo tanto, se puede reemplazar con un cable.

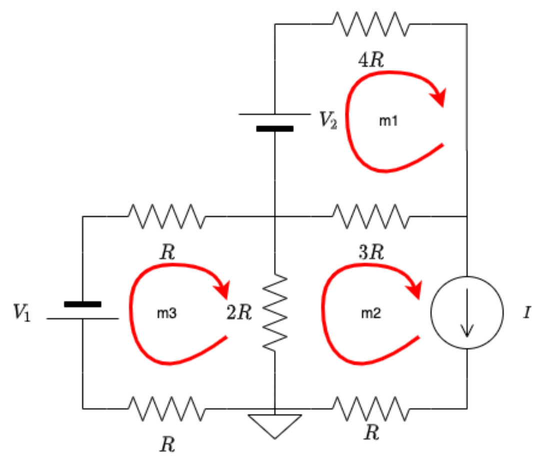
Ahora, si aplicamos KVL usando las siguientes corrientes, se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$V_2 = 4Ri_1 + 3R(i_1 - i_2)$$
$$i_2 = I$$
$$-V_1 = Ri_3 + 2R(i_3 - i_2) + Ri_3$$

Resolviendo el sistema, y reemplazando con los valores del enunciado

$$i_1 = 43mA \qquad i_2 = 100mA \qquad i_3 = 49,5mA$$





Ahora, si aplicamos KCL en los siguientes nodos, se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

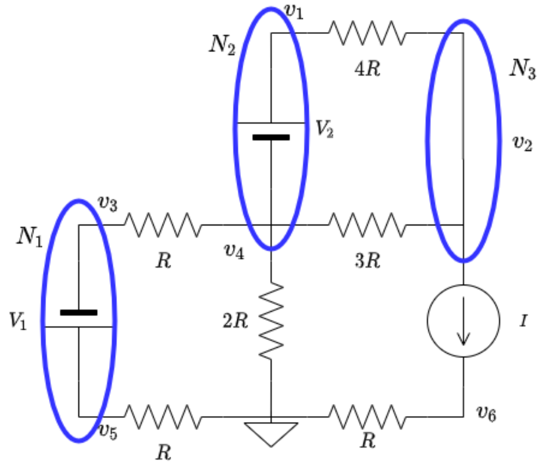
$$
\begin{aligned}
N1: \quad & 0 = \frac{v_3 - v_4}{R} + \frac{v_5 - 0}{R} \\
N2: \quad & 0 = \frac{v_4 - v_3}{R} + \frac{v_4 - 0}{2R} + \frac{v_4 - v_2}{3R} + \\
N3: \quad & 0 = I + \frac{v_2 - v_4}{3R} + \frac{v_2 - v_1}{4R} \\
& v_1 = v_4 + V_2 \\
& v_5 = v_3 + V_1 \\
& v_6 = RI
\end{aligned}
$$

Resolviendo el sistema, y reemplazando con los valores del enunciado

$v_1 = -100V \qquad v_2 = -272V \qquad v_3 = -51,5V \qquad v_4 = -101V \qquad v_5 = -49,5V \qquad v_6 = 100V$

Luego, podemos calcular la potencia que disipa el resistor como:

$$P = V * I = (v_4 - v_2)(i_2 - i_1) = (-101 - (-272))(100 * 10^{-3} - 43 * 10^{-3})$$



$$P = 9,75W$$

Problema 8

José, un gran amigo suyo, necesita diseñar el siguiente circuito pero aún no sabe qué componentes usar. Para esto le pide ayuda para saber qué voltajes tendría cada nodo de su diseño.

1. Escriba el sistema matricial para encontrar los voltajes v_1, v_2, v_3 y v_4 del siguiente circuito.
2. Si José decidió que $V_1 = 5V$, $I_1 = 1A$, $R_1 = 5\Omega$, $R_3 = R_5 = 2\Omega$ y $R_2 = R_4 = 4\Omega$. Calcule el valor de los voltajes usando algún programa computacional (MatLab, Mathematica, Python, etc)

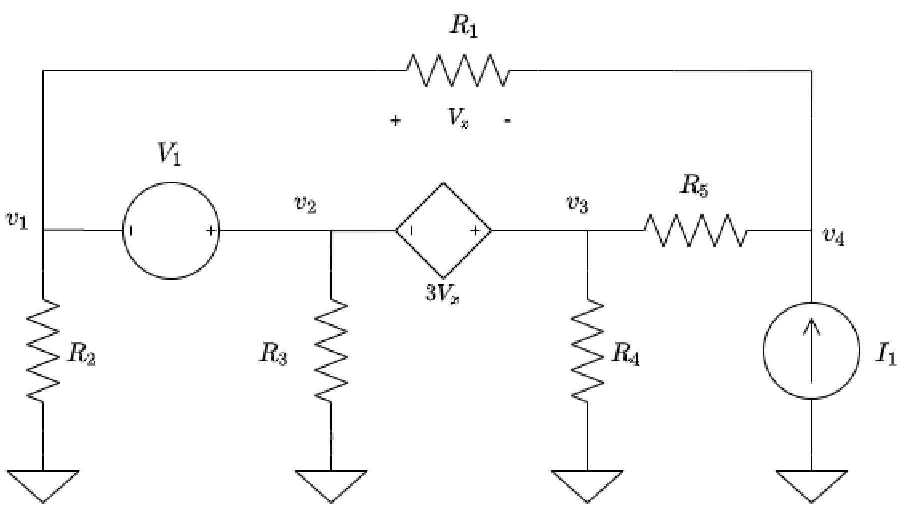
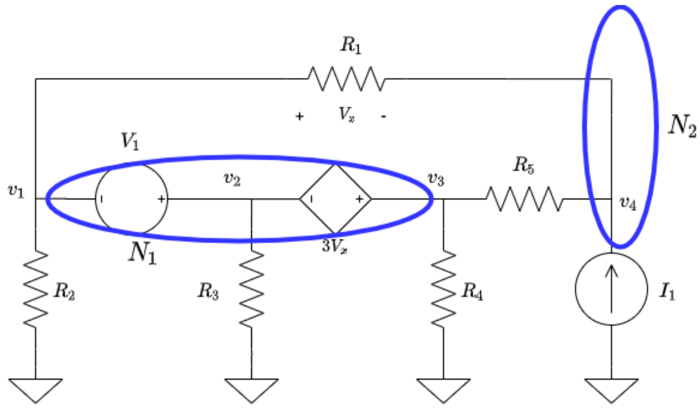


Figura 40: Aplicación Computacional

Solución

Usaremos el método de nodos. Dado que tenemos fuentes de voltaje, haremos supernodo encerrando estas dos fuentes. (**TIP:** Por lo general, cuando tengamos fuentes de voltaje, la encerraremos en un super-nodo) De esta forma, obtendríamos los siguientes nodos y las siguientes ecuaciones



$$0 = \frac{v_1}{R_2} + \frac{v_2}{R_3} + \frac{v_3}{R_4} + \frac{v_3 - v_4}{R_5} + \frac{v_1 - v_4}{R_1}$$
$$I_1 = \frac{v_4 - v_3}{R_5} + \frac{v_4 - v_1}{R_1}$$

Y las siguientes ecuaciones que relacionan los voltajes:

$$v_2 = v_1 + V_1$$
$$v_3 = v_2 + 3V_x$$
$$V_x = v_1 - v_4$$

Luego, reemplazando la última ecuación en las anteriores, y factorizando, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_1} & 0 & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_1 \\ V_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, usando un programa computacional podemos resolver el sistema (Ejemplo)

$$v_1 = -1,556V \qquad v_2 = 3,44V \qquad v_3 = -1,33V \qquad v_4 = 0,034V$$

```
In[205]:=
R1 = 5;
R2 = 4;
R3 = 2;
R4 = 4;
R5 = 2;
V1 = 5;
I1 = 1;
A = {{1 / R2 + 1 / R1, 1 / R3, 1 / R4 + 1 / R5, - (1 / R5 + 1 / R1)},
    {-1 / R1, 0, -1 / R5, 1 / R1 + 1 / R5},
    {-1, 1, 0, 0},
    {3, 1, -1, -3}};
% // MatrixForm
     forma de matriz
b = {0, I1, V1, 0};

Solve[A.{v1, v2, v3, v4} == b , {v1, v2, v3, v4}] // N
resuelve                                              valor num
```

Out[213]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{20} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{7}{10} \\ -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

```
Out[215]= {{v1 → -1.55682, v2 → 3.44318, v3 → -1.32955, v4 → 0.0340909}}
```

Figura 41: Código usando Wolfram Mathematica

4. Nodos y Mallas

Problema 1

¿Cuántos nodos hay? Encuentra la corriente de cada tramo del circuito.

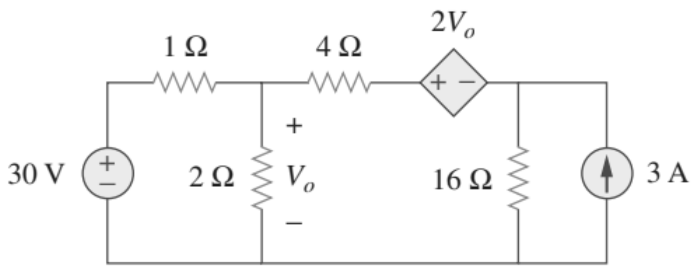


Figura 42: Múltiples fuentes, KCL y KVL

Solución:

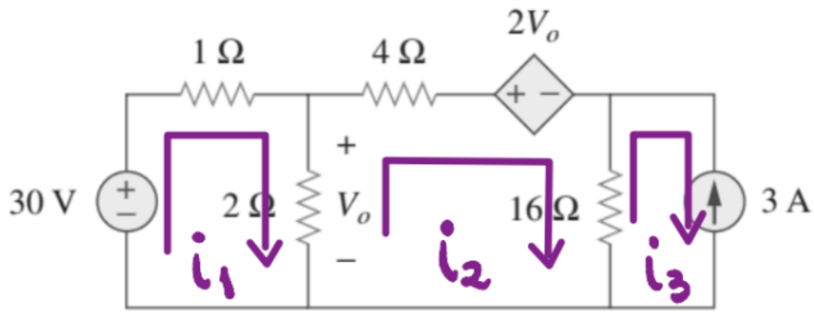
Conocimiento Previo

1. El **Método de Mallas** consiste definir mallas en un camino cerrado para encontrar las ecuaciones que describen dicho circuito. Además, estas ecuaciones se representan por tradición de forma matricial. ¿Por qué de forma matricial? Tenemos matrices que definen nuestro circuito → Los computadores resuelven matrices → Los computadores puede resolver circuitos.
   En ejercicios anteriores ya vimos representaciones matriciales de la ecuaciones que definen un circuito Aquí.

2. **Pasos para realizar el Método de Mallas:**
   - Definir corrientes en cada malla del circuito sin que estás sean redundantes entre sí. Da igual el sentido que tengan las corrientes siempre y cuando, al plantear las ecuaciones, respetemos la convención vista en el capítulo 1.
   - Plantear por cada malla una ecuación utilizando KVL.
   - Transformar las ecuaciones a la forma: $Ai = v$, donde el vector i son las corrientes que definiste en el paso 1.

   Ahondo más en estos pasos en el siguiente ejercicio.

Siguiendo los pasos planteado anteriormente definimos las corrientes por cada malla del circuito:



Ahora, planteamos las ecuaciones respetando la convención de la Ley de Ohm. Para lograr esto te planteo las siguiente estrategia.
Enfócate en la corriente una sola malla a la vez y analiza lo siguiente:

- Si esta corriente entra por el terminal negativo de una fuente de voltaje (va de - a +) el voltaje ”sube”. Por lo tanto, en la ecuación de KVL de la malla este voltaje queda positivo.
- Si esta corriente entra por el terminal positivo de una fuente de voltaje (va de + a -) el voltaje .ªbaja”. Por lo tanto, en la ecuación de KVL de la malla este voltaje queda negativo.
- Si la corriente cruza una resistencia, respetando la convención de la Ley de Ohm, esta corriente debe entrar por el terminal + de la resistencia (va de + a -). Por lo tanto, en la ecuación de KVL de la malla el voltaje de esta resistencia queda negativo.
- Si dos corrientes, digamos i_1 e i_2, cruzan una misma resistencia R en sentidos opuestos, en la ecuación de KVL de la malla i_1 tendremos que el voltaje de esa resistencia es $(i_1 - i_2)R$ y en la ecuación de KVL de la malla i_2 tendremos que el voltaje de esa resistencia es $(i_2 - i_1)R$.

Si seguimos estos pasos obtenemos:

$$\begin{aligned} 30V - i_1(1\Omega) - (i_1 - i_2)(2\Omega) &= 0 \\ -(i_2 - i_1)(2\Omega) - i_2(4\Omega) - 2V_o - (i_2 - i_3)(16\Omega) &= 0 \\ i_3 &= -3A \end{aligned}$$

Notar que, debido a la polaridad con la que está definido V_o en el circuito, la representación correcta de V_o es la de la malla de i_1 ya que cumple con la convención. Es decir, $V_o = (i_1 - i_2)(2\Omega)$

En general encontrarás que en los ejercicios resueltos encontraras las ecuaciones ordenados del siguiente modo:

$$
\begin{aligned}
i_1(1\Omega) + (i_1 - i_2)(2\Omega) =& 30V \\
(i_2 - i_1)(2\Omega) + i_2(4\Omega) + (i_2 - i_3)(16\Omega) =& -2V_o = -2(i_1 - i_2)(2\Omega) \\
i_3 =& -3A
\end{aligned}
$$

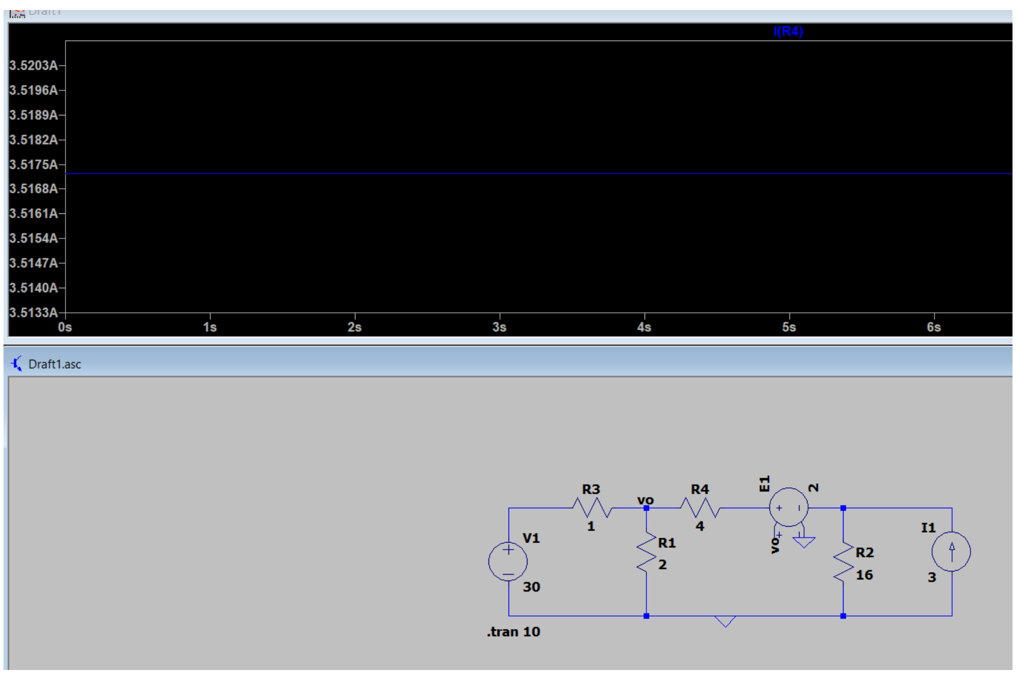
La representación matricial es:

$$
\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 18 & -16 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30V \\ 0 \\ -3A \end{bmatrix}
$$

Resolviendo el sistema:

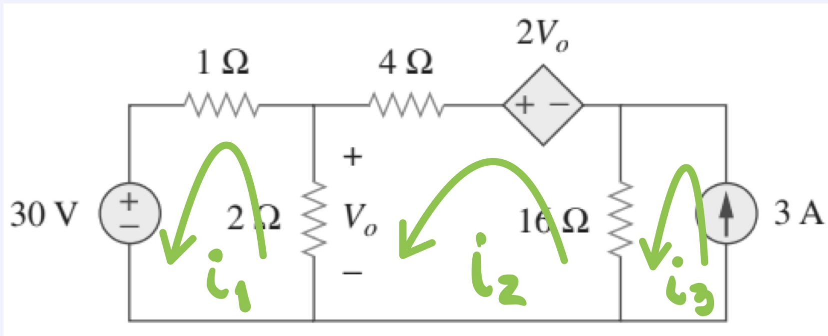
$$
i_1 = \frac{222}{29}A \approx 7{,}655A \qquad i_2 = -\frac{102}{29}A \approx -3{,}5173A \qquad i_3 = -3A
$$

Corroborar en LtSpice:



Paréntesis para Demostración

Si definimos las corrientes en sentidos diferentes, siempre que respetemos los pasos anteriores, debemos obtener los mismos resultados. Veamos las ecuaciones del siguiente ejemplo:



$$\begin{aligned} -30V - i_1(1\Omega) - (i_1 - i_2)(2\Omega) &= 0 \\ -(i_2 - i_1)(2\Omega) - i_2(4\Omega) + 2V_o - (i_2 - i_3)(16\Omega) &= 0 \\ i_3 &= 3A \\ V_o &= (i_2 - i_1)(2\Omega) \end{aligned}$$

La representación matricial es:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & -18 & 16 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30V \\ 0 \\ 3A \end{bmatrix}$$

La matriz no es idéntica a la original, sin embargo, esto tiene sentido ya que las variables están definidas de manera diferente a la original.
Resolviendo el sistema:

$$i_1 = -\frac{222}{29}A \approx -7{,}655A \qquad i_2 = \frac{102}{29}A \approx 3{,}5173A \qquad i_3 = 3A$$

Hay un cambio de signo en cada incógnita debido al sentido en que se definieron las corrientes en esta situación. Sin embargo, los resultados son idénticos.

Problema 2

Encuentra los voltajes de cada nodo del circuito usando método de mallas. Plantea las ecuaciones en forma matricial.

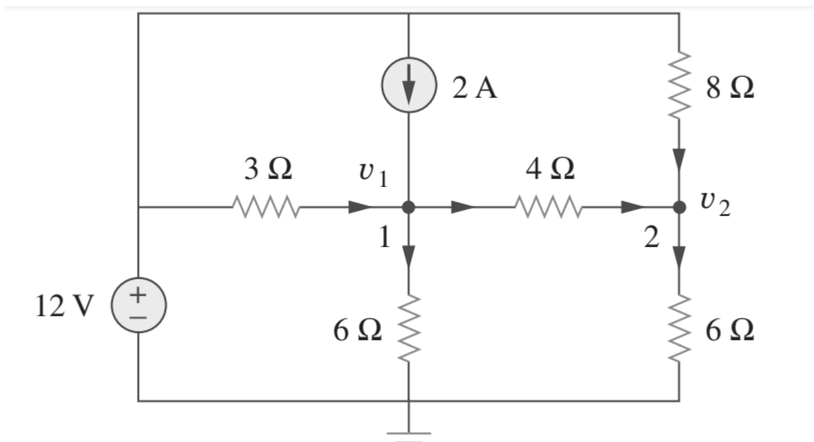


Figura 43: Método Nodos o KCL

Solución:

Conocimiento Previo

1. Con Método de Mallas obtenemos las corrientes de cada malla, no los voltajes de cada nodo.
2. En ocasiones, al utilizar Método de Mallas, encontramos fuentes de corriente que relacionan dos corrientes de nuestro sistema. Esto se conoce como **SuperMalla** (SM).

Definimos nuestras mallas:

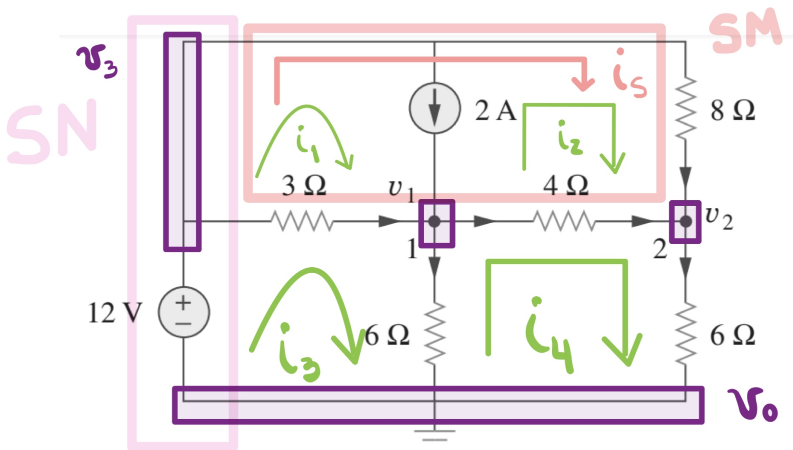


Figura 44: Definir Mallas

Como $V_o = 0$ es nuestra referencia podemos plantear las siguientes ecuaciones:

- Para la malla SM:

$$i_1 - i_2 = 2A \qquad i_2(8) + (i_2 - i_4)(4\Omega) + (i_2 - i_3)(3\Omega) = 0$$

- Para la malla i_3:

$$12V - (i_3 - i_1)(3\Omega) - (i_3 - i_4)(6\Omega) = 0$$

- Para la malla i_4:

$$-(i_4 - i_3)(6\Omega) - (i_4 - i_2)(4\Omega) - (i_4)(6\Omega) = 0$$

La matriz resultante es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 15 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 9 & -6 \\ 0 & -4 & -6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0V \\ 2A \\ 12V \\ 0V \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema:

$$i_1 = \frac{34}{11}A \qquad i_2 = \frac{12}{11}A \qquad i_3 = \frac{112}{33}A \qquad i_4 = \frac{17}{11}A$$

Problema 3

Encuentra el voltaje de cada nodo del circuito usando método de nodos.

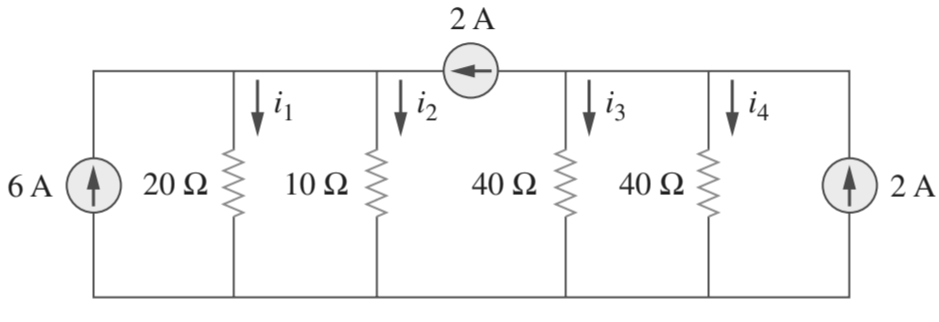


Figura 45: Método Nodos o KCL

Solución:

Conocimiento Previo

1. El **Método de Nodos** consiste definir ecuaciones, usando KCL, para cada nodo del circuito. Como resultados se obtiene un sistema de ecuaciones que caracteriza los voltajes de cada nodo. Al igual que en el Método de Mallas usamos una representación matricial.

2. **Pasos para realizar el Método de Nodos:**
   - Encontrar todos los nodos de un circuito y asignarles un voltaje.
   - Plantear por cada nodo una ecuación utilizando KCL.
   - Transformar las ecuaciones a la forma: $Av = i$, donde el vector v son los voltajes de cada nodo encontrado en el paso 1.

   Ahondo más en estos pasos en el siguiente ejercicio.

Como lo dicen los pasos del Método de Nodos encontramos los nodos y les definimos un voltaje.

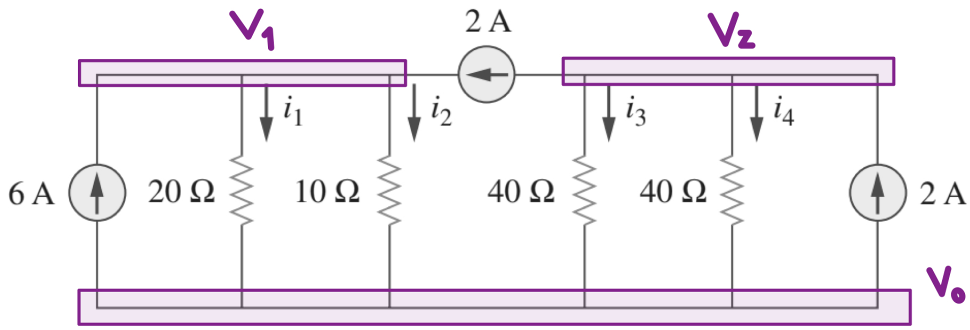


Figura 46: Definiendo Nodos y voltajes

Por simplicidad definimos nuestro nodo tierra en V_o, es decir, $V_o = 0V$.

Ahora debemos plantear las ecuaciones de KCL para cada nodo. Para lograr esto te planteo la siguiente estrategia:

- KCL utiliza la Ley de Ohm para expresar las ecuaciones. Por lo tanto, debemos respetar la famosa convención.
- En Método de Nodos la convención se aplica como: **la corriente se mueve de un voltaje más alto (V^+) a uno más bajo (V^-)**. Esto se debe a que los electrones se mueven según un gradiente de concentración hacia donde hayan menos electrones. Entonces, si defines entre dos nodos cual de ellos es mayor, al mismo tiempo estas definiendo el sentido de la corriente. Por el contrario, si defines la corriente en algún sentido, estas definiendo cual de los nodos por los que circula esa corriente es mayor. Son dos maneras de analizar una misma convención.
- La repercusión de la convención es que cuando expresemos por Ley de Ohm la corriente que pasa por una resistencia R que está conectada en dos nodos diferentes diremos que:

$$i = \frac{V^+ - V^-}{R}$$

Las ecuaciones de KCL serán:

- Para el nodo V_1:

$$entra = sale$$
$$6A + 2A = i_1 + i_2$$

Utilizando la estrategia que te planteo puedes reemplazar las corrientes por Ley de

Ohm como:

$$\begin{aligned} 6A + 2A &= i_1 + i_2 \\ &= \frac{V_1 - V_0}{20\Omega} + \frac{V_1 - V_0}{10\Omega} \\ &= \frac{V_1}{20\Omega} + \frac{V_1}{10\Omega} \end{aligned}$$

- Para el nodo V_2:

$$\begin{aligned} entra &= sale \\ 2A &= 2A + i_3 + i_4 \\ &= 2A + \frac{V_2 - V_0}{40\Omega} + \frac{V_2 - V_0}{40\Omega} \\ &= 2A + \frac{V_2}{40\Omega} + \frac{V_2}{40\Omega} \end{aligned}$$

- Para la malla V_0: No es necesario plantear esta ecuación pues esta es una combinación lineal de las ecuaciones que ya obtuvimos.

La representación matricial es:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{20} & 0 \\ 0 & \frac{1}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8A \\ 0A \end{bmatrix}$$

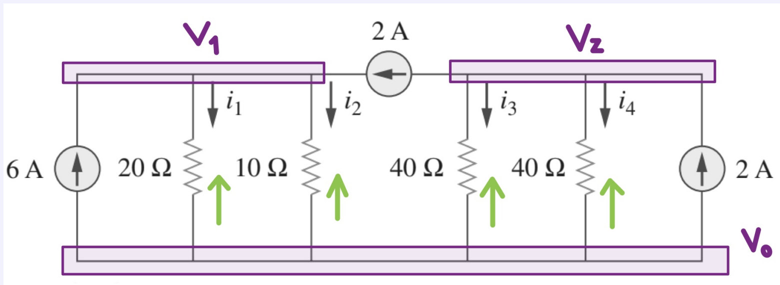
Finalmente:

$$V_1 = \frac{160}{3}V \qquad V_2 = 0V$$

Las ecuaciones de este ejercicio fueron triviales, pero quiero que te quedes en como planteamos las ecuaciones ya que en ejercicios más extensos y complejos es muy necesaria.

Paréntesis para Demostración

Si definimos las corrientes en sentidos diferentes, siempre que respetemos los pasos anteriores, debemos obtener los mismos resultados. Veamos las ecuaciones del siguiente ejemplo:



Ahora, los sentidos de las corrientes serán los de colores verde. Obtenemos:

$$\begin{aligned} 6A + 2A + i_1 + i_2 &= 0 \\ 2A + i_3 + i_4 &= 2A \end{aligned}$$

La representación matricial es:

$$\begin{bmatrix} \frac{-3}{20} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8V \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como este es un caso simple la matriz obtenida en ambas definiciones de las corrientes es idéntica, pero no tiene porqué serlo. En caso que sean diferentes, siempre y cuando respetemos la convención, los resultados serán idénticos.
Resolviendo el sistema:

$$V_1 = \frac{160}{3}V \qquad V_2 = 0V$$

Los voltajes obtenidos no pueden tener signos diferentes ya que el voltaje no tiene un sentido de interpretación. Sin embargo, si cambian los signos de las corrientes en este nuevo caso. Compruébalo tú mismo.

Problema 4

Encuentra todas la corrientes del circuito usando método de nodos.

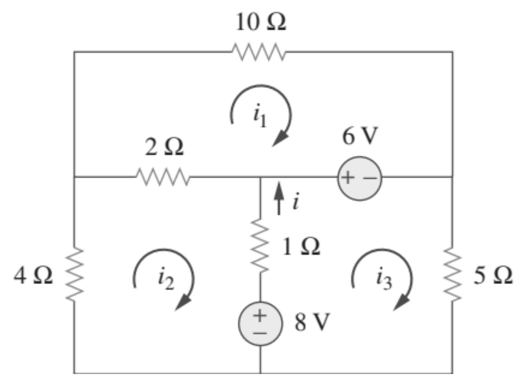


Figura 47: Método Nodos o KCL

Solución:

Conocimiento Previo

1. Recuerda que con el método de Nodos obtenemos los voltajes de cada nodo, no las corrientes de cada rama. Sin embargo, utilizando otras propiedades podemos derivar los valores de las corrientes.
2. Cuando entre dos nodos de un circuito podemos determinar inmediatamente (con solo "mirar el circuito") la diferencia de potencial entre ellos, nos encontramos en la presencia de un **Super-Nodo** (SN). Solemos encontrarlos cuando hay una fuente de voltaje entre dos nodos de un circuito.
   Al encontrar un SN podemos considerar a los dos nodos que forman parte de él como un solo nodo. Esto simplifica nuestras ecuaciones.

Siguiendo los pasos definidos en problemas anteriores definimos nodos y corrientes del circuito.

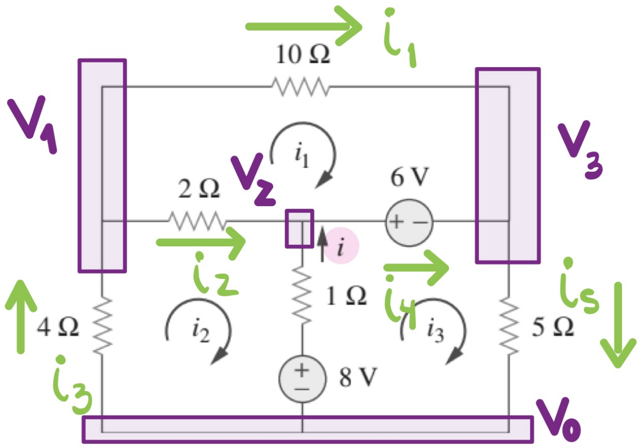


Figura 48: Método Nodos o KCL

Definimos arbitrariamente que $V_o = 0V$.

Las ecuaciones de KCL serán:

- Para el nodo V_1:

$$entra = sale$$
$$i_3 = i_1 + i_2$$
$$\frac{-V_1}{4\Omega} = \frac{V_1 - V_3}{10\Omega} + \frac{V_1 - V_2}{2\Omega}$$

- Para el SN V_{SN}:

$$V_2 - V_3 = 6V$$

y también podemos decir que:

$$entra = sale$$
$$i_1 + i_2 + i = i_5$$
$$\frac{V_1 - V_3}{10\Omega} + \frac{V_1 - V_2}{2\Omega} + \frac{8V - V_2}{1\Omega} = \frac{V_3}{5\Omega}$$

Nota que debido al SN estamos analizando KCL tanto para V_2 como para V_3. Es más, las dos ecuaciones que obtenemos del SN son combinación lineal de las ecuaciones de KCL de V_2 y V_3.

- Para la malla V_0: No es necesario plantear esta ecuación pues esta es una combinación lineal de las ecuaciones que ya obtuvimos.

La representación matricial es:

$$\begin{bmatrix} \frac{34}{40} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{10} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{6}{10} & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Finalmente, los voltajes de cada nodo son:

$$V_1 = \frac{160}{39}V \approx 4{,}1V \qquad V_2 = \frac{797}{117}V \approx 6{,}81V \qquad V_3 = \frac{97}{117} \approx 0{,}83V$$

Nos solicitaban las corrientes de cada tramo, utilizando Ley de Ohm obtenemos:

$i_1 \approx 0{,}33A \qquad i_2 \approx -1{,}35A \qquad i_3 \approx -1{,}03A \qquad i \approx 1{,}19A \qquad i_4 \approx -0{,}16A \qquad i_5 \approx 0{,}17A$

Problema 5

Encuentra todas la corrientes y del circuito usando método de mallas (KVL).

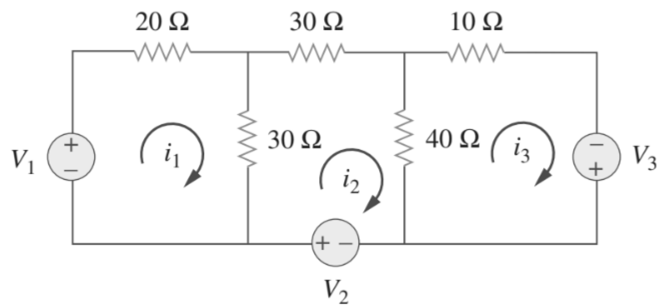


Figura 49: Método Mallas

Solución:

Utilizamos las corrientes ya definidas para obtener las siguientes ecuaciones:

- Para la malla i_1

$$V_1 - i_1(20) - (i_1 - i_2)30 = 0$$

- Para la malla i_2

$$V_2 - (i_2 - i_1)30 - i_2 * 30 - (i_2 - i_3)40 = 0$$

- Para la malla i_3

$$V_3 - (i_3 - i_2)40 - i_3 * 10 = 0$$

Finalmente, los voltajes de cada nodo son:

$$i_1 = \frac{34V_1 + 15V_2 + 12V_3}{1250}A \qquad i_2 = \frac{3V_1 + 5V_2 + 4V_3}{250}A \qquad i_3 = \frac{12V_1 + 20V_2 + 41V_3}{1250}A$$

Problema 6

Determina la matriz que representa a esta circuito utilizando el método de nodos.

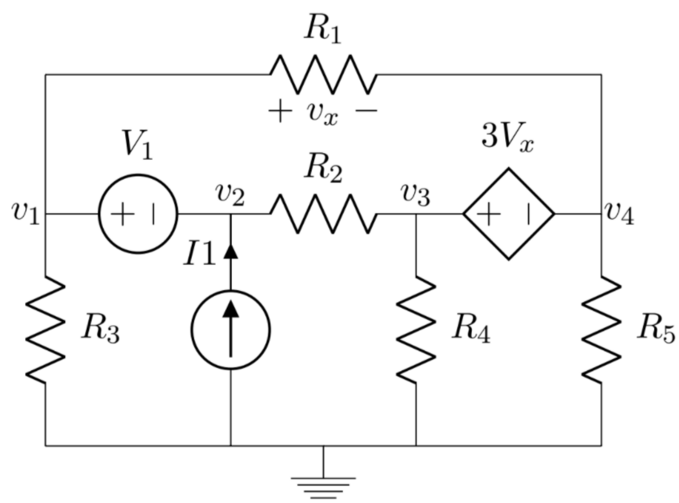


Figura 50: Circuito con SuperNodo

Solución:

De las Super-Nodo podemos obtener las siguientes relaciones.

$$v_1 - v_2 = V_1 \qquad\qquad v_3 - v_4 = v_x$$

Además, por la definición de voltaje (diferencia de potencial) encontramos la siguiente relación:

$$v_3 - v_4 = 3v_x \rightarrow v_x = \frac{v_3 - v_4}{3}$$

Podemos reemplazar v_x en las primeras ecuaciones y obtenemos:

$$v_1 - v_2 = V_1 \qquad\qquad v_3 - v_4 = \frac{v_3 - v_4}{3}$$

Tenemos dos ecuaciones para cuatro incógnitas, por lo que necesitamos dos ecuaciones más para lograr describir el sistema. Estas las obtenemos del método de mallas.

Definimos I_a e I_b para ayudarnos a describir las ecuaciones.

- Para el nodo v_1

$$\frac{v_1}{R_3} + \frac{v_1 - v_4}{R_3} = I_a$$

- Para el nodo v_2

$$I_a + \frac{v_2 - v_3}{R_2} = I_1$$

- Para el nodo v_3

$$I_b + \frac{v_2 - v_3}{R_2} = \frac{v_3}{R_4}$$

- Para el nodo v_4

$$\frac{v_1 - v_4}{R_1} - \frac{v_4}{R_5} = I_b$$

Con las expresiones anteriores podemos reemplazando I_a e I_b para obtener otras dos ecuaciones. Estas son:

$$\frac{v_1}{R_3} + \frac{v_1 - v_4}{R_3} + \frac{v_2 - v_3}{R_2} = I_1 \qquad \frac{v_1 - v_4}{R_1} - \frac{v_4}{R_5} + \frac{v_2 - v_3}{R_2} = \frac{v_3}{R_4}$$

Finalmente, la matriz será:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1||R_3} & \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2||R_4} & \frac{1}{R_1||R_5} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ 0 \\ V_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Circuitos Equivalente y Superposición

5.1. Thevenin y Norton

Problema 1

Encuentra todas la corrientes del circuito usando método de nodos.

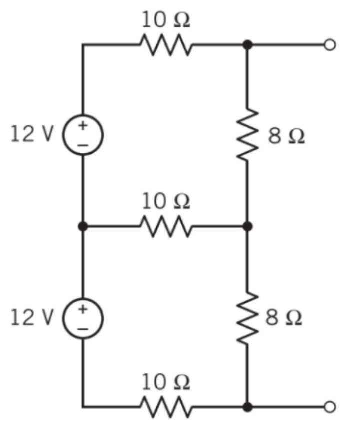


Figura 51: Circuito para aplicar Thevenin

Solución:

Conocimiento Previo

1. El **Equivalente de Thevenin** es una técnica que permite reemplazar un circuito completo por una fuente de voltaje V_{th} y una resistencia en serie R_{th}.

   Beneficios de esto: Imagina el circuito más difícil y rudo de resolver (todo el sistema eléctrico chileno), pues resulta que incluso ese circuito puede ser reemplazado por un circuito más simple.

2. Hay múltiples técnicas para realizar esta transformación. La primera estrategia que te presento consiste en:
   - Primero debemos determinar los terminales desde los cuales realizaremos la transformación.
     Debemos determinar donde podremos conectar nuevos componentes al circuito luego de la transformación (puntos A y B en la figura anterior).
   - Calcular el voltaje de circuito abierto V_{oc} desde los terminales seleccionados. Este será el voltaje del equivalente, es decir, $V_{oc} = V_{th}$.
   - Calcular la corriente de corto-circuito I_{sc} en los terminales seleccionados.
   - Luego, R_{th} será igual a V_{oc}/I_{sc}

   Esta estrategia sirve para cualquier circuito que posea por lo menos **una fuente independiente**. Nota que si un circuito solo tiene fuentes dependientes $V_{oc} = 0V$ y $I_{sc} = 0A$, es decir, no podemos determinar R_{th}. Por lo tanto, esta estrategia no sirve en ese caso.

En esta situación ya nos indican cuales son los terminales para los cuales se desea calcular el circuito de Thevenin.

- Calculamos V_{oc}
  Usando cualquier método visto en capítulos anteriores (Ley de Ohm, KVL, KCL, mallas, nodos) puedes encontrar el voltaje de circuito abierto V_{oc}

$$V_{oc} = V_{th} = 10{,}66V$$

- Calculamos I_{sc} usando cualquier método.

$$I_{sc} = 1{,}2A$$

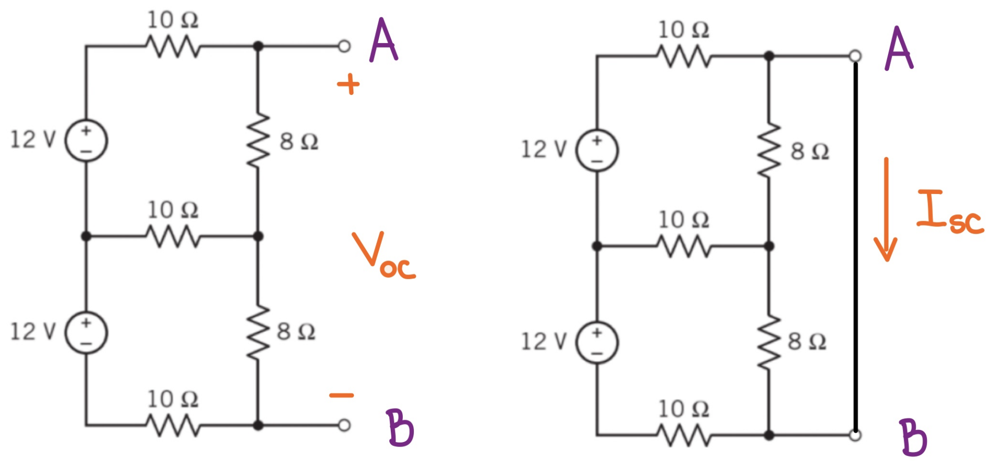


Figura 52: Dos circuitos por analizar, uno con V_{oc} y otro usando I_{sc}

Así tendremos que la resistencia de Thevenin es:

$$R_{Th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \quad = 8{,}8863\Omega$$

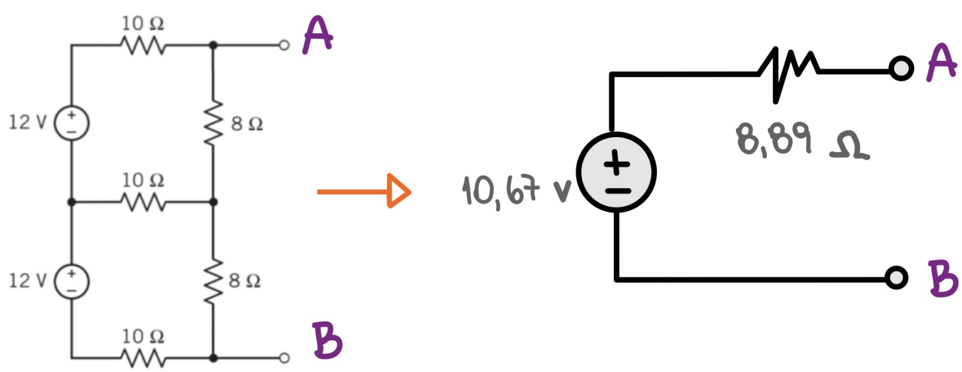
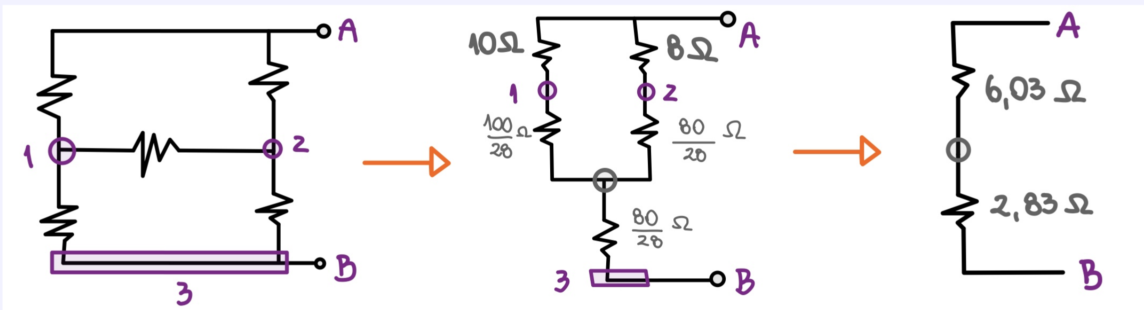


Figura 53: Circuito luego de la transformación

Trucaso

Hay una forma alternativa de encontrar R_{Th} sin tener que recurrir a I_{sc}.
Para lograr esto debes apagar las fuentes (las fuentes de voltajes pasan a ser corto-circuito y las de corrientes circuitos abiertos) y calcular la resistencia equivalente vista desde los terminales seleccionados. Este truco lo puedes utilizar solo si el circuito inicial **no posee ninguna fuente dependiente**.



Así, luego de la transformación $\Delta - Y$, $R_{th} = 8{,}86\Omega$

Problema 2

Utilizando el equivalente de Thevenin encuentre I_o

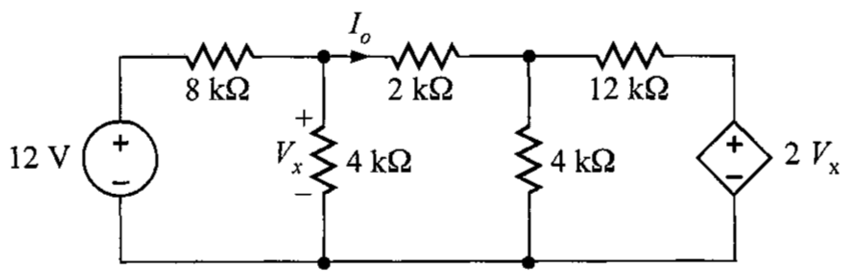
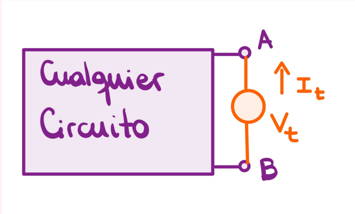


Figura 54: Circuito para aplicar Thevenin

Solución:

Conocimiento Previo

1. La segunda estrategia que te presento consiste en:
   - Determinar los terminales de referencia para la transformación.
   - Encontrar el voltaje de circuito abierto V_{oc} en los terminales.
   - Instalar una fuente de prueba V_t con corriente I_t en los terminales, apagar las fuentes independientes y encontrar $R_{th} = V_t/I_t$ por medio de las ecuaciones resultantes de este circuito.



Esta estrategia **sirve para cualquier circuito**. Además, uno de los beneficios que tiene es que, gracias al punto tres, es muy útil cuando tenemos **fuentes dependientes** en el circuito ya que estas no las podemos apagar y calcular una resistencia equivalente como lo hacíamos en capítulos anteriores.

En este ejercicios realizaremos dos equivalentes de Thevenin, la siguiente figura muestra donde se realizarán.

Para el equivalente del circuito de la izquierda utilizaremos la estrategia del problema 1. Determinamos por divisor de tensión V_{oc} como:

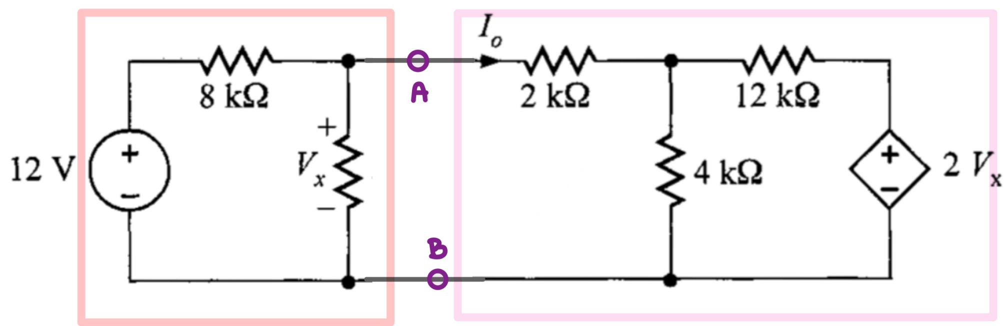


Figura 55: Circuito doble Thevenin

$$V_{oc} = V_x = V_{AB} = \frac{4}{12} * 12V = 4V$$

Como solo hay fuentes independientes podemos decir que:

$$R_{th} = (8k\Omega)//(4k\Omega) = 2{,}67k\Omega$$

Ahora, para el circuito de la derecha usamos la nueva estrategia

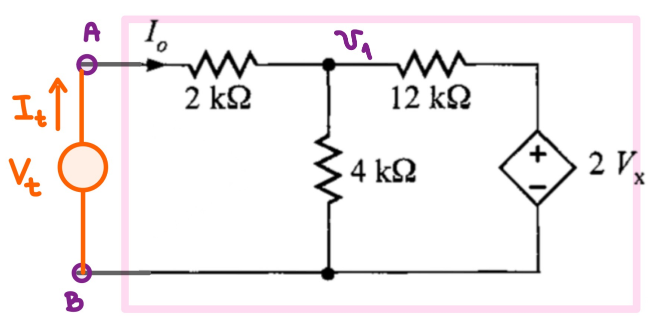


Figura 56: Circuito izquierdo estrategia dos

Como no hay fuentes independientes:

$$V_{oc} = 0V$$

¿Te hace sentido? Piensa que este circuito no entrega energía por si mismo ya que la fuente que posee depende de la excitación que provoque otra fuente en el circuito. Por eso su voltaje equivalente es cero.
Para encontrar la resistencia de Thevenin debemos expresar V_t y I_t en función de parámetros del circuito. Nota que $V_x = V_{AB} = V_t$.

Otras relaciones que podemos inferir son:

$$
\begin{aligned}
I_t &= \frac{V_t - v_1}{2k\Omega} \\
v_1 &= V_t - (2k\Omega)I_t \\
i_2 &= \frac{2V_t - v_1}{12k\Omega} \\
i_1 &= \frac{v_1}{4k\Omega}
\end{aligned}
$$

Por KCL

$$
\begin{aligned}
I_t + i_2 &= i_1 \\
\frac{V_t - v_1}{2k\Omega} + \frac{2V_t - v_1}{12k\Omega} &= \frac{v_1}{4k\Omega} \\
\frac{V_t - V_t + (2k\Omega)I_t}{2k\Omega} + \frac{2V_t - V_t + (2k\Omega)I_t}{12k\Omega} &= \frac{V_t - (2k\Omega)I_t}{4k\Omega} \\
I_t + \frac{V_t + (2k\Omega)I_t}{12k\Omega} &= \frac{V_t - (2k\Omega)I_t}{4k\Omega} \\
\frac{V_t}{I_t} &= 10k\Omega = R_{th}
\end{aligned}
$$

Finalmente,

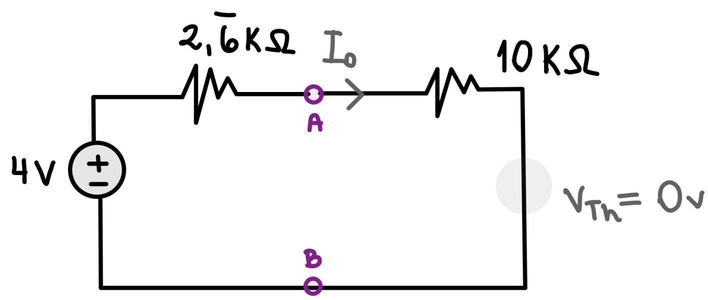


Figura 57: Thevenin izquierdo y derecho conectados

$$I_o = \frac{4V}{12{,}666k\Omega} = \frac{6}{19}mA = 0{,}3158mA$$

El problema podríamos haberlo resulto sin usar equivalente de Thevenin es más insisto en que lo resuelvas sin el equivalente y compares resultados. ☺

Problema 3

Utilizando el equivalente de Norton encuentre el valor del voltaje V_o.

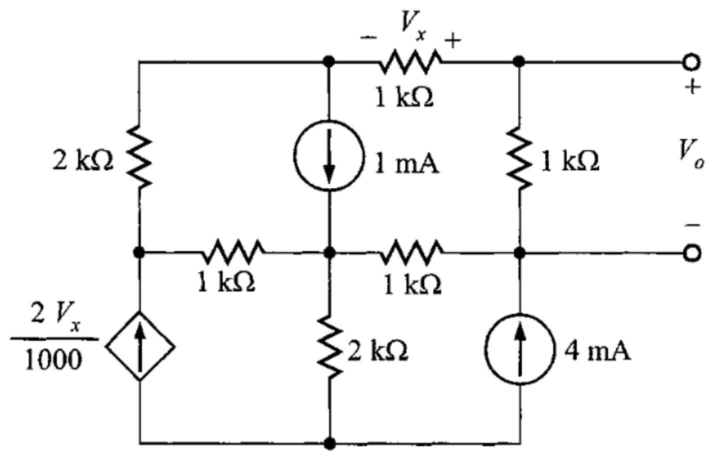
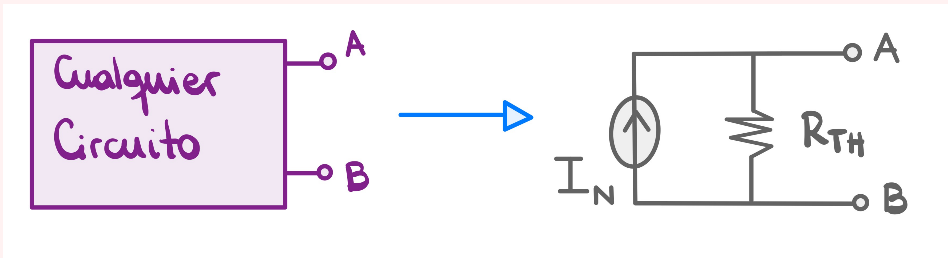


Figura 58: Circuito para aplicar Norton

Solución:

Conocimiento Previo

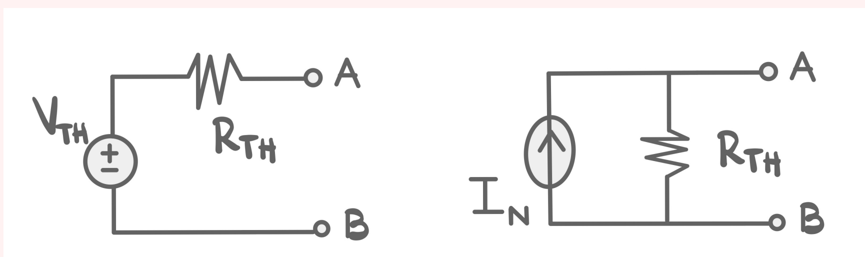
1. El **Equivalente de Norton** es una técnica que permite reemplazar un circuito completo por una fuente de corriente I_N con una resistencia en paralelo R_{th}. Realizar esta transformación es equivalente a realizar un equivalente de Thevenin, es más, desde un equivalente de Thevenin podemos pasar a un Norton y viceversa.



2. Las estrategias son las mismas que las mencionadas en los dos problemas anteriores, la única diferencia es que ahora nos interesa encontrar $I_{sc} = I_N$. Sin embargo, R_{th} puede ser determinado de la misma manera que expresan los métodos anteriores. los métodos anteriores.

3. Las ecuaciones que nos permite pasar de un equivalente al otro son:

$$\frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{V_{th}}{I_N} = R_{th} \qquad I_n = \frac{V_{th}}{R_{th}} \qquad V_{th} = I_N R_{th}$$



Como V_o corresponde al voltaje de posee la resistencia de un $1k\Omega$ realizaremos un equivalente de Norton justo a la izquierda de esta. La siguiente figura expresa como quedará el circuito que hay que analizar. Recuerda que $I_N = I_{sc}$.

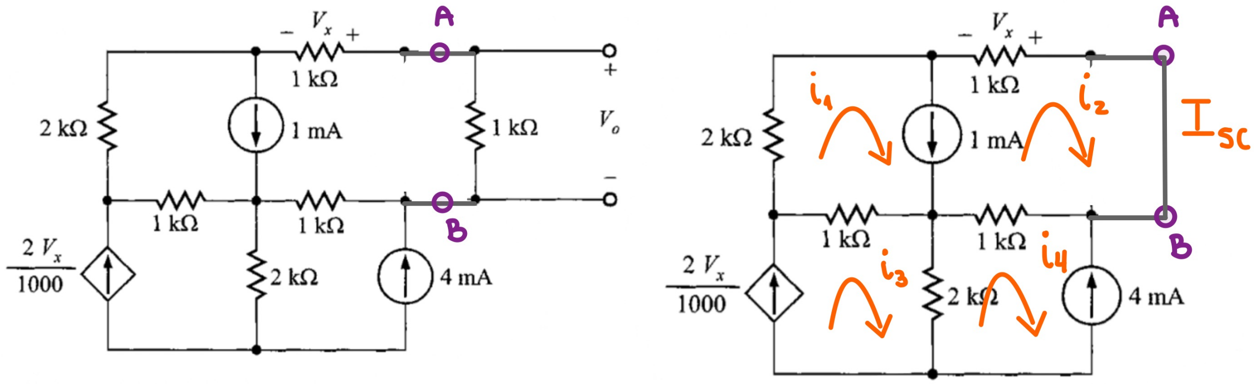


Figura 59: Circuito para aplicar Norton

Es fácil notar que $I_{sc} = i_2$, $i_3 = \frac{2V_x}{1000} = \frac{2(-i_2)1k\Omega}{1000} = -2i_2$, $i_4 = -4mA$ e $i_1 - i_2 = 1mA$

Las ecuaciones que describen las mallas superiores son:

- Super-Malla i_1-i_2

$$\begin{aligned}
i_1(2k\Omega) + i_2(1k\Omega) + (i_2 - i_4)(1k\Omega) + (i_1 - i_3)(1k\Omega) &= 0 \\
i_1(2k\Omega) + i_2(1k\Omega) + (i_2 - -4mA)(1k\Omega) + (i_1 - -2i_2)(1k\Omega) &= 0 \\
i_1(2k\Omega + 1k\Omega) + i_2(1k\Omega + 1k\Omega + 2k\Omega) &= -4V \\
i_1(3k\Omega) + i_2(4k\Omega) &= -4V
\end{aligned}$$

Resolviendo ecuaciones tenemos que: $i_1 = 0A$ e $i_2 = -1mA = I_{sc} = I_N$.

Solo nos falta encontrar R_{th}. Para esto conectamos la fuente de prueba y apagamos las fuentes independientes (transformar en circuito abierto las fuentes de corriente).

Del circuito de más abajo podemos inferir que $V_x = I_t * 1k\Omega$ y por KVL $v_1 = V_t - I_t(4k)$. Usando KCL podemos describir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{2V_x}{1000} + I_t &= \frac{v_1}{1k\Omega} \\
\frac{2I_t * 1k}{1000} + I_t &= \frac{V_t - I_t(4k)}{1k\Omega} \\
3k * I_t &= V_t - I_t * 4k \\
\frac{V_t}{I_t} &= 7k\Omega = R_{th}
\end{aligned}$$

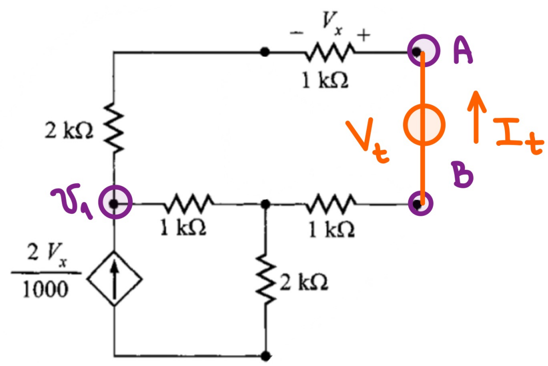


Figura 60: Circuito para aplicar Norton

Finalmente, al reemplazar el equivalente de Norton, tendremos que:

$$V_o = -I_N * (1k//7k)V = -1mA\frac{7k}{8} - \frac{7}{8}V$$

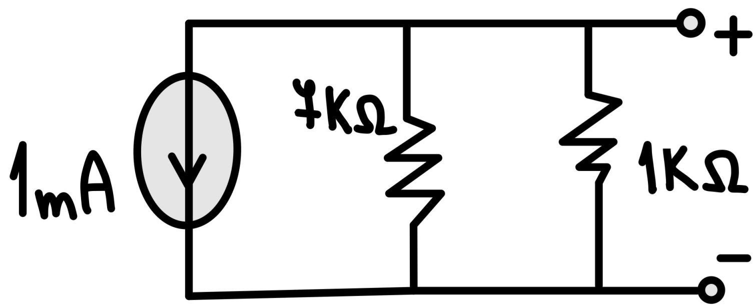


Figura 61: Circuito para aplicar Norton

Problema 4

Considere el circuito de la figura. Reduzca el circuito a su equivalente de Thévenin visto desde los terminales de la resistencia de $3k\Omega$

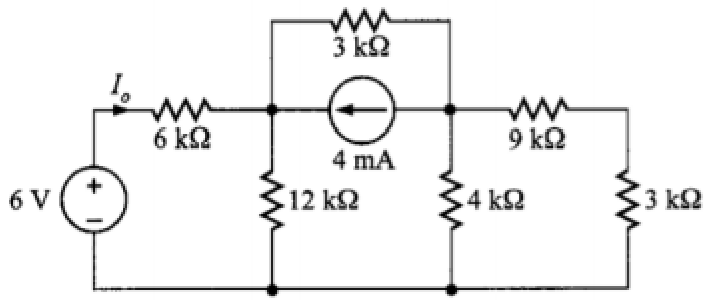
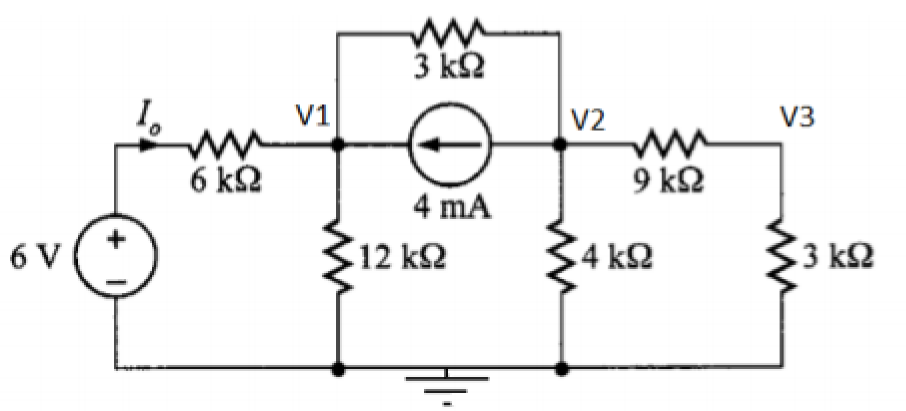


Figura 62: Circuito para aplicar Thévenin

Solución:

Para la equivalente de Thevenin necesitamos V_{eq} con R_{eq}:
Primero calculamos V_{eq} atraves del nodo, notar que $V_{eq} = V_1$:



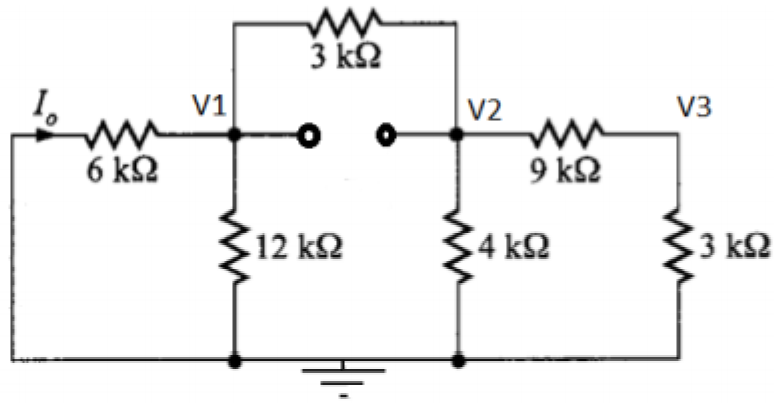
Las ecuaciones de nodos son :

$$\frac{6 - V_1}{6k} + 0{,}004 = \frac{V_1 - V_2}{3k} + \frac{V_1}{12k}$$

$$\frac{V_1 - V_2}{3k} = 0{,}004 + \frac{V_2}{4k} + \frac{V_2 - V_3}{9k}$$

$$\frac{V_2 - V_3}{9k} = \frac{V_3}{3k}$$

Resolviendo llegamos que $V_{eq} = 7{,}2V$
Luego para calcular la resistencia equivalente, hay que apagar las fuentes independientes, quedando asi el circuito:



Podemos ver que la resistencia equivalente esta dada por:

$$R_{eq} = [(9+3)//4+3]//12//6 = 2{,}4k\Omega$$

Problema 5

Considere el circuito de la figura. Determina el R_{Th} de los terminas A-B.

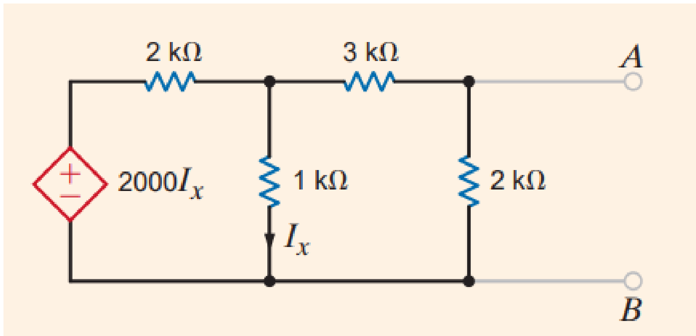
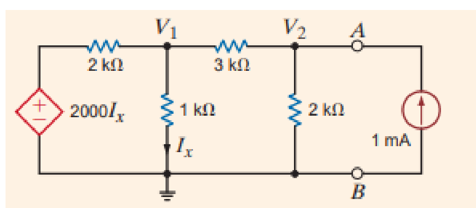


Figura 63: Circuito para aplicar Norton

Solución:

Notar que aqui como la fuente es dependiente, no podemos apagarlo.
Para R_{eq} hay que agregar una fuente del prueba, agregamos una fuente del corriente del $1mA$.



Por lo tanto, si calculamos V_2 , $R_{eq} = \frac{V_2}{1mA}$. Las ecuaciones de nodos son :

$$\frac{V_1 - 2000I_x}{2k} + \frac{V_1}{1k} + \frac{V_1 - V_2}{3k} = 0$$

$$\frac{V_2 - V_1}{3k} + \frac{V_2}{2k} = 1mA$$

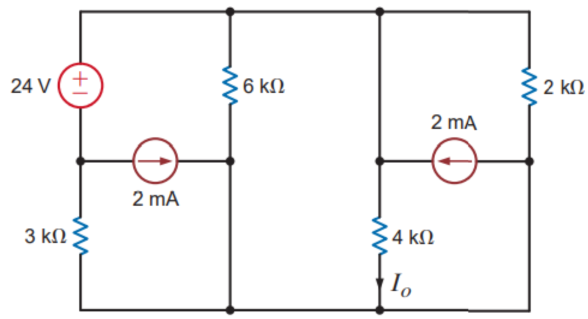
Resolviendo eso, tenemos que:

$$R_{eq} = \frac{10}{7} k\Omega$$

PD: Otras forma de hacer esto es poner una fuente del voltaje de prueba V_T y indicar que a ese nodo le entra I_T, luego resolviendo nodo, tendríamos que: $R_{eq} = \frac{V_T}{I_T}$. Queda propuesto esto para los alumnos.

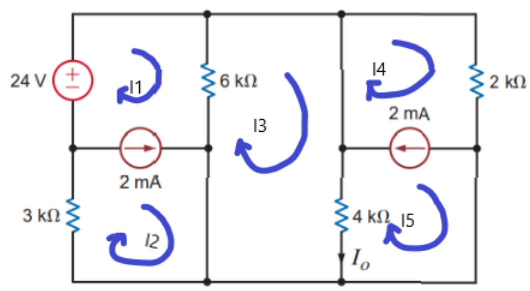
Problema 6

Considere el circuito de la figura, utiliza equivalencia del Norton para encontrar I_o y determine el R_{eq} del canal de $4k\Omega$



Solución

Hacemos malla para encontrar I_{eq} del canal del $4k\Omega$:



Las ecuaciones son:

$$-24 + 3(i2) + 6(i1 - i3) = 0 \qquad \text{super malla i1 con i2}$$

$$6(i3 - i1) + 4(i3 - i5) = 0$$

$$2(i4) + 4(i5 - i3) = 0 \qquad \text{super malla i4 con i5}$$

$$i2 - i1 = 2, i4 - i5 = 2$$

Resolviendo, tenemos que:

$$I_o = i_3 - i_5 = \frac{14}{5} - \frac{6}{5} = \frac{8}{5} mA = I_{eq}$$

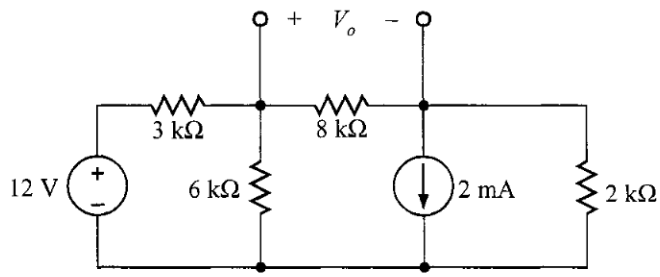
Luego para R_{eq} tenemos que apagar todas fuentes dependientes, quedando:

$$R_{eq} = (1/3 + 1/6 + 1/4 + 1/2)^{-1} = 0{,}8k\Omega$$

5.2. Superposición

Problema 1

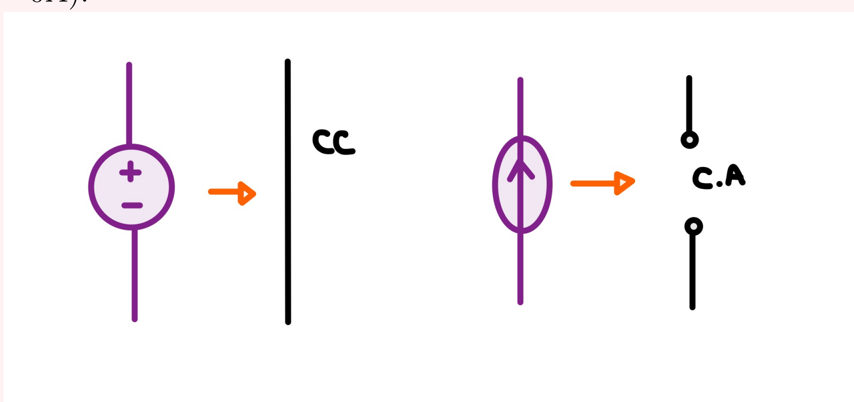
Utilizando Superposición determina V_o



Solución:

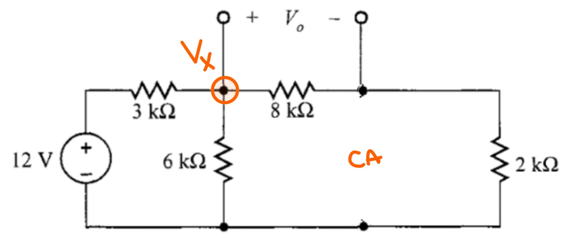
Conocimiento Previo

1. El **Teorema de Superposición** dice que la excitación que recibe un elemento de un circuito (sea voltaje o corriente) corresponde a la suma de las excitaciones **individuales** generadas por cada fuente independiente del circuito. Es más, el voltaje o corriente de este elemento corresponde a una combinación lineal entre las fuentes independientes del circuito.
   Por ejemplo, hay un circuito que solo posee n fuentes de voltaje independientes cada una con un voltaje V_i. El voltaje que recibe un resistencia R del circuito puede ser representado como:
   $$V_R = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i$$
   donde cada α_i es un parámetro del circuito. Es importante destacar que $\alpha_i V_i$ corresponde al voltaje que induce la fuente i en la resistencia cuando **todas las otras fuentes están apagadas**.
2. ¿Qué es apagar una fuente? Apagar una fuente quiere decir que una fuente deja de suministrar energia al circuito.
   - Al apagar una fuente de voltaje esta se transforma en un corto-circuito. Esto se debe a que en un corto-circuito el voltaje es cero ($V = 0V$).
   - Al apagar una fuente de corriente esta se transforma en un circuito abierto. Esto se debe a que en un circuito abierto no puede transitar la corriente ($I = 0A$).



3. Este teorema se sustenta en la linealidad del sistema, por lo que **no** funciona para encontrar la potencia de un elemento. Recuerda que la potencia $P = VI = V^2/R = I^2R$ no es lineal Por lo tanto,
   $$P_R = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i\right)^2}{R} \neq \sum_{i=1}^{n} \frac{(\alpha_i V_i)^2}{R}$$

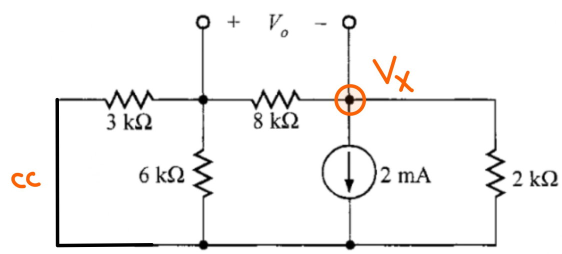
- Voltaje generado por la fuente de voltaje. Apagamos la fuente de corriente.



$$V_x = \frac{3{,}75k}{6{,}75k} 12V = 6{,}66666V$$

$$V_o = \frac{8k}{10k} 6{,}66666V = 5{,}3333333V$$

- Voltaje generado por la fuente de de corriente. Apagamos la fuente de voltaje.



$$V_x = 1{,}66666k * 2mA = 3{,}333333V$$

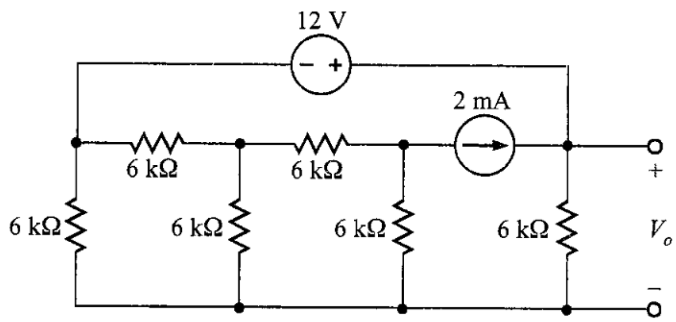
$$V_o = \frac{8k}{10k} 3{,}333333V = 2{,}66666666V$$

Finalmente, V_o es la suma de los resultados anteriores.

$$V_o = 5{,}3333333V + 2{,}66666666V = 8V$$

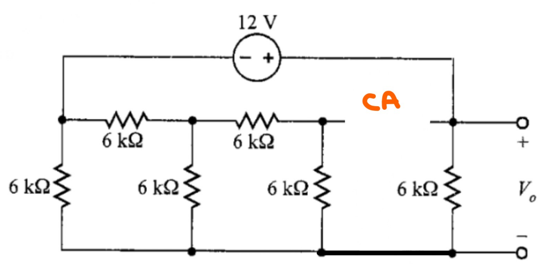
Problema 2

Utilizando Superposición determina V_o



Solución:

- Voltaje generado por la fuente de voltaje. Apagamos la fuente de corriente.



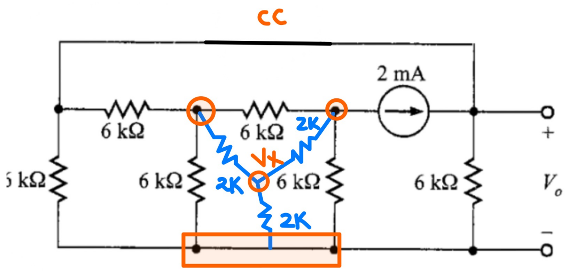
  Usando divisores de voltaje se obtiene que

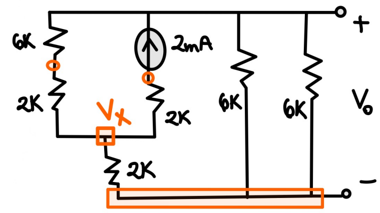
$$V_o = \frac{6k}{9{,}75k} 12V = 7{,}3846V$$

- Voltaje generado por la fuente de de corriente. Apagamos la fuente de voltaje.

  Luego de la transformación delta-estrella, del circuito figura de más abajo se desprenden las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{V_o}{3k} + \frac{V_o - V_x}{8k} &= 2mA \\ \frac{V_o - V_x}{8k} &= \frac{V_x}{2k} + 2mA \end{aligned}$$





Resolviendo se obtiene que:

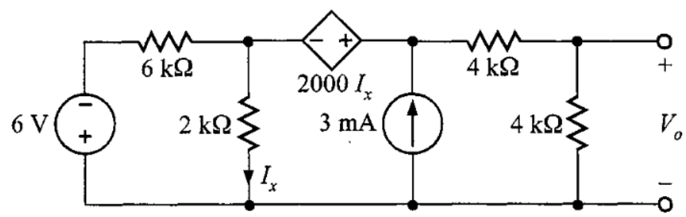
$$V_o = 3{,}6923mV$$

Finalmente, V_o es la suma de los resultados anteriores.

$$V_o = 7{,}3846V + 3{,}6923mV = 7{,}38829V$$

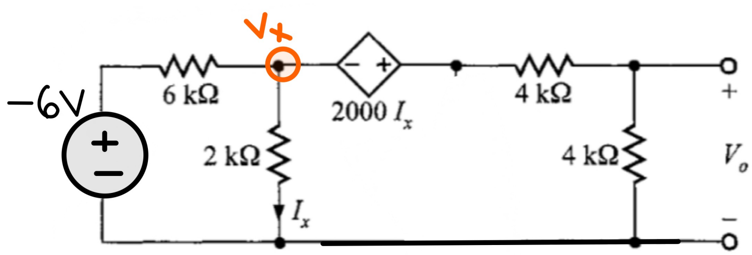
Problema 3

Utilizando Superposición determina la corriente que circula por $4k\Omega$



Solución:

- Voltaje generado por la fuente de voltaje. Apagamos la fuente de corriente.



Nota que $I_x = V_x/2k\Omega$, por lo tanto, $2000I_x = V_x$. Además si hacemos KCL en V_x tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{V_x - (-6V)}{6k} + I_x + \frac{V_x - (-2000I_x)}{8k} = 0$$

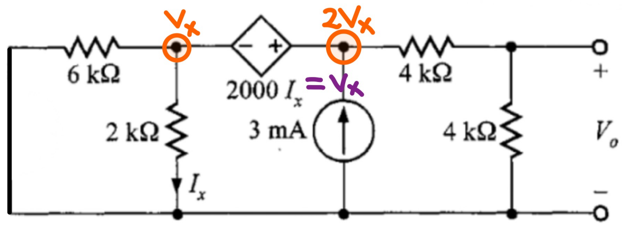
Así, $V_x = -1{,}0909V$. Finalmente, $I_o = 2V_x/8k\Omega = -0{,}2727mA = -272{,}72\mu A$

- Voltaje generado por la fuente de de corriente. Apagamos la fuente de voltaje.

Haciendo KCL en V_x tenemos que

$$\frac{V_o}{1{,}5k} + \frac{2V_x}{8k} = 3mA$$
$$V_x = 2{,}272727V$$

Finalmente, $I_o = 2V_x/8k\Omega = 0{,}818mA = 818\mu A$



Finalmente, V_o es la suma de los resultados anteriores.

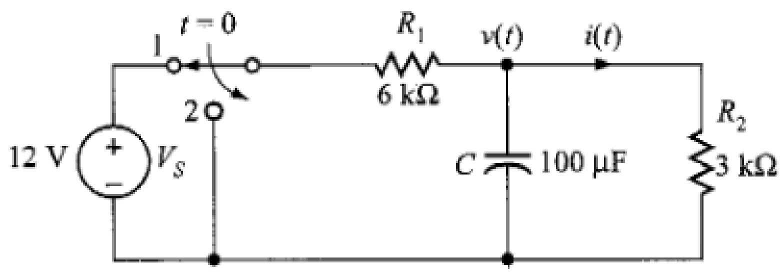
$$I_o = -272{,}72\mu A + 818{,}18\mu A = 545{,}46\mu A$$

---

6. Circuitos de Primer Orden

Problema 1

Determina la corriente $i(t)$ para $t \geq 0$ si el switch lleva mucho tiempo en la posición $t < 0$.



Solución:

Conocimiento Previo

1. En este capitulo se presentan nuevos componentes que generaran comportamientos diferentes en nuestros circuitos, específicamente estos generarán la aparición de derivadas temporales y así ecuaciones diferenciales. Estamos hablando de capacitores e inductores.
   - Un **capacitor** son dos placas paralelas que tienen la capacidad de almacenar cargas, es decir, es capaz de **almacenar un voltaje**. Gracias a estas características es que el capacitor se opone a cambios bruscos de voltaje. La capacitancia (C) corresponde la propiedad que describe a los capacitores y la ecuación de Ohm que describe su comportamiento y su expresión en el espacio de Laplace (frecuencia) es la siguiente:

     $$i_c = \frac{\partial v_c}{\partial t} C \rightarrow i_c = sV_cC$$

     Si la frecuencia de excitación del capacitor es cero ($s = 0 \rightarrow I_c = 0 * V_c * C$) **el capacitor se comporta como un circuito abierto.**

   - Un **inductor** corresponde a una bobina que tiene la capacidad de almacenar flujo magnético y así luego **inducir una corriente**. Gracias a estas características es que el inductor se opone a cambios bruscos de corriente. La inductancia (L) corresponde la propiedad que describe a los inductores y la ecuación de Ohm que describe su comportamiento y su expresión en el espacio de Laplace (frecuencia) es la siguiente:

     $$v_L = \frac{\partial i_L}{\partial t} L \rightarrow V_L = sI_LL$$

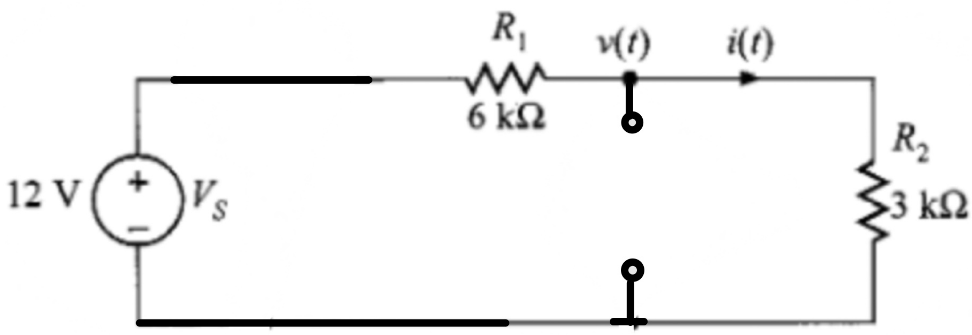
     Si la frecuencia de excitación del inductor es cero ($s = 0 \rightarrow V_L = 0 * I_L * L$) **el inductor se comporta como un corto-circuito.**

2. Siguen siendo aplicables todos los teoremas aplicados en capítulos anteriores.

Cuando nos digan que un circuito mucho tiempo en un cierta posición no dice implícitamente que el **capacitor acumuló todo el potencial que le es posible**. En caso de ser un inductor se acumularía todo el flujo magnético que le fue posible.
El capacitor al alcanzar el voltaje máximo que le permite el circuito **contrarresta todo el efecto que produce la fuente de voltaje en él**, es decir, no permite el paso de corriente por él. Esto **no** quiere decir que el capacitor alcanza el mismo voltaje de la fuente sino que acumula la carga necesaria para no permitir el paso de potencia a través de él.

Notamos que $i(t) = v(t)/3k\Omega$ para todo instante de tiempo. Por lo tanto, si encontramos el voltaje de ese nodo podemos encontrar la corriente solicitada.

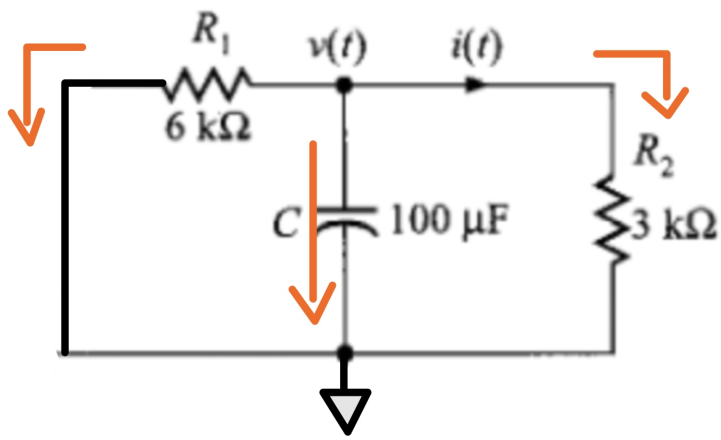
1. Cuando $t = -0$ el circuito que representa la situación es:



Así, es simple notar que:

$$v(t) = \frac{3}{3+6}12V = 4V$$

2. Cuando $t \geq 0$ el circuito que representa la situación es:



Ya que el capacitor no permite cambios bruscos de voltaje $v_c(-0) = v_c(+0) = 4V$. Como la corriente circula desde el punto de mayor potencial al de menor potencial podemos escribir la siguiente ecuación de KCL:

$$\begin{aligned} i_c(t) + \frac{v_c}{3k\Omega} + \frac{v_c}{6k\Omega} &= 0 \\ \frac{\partial v_c}{\partial t}C + \frac{v_c}{3k\Omega} + \frac{v_c}{6k\Omega} &= 0 \\ \frac{\partial v_c}{\partial t} + 5v_c &= 0 \end{aligned}$$

De ecuaciones diferenciales sabemos que la solución a esta ecuación será: (se suelen escribir las soluciones de la segunda manera)

$$v_c(t) = k * e^{-5t} = k * e^{-\frac{t}{0,2}}$$

Se define el parámetro tau como $\tau = 0{,}2$, con el cual se puede determinar la velocidad de convergencia de la función. Con el transcurso de $t > 6\tau$ ya alcanzamos más del 96 % del valor final de la función. En cursos como control automático se ahondará en los usos de está propiedad.

Gracias a la condición de borde obtenida en $t < 0$ sabemos que:

$$v(0) = 4V = k * 1$$

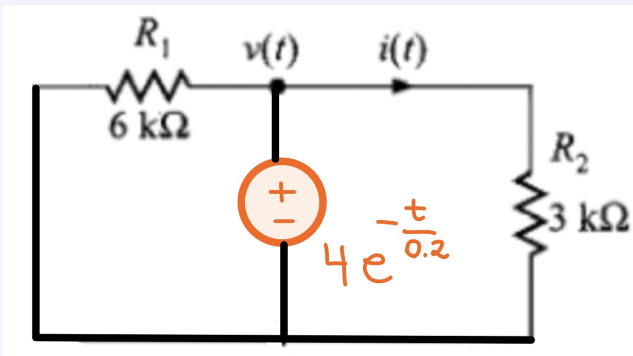
Finalmente, la corriente para $t \geq 0$ es:

$$i(t) = \frac{4}{3}e^{-\frac{t}{0{,}2}}mA$$

Tarea: calcula la corriente $i(t)$ para $\infty < t \leq 0$.

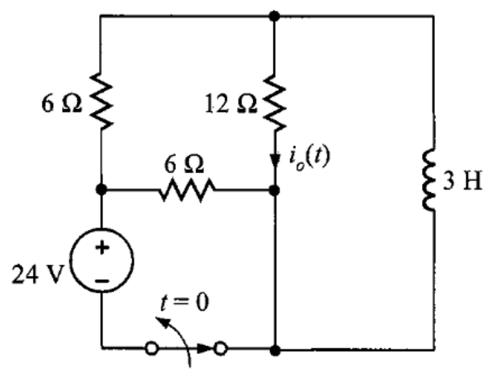
Otra forma de ver las cosas

Podríamos decir que para $t \geq 0$ el capacitor está actuando como una fuente de voltaje variable en el tiempo de potencial $v_c(t) = 4 * e^{-\frac{t}{0{,}2}}$. Lo que sucede es que luego de que se desconecta la fuente de voltaje inicial el capacitor descargará la energía que almacenó contra los demás componentes.



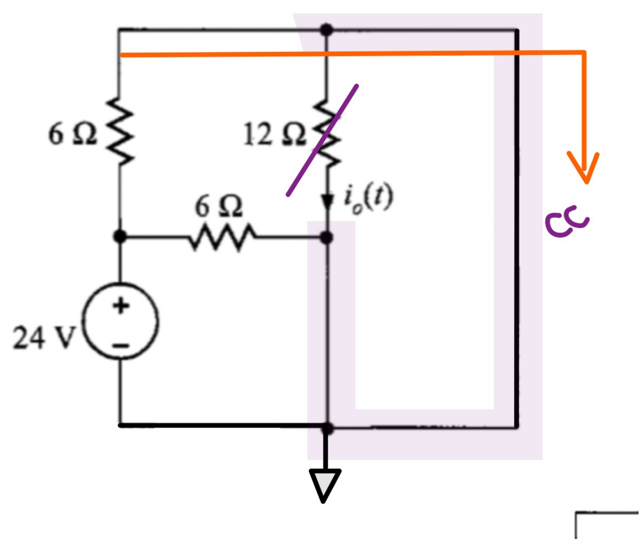
Problema 2

Determina la corriente $i_o(t)$ luego de que el switch cambie de posición si la fuente de voltaje estuvo mucho tiempo conectada.



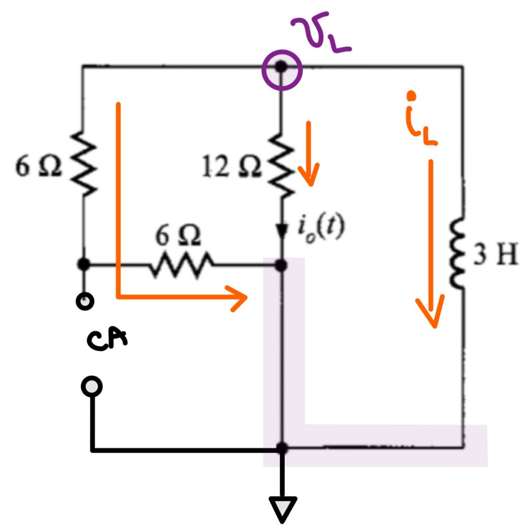
Solución:

- Para $t = -0$ el circuito que representa la situación será:



El inductor está corto-circuitando la resistencia de 12Ω, por lo tanto, $i_o(-0) = 0$ y la corriente que almacena el inductor será igual a la corriente que circula por la resistencia superior:

$$i_L(-0) = \frac{24}{6}A = 4A$$



- Para $t \geq 0$ el circuito que representa la situación será:

  De aquí podemos realizar KCL en el nodo superior obteniendo:

$$\frac{v_L}{6+6} + \frac{v_L}{12} + i_L = 0$$
$$\frac{\partial i_L}{\partial t}\frac{3H}{(6+6)\Omega} + \frac{\partial i_L}{\partial t}\frac{3H}{12\Omega} + i_L = 0$$
$$\frac{\partial i_L}{\partial t}(0{,}5) + i_L = 0$$

De EDO sabemos que la corriente tendrá la forma de una exponencial $i_L = e^{-rt}$. Luego,

$$re^{-rt}(0{,}5) + e^{-rt} = 0$$
$$r\frac{1}{2} + 1 = 0$$
$$r = -2$$

Así, $i_L = ke^{-\frac{t}{0,5}}$. Además, con la condición inicial podemos obtener k

$$i_L(-0) = i_L(+0) = k = 4$$

Luego, $v_L = 3H * \frac{-4}{0,5}e^{-\frac{t}{0,5}} = -24e^{-\frac{t}{0,5}}$

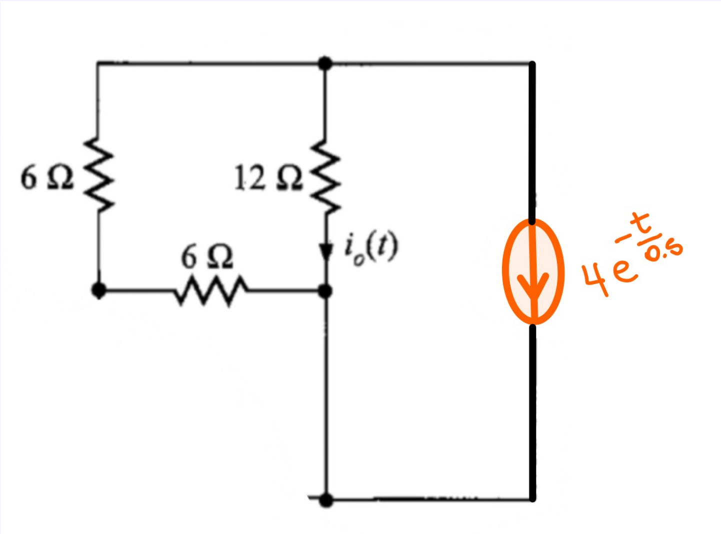
Finalmente, usando divisor de corriente o Ley de Ohm podemos obtener la corriente solicitada:

$$i_o(t) = -\frac{12}{12+12} i_L(t) = -\frac{4}{2} e^{-\frac{t}{0,5}} = -2e^{-\frac{t}{0,5}}$$
$$i_o(t) = \frac{v_L}{12\Omega} = -2e^{-\frac{t}{0,5}}$$

El signo negativo aparece al **respetar la convención** de capítulos anteriores.

Otra forma de ver las cosas

Podríamos decir que para $t \geq 0$ el inductor está actuando como una fuente de corriente variable en el tiempo de valor $i_L(t) = 8 * e^{-\frac{t}{0,5}}$. Lo que sucede es que luego de que se desconecta la fuente de voltaje inicial el inductor descargará la energía que almacenó contra los demás componentes y, como el inductor no permite cambios bruscos de corriente, descargará corriente en el sentido que inducia la fuente de voltaje.

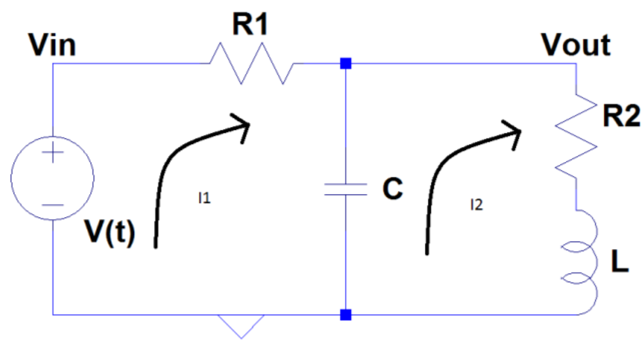


7. Circuitos de Segundo Orden

Problema 1

Considere el siguiente circuito, determine:

1. Las ecuaciones de LKV para las corrientes de malla I_1 y I_2
2. El voltaje V_{out} en funcion de la corriente I_2 y sus derivadas



Solución:

1. Vemos que las ecuaciones de la malla son:

$$-V(t) + I_1R_1 + v_C = 0$$

$$-v_C + I_2R_2 + v_L = 0$$

Si derivamos ambas ecuaciones nos va a quedar:

$$-\frac{dV(t)}{dt} + \frac{dI_1}{dt}R_1 + \frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$-\frac{dv_C}{dt} + \frac{dI_2}{dt}R_2 + \frac{dv_L}{dt} = 0$$

Sabemos que $I_C = I_1 - I_2 = C\frac{dv_C}{dt}$ y $v_L = L\frac{dI_2}{dt}$, reemplazando estos, tenemos los siguientes ecuaciones:

$$\frac{dI_1}{dt}R_1C + I_1 - I_2 = \frac{dV(t)}{dt}C$$

$$LC\frac{d^2I_2}{dt^2} + R_2C\frac{dI_2}{dt} + I_2 = I_1$$

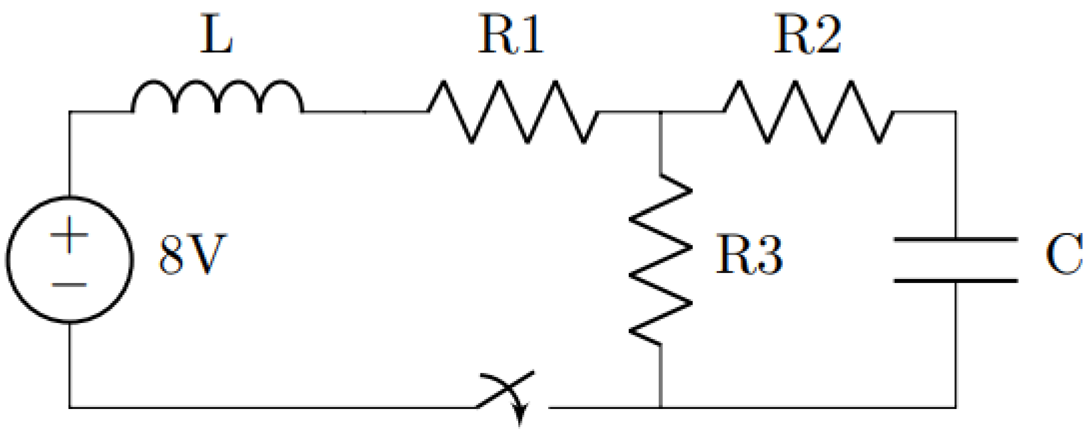
2. Vemos que el valor de V_{out} es la suma del voltaje en R_2 mas el del inductor, por lo tanto:

$$V_{out} = V_{R_2} + V_L$$

$$V_{out} = I_2 R_2 + L \frac{dI_2}{dt}$$

Problema 2

Considere el siguiente circuito,encuentre la ecuación que describe el voltaje a lo largo del tiempo para el capacitor suponiendo que es subamortiguado, **Usando Laplace**
Hint:Encuentra w_o, ζ



Solución:

Sabemos que en régimen de Laplace:

$$L \to Ls, C \to \frac{1}{sC}$$

Sea V_1 el voltaje que se lleva la resistencia 3, entonces por divisor de voltaje:

$$V_1 = 8V \cdot \frac{R_3||(R_2 + \frac{1}{sc})}{R_3||(R_2 + \frac{1}{sc} + R_1 + Ls)}$$

Luego tenemos otro división del voltaje para V_C;

$$V_C = V_1 \cdot \frac{\frac{1}{sc}}{\frac{1}{sc} + R_2}$$

Reemplazando y desarrollando:

$$s^2 \cdot v_C(LC(R_2 + R_3)) + s \cdot v_c(L + C(2R_2R_3 + R_1R_3)) + v_C(R_1 + R_3) = 8V \cdot R_3$$

Luego pasamos a régimen temporal, tendríamos la siguiente ecuación diferencial:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}\frac{L + C(2R_2R_3 + R_1R_3)}{LC(R_2 + R_3)} + v_C(t)\frac{R_1 + R_3}{LC(R_2 + R_3)} = \frac{8V \cdot R_3}{LC(R_2 + R_3)}}$$

Sabemos que podemos determinar $w_0 y\zeta$ con la siguiente formula:

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = g(t)$$

Por lo tanto, tendríamos:

$$w_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_3}{LC(R_2 + R_3)}}$$

$$\zeta = \frac{L + c(2R_2R_3 + R_1R_3)}{LC(R_2 + R_3)2w_o}$$

Luego, sabemos que una respuesta subamortiguado tiene la siguiente forma:

$$x_h(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left(k_1 \cos(\omega_d t) + k_2 \sin(\omega_d t)\right)$$

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \longleftarrow \text{Notar que } \omega_d \text{ es prácticamente igual a } \omega_0 \text{ para } \zeta < 0.5 \text{ aprox.}$$

Finalmente, sabemos que en régimen permanente capacitor es circuito abierto y inductor circuito cerrado, así:

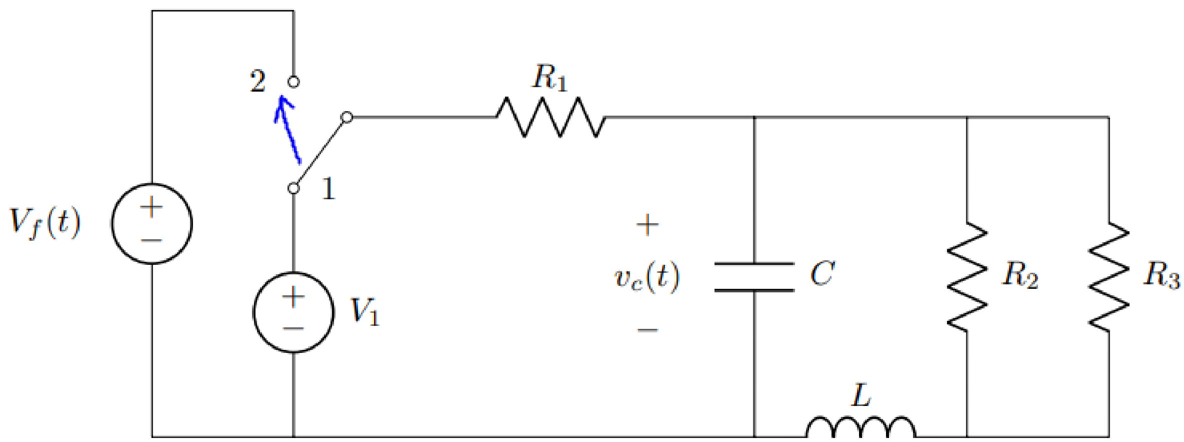
$$V_{Cp}(t) = 8\frac{R_3}{R_3 + R_1}$$

Finalmente:

$$V_C(t) = V_{Cp}(t) + V_{Ch}(t)$$

Problema 3

En el circuito que se muestra a continuación se sabe que el switch cambia de estar conectado al nodo 1 a estar conectado al nodo 2 en t=0s.



Para el desarrollo de pregunta considere los siguientes valores:

$$V_1 = 10V, R_1 = 4\Omega, R_2 = 18\omega, R_3 = 9\Omega, C = 0{,}25F, L = 1H$$

- Sin utilizar Laplace, determine la ecuación diferencial y las condiciones iniciales que permitirían calcular la variable $v_c(t)$ para t>0. Luego, utiliza la transformada de Laplace para colaborar dicha ecuación diferencial.
- Calcule las frecuencias naturales e identifique el tipo de respuesta homogénea de $V_c(t)$.

Solución:

- Primero partimos encontrando condiciones iniciales: Para $t < 0s$, V_1 esta conectada, por lo que el voltaje en el capacitor esta dado por un divisor de voltaje,(Recordar que en este caso, como el wsitch lleva un harto timepo, C es circuito abierto y L es corto circuito):

$$V_c(0) = V_1 \frac{R_2||R_3}{R_2||R_3 + R_1} = 6V$$

Con eso, procedimos a determinar los otros parametros inicales:

$$i_L(0) = \frac{V_c(0)}{R_2||R_3} = 1A$$

$$V_c'(0) = 0$$

Ahora, si en $t = 0$, el switch se cambia a posicion 2, tendriamos las siguientes ecuaciones de malla:

$$V_f = i1R1 + V_C$$

$$V_C = i_L(R1||R2) + V_L$$

Por otro lado, sabemos que:

$$i_c = i1 - i_l \rightarrow i1 = i_L + i_c$$

$$V_L = L\frac{di_L}{dt}, i_c = C\frac{dV_c}{dt}$$

reemplazamos eso en la primera ecuación, tenemos:

$$V_f(t) = i_c(t)R_1 + i_L(t)R_1 + V_c(t)$$

$$V_f(t) = R_1C\frac{dV_c(t)}{dt} + i_L(t)R_1 + V_c(t)$$

$$i_L(t) = \frac{V_f(t)}{R_1} - C\frac{dV_c(t)}{dt} - \frac{V_c(t)}{R_1}$$

Luego reemplazando todo en la segunda ecuación de malla:

$$V_c(t) = R_3||R_2\left(\frac{V_f(t)}{R_1} - C\frac{dV_c(t)}{dt} - \frac{V_c(t)}{R_1}\right) + L\left(\frac{dV_f(t)}{R_1dt} - C\frac{d^2V_c(t)}{dt^2} - \frac{dV_c(t)}{R_1dt}\right)$$

$$-CL\frac{d^2V_c(t)}{dt^2} - \frac{dV_c(t)}{dt}\left(\frac{L + R_1C(R_2||R_3)}{R_1}\right) - V_c\left(\frac{R_2||R_3}{R_1} + 1\right) + \frac{dV_f(t)}{dt}\frac{L}{R_1} + V_f(t)\left(\frac{R_2||R_3}{r_1}\right)$$

Finalmente si dividimos por LC y reemplazando los valores:

$$\frac{d^2V_c(t)}{dt^2} + 7\frac{dV_c(t)}{dt} + 10V_c(t) = \frac{dV_f(t)}{dt} + 6V_f(t)$$

Ahora, si bien el ejercicio nos explicita no usar Laplace, Vemos como se desarrollara si lo podemos usar:

Reduciendo parte del circuito, llegamos a una impedancia equivalente dada por

$$(R_3||R_2 + Ls)\,||\left(\frac{1}{Cs}\right)$$

Los bornes de esta impedancia están sometidos a $V_c(t)$. Por lo tanto con divisor de voltaje:

$$V_c - V_f\frac{(R_3||R_2 + Ls)\,||\left(\frac{1}{Cs}\right)}{(R_3||R_2 + Ls)\,||\left(\frac{1}{Cs}\right) + R_1}$$

$$V_c = V_f\frac{(R_3||R_2 + Ls)\left(\frac{1}{Cs}\right)}{(R_3||R_2 + Ls)\left(\frac{1}{Cs}\right) + R_1\left(R_2||R_3 + Ls + \frac{1}{Cs}\right)}$$

Reemplazando los valores llegamos a:

$$V_c = V_f\frac{6 + s}{10 + 7s + s^2}$$

$$V_cs^2 + 7V_cs + 10V_c = V_fs + 6V_f$$

llegando a lo mismo calculado anteriormente.

- Nos pide w_0, ζ en otras palabras, conociendo el polinomio característico:

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = g(t)$$

Con eso, es facil de ver que:

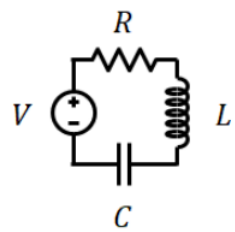
$$w_0 = \sqrt{10}$$

$$\zeta = \frac{7}{2\sqrt{10}} = 1{,}106 > 1$$

Por lo tanto, corresponde a una respuesta sobre-amortiguado.

Problema 4

Considere el circuito RLC en serie de la figura siguiente. Asuma que la fuente de voltaje entrega un voltaje V constante para todo $t \geq 0$. Encuentre la ecuación diferencial que modela la corriente a través del inductor para todo $t \geq 0$.



Solución:

Calculamos la impedancia equivalente primero:

$$Z_{eq} = \frac{sCR + s^2LC + 1}{sC}$$

Aplicando Ley de Ohm ($V = I \cdot R$)

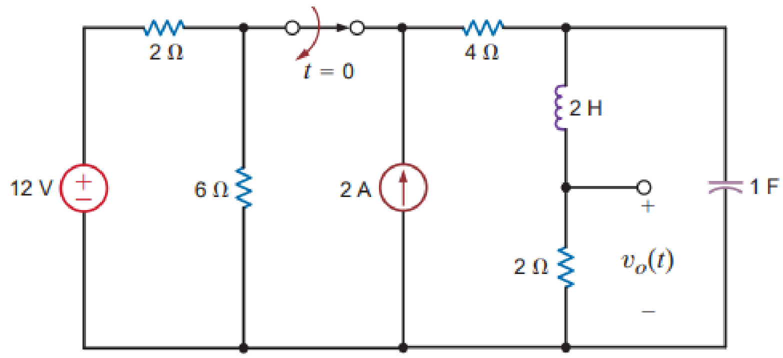
$$i(s) = \frac{sC}{sCR + s^2LC + 1} \cdot V$$
$$LCs^2 i(s) + CRsi(s) + i(s) = sCV$$
$$LC\frac{d^2i(t)}{dt^2} + CR\frac{di(t)}{dt} + i(t) = C\frac{dV(t)}{dt}$$

Tenemos que $V(t) = cte$ por lo que $C\frac{dV(t)}{dt} = 0$. Con ello la ecuación diferencial nos queda de la siguiente forma:

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot i(t) = 0$$

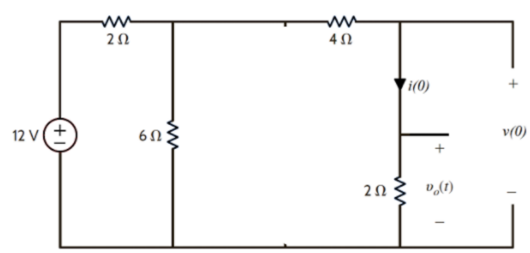
Problema 5

Considere el siguiente circuito, encuentra la expresión completa de $V_o(t)$ durante el tiempo.(no olviden los condiciones iniciales!)



Solución:

Primero determinamos los condiciones iniciales(los inductores actúan como cortocircuito y los capacitores como circuitos abiertos)



6/4.2.png

Luego la contribución del fuente del voltaje es:

$$V_v(0) = 12\frac{3}{2+3}\frac{2}{4+2} = 2{,}4V$$

$$i_v(0) = 12\frac{3}{2+3}\frac{1}{4+2} = 1{,}2A$$

La contribución del fuente de corriente es

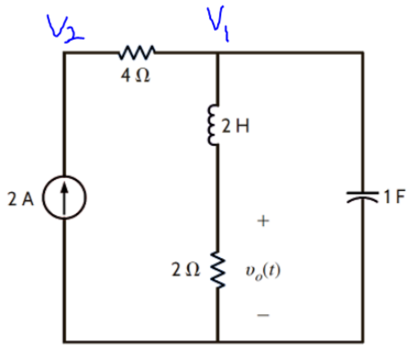
$$V_i(0) = 2\frac{\frac{12}{8}}{\frac{12}{8}+6} \cdot 2 = 0{,}8V$$

$$I_i(0) = 2\frac{\frac{12}{8}}{\frac{12}{8}+6} = 0{,}4A$$

Luego los condiciones iniciales son:

$$V(0) = 2{,}4 + 0{,}8 = 3{,}2V, I(0) = 1{,}2 + 0{,}4 = 1{,}6A$$

Ahora analizamos para $t > 0$, Podemos determinar V_o aplicando nodo:



$$\frac{V2 - V1}{4} = 2, \frac{V1 - V2}{4} + \frac{V1 - V_o}{2s} + \frac{V1}{\frac{1}{s}} = 0$$

$$\frac{V_o - V1}{2s} + \frac{V_o}{2} = 0$$

Llegando el resultado:

$$(s^2 + s + 0{,}5)V_o = 2$$

Entonces aplicando nuestra técnica de polinomio característico ,llegamos que:

$$w_0 = \sqrt{0{,}5}$$

$$\zeta = \sqrt{0{,}5}$$

$$w_d = w_o\sqrt{1 - \zeta^2} = 0{,}5$$

Por lo tanto, como es subamortiguado, sabemos que $V_O(t)$ tiene la siguiente forma:

$$V_o(t) = e^{-0{,}5t}(K_1 Cos(0{,}5t) + K_2 Sin(0{,}5t)) + K_3$$

Como $V_o(\infty) = 4V$, podemos deducir que $K_3 = 4$ Luego, usando los condiciones iniciales sacados desde antes, tenemos que determinar K_1 y K_2, vemos que:

$$i_o = \frac{V_0}{2}$$

Por lo tanto :

$$i_o(0) = \frac{1}{2}e^{-0{,}5t}(K_1 Cos(0{,}5t)) + 2 = 1{,}6$$

$$K_1 = -0{,}8$$

Por otro lado, sabemos que:

$$V_c(t) = 2i_o(t) + L\frac{di_o}{dt}$$

ocupando esta relacion,llegamos $K_2 = -0{,}8$

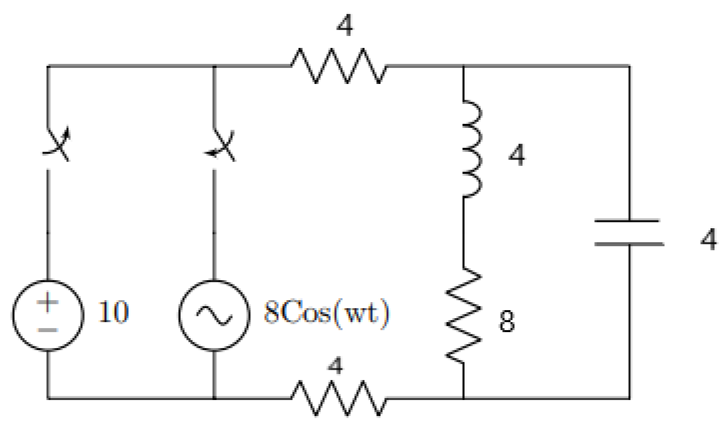
En fin, la expresión de V_o es:

$$V_o(t) = -0{,}8e^{-0{,}5t}(Cos(0{,}5t) + Sin(0{,}5t)) + 4$$

Problema 6

Para el siguiente circuito encuentre:

- los valores iniciales del voltaje del capacitor
- Ecuación diferencial del voltaje del capacitor sin ocupar laplace
- Verifique la ecuación anterior ahora con laplace
- Encuentre la frecuencia natural w_o y el factor de amortiguamiento ζ indicando que tipo de amortiguamiento es.



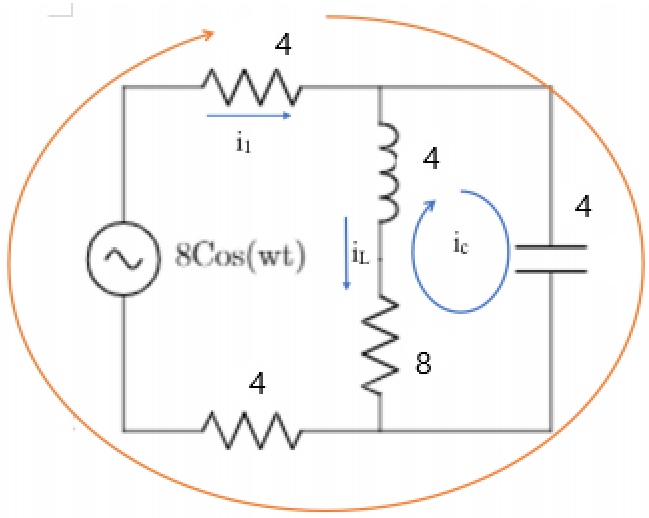
Solución:

Primero, determinamos los valores iniciales:
Sabiendo que los inductores son cortocircuitos y capacitores son circuitos abiertos, podemos determinar

$$V_c(0) = 10\frac{8}{8+4+4} = 5V$$

$$i_c(0) = 0A$$

Luego para $t > 0$, tenemos el siguiente circuito:



Tenemos las siguientes ecuaciones:

$$i_1 = i_L + i_c$$

$$L\frac{di_L}{dt} + 8i_L = V_c$$

Con la malla naranja tenemos:

$$8i_1 + V_c = 8cos(wt)$$

Resolviendo todo esto llegamos:

$$LC\frac{d^2V_c}{dt^2} + (8C + \frac{L}{8})\frac{dV_c}{dt} + 2V_c = 8cos(wt) - Lwsin(wt)$$

Reemplazando $L = C = 2$:

$$4\frac{d^2V_c}{dt^2} + (\frac{17}{2})\frac{dV_c}{dt} + 2V_c = 8cos(wt) - 2wsin(wt)$$

Recuerdan que para aplicar la formula de frecuencia natural, el coeficiente de la segunda derivada tiene que ser 1. Por lo tanto, tras la simplificación:

$$\frac{d^2V_c}{dt^2} + (\frac{17}{8})\frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c}{2} = 2cos(wt) - 0{,}5wsin(wt)$$

Ahora aplicando formula, llegamos que:

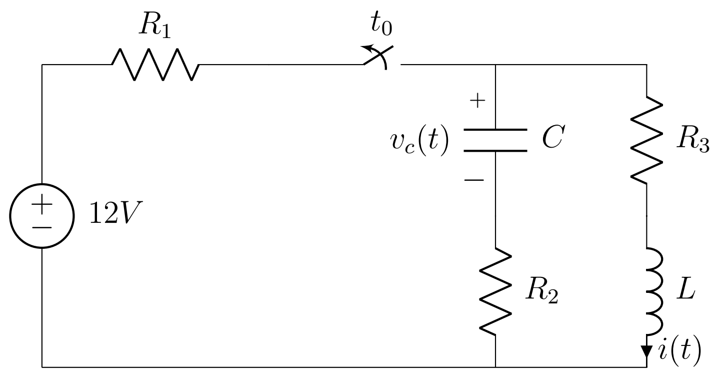
$$w_o = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\zeta = 1{,}5$$

Por lo tanto, es sobreamortiguado.

Problema 7

El circuito de la figura se encuentra operando por mucho tiempo cuando en $t_0 = 0$ el interruptor se abre.



1. Determine paso a paso la ecuación diferencial que modela la corriente del inductor del circuito para $t > 0$ y las condiciones iniciales necesarias para resolver la ecuación.
2. Para $t > 0$, considerando un valor de $L = 0{,}5$ [H], determine paso a paso los valores (o condiciones) de R_2, R_3 y C para obtener una respuesta natural del circuito con $\omega_0 = 10$ [rad/s] y una respuesta subamortiguada.
3. Con los valores (o condiciones) encontrados en el ítem anterior y eligiendo $\zeta = 0{,}9$, encuentre la corriente $i(t)$ resolviendo la ecuación diferencial (considere $R_1 = R_3 = 3$ [Ω]).

Solución:

1. Planteamos la ecuación de malla para $t > 0$,

$$v_C(t) + v_L(t) + i_L(t)(R_2 + R_3) = 0$$

Notamos que,

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$
$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

Derivamos a ambos lados y obtenemos,

$$\frac{i_C(t)}{C} + L\frac{di_L^2(t)}{dt^2} + \frac{di_L(t)}{dt}(R_2 + R_3) = 0$$

Como $i_C(t) = i_L(t)$

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{di_L(t)}{dt}\frac{(R_2 + R_3)}{L} + \frac{i_L(t)}{LC} = 0$$

Para las condiciones iniciales sabemos que después de mucho tiempo operando en $t < 0$, el capacitor es circuito abierto, mientras que el inductor es un cortocircuito, por lo que,

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = 12\frac{R_3}{R_3 + R_1}$$

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = \frac{12}{R_3 + R_1}$$

2. De la ecuación diferencial obtenemos el polinomio característico,

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

Por lo tanto,

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$C = \frac{1}{L\omega_0^2} = 0{,}02\ F$$

Como necesitamos que $\zeta < 1$, para que la respuesta sea subamortiguada,

$$2\zeta\omega_0 = \frac{(R_2 + R_3)}{L}$$

$$R_2 + R_3 < 10$$

3. Encontramos las raíces del polinomio característico,
Reemplazando,

$$s^2 + 18s + 100 = 0$$

$$s = \frac{-18 \pm \sqrt{-76}}{2} = -9 \pm j4{,}36$$

De esta forma,

$$i(t) = e^{-9t}(A_1 \cos 4{,}36t + A_2 \sin(4{,}36t))$$

$$i(0) = A_1 = \frac{12}{6} = 2$$

$$\frac{di(0)}{dt} = -9A_1 + 4{,}36A_2 = \frac{V_L(0^+)}{L}$$

Sabemos que el voltaje $V_L(0^+) = V_C(0) - i_L(0)(R_2 + R_3) = 12\frac{3}{6} - 2 * 9 = -12$, entonces,

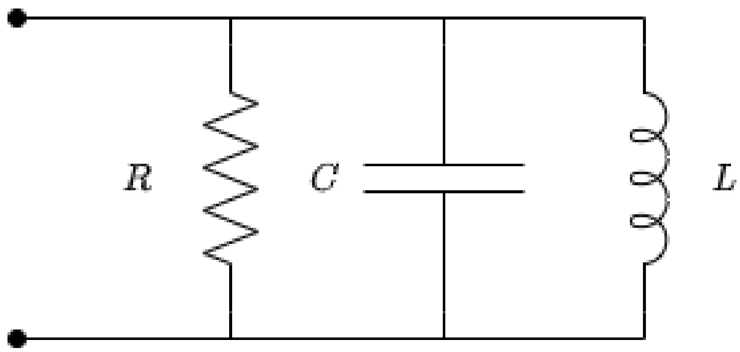
$$A_2 = \frac{-12 * 2 + 18}{4{,}36} = -1{,}38$$

$$i(t) = e^{-9t}(2 \cos 4{,}36t - 1{,}38 \sin 4{,}36t)$$

8. Fasores e Impedancia

Problema 1

Analice el circuito de la siguiente figura ¿Qué ocurre con la impedancia al variar la frecuencia? Si conectas una fuente de corriente en los terminales, calcule la corriente que fluye por el capacitor.



Solución:

Conocimiento Previo

1. Los fasores son una **forma de representar un número complejo**, que en lugar de utilizar coordenadas cartesianas en un gráfico, utiliza coordenadas polares, considerando una amplitud y fase para la representación del número. Si tenemos el numero complejo $Z = R + jX$ podemos representarlo de todas estas formas $Z = Ae^{j\phi} = A(\cos\phi + j\sin\phi) = \sqrt{R^2+X^2}\angle \arctan\frac{X}{R}^\circ = A\angle\phi^\circ$, las ultimas dos formas de expresión son lo que conocemos comúnmente como fasores.

2. En el capitulo anterior notamos que cuando teníamos ecuaciones diferenciales de segundo orden era muy conveniente utilizar la transformada de Laplace para obtener las soluciones. Sin embargo, cuando tenemos un voltaje u corriente con la forma $A_o\cos(wt+\phi)$ el procesos de resolución se vuelve tedioso. Para simplificar la obtención de la solución se trabaja con fasores y en el siguiente ejemplo se ilustra el proceso para resolver la siguiente EDO:

$$L\frac{\partial i(t)}{\partial t} + Ri(t) = V_o\cos(wt+\phi)$$

Del curso de Ecuaciones Diferenciales sabemos que la corriente tendrá la forma $i(t) = A\cos(wt+\theta) + B\sin(wt+\theta)$. Esto es importante ya que si conocemos las anti-transformadas de estas funciones podremos resolver las EDOs fácilmente.
Cuando analizamos un circuito en RSP podemos utilizar la transformada de Fourier, que es un caso particular de la transformada de Laplace, para trabajar las ecuaciones. Es importante conocer las siguientes transformadas de Fourier:

$$\mathcal{F}\{A\cos(wt+\theta)\} \rightarrow A\angle\theta$$
$$\mathcal{F}\{A\sin(wt+\theta)\} \rightarrow A\angle\theta - 90^\circ$$

Utilizando el análisis en frecuencia de Fourier la ecuación diferencial queda como:

$$L * jw * \mathcal{F}\{i(t)\} + R\mathcal{F}\{i(t)\} = V_o\mathcal{F}\{\cos(wt+\phi)\}$$
$$L * jw * \mathbf{I} + R\mathbf{I} = V_o\angle\phi$$
$$\mathbf{I} = \frac{V_o\angle\phi}{jwL+R}$$
$$\mathbf{I} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2+(wL)^2}}\angle -\tan\left(\frac{wL}{R}\right)$$

Y como ya conocemos la anti-transformada de un fasor sabemos que

$$i(t) = \frac{V_o}{\sqrt{R^2+(wL)^2}}\cos\left(wt - \tan\left(\frac{wL}{R}\right)\right)$$

Solo trabajando con números complejos obtuvimos la solución de la ecuación diferencial.

Primero, algunas consideraciones por mencionar.

En capítulos anteriores te mencioné que la resistencia es un casi particular de la impedancia. Específicamente, la resistencia es la parte real e independiente de la frecuencia de la impedancia. La impedancia (Z) corresponde a la oposición que ejerce algún componente al paso de la corriente, es más, toda cosa u objeto posee impedancia, incluso nosotros mismos.
En términos matemáticos la impedancia se expresa en el dominio de la frecuencia utilizando la transformada de Fourier, la cual es un caso particular de la transformada Laplace.
Así, en RPS ($s = \sigma + jw = 0 + jw = jw$), podemos representar la impedancia de los componentes que ya conocemos con $V/I = Z$:

$$\begin{aligned}
\frac{V}{I} &= Z_{resistencia} = R = R\angle 0°\Omega \\
\frac{V_c}{I_c} &= Z_{capacitor} = \frac{1}{sC} = \frac{1}{jwC} = \frac{-j}{wC} = \frac{1}{wC}\angle -90°\Omega \\
\frac{V_L}{I_L} &= Z_{inductor} = sL = jwL = wL\angle 90°\Omega
\end{aligned}$$

Al transformar los componentes al espacio de la frecuencia podemos realizar operaciones como obtener impedancias equivalentes, realizar divisores de tensiones o corriente, entre otros. Esto no era posible en el espacio de temporal debido a las derivadas que aparecían en las ecuaciones.

Ahora entremos de lleno en el ejercicio.

Para este circuito podemos calcular una impedancia equivalente y ver como seria su comportamiento al variar la frecuencia.

Nota que la resistencia, el capacitor y la inductancia están en paralelo. Por lo tanto, fácilmente podemos obtener la impedancia equivalente como el paralelo de las impedancias de cada componente.

$$\begin{aligned}
Z_{eq} &= Z_R//Z_c//Z_L \\
&= R//\frac{1}{sC}//sL \\
&= \frac{\frac{R}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}//sL \\
&= \frac{R}{sCR+1}//sL \\
&= \frac{sLR}{s^2CLR+sL+R} \\
&= \frac{(jw)LR}{(jw)^2CLR+(jw)L+R} \\
&= \frac{jwLR}{jwL-w^2CLR+R}
\end{aligned}$$

Fácilmente podemos notar que la impedancia del circuito depende la frecuencia de excitación que reciba. Cuando $w \to 0$ la impedancia tiende a cero, y cuando $w \to \infty$, como el denominador tiene un polinomio más alto, también tiende a cero. Otro punto importante es donde la frecuencia sea puramente resistiva ($Im\{Z_{eq}\} = 0$) y esto ocurre cuando $-w^2CLR + R = 0 \to w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Por otra parte, podemos expresar la impedancia como fasor de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
Z_{eq} &= \frac{jwLR}{jwL - w^2CLR + R} * \frac{-jwL + (R - w^2CLR)}{-jwL + (R - w^2CLR)} \\
&= \frac{(wL)^2R + jwLR(R - w^2CLR)}{(wL)^2 + (R - w^2CLR)^2} \\
&= \frac{(wL)^2R}{(wL)^2 + (R - w^2CLR)^2} + j\frac{wLR(R - w^2CLR)}{(wL)^2 + (R - w^2CLR)^2} \\
&= \frac{wLR}{\sqrt{(wL)^2 + (R - w^2CLR)^2}} \angle \arctan\left(\frac{wLR(R - w^2CLR)}{(wL)^2R}\right) \\
&= \frac{wLR}{\sqrt{(wL)^2 + (R - w^2CLR)^2}} \angle \arctan\left(\frac{(R - w^2CLR)}{wL}\right)
\end{aligned}$$

Ahora, si conectamos una fuente de corriente i_{in} (con transformada de Laplace I_{in}) en los terminales, por divisor de corriente, podemos obtener que la corriente que circulará por el capacitor será:

$$\begin{aligned}
I_c &= I_{in}\frac{R//sL}{R//\frac{1}{sC}//sL} \\
&= I_{in}\frac{\frac{sLR}{R+sL}}{R//\frac{1}{sC}//sL} \\
&= I_{in}\frac{\frac{sLR}{R+sL}}{\frac{sLR}{s^2CLR+sL+R}} \\
&= I_{in}\frac{s^2CLR + sL + R}{R + sL}
\end{aligned}$$

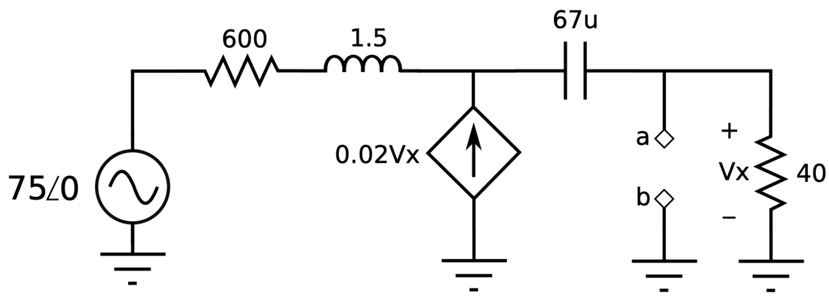
Si conociéramos alguna condición de inicial podríamos utilizar la anti-transformada para obtener el comportamiento de la corriente en todo instante. Si el circuito ya se encuentra en RPS (lo que ocurrirá en muchos ejercicios) podemos expresar la corriente en su forma fasorial como:

$$
\begin{aligned}
I_c &= I_{in}\frac{s^2CLR + sL + R}{R + sL} \\
&= I_{in}\frac{-w^2CLR + jwL + R}{R + jwL} \\
&= I_{in}\left(\frac{r^2 + (wL)^2 - (wR)^2CL}{R^2 + (wL)^2} + j\frac{w^3L^2CR}{R^2 + (wL)^2}\right) \\
&= I_{in} * \left(\sqrt{\frac{(wL)^2 + (R - w^2CLR)^2}{R^2 + (wL)^2}}\angle \arctan\left(\frac{w^3L^2CR}{R^2 + (wL)^2 - (wR)^2CL}\right)^{\circ}\right)
\end{aligned}
$$

Si $i_{in} = I\cos(wt) \rightarrow \mathcal{F}\{I\cos wt\} = I\angle 0^{\circ}$ estaríamos multiplicando dos números complejos.

Problema 2

Para el siguiente circuito, calcule el equivalente de Thevenin visto desde los terminales $a - b$ si $f = 50Hz$



Solución:

Conocimiento Previo

¿Por qué nos interesan tanto las señales sinusoidales? Debido a la forma en la que está diseñada la red de generación y transición de los sistemas eléctricos en muchas de las sociedades humanas. En la actualidad, muchos países (si no es que todos) utilizan la corriente alterna para transmitir energía. Lo hacen porque es más eficiente que hacerlo con corriente continua, pero no ahondaremos mucho en estos detalles (si quieres saber más ve algún documental sobre **la guerra de las corrientes**). Además, los generadores que utilizamos para crear energía eléctrica utilizan rotores que giran para inducir una f.e.m y, como ya debes saber, ¿de que manera podemos parametrizar la corriente que induce un movimiento rotario circular? Pues con sinusoides.

¿Qué pasa si la función utiliza $\sin(wt + \phi)$ **en lugar de** $\cos(wt + \phi)$**?** Pues, gracias a las identidades trigonométricas, siempre podremos representar $\sin$ como $\cos$ y viceversa. Por lo tanto, de igual que representación utilizamos de la señal.

¿Por qué utilizaríamos esta fasores en lugar de la números complejos cartesianos? Como aprenderás en los cursos de circuitos eléctricos y maquinas eléctricas, es sumamente relevante conocer el desfase entre señales. Esto determinará la cantidad de energía que recibirá alguna parte del circuito, por ejemplo, la cantidad de energía que recibe un motor de inducción para girar. Serán los fasores los que te ayudarán a comprender desde una perspectiva diferente como interactúan las señales del circuito.

Como el voltaje de excitación es una sinusoide que ya está expresada en el espacio de la frecuencia, lo que hacemos es transformar el resto de los componentes a este espacio para realizar las operaciones.

Nota que $w = 2\pi f = 314{,}1592 rad/s$.

El voltaje de corto-circuito se puede obtener de las siguientes relaciones:

$$V_{oc} = V_x \qquad \frac{75\angle 0 - V_1}{600 + j1{,}5w} + 0{,}02V_x = \frac{V_1 - V_x}{\frac{1}{jw67\mu}} \qquad V_x = V_1 \frac{40}{40 + jw67\mu}$$

$$V_{oc} = V_x = 2{,}18568\angle 2{,}43058°V$$

La corriente de corto-circuito será:

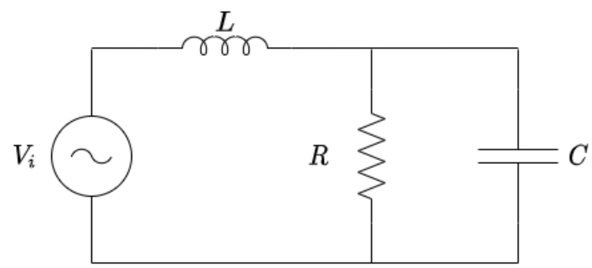
$$I_{sc} = \frac{75\angle 0}{600 + j1{,}5w + \frac{1}{jw67\mu}} = \frac{75\angle 0V}{600 + j471{,}24 + -j47{,}51\Omega} = 0{,}102\angle{-35{,}23°}A = 102\angle{-35{,}23°}mA$$

Así la impedancia de Thevenin será:

$$Z_{th} = 21{,}428\angle 37{,}66°\Omega$$

Problema 3

Considere el siguiente circuito en régimen sinusoidal permanente.



1. Calcule la impedancia vista desde la fuente.
2. Calcule la frecuencia a la cual la impedancia es resistiva pura (fase 0º) y la frecuencia a la cual la impedancia es reactiva pura (fase 90º)
3. Si $f_1 = 0Hz$ y $f_2 >> \frac{R}{2\pi L} >> 1$ ¿A qué frecuencia la magnitud de la impedancia es menor?
   HINT: Si $x >> 1$, entonces diremos que $\frac{1}{x} = 0$

Solución:

Podemos calcular la impedancia de la siguiente forma

$$Z_{eq} = j\omega L + (R // \frac{1}{j\omega C})$$

Operando el paralelo:

$$Z_{eq} = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + j(\omega L - \frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2})$$

Luego, la impedancia es resistiva pura cuando la parte imaginaria es cero, es decir:

$$\omega L = \frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$\omega = 0 \qquad \omega = \frac{\sqrt{R^2 C - L}}{CR\sqrt{L}}$$

La impedancia es reactiva pura cuando la parte real es cero, es decir:

$$\frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = 0$$

$$\omega = \infty$$

Para la última parte, se puede retomar desde la primera parte:

$$Z_{eq} = j\omega L + (R//\frac{1}{j\omega C}) = j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C}$$

Si $f_1 = 0$, entonces $Z_{eq} = R$.
Ahora, para f_2: Amplificamos por L al término de la derecha:

$$Z_{eq} = j\omega L + \frac{L}{\frac{L}{R} + j\omega LC}$$

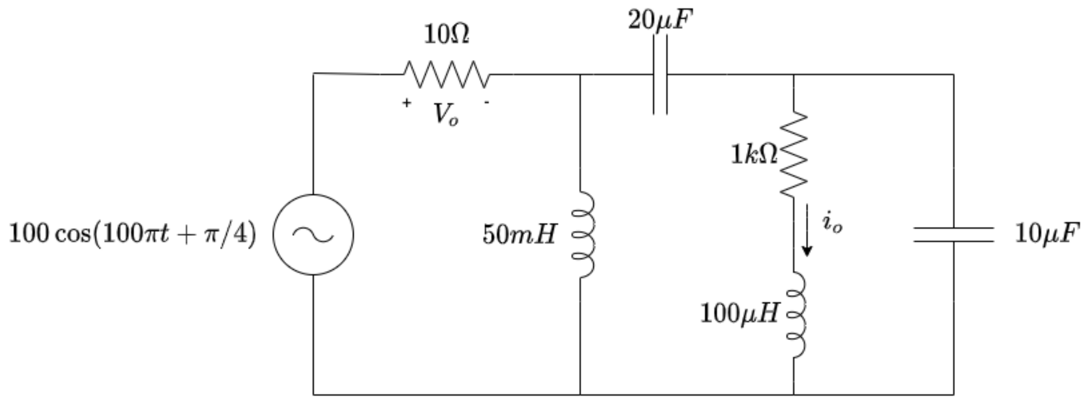
Usando el Hint, podemos decir que $\frac{L}{R} = 0$. Por lo tanto, obtenemos lo siguiente:

$$Z_{eq} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

Y si $f_2 >> 1$, se puede decir que $\frac{1}{\omega C} = 0$, entonces $Z_{eq} = j\omega L = 2\pi f_2 L$. Por lo tanto, por enunciado, este valor es mucho mayor a R, por lo tanto, la impedancia es menor a f_1

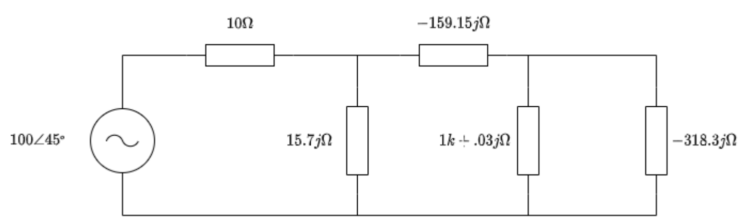
Problema 4

Encuentre la corriente $i_o(t)$ y el voltaje $v_o(t)$ del siguiente circuito:.



Solución:

Pasamos a dominio fasorial y obtenemos lo siguiente:



Luego, por divisor de tensión, podemos decir que

$$V_o = 10 * I_{in} = 10\frac{V_{in}}{Z_{eq}}$$

con

$$Z_{eq} = 10 + 15{,}7j//(-159{,}15j + ((1000 + {,}03j)// - 318{,}3j))$$

Introduciendo esta expresión el wolfram (o realizando operaciones paso a paso) obtenemos lo siguiente:

```
Zeq = 10 + par[50 / 1000 * w * I, (10 ^ 6 / (w * 20 * I)) + par[1000 + I * 100 / 10 ^ 6 * w, 10 ^ 6 / (10 * w * I)]];
                              [número i                [número i          [número i                       [número
Zeq // Factor // N
        [factoriza   [valor numérico

10.1161 + 16.2538 i
```

Figura 64: Impedancia Equivalente

Por lo tanto, $Z_{eq} = 10{,}11 + 16{,}25j$, y en notación fasorial $\hat{Z}_{eq} = \sqrt{10{,}11^2 + 16{,}25^2}\angle \arctan(16{,}25/10{,}11)$

$$Z_{eq} = 19{,}14\angle 58{,}1^{\mathrm{o}}$$

Por lo tanto, podemos decir que:

$$V_o = \frac{100 * 10}{19{,}14}\angle 45 - 58 = 52{,}25\angle - 13^{\mathrm{o}}$$

Además,

$$I_{in} = 5{,}25\angle - 13^{\mathrm{o}}$$

Y por divisores de corriente, una fracción por cada nodo:

$$I_o = I_{in}\frac{\frac{1}{j10^{-3}\pi}}{\frac{1}{j10^{-3}\pi} + 10^3 + j10^{-2}\pi} * \frac{j5\pi}{j5\pi + \frac{1}{j10^{-3}\pi}//(10^3 + j10^{-2}\pi) + \frac{1}{2j10^{-3}\pi}}$$

Nuevamente, usando un software computacional, podemos reducir la expresión a lo siguiente:

```
Zc20 = 1/(I w 20/1000000);
Zc10 = 1/(I w 10/1000000);
Zl50 = 50 / 1000 * w * I;
Zl100 = 100/1000000*w*I;

Zc10/(Zc10 + 1000 + Zl100) * Zl50 / (Zl50 + Zc20 + par[1000 + Zl100, Zc10]) // Factor // N

-0.00106004 + 0.0107234 i
```

Figura 65: Divisor de Corriente

Por lo tanto, se puede pasar a fasor: $I_o = I_{in} * 0{,}0108\angle 95{,}65^{\mathrm{o}}$ Así

$$I_o = 56{,}7\angle 82{,}65 mA$$

Problema 5

Para el circuito de la figura, encuentre el valor de la corriente que fluye a través de la fuente.
HINT: Recuerde las transformaciones Δ-Y

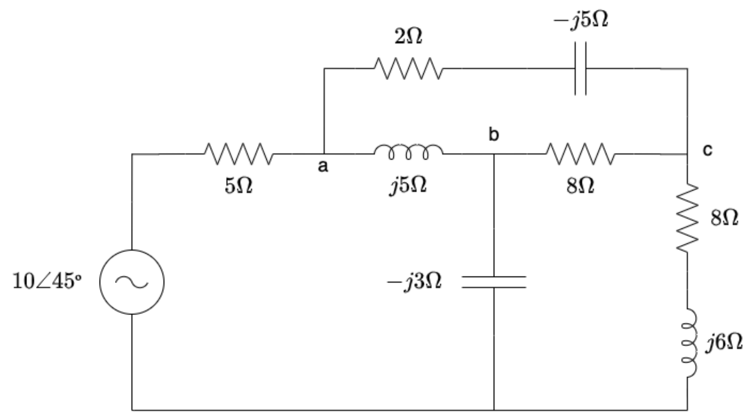
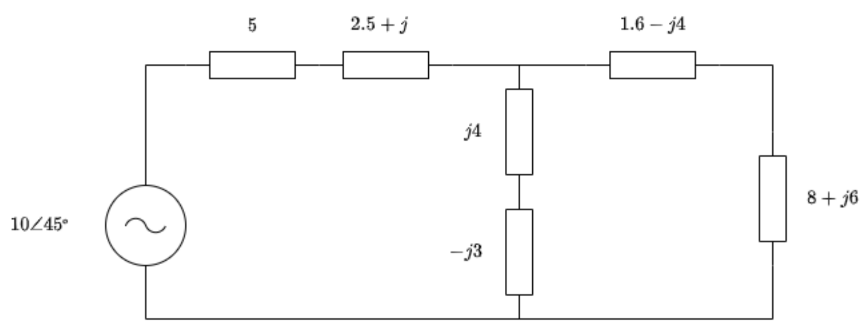


Figura 66: Circuito

Solución:

Notemos que ya nos dan las impedancias en dominio fasorial, por lo tanto, solo hay que operar:
Primero, hacemos cambio delta-estrella entre los nodos a, b y c. Se obtiene lo siguiente:

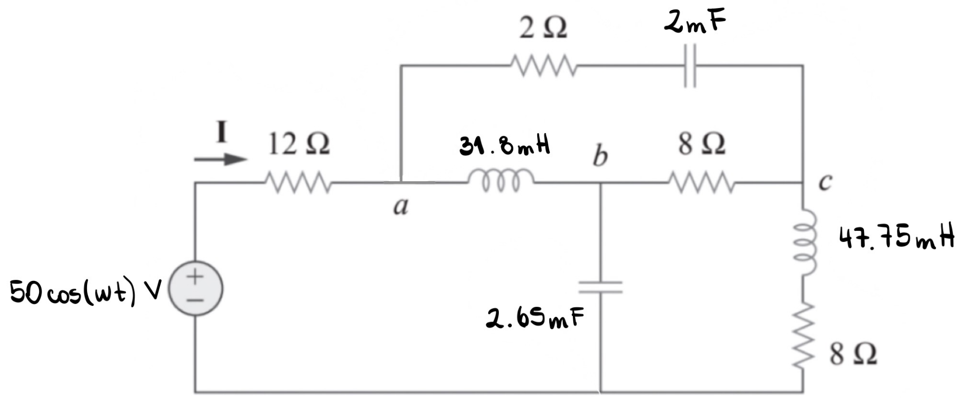


Luego, queda claro que $Z_{eq} = 5+2{,}5+j+j//(9{,}6+j2) = 7{,}6+2j = 7{,}85\angle 14{,}5$ Así, $I = V/Z$

$$I = 10/7{,}85\angle 45 - 14{,}5 = 1{,}27\angle 30{,}5^{\text{o}}$$

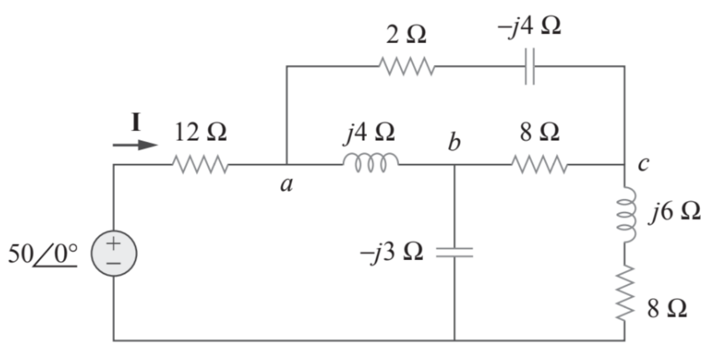
Problema 6

Para el siguiente circuito, que se encuentra en régimen permanente sinusoidal, determina la corriente I que transita por la resistencia de 12Ω. Asume que la frecuencia de la fuente de voltaje es $f = 20Hz$.

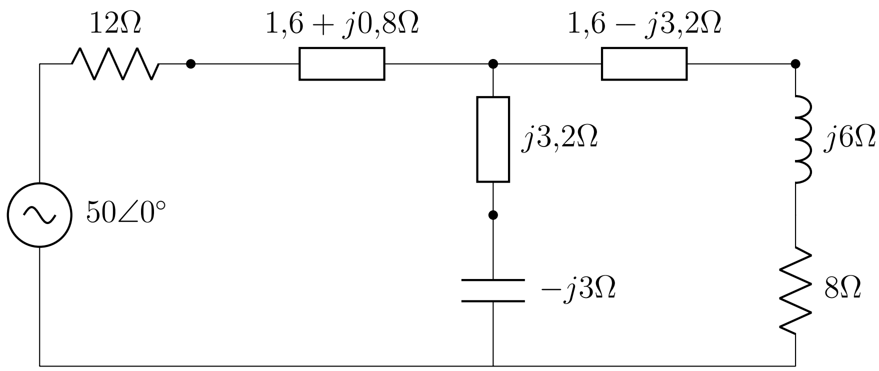


Solución:

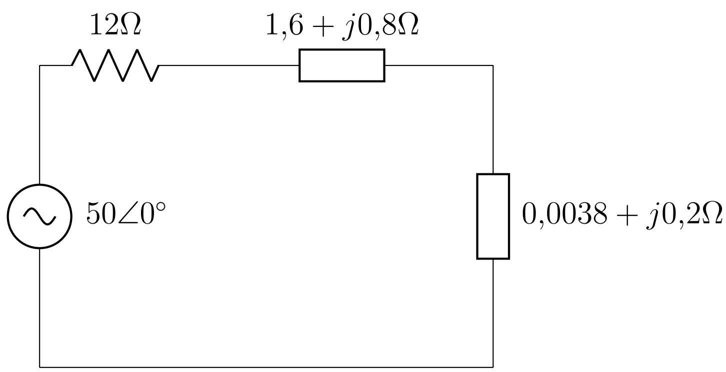
Del enunciado se desprende que $w = 2\pi f = 125{,}66 rad/s$. Si pasamos al espacio de la frecuencia el circuito resultante es:



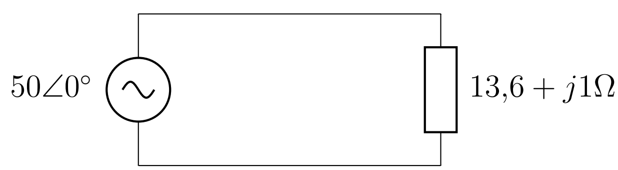
Realizando transformación delta-estrella en los nodos a, b, c se obtiene el siguiente circuito:



Utilizando impedancias equivalentes se obtiene el siguiente circuito:



Simplificando más aún:

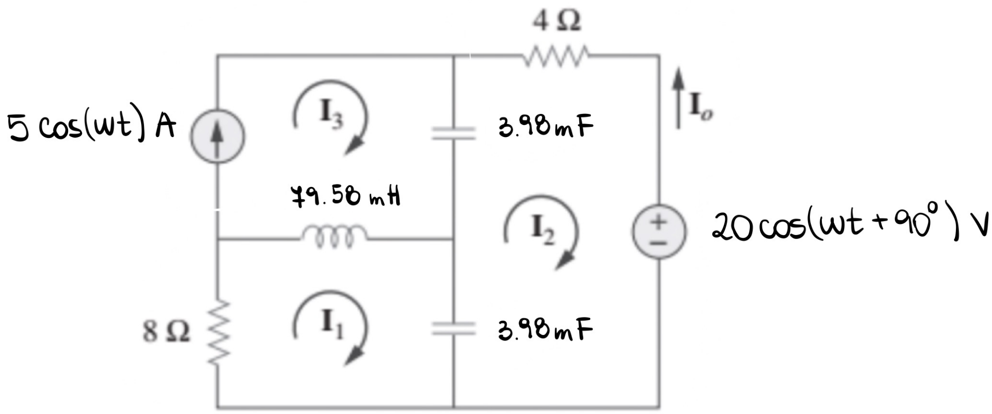


Finalmente, se obtiene la corriente en el espacio de la frecuencia como:

$$I = \frac{50\angle 0^\circ}{13{,}6 + j1\Omega} = 3{,}667\angle -4{,}2^\circ A \longrightarrow i = 3{,}667cos(125{,}66t - 0{,}073rad/seg)A$$

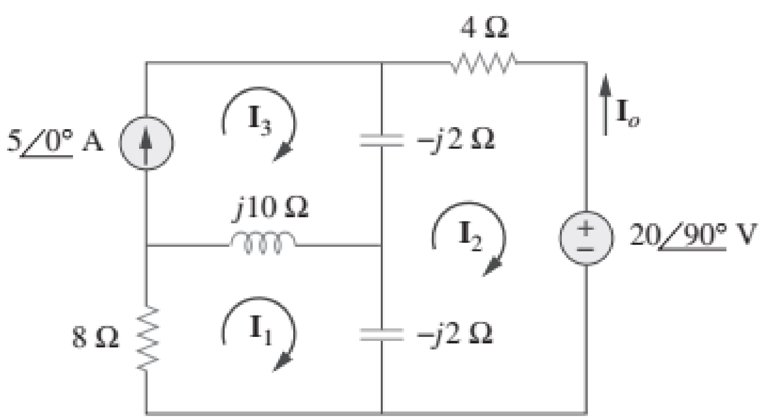
Problema 7

Obtén las corrientes de cada tramo del siguiente circuito. Asume que la frecuencia de funcionamiento del circuito es de $f = 20Hz$.



Solución:

Del enunciado se desprende que $w = 2\pi f = 125{,}66 rad/s$. Si pasamos al espacio de la frecuencia el circuito resultante es:



Notamos fácilmente que:

$$I_3 = 5\angle 0° A$$

Usando método de malla se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$8I_1 + j10(I_1 - I_3) + -j2(I_1 - I_2) = 0$$
$$-j2(I_2 - I_1) + -j2(I_2 - I_3) + 4I_2 + 20\angle 90°V = 0$$

Reemplazando I_3:

$$8I_1 + j10(I_1 - 5\angle 0°A) + -j2(I_1 - I_2) = 0$$
$$-j2(I_2 - I_1) + -j2(I_2 - 5\angle 0°A) + 4I_2 + 20\angle 90°V = 0$$

El sistema quedaría representado por:

$$(8 + 8j)I_1 + (j2)I_2 = 50\angle 90°V$$
$$(2j)I_1 + (4 - 4j)I_2 = -30\angle 90°V$$

Resolviendo se obtiene:

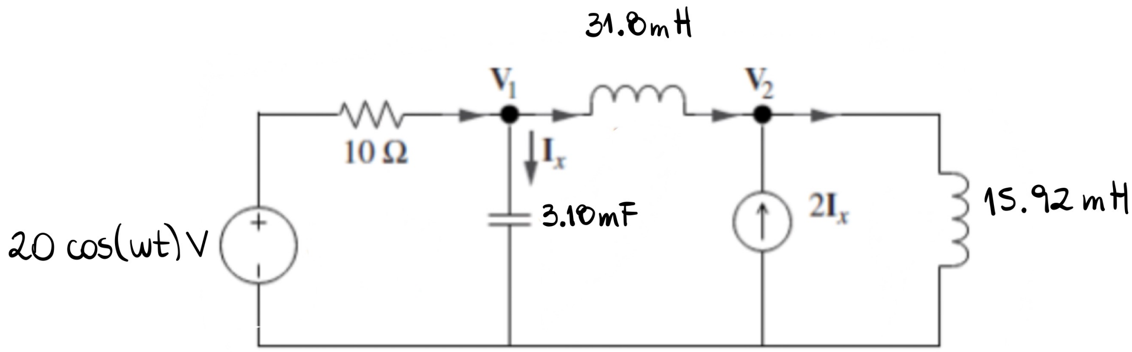
$$I_1 = 3{,}59\angle 55{,}01°A \qquad I_2 = 6{,}12\angle - 35{,}22°A = -6{,}12\angle 144{,}78°A$$

Pasando al espacio temporal:

$$i_1 = 3{,}59 \cos{(125{,}66t + 0{,}96 rad/seg)}A \qquad i_2 = 6{,}12 \cos{(125{,}66t - 0{,}62 rad/seg)}A$$

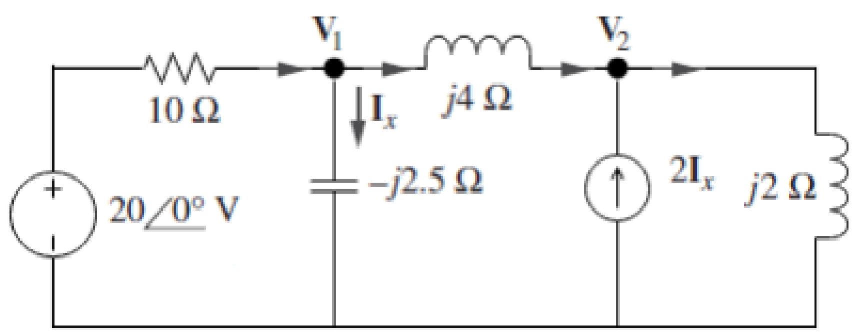
Problema 8

Determina los voltajes de los nodos V_1 y V_2 del siguiente circuito en el espacio del tiempo. Asume que la frecuencia de funcionamiento del circuito es de $f = 20Hz$.



Solución:

Del enunciado se desprende que $w = 2\pi f = 125{,}66 rad/s$. Si pasamos al espacio de la frecuencia el circuito resultante es:



Por método de nodos el sistema de ecuaciones que representa el sistema es:

$$\frac{20\angle 0° - V_1}{10} = \frac{V_1 - V_2}{j4} + \frac{V_1}{-j2{,}5} \qquad 2\frac{V_1}{-j2{,}5} + \frac{V_1 - V_2}{j4} = \frac{V_2}{j2}$$

Resolviendo obtenemos:

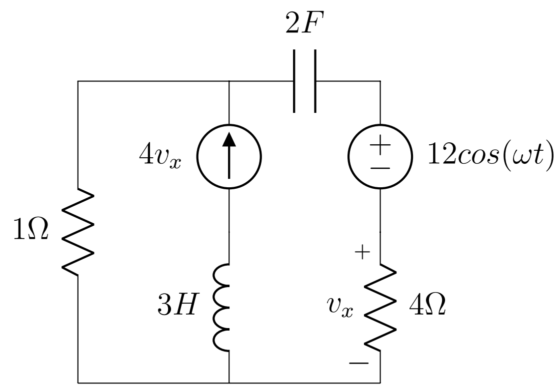
$$V_1 = 18{,}97\angle 18{,}43° V \qquad V_2 = 13{,}91\angle - 161{,}57° V$$

Pasando al espacio temporal:

$$v_1 = 18{,}97\cos\left(125{,}66t + 0{,}322rad/seg\right)V \qquad v_2 = 13{,}91\cos\left(125{,}66t - 2{,}82rad/seg\right)V$$

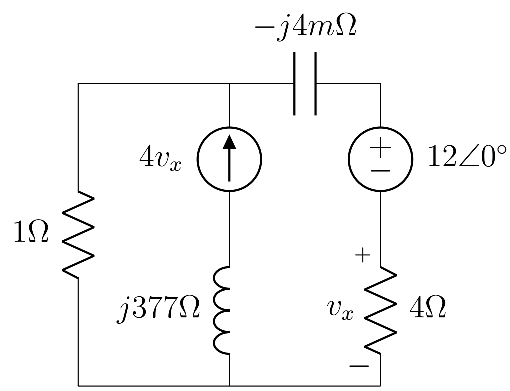
Problema 9

Si la frecuencia de funcionamiento del sistema es $f = 20Hz$, obtén el circuito equivalente en el espacio del tiempo visto desde los terminales de la resistencia de 1Ω. Para lograr esto utiliza , impedancias y fasores.



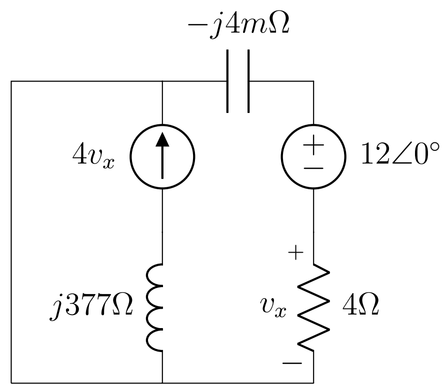
Solución:

En el espacio de la frecuencia el circuito es:

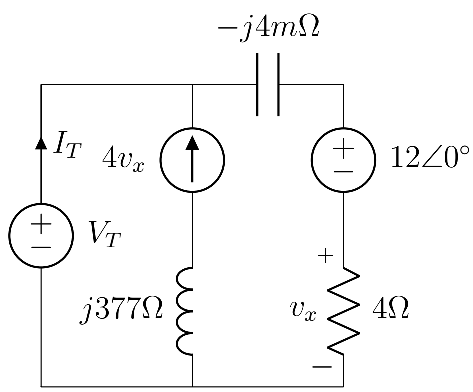


Obtenemos la corriente de corto circuito como:

$$I_{sc} = \frac{12\angle 0° V}{4 - j0{,}004\Omega} = 3\angle 0{,}06° A$$



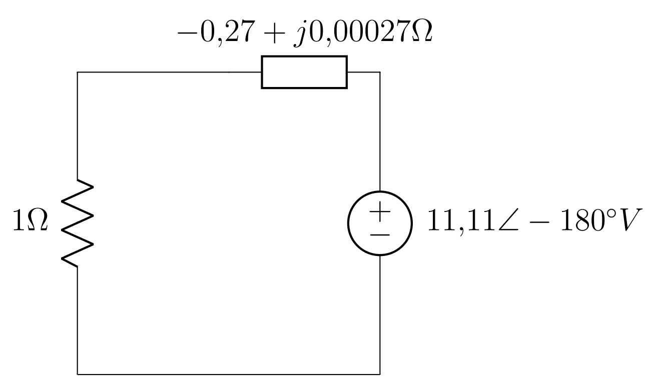
Para obtener la resistencia equivalente insertamos una fuente de prueba en la posición de 1Ω.



Del circuito anterior se desprende la siguiente relación:

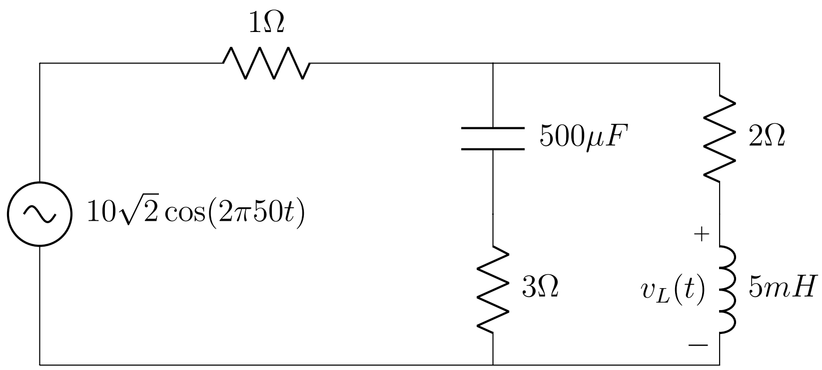
$$\frac{V_T}{4 - j0{,}004} = I_T + 4\frac{V_T}{4 - j0{,}004} * 4$$
$$R_{th} = \frac{V_T}{I_T} = -0{,}27 + j0{,}00027\Omega$$

Luego, $V_{th} = I_{sc} * R_{th} = 11{,}11\angle - 180°V$. Asi, el equivalente resultante es:



Problema 10

Considere el siguiente circuito operando en régimen sinusoidal permanente,



1. Utilice cualquier método para encontrar paso a paso el voltaje del inductor en función del tiempo $v_L(t)$.
2. Calcule paso a paso las potencias activa, reactiva y aparente de cada una de las cuatro cargas seleccionadas en la figura (Capacitor, inductor, y resistores de 2 y 3 [Ω]) y de la carga equivalente total de ellas.

Solución:

1. Como el sistema está operando a una $\omega = 2 * 50\pi$, podemos encontrar las impedancias asociadas al capacitor y al inductor,

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j6{,}37$$
$$Z_L = j\omega L = j1{,}57$$

Ahora podemos encontrar el valor de la impedancia equivalente a las 4 de la derecha:

$$Z_{eq} = \frac{(3 - j6{,}37)(2 + j1{,}57)}{5 - j4{,}8} = \frac{7{,}04\angle{-64{,}7}2{,}54\angle 38{,}13}{6{,}93\angle{-43{,}8}}$$
$$Z_{eq} = 2{,}58\angle 17{,}23 = 2{,}46 + j0{,}76$$

Por divisor de voltaje entonces podemos encontrar el voltaje del nodo superior a esta impedancia equivalente:

$$v_{eq} = 10\frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + 1} = 10\frac{2{,}58\angle 17{,}23}{2{,}46 + j0{,}76 + 1} = 7{,}28\angle 4{,}84$$

Ahora nuevamente realizamos un divisor de tensión para encontrar el valor del voltaje del inductor,

$$v_L = v_{eq}\frac{1{,}57\angle 90}{2{,}54\angle 38{,}13} = 4{,}5\angle 56{,}71$$

Pasando al espacio temporal tenemos que:

$$v_L(t) = 4{,}5\sqrt{2}\cos(2\pi 50t + 56{,}71^\circ) = 4{,}5\sqrt{2}\cos(2\pi 50t + 0{,}99rad)V$$

2. Se calcula lo pedido por cada componente:

   - Capacitor:
     Potencia aparente:

     $$S = \frac{|V_c|^2}{Z_c*} = [VA] = \frac{|\frac{v_{eq}\cdot -j6{,}36}{-j6{,}36+3}|^2}{j6{,}37} = -j6{,}77[VA]$$

     Potencia activa: P= 0 [W]
     Potencia aparente: Q= -6.77 [VAr]

   - Inductor:
     Potencia aparente:

     $$S = \frac{|V_L|^2}{Z_L*} = \frac{|2{,}46 + j3{,}76|^2}{-j1{,}57} = j12{,}89[VA]$$

     Potencia activa: P = 0[W]
     Potencia reactiva: Q = j12.89 [VAr]

   - Resistencia 2Ω
     Potencia aparente:

     $$S = \frac{|V_R|^2}{Z_R} = \frac{|\frac{v_{eq}\cdot 2}{2+j1{,}57}|^2}{2} = 16{,}32[VA]$$

     Potencia activa: P= 16.32 [W]
     Potencia reactiva: Q= 0 [VAr]

   - Resistencia 3Ω
     Potencia aparente:

     $$S = \frac{|V_R|^2}{Z_R} = \frac{|\frac{v_{eq}\cdot 3}{3-j6{,}37}|^2}{3} = 3{,}19[VA]$$

     Potencia activa: P= 3.19 [W]
     Potencia reactiva: Q= 0 [VAr]

   - Carga equivalente total
     Potencia aparente:

     $$S = \frac{|V_{eq}|^2}{Z_{eq}*} = 19{,}6 + j6{,}1[VA]$$

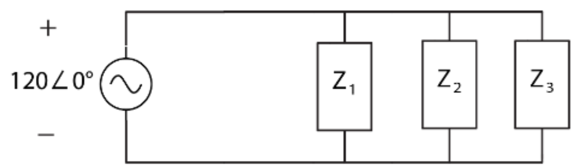
     Potencia activa: P= 19.6[W]
     Potencia reactiva: Q=6.1[VAr]

9. Potencia y Circuitos Trifásicos

Problema 1

Para el siguiente circuito:

1. Calcula el factor de potencia que produce la fuente, donde $Z_1 = 80+j50$, $Z_2 = 120+j70$ y $Z_3 = 60 + j0$.
2. La potencia compleja que es suministrada por la fuente.
3. La potencia activa y reactiva de cada carga.



Solución:

1. Primero se obtiene la impedancia equivalente.

$$Z_{eq} = Z_1//Z_2//Z_3 = 28{,}94 + 8{,}394j\Omega$$

Así, la corriente que suministra el generador puede ser expresada como:

$$I = \frac{120\angle 0°}{Z_{eq}} = 3{,}982\angle - 16{,}175° A$$

Recordar que la definición de factor de potencia es: $f.d.p = \cos{(\theta_v - \theta_i)}$. Así podemos obtener que:

$$f.d.p = \cos{(\theta_v - \theta_i)} = \cos{(0 - -16{,}175)} = 0{,}9604$$

2. Suponemos que el voltaje ya se encuentra en RMS. Entonces, La potencia compleja puede ser obtenida mediante la siguiente expresión:

$$S = P + jQ = VI^* = (120\angle 0°)(3{,}982\angle - 16{,}175° A)^* = 458{,}925W + j133{,}113VAr$$

donde: P es la potencia real y Q es la potencia imaginaria. La potencia aparente corresponde al modulo de S, es decir, $|S|$.

3. Los valores de las potencias son:

$$S_1 = \frac{||V||^2}{Z_1^*} = \frac{120\angle 0°}{(80 + j50\Omega)^*} = 129{,}44W + j80{,}9VAr$$

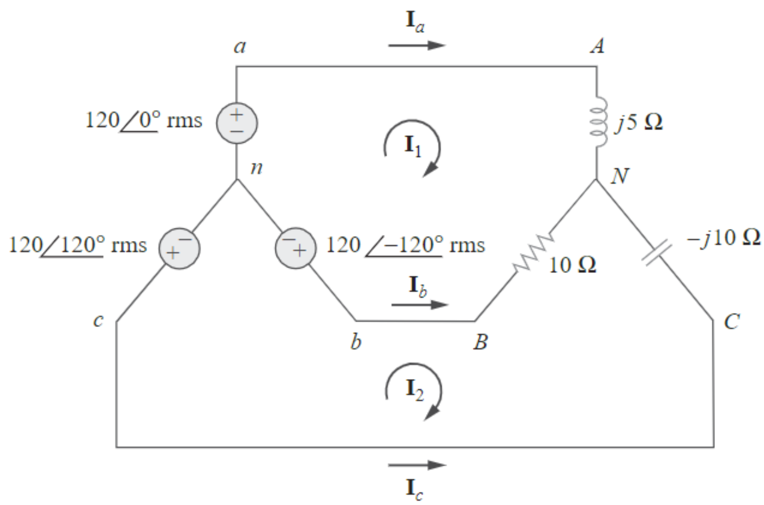
$$S_2 = \frac{||V||^2}{Z_2^*} = \frac{120\angle 0°}{(120 + j70\Omega)^*} = 89{,}54W + j52{,}23VAr$$

$$S_3 = \frac{||V||^2}{Z_3^*} = \frac{120\angle 0°}{(60\Omega)^*} = 240W$$

Problema 2

Para el siguiente circuito:

1. Calcula las corrientes de linea.
2. Calcula la potencia compleja que es suministrada a la carga.
   Hint: Cuando hablamos de **carga** en sistemas 3Φ nos referimos a las 3 impedancia que son conectadas a él.



Solución:

1. Notar que este circuito es trifásico desbalanceado, por lo que no podemos realizar simplificaciones, sino que trabajar con él como un conjunto.

   Pasamos cada elemento al espacio fasorial y definimos las corrientes del circuito.

   [Insertar circuito]

   Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$V_a = I_1(j5) + 10(I_1 - I_2) + V_b$$
$$V_b = I_2(-j10) + 10(I_2 - I_1) + V_c$$

   Las que también pueden ser expresadas como:

$$207{,}85\angle 30^\circ = I_1(j5) + 10(I_1 - I_2)$$
$$207{,}85\angle -90^\circ = I_2(-j10) + 10(I_2 - I_1)$$

Resolviendo sistemas de ecuaciones se obtienen las corrientes de malla:

$$I_1 = I_a = 56{,}79\angle 0{,}0024° A$$
$$I_2 = -I_c = 42{,}76\angle 24{,}9° A$$

Finalmente, la última corriente de linea es:

$$I_b = 25{,}46\angle -45° A$$

2. Como el sistema es trifásico **la carga** corresponde a las tres impedancias conectadas al generador trifásico. Por lo tanto, la potencia que se le suministra a la carga es $S_T = S_a + S_b + S_c$.

   Usando la siguiente expresión podemos obtener lo solicitado:

   $$S = ||I||^2 * Z$$

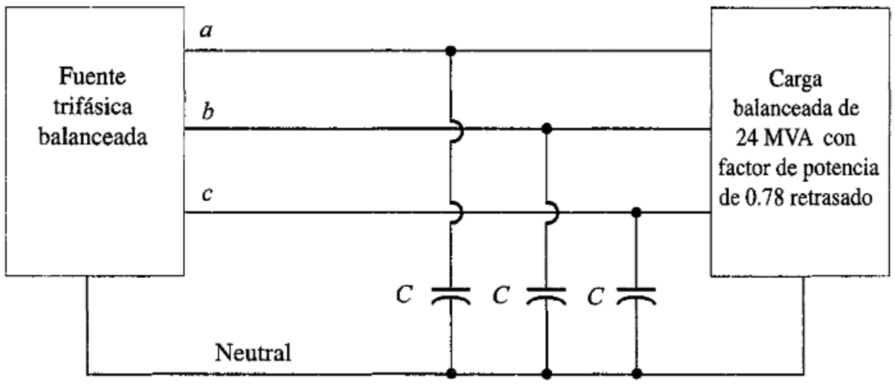
   Así las potencias suministradas son:

   $$S_a = ||I_a||^2 * Z_a = j16120VAr$$
   $$S_b = ||I_b||^2 * Z_b = 6480W$$
   $$S_c = ||I_c||^2 * Z_c = -j18276VAr$$

   Finalmente, $S_T = S_a + S_b + S_c = 6480W - j2156VAr$

Problema 3

Para el sistema trifásico balanceado de la siguiente figura, el voltaje de linea es de $34{,}5kV_{rms}$ a $60Hz$. Determina qué valores deben tener los capacitores C para que la carga tenga un factor de potencia de 0.94 en adelanto.



Solución:

Necesitamos conocer la potencia compleja que consume la carga para luego determinar cuanto debemos adaptar la relación potencia real e imaginaria para obtener el factor de potencia deseado.

A partir de los datos del enunciado podemos determinar el factor de potencia del circuito. Notemos que se nos indica la potencia aparente que consume la carga trifásica, es decir, $|S_c| = 24MVA$, y tambien el factor de potencia que posee la carga ($f.d.p = \cos(\Phi_i) = 0{,}78$).

Así, podemos determinar la potencia inicial del sistema S_i como:

$$S_i = 24MVA\angle \cos^{-1}(0{,}78) = 18{,}72MW + j15{,}02MVA$$

Nos solicitan transformar S_i tal que esta tengo un factor de potencia de 0.94 en adelanto. De aquí podemos descubrir el ángulo (Φ_f) que debe formar la potencia compleja final S_f para lograr este objetivo.

$$\Phi_f = -\cos^{-1}(0{,}94) = -19{,}95^\circ$$

El valor negativo de Φ_f se debe a que está en adelanto, si solicitaran en atraso este seria positivo.

En estos problemas se supone que la potencia real se mantendrá constante, es decir, $P_i = P_f$, debido a que en la práctica nos interesa continuar transmitiendo la misma energía útil que en un inicio transmitía la planta generadora. Sabiendo esto podemos determinar que la potencia compleja final para lograr el factor de potencia 0,94 en adelanto es:

$$S_f = P_f + jQ_f = P_i + jP_i \tan(-19{,}95^\circ) = 18{,}72MW - j6{,}8MVAr$$

Con este resultado ya podemos notar que para obtener dicho factor de potencia en requerido realizar una variación en la potencia imaginaria que obtiene la carga. Específicamente, debe ocurrir un delta de potencia compleja que puede ser expresado como:

$$\Delta S = S_f - S_i = -j6{,}8MVAr - 15{,}02MVAR = -j21{,}82MVAr$$

Por lo tanto ese delta de energía reactiva debe ser consumido por algún elemento circuital y el único capaz de lograr consumir potencia reactiva negativa es el capacitor. Esto se debe a que la potencia que consume un capacitor puede ser expresada como:

$$S_c = \frac{||V||^2}{Z_c} = -jwC * ||V_{rms}||^2$$

y esta siempre será negativa ya que $||V_{rms}||^2 \geq 0$. Si se deseara obtener un delta de potencia positivo necesitaríamos utilizar un inductor, pero esto casi nunca suele suceder en la práctica.

De este análisis podemos determinar que la variación de potencia reactiva que necesitamos generar debe ser igual a la potencia que consumo los capacitores que instalemos, es decir, $\Delta S = S_c$.

Como la carga es trifásica balanceada habrá que instalar 3 capacitores, uno en cada fase. La ecuación $\Delta S = S_c$ para una sola fase puede ser expresada como:

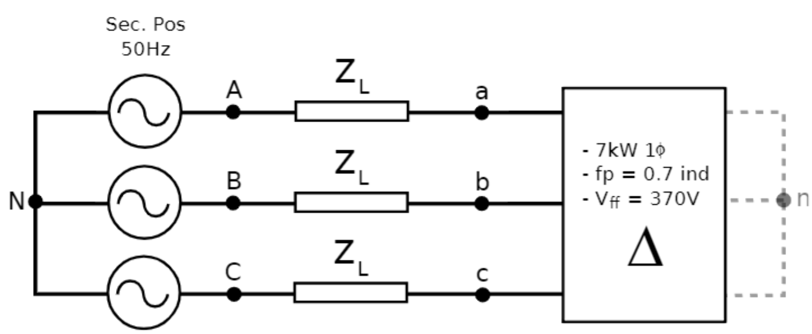
$$\Delta S = \frac{-j21{,}82MVAr}{3} = -(2\pi * 60Hz)\left(\frac{34{,}5KV}{\sqrt{3}}\right)^2 * C$$

despejando obtenemos que el capacitor que se conecta a una fase es de $C = 48{,}6\mu F$ y finalizamos el problema. Si nos solicitaran el valor del **banco de capacitores** este seria igual a $3 * C = 3 * 48{,}6\mu F$.

Problema 4

Para el sistema trifásico balanceado de la Figura 1, donde $V_{AB} = 380 < 0$, $Z_L = 0{,}3 + j0{,}1\Omega$ y se posee secuencia positiva, calcule:

1. La corriente de la fase C.
2. La corriente que pasa por cada una de las cargas. **Ojo: las cargas están en Δ**
3. Si se desea cambiar el factor de potencia de las cargas por un valor de 0.9 inductivo, ¿Qué componente debemos agregar? ¿En paralelo o en serie? Calcula los valores de ese(esos) componente(s) para obtener lo solicitado.
   Hint: Supón que la carga son los hogares de tu comuna. Tu deseas adaptar el factor de potencia sin modificar la energía útil (Watts) que les llega a esas viviendas ya que, si disminuye la potencia real, estas dejarían de funcionar.
4. Las celebraciones causadas por el hallazgo de la vacuna para combatir el covid-19 han causado estragos. Durante una fiesta salvaje, sin saber su motivación, unos jóvenes cortaron la rama de un árbol, la cual conectó las lineas $B-C$ del sistema 3Φ balanceado. El profesor Julio Profe, encargado de la investigación, decide acudir a ti especialista en sistemas 3Φ para que determines si las lineas de transmisión del sistema fueron quemadas. Cada linea soporta como máximo una corriente de $|I_{linea}^{max}| = 400A$ (módulo de la corriente de linea compleja). Para ayudarte, Julio te menciona que al analizar la rama la impedancia de esta era de $Z_{falla}^{rama} = 0{,}2 + j0{,}2\Omega$. Además,te dijo que la rama justo unió la mitad de la linea B con la mitad de la linea C. ¿Cuáles de las lineas del sistema (A, B o C) fueron quemadas?
   Hint: si la rama cae en la mitad de una linea de impedancia Z_{linea}, la rama verá a **cada uno de sus lados** una impedancia de $Z_{linea}/2$.



Solución:

1. Al tener un sistema balanceado solo basta con analizar una de las tres ramas del sistema. Solo por simplicidad analizaremos la linea a y a partir de eso podremos determinar la corriente de c.

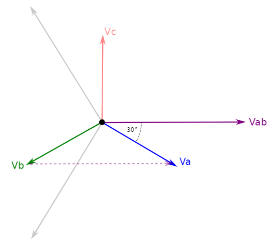


Figura 3: Secuencia positiva

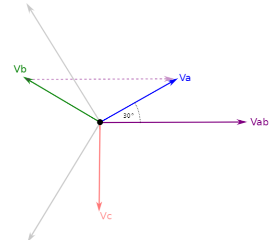
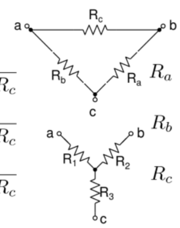


Figura 4: Secuencia negativa

Como la carga está en Δ transformamos a estrella. Recordar la relación de la siguiente figura:

$\Delta \rightarrow \mathrm{Y}$

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$$
$$R_2 = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c}$$
$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$



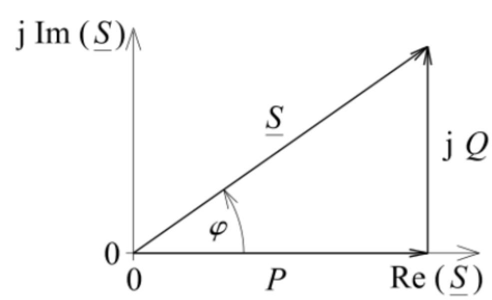
$\mathrm{Y} \rightarrow \Delta$

$$R_a = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1}$$
$$R_b = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2}$$
$$R_c = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3}$$

Cuando el circuito es balanceado tenemos que:

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}$$

Tenemos un problema! No conocemos el valor de Z_Δ para hacer divisor de voltaje.
Lo que sabemos de enunciado y Figura 1 es que:
- $V_{AB} = 380 < 0°$, es decir, $V_{AN} = \frac{V_{AB}}{\sqrt{3}} = 220V < -30°$ ya que la secuencia es positiva.
- El voltaje de la carga será $V_{AN}^{carga} = \frac{370}{\sqrt{3}} = 213{,}62V = ||V_{AN}^{carga}||$. **No conocemos el ángulo que posee.**
- Hay un factor de potencia de 0.7 inductivo (retraso), es decir, $\cos\phi = 0{,}7 \rightarrow \phi = 45{,}57°$ **Recuerda que ϕ es el ángulo del voltaje con respecto a la corriente.** Si el factor de potencia fuera capacitivo o en adelanto, ϕ seria negativo.
- La potencia real consumida por la carga es $7kW$ por fase. Sabemos que $P = |S| * f.d.p \rightarrow |S| = P/cos(\phi) = 7k/0{,}7 = 10k$, donde $S = P + jQ = |S|\cos\phi + |S|\sin\phi = 10k < 45{,}573°$.



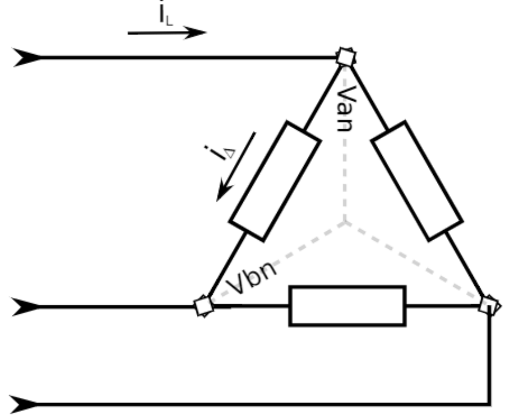
La ecuación que relaciona la impedancia de la carga con la potencia que consume es $S = \frac{||V||^2}{Z_Y} \rightarrow Z_Y = \frac{||V||^2}{S} = \frac{||V_{AN}^{carga}||^2}{10k<45{,}573^\circ} = 3{,}194 + j3{,}259\Omega$.
Ahora podemos calcular la corriente de la linea a como:

$$i_A = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}} < -30^\circ}{(0{,}3 + j0{,}1) + (3{,}194 + j3{,}259)} = 45{,}226 < -73{,}381^\circ$$

Finalmente, para obtener la corriente de la linea c tenemos que:

$$i_C = i_A * (1 < 120^\circ) = 45{,}266 < 46{,}129^\circ$$

2. Notemos que deberíamos ver algo como esto:



Entonces, para obtener la corriente que pasa por cada una de las cargas utilizaremos la formula:

$$i_\Delta = \frac{V_{ff}}{Z_\Delta} = \frac{V_{an} - V_{bn}}{Z_\Delta}$$

Recuerda que $Z_\Delta = 3Z_Y = 3 * (3{,}194 + j3{,}259\Omega) = 13{,}67 < 45{,}57^\circ\Omega$.
Con los valores del punto anterior tenemos que:

$$V_{an} = i_a * Z_Y = (45{,}266 < -73{,}871^\circ)(4{,}563 < 45{,}573^\circ) = 206{,}55 < -28{,}298^\circ$$

Para el caso de V_{bn} solo debemos desfasar este valor:

$$V_{bn} = V_{an} * (1 < 120^\circ) = (206{,}55 < -28{,}298^\circ) * (1 < 120^\circ) = 206{,}55 < -148{,}298^\circ$$

Así:

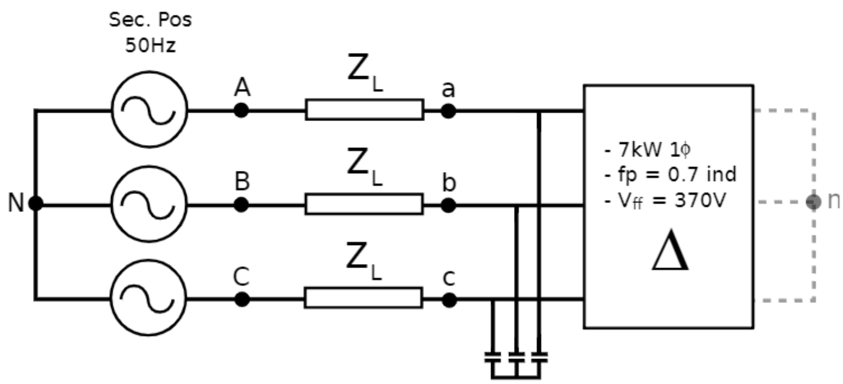
$$i_\Delta = \frac{(206{,}55 < -28{,}298^\circ) - (206{,}55 < -148{,}298^\circ)V}{13{,}67 < 45{,}57^\circ\Omega} = 26{,}134 < -43{,}871^\circ$$

Debes darte cuenta que al ser balanceado la corriente i_Δ es idéntica en toda la carga en Δ.

Otro punto importante es la relación entre el modulo de la corriente corriente de linea y el módulo de la corriente en la carga delta:

$$i_\Delta = \frac{i_L}{\sqrt{3}}$$

3. Notar que la carga Δ es *inductiva* ya que su la reactancia (parte imaginaria de la impedancia) es positiva. Entonces, para mejorar este factor de potencia debemos colocar **capacitores en paralelo** los cuales posee una reactancia negativa que compensará a la impedancia de la carga en Δ.



Situación inicial

Inicialmente (**del punto 1**) sabemos que la potencia aparente de la carga es:

$$S = P + jQ = |S|\cos\phi + |S|\sin\phi = 10k < 45{,}573°VA = (7kW + 7{,}14kVAr)$$

Situación con factor de potencia de 0.9 inductivo

En el caso dos debemos considerar un factor de potencia solicitado ($cos(\phi_2)$) y que la potencia real que reciben las cargas se mantiene constante $P_{original} = P_{final}$. Esto último se debe a que el objetivo de un sistema 3Φ es entregar cierta cantidad de energía útil (potencia real en Watts) a las cargas para su funcionamiento. Entonces, el modulo de la potencia aparente será:

$$|S_2| = \frac{P_{original}}{\cos\phi_2} = 7{,}777kVA$$

Ahora podemos calcular la nueva potencia aparente:

$$S = P + jQ = |S|\cos\phi_2 + |S|\sin\phi_2 = (7kW + 3{,}39kVAr)$$

¿Qué está sucediendo?

El cambio en el factor de potencia está produciendo un cambio en la energía reactiva que llegan a las cargas. Ese cambio se representa por $\Delta Q = Q^{final} - Q_{original} = 3{,}39kVAr - 7{,}14kVAr = -3{,}75kVAr$- **Entonces, lo que se desea es que los capacitores acumulen este delta de potencia reactiva para que así a la carga le pueda llegar el nivel solicitado**.

Como los capacitores se conectan en paralelo a la carga podemos decir que recibirán el mismo voltaje. Asi, podemos calcular la impedancia de los capcitores en base a la potencia que recibe:

$$S_{cap} = \frac{||V||^2}{Z_{capacitor}} = jQ_{cap}$$

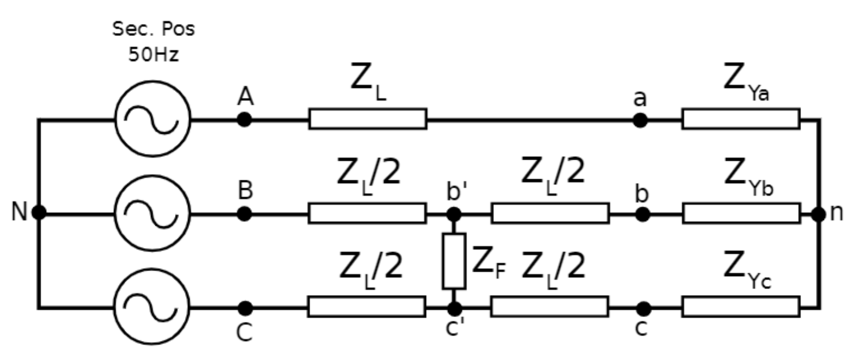
Podemos despejar el valor de impedancia como sigue:

$$Z_{cap} = \frac{||V||^2}{S^*_{cap}} = \frac{||V||^2}{-jQ_{cap}} = \frac{\left(\frac{370}{\sqrt{3}}\right)^2}{-j*(-3{,}75k)} = -j12{,}169\Omega$$

Por ultimo, del valor de Z_{cap} podemos obtener el valor de la capacitancia.

$$Z_{cap} = \frac{1}{jwC} \rightarrow \frac{1}{j2\pi(50Hz)(-j12{,}169\Omega)} = 262\mu F$$

4. Comprendiendo el enunciado nos damos cuenta que el sistema que antes teníamos balanceado, ahora será un sistema desbalanceado. Tendríamos algo de este estilo:



Donde Z_f corresponde a la impedancia que posee la rama. Nota que a cada lado de b' y c' la impedancia que se observan son de $Z_L/2$ ya que la rama unió la mitad de cada linea.

Simplificando un poco más el circuito tenemos que:

Ahora, existe una configuración tipo Δ en una de las ramas, así que para operar transformaremos a estrella.

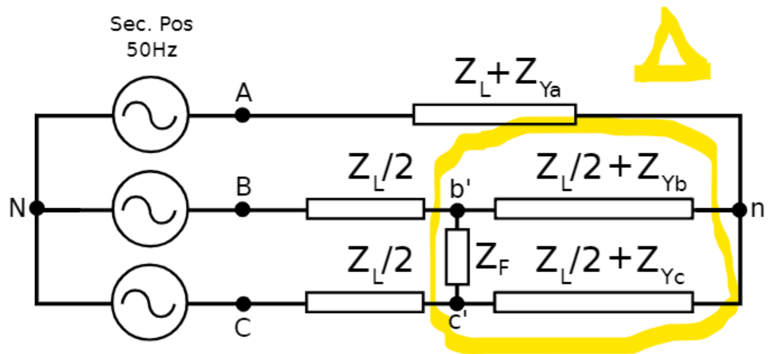


Figura 67: Sistema Desbalanceado

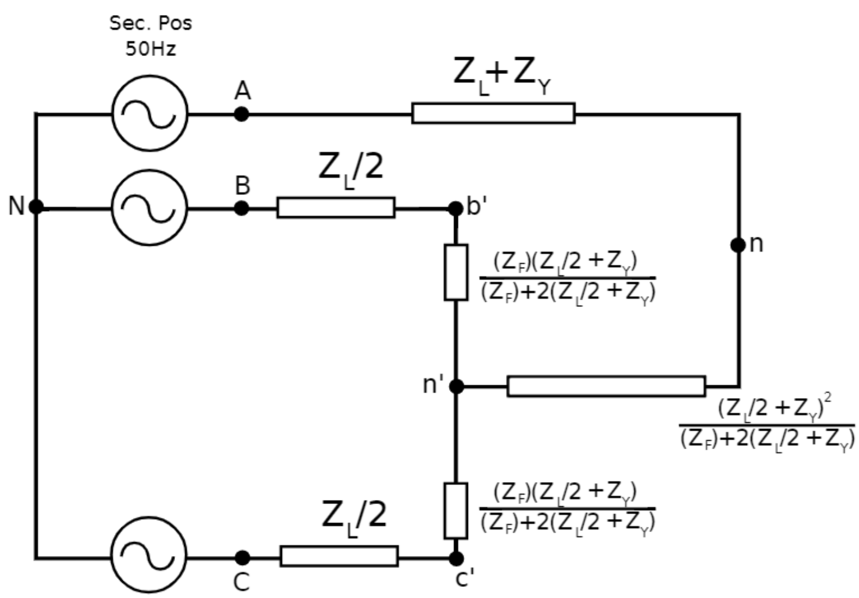


Figura 68: Sistema Desbalanceado

Simplificando nuevamente:

Previamente ya conocemos:

$$Z_L = 0{,}3 + j0{,}1\Omega \qquad Z_Y = 3{,}194 + j3{,}259\Omega \qquad Z_f = 0{,}2 + j0{,}2\Omega$$
$$v_a = \frac{380}{\sqrt{3}} < -30°V \qquad v_a = \frac{380}{\sqrt{3}} < -150°V \qquad v_c = \frac{380}{\sqrt{3}} < -270°V$$

Además podemos calcular:

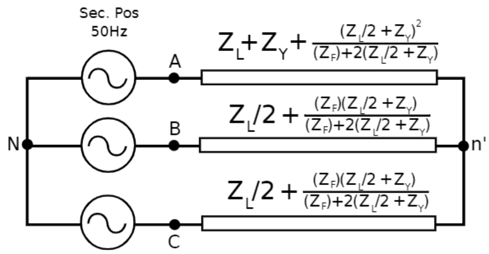


Figura 69: Sistema Desbalanceado

$$Z_L + Z_Y + \frac{\left(\frac{Z_L}{2} + Z_Y\right)^2}{Z_F + 2 * (\frac{Z_L}{2} + Z_Y)} = 5{,}117 + j4{,}965\Omega$$
$$\frac{Z_L}{2} + \frac{\left(\frac{Z_L}{2} + Z_Y\right) * Z_F}{Z_F + 2 * (\frac{Z_L}{2} + Z_Y)} = 0{,}247 + j0{,}147\Omega$$

Si hacemos KCL en el nodo n' de la Figura 11 tendremos la siguiente ecuación:

$$i_a + i_b + i_c = 0$$
$$\frac{\frac{380}{\sqrt{3}} < -30°V - v_{n'}}{5{,}117 + j4{,}965\Omega} + \frac{\frac{380}{\sqrt{3}} < -150°V - v_{n'}}{0{,}247 + j0{,}147\Omega} + \frac{\frac{380}{\sqrt{3}} < -270°V - v_{n'}}{0{,}247 + j0{,}147\Omega} = 0$$

Así, obtenemos que:

$$v_{n'} = 103{,}369 < 150{,}818°V$$

Ahora podemos calcular cada una de las corrientes de linea de las ecuaciones de KCL:

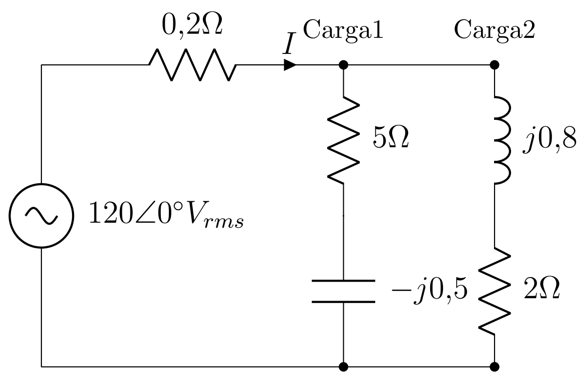
$$i_a = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}} < -30°V - 103{,}369 < 150{,}818°V}{5{,}117 + j4{,}965\Omega} = 45{,}266 < -73{,}872°A$$
$$i_b = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}} < -150°V - 103{,}369 < 150{,}818°V}{0{,}247 + j0{,}147\Omega} = 655{,}992 < -152{,}686°A$$
$$i_c = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}} < -270°V - 103{,}369 < 150{,}818°V}{0{,}247 + j0{,}147\Omega} = 666{,}25 < 31{,}136°A$$

Como resultado final, **la lineas B y C se queman debido a la alta corriente que circula.**

Problema 5

Para el siguiente circuito calcula:

- Calcula la potencia aparente, activa, reactiva y compleja de cada carga en paralelo. Además, determina el factor de potencia de cada una.
- Calcula la potencia aparente, activa, reactiva y compleja del equivalente de ambas cargas en paralelo. Además, encuentra el factor de potencia del equivalente.
- Calcula la corriente de linea I y el voltaje que reciben las cargas.
- Realizar balance de potencia aparente, activa, reactiva y compleja del conjunto generador, linea y cargas.

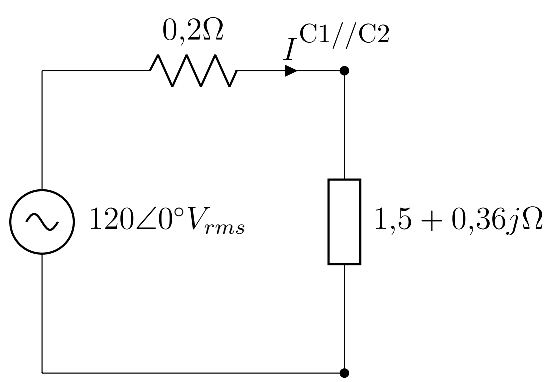


Solución:

- Podemos obtener un equivalente para las cargas en paralelo:

$$Z_{eq} = (5 - 0{,}5j)//(2 + 0{,}8j) = 1{,}5 + 0{,}36j\Omega$$

El circuito queda:



La corriente de linea será:

$$I = \frac{120}{0{,}2 + 1{,}5 + 0{,}36j\Omega} = 69{,}06\angle - 11{,}96°$$

Y el voltaje que reciben las cargas es:

$$V_c = I * Z_{eq} = 106{,}53\angle 1{,}54° V_{rms}$$

Así, las potencia que poseen las cargas son:

Carga 1:

$$S_1 = \frac{||V_c||^2}{(5 - 0{,}5j\Omega)^*} = 2247{,}25W - j224{,}73VAr$$

$$f.p = \cos(\theta_1) = \cos\left(\tan^{-1}\frac{Q_1}{P_1}\right) = 0{,}995$$

$$P_1 = 2247{,}25W \qquad Q_1 = -224{,}73VAr \qquad ||S_1|| = 2258{,}46VA$$

Carga 2:

$$S_2 = \frac{||V_c||^2}{(2 + 0{,}8j\Omega)^*} = 4891{,}66W + j1956{,}7VAr$$

$$f.p = \cos(\theta_1) = \cos\left(\tan^{-1}\frac{Q_2}{P_2}\right) = 0{,}928$$

$$P_2 = 4891{,}66W \qquad Q_2 = 1956{,}7VAr \qquad ||S_2|| = 5268{,}49VA$$

- Del resultado anterior se desprende que la potencia compleja de las cargas en paralelo es:

$$S_T = S_1 + S_2 = 7138{,}8W + j1731{,}97VAr$$

$$f.p = \cos(\theta_1) = \cos\left(\tan^{-1}\frac{Q_T}{P_T}\right) = 0{,}972$$

$$P_T = 7138{,}8W \qquad Q_t = 1731{,}97VAr \qquad ||S_T|| = 7345{,}9VA$$

- Ya terminamos estos valores en el primer punto.

La corriente de linea será:

$$I = \frac{120}{0{,}2 + 1{,}5 + 0{,}36j\Omega} = 69{,}06\angle - 11{,}96°$$

Y el voltaje que reciben las cargas es:

$$V_c = I * Z_{eq} = 106{,}53\angle 1{,}54° V_{rms}$$

- Para realizar balance de potencia solo nos falta la potencia suministrada por el generador y consumida por la linea.

  Para el generador:

  $$S_G = 120 * I^* = 120 * (69{,}06\angle 11{,}96^\circ) = 8287{,}2\angle 11{,}96^\circ = 8107{,}3W + j1717{,}35VAr$$

  Para la linea:

  $$S_L = ||I||^2 * Z_L = (69{,}06)^2 * 0{,}2\Omega = 953{,}86W + j0VAr$$

$$P_G = 8107{,}3W \qquad Q_G = 1717{,}35VAr$$

$$P_L = 953{,}86W \qquad Q_L = 0VAr$$

$$P_1 = 2247{,}25W \qquad Q_1 = -224{,}73VAr$$

$$P_2 = 4891{,}66W \qquad Q_2 = 1956{,}7VAr$$

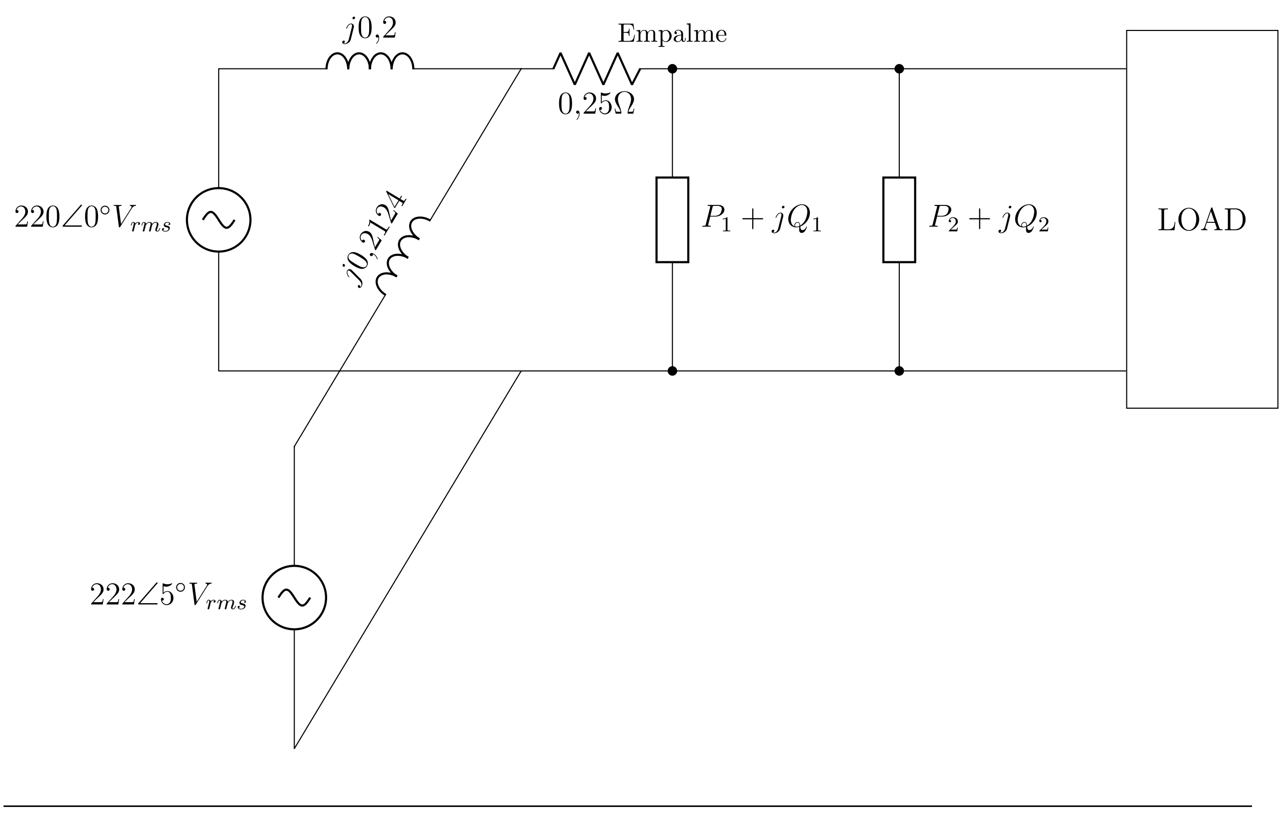
Problema 6

Para el siguiente circuito calcula:

- Encuentra la potencia aparente, activa, reactiva y compleja de cada una de las cargas en paralelo. Además, encuentra el factor de potencia de cada una.
- Calcula las potencias aparente, activa, reactiva y compleja que consume la carga equivalente total del paralelo de las cargas y encuentra el valor del factor de potencia.
- Calcula la corriente de linea que llega a las cargas y luego calcula la potencia complejas asociada a las lineas.
- Calcula el equivalente de Thevenin visto desde el empalme hacia los generadores.

Datos:

- Para la carga uno $P_1 = 2kW$ y $Q_1 = 0{,}15kVAr$. Para la carga 2 $|S_2| = 4{,}7167kVA$ con factor de potencia en atraso de 0,848.
- Para LOAD se sabe que posee una carga inductiva de factor de potencia igual a 0,93, consume $10kW$ y recibe un voltaje de $198\angle 4{,}17°V_{rms}$



Solución:

- Del enunciado se puede desprender algunos de estos valores.

  Carga 1:

$$S_1 = 2000W + j150VAr$$
$$f.p = \cos(\theta_1) = \cos\left(\tan^{-1}\frac{Q_1}{P_1}\right) = 0{,}9972$$
$$P_1 = 2000W \qquad Q_1 = 150VAr \qquad ||S_1|| = 2005{,}62VA$$

  Carga 2:

$$\theta = \cos^{-1}(f.p) = +\cos^{-1}(0{,}848)$$
$$S_2 = 4716{,}7\cos(\theta) + j4716{,}7\sin(\theta) = 4000W + j2500VAr$$
$$P_2 = 4000W \qquad Q_2 = 2500VAr \qquad ||S_2|| = 4717VA$$

  LOAD:

$$\theta_{LOAD} = \cos^{-1}(f.p) = +\cos^{-1}(0{,}93)$$
$$S_{LOAD} = 10000 + j10000\tan(\theta_{LOAD}) = S_{LOAD} = 10000W + j3952,25VAr$$
$$P_{LOAD} = 10000W \qquad Q_{LOAD} = 3952,25VAr \qquad ||S_{LOAD}|| = 13952{,}24VA$$

- Del resultado anterior se desprende que la potencia compleja de las cargas en paralelo es:

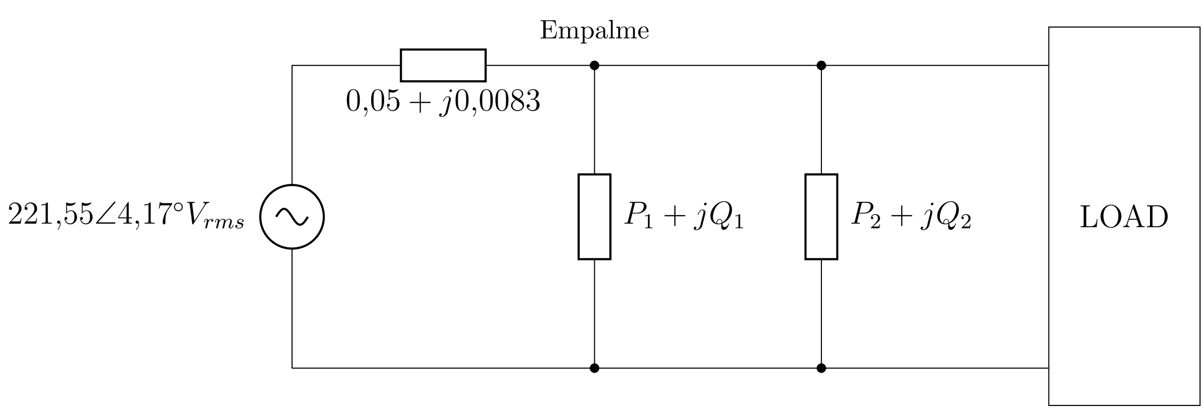
$$S_T = S_1 + S_2 + S_{LOAD} = 16000W + j6602{,}25VAr$$

  Asi,

$$f.p = \cos(\theta_1) = \cos\left(\tan^{-1}\frac{Q_T}{P_T}\right) = 0{,}9244$$
$$P_T = 16000W \qquad Q_T = j6602{,}25VAr \qquad ||S_T|| = 17308{,}66VA$$

- Para simplificar el circuito primero realizamos un equivalente de Thevenin, en donde:

$$V_{Th} = 221{,}55\angle 4{,}17^\circ \qquad R_{Th} = 0{,}05 + j0{,}0083$$



Del enunciado sabemos que las cargas en paralelo reciben $198\angle 4{,}17° V_{rms}$, así podemos determinar la corriente que llega a las cargas como:

$$I = \frac{221\angle 4{,}17° V_{rms} - 198\angle 4{,}17° V_{rms}}{0{,}05 + j0{,}0083}$$

También podemos expresar la potencia consumida por las lineas como:

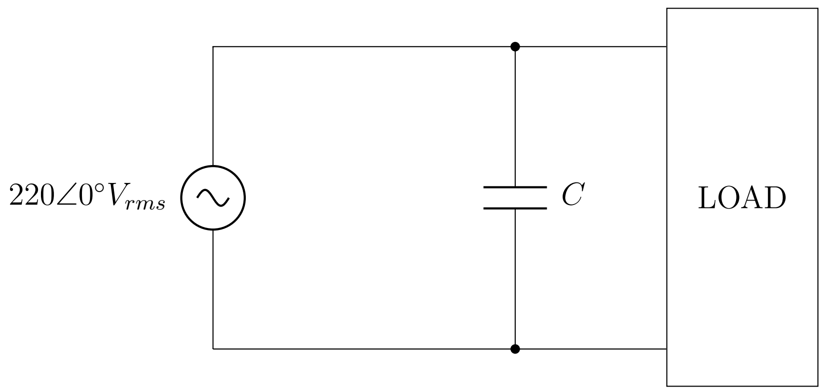
$$S_L = \frac{||221\angle 4{,}17° V_{rms} - 198\angle 4{,}17° V_{rms}||^2}{(0{,}05 + j0{,}0083)^*} =$$

Problema 7

Para el siguiente circuito calcula el valor del capacitor que debe ser instalado para obtener en la carga un factor de potencia 0,9 en adelanto.

Datos:

- Frecuencia de operación de $50Hz$.
- LOAD posee una potencia aparente $|S| = 6000VA$ y un factor de potencia en atraso de $f.p = 0{,}75$.



Solución:

Del factor de potencia original se desprende el ángulo del vector de la potencia aparente como:

$$\theta = \arccos{(0{,}75)} = 41{,}41^\circ$$

La potencia aparente original es:

$$S_{initial} = cos(\theta)|S| + jsen(\theta)|S| = 4500W + j3968{,}65VAr$$

El ángulo del vector de potencia aparente deseado es:

$$\theta' = -\arccos{(0{,}9)} = -25{,}84^\circ$$

En estos problemas asumimos que la potencia real se desea mantener constante, es decir, $P_{initial} = P_{final}$.

Así, podemos decir que el valor de la potencia reactiva deseada será:

$$Q_{final} = \tan{(\theta')} * P_{final} = -j2179{,}26VAr$$

La variación de potencia reactiva será:

$$Q_{initial} - Q_{final} = -j6147{,}91VAr$$

Como esta variación de potencia debe ser consumida por el capacitor en paralelo, podemos escribir la siguiente ecuación:

$$-jwCV^2 = -j2 * \Pi * 50Hz * C * (220\angle 0^\circ)^2 = -j6147{,}91VAr$$

Despejando llegamos a:

$$C = 404\mu F$$

Referencias

[1] Dorf, R., Dorf, R. C., Svoboda, J. A. (2000). Circuitos eléctricos: introducción al análisis y diseño. Marcombo.

[2] Irwin, J. D., Alvarado, E. V. (1997). Análisis básico de circuitos en Ingeniería. Prentice-Hall Hispanoamericana.