Resumen Modelos Estocásticos

Vicente Olea

20 de mayo de 2025

Índice

1 Introducción

El curso busca introducir al alumno en la problematica del modelamiento de sistemas estocásticos. Para esto, se enseñan las tecnicas y conceptos básicos que sustentan los modelos analiticos mas utilizados en investigación operacional para representar sistemas probabilisticos.

2 Repaso de Probabilidades

2.1. Conceptos Básicos

Experimento Aleatorio

Resultado cuyo desenlace no puede predecirse *a priori*.

Espacio Muestral Ω

Conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Evento

Cualquier subconjunto $E \subseteq \Omega$. Ocurre E si el resultado pertenece a E.

Operaciones con eventos

- **Unión**: $E \cup F$ — ocurre si ocurre al menos uno.
- **Intersección**: $E \cap F$ — ocurre si ocurren ambos simultáneamente.
- **Eventos disjuntos**: $E \cap F = \varnothing$.
- **Complemento**: $E^{\mathsf{c}} = \Omega \setminus E$.
- **Diferencia**: $E \setminus F = \{\, \omega \in \Omega : \omega \in E,\ \omega \notin F \,\}$.

2.2. Definición de una probabilidad

Sea $(\Omega, \mathcal{S}_\Omega)$ un espacio muestral. Una **medida de probabilidad** es una función $P : \mathcal{S}_\Omega \to [0,1]$ que satisface:

(i) $0 \leq P(E) \leq 1$ para todo $E \in \mathcal{S}_\Omega$.

(ii) $P(\Omega) = 1$.

(iii) Para cualquier familia numerable de eventos disjuntos E_i:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i).$$

Propiedades básicas

- Complemento: $P(E^c) = 1 - P(E)$.
- Vacío: $P(\varnothing) = 0$.
- Unión de dos eventos:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F).$$

Si E y F son disjuntos: $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$.

- Monotonía: si $E \subset F$ entonces $P(E) \leq P(F)$.

Probabilidad condicional

Sea $P(F) > 0$.

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Independencia E y F son independientes si $P(E \cap F) = P(E)P(F)$ (equivalentemente $P(E \mid F) = P(E)$).

Teorema de Probabilidades Totales

Si $\{E_i\}_{i=1}^n$ es una partición de Ω (eventos disjuntos con $\bigcup_i E_i = \Omega$), entonces para cualquier evento F:

$$P(F) = \sum_{i=1}^{n} P(F \mid E_i)P(E_i).$$

Teorema de Bayes

Con las hipótesis anteriores y $P(F) > 0$:

$$P(E_i \mid F) = \frac{P(F \mid E_i)P(E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(F \mid E_j)P(E_j)}.$$

2.3. Variables Aleatorias

Definición

Una **variable aleatoria** es una función medible $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Tipos

- **Discreta**: toma valores en un conjunto finito o numerable.
- **Continua**: toma valores en un intervalo o conjunto no numerable.

Función de distribución acumulada

$$F_X(x) = P(X \leq x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Variable aleatoria discreta

- *Función de masa de probabilidad*: $p_X(k) = P(X = k)$.
- $\displaystyle\sum_k p_X(k) = 1$.

Variable aleatoria continua

- *Función de densidad*: $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ con $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$.
- $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$.
- Probabilidad en un intervalo: $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\, dx = F_X(b) - F_X(a)$.

Distribuciones condicionales

Discreto–discreto: $P(X = x \mid Y = y) = \dfrac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$.

Continuo–continuo: $f_{X|Y}(x \mid y) = \dfrac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$.

Esperanza y varianza

$$E[X] = \begin{cases} \displaystyle\sum_k k\, P(X = k), & \text{discreta,} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx, & \text{continua;} \end{cases}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Linealidad de la esperanza Para $Y = a + \sum_{i=1}^{n} b_i X_i$:

$$E[Y] = a + \sum_{i=1}^{n} b_i E[X_i].$$

Leyes de probabilidades totales

Distribución

$$P(X = k) = \sum_i P(X = k \mid Y = i)\, P(Y = i) \quad \text{(discreto)}$$

$$F_X(x) = \int P(X \leq x \mid Y = y)\, f_Y(y)\, dy \qquad \text{(continuo)}$$

Esperanza

$$E[X] = \sum_i E[X \mid Y = i]\, P(Y = i) \quad \text{(discreto)}$$

$$E[X] = \int E[X \mid Y = y]\, f_Y(y)\, dy \qquad \text{(continuo)}$$

3 Procesos Estocásticos

Definición: Un **proceso estocástico** es una familia de variables aleatorias $\{X_t\}$ (o $X(t)$), en que t es un parámetro que varía según un índice en el conjunto T.

- Con frecuencia, t corresponde a unidades discretas de tiempo, por lo que $T = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- También puede representar tiempo u otra variable continua (p. ej., distancia desde el origen); en tal caso, $T = [0, \infty)$.

Entonces, en general:

$$\{X_t,\ t = 0, 1, 2, \ldots\} \text{ es un proceso estocástico en tiempo discreto,}$$

$$\{X(t),\ t \geq 0\} \text{ es un proceso estocástico en tiempo continuo.}$$

Realización o instancia: La **realización** (o **instancia**) de un proceso estocástico es la sucesión de valores concretos que toman las variables aleatorias al ejecutar el proceso.

Estados transiente y de régimen

- En estado *transiente* la distribución de probabilidades de las variables aleatorias *varía* a lo largo del proceso.
- En estado *de régimen* (o estado estable) dicha distribución se mantiene *constante* a través del proceso.

4 Proceso Poisson

4.1. Proceso de Conteo

Definición Un *proceso de conteo* es una familia de v.a. $\{N(t), t \geq 0\}$ tal que $N(t)$ representa el número de eventos ocurridos en $[0, t]$.

Propiedades básicas

(a) $N(t) \in \mathbb{N}_0$ y $N(0) = 0$.

(b) Si $0 \leq s < t$, entonces $N(s) \leq N(t)$ (monótono no decreciente).

(c) El número de eventos en $(s, t]$ es $N(t) - N(s)$.

Incrementos independientes $\{N(t), t \geq 0\}$ posee incrementos independientes (i.i.) si $N(t + s) - N(t)$ es independiente de $\{N(u), 0 \leq u \leq t\}$ para todo $s, t > 0$.

Incrementos estacionarios Tiene incrementos estacionarios (i.e.) si la distribución de $N(t+s) - N(t)$ depende solo de s, no de t.

Propiedad de orden Existe $\lambda > 0$ tal que, para $h \to 0$,

$$P\big(N(h) = 1\big) = \lambda h + o(h), \qquad P\big(N(h) \geq 2\big) = o(h).$$

Entonces $N(h) \approx \begin{cases} 0 & \text{con prob. } 1 - \lambda h, \\ 1 & \text{con prob. } \lambda h. \end{cases}$

4.2. Proceso de Poisson

Definición Un proceso de conteo $\{N(t), t > 0\}$ es un **Proceso de Poisson** de tasa $\lambda > 0$ si:

(I) posee incrementos independientes;

(II) posee incrementos estacionarios;

(III) cumple la propiedad de orden.

Distribución de estado

$$P\big(N(t) = k\big) = \frac{(\lambda t)^k \, e^{-\lambda t}}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Tiempos entre eventos Sea T_1 el tiempo hasta el primer evento y T_n ($n \geq 2$) el tiempo entre los eventos $n-1$ y n.

$$T_1, T_2, \ldots \text{ son i.i.d. } \operatorname{Exp}(\lambda).$$

Falta de memoria (exponencial) Para $x, y > 0$:

$$P(T_1 > x + y \mid T_1 > x) = e^{-\lambda y}.$$

Resultado inverso Si los tiempos $\{T_i\}$ de un proceso de conteo son i.i.d. exponenciales $\operatorname{Exp}(\lambda)$, entonces el proceso resultante es de Poisson (tasa λ).

Instante del k-ésimo evento Sea $S_k = \sum_{i=1}^{k} T_i$. Entonces $S_k \sim \Gamma(k, \lambda)$ (Erlang de orden k); $F_{S_k}(x) = P(N(x) \geq k) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^j}{j!}$.

Distribución condicional de los tiempos de evento Dados $N(t) = n$, los tiempos $(S_1, \ldots, S_n)$ son los estadísticos de orden de n v.a. Unif$(0, t)$. En particular,

$$P(S_1 < x \mid N(t) = 1) = \frac{x}{t}$$

$$P\big(N(u) = k \mid N(t) = n\big) = \binom{n}{k} \big(\frac{u}{t}\big)^k (1 - \frac{u}{t})^{n-k}$$

Por lo tanto, la distribución de $N(u)$ dado $N(t) = n$ distribuye $Binomial(n, \frac{u}{t})$. Este resultado tambien es válido para cualquier intervalo de largo t y súb-intervalo de largo u contenido en el primero.

4.3. Descomposición y Suma

Descomposición (adelgazamiento) Sea $\{N(t)\}$ un proceso de Poisson de tasa λ. Clasifique cada evento, independientemente, como tipo 1 con prob. p y tipo 2 con prob. $1 - p$. Entonces

$$N_1(t) \sim \text{Poisson}(\lambda p), \qquad N_2(t) \sim \text{Poisson}\big(\lambda(1-p)\big),$$

y $N_1(t)$ y $N_2(t)$ son procesos *independientes*.

Suma de procesos Poisson Si $N_i(t)$ $(i = 1, \ldots, k)$ son procesos de Poisson independientes con tasas λ_i, entonces

$$N(t) = \sum_{i=1}^{k} N_i(t) \sim \text{Poisson}\big(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k\big).$$

4.4. Extensiones

Proceso Poisson compuesto

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \qquad t \geq 0,$$

donde $N(t)$ es Poisson(λ) y $\{Y_i\}$ son i.i.d. (indep. de N).

- Incrementos independientes y estacionarios.
- No satisface la propiedad de orden.
- $E[X(t)] = E[Y_1]\ E[N(t)] = E[Y_1]\lambda t$.

Proceso Poisson no–homogéneo

Definido por una tasa determinista $\lambda(t) > 0$:

$$P\big(N(t+h) - N(t) \geq 2\big) = o(h),$$
$$P\big(N(t+h) - N(t) = 1\big) = \lambda(t)h + o(h).$$

Sea $m(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds$. Entonces

$$P\big(N(t+s) - N(t) = n\big) = \frac{\big[m(t+s) - m(t)\big]^n \, e^{-[m(t+s)-m(t)]}}{n!}.$$

El primer tiempo T_1 cumple $P(T_1 > t) = e^{-m(t)}$ (no es exponencial).

Proceso de Renovación

Definición Sea $\{N(t),\, t \geq 0\}$ un proceso de conteo y $\{T_i,\, i = 1, 2, \ldots\}$ los tiempos entre eventos. Si $\{T_i\}$ son v.a. no negativas, independientes e idénticamente distribuidas con c.d.f. $F(\cdot)$, entonces $\{N(t)\}$ se denomina **Proceso de Renovación**. Cada vez que ocurre un evento el proceso "se renueva", el tiempo al próximo evento posee nuevamente la distribución F.

Distribución de $N(t)$ Sea $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$ la suma de los n primeros tiempos entre eventos (-ésima convolución F^{*n}). Como $N(t) \geq n \iff S_n \leq t$,

$$P\big(N(t) = n\big) = F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Función de renovación El número medio de eventos en $[0, t]$ se define como

$$m(t) = E[N(t)].$$

Condicionando en el primer tiempo T_1 y aplicando el argumento de renovación se obtiene la **ecuación de renovación** :

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-x)\, f_{T_1}(x)\, dx,$$

donde f_{T_1} es la densidad de T_1.

Relación con el Proceso de Poisson El proceso de Poisson es un caso particular de proceso de renovación en el que $T_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$; en él, la renovación ocurre no sólo en cada evento sino "en todo instante".

5 Cadenas de Markov en Tiempo Discreto

5.1. Motivación

Los procesos de decisión y planificación en contextos inciertos pueden modelarse mediante *procesos estocásticos*. Cuando el estado del sistema evoluciona en instantes discretos y el futuro depende del pasado únicamente a través del presente, el modelo apropiado es la **Cadena de Markov en Tiempo Discreto** (CMTD).

5.2. CMTD y sus propiedades

Propiedad markoviana

Un proceso estocástico $\{X_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ cumple la *propiedad markoviana* si

$$P\big(X_{n+1} = j \mid X_n = i,\ X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\big) = P\big(X_{n+1} = j \mid X_n = i\big),$$

para todo $j, i, i_{n-1}, \ldots, i_0$ en el conjunto de estados posibles de X_n

Propiedad estacionaria

Un proceso estocástico $\{X_n,\ n = 0, 1, 2, \dots\}$ posee *incrementos estacionarios* cuando

$$P\big(X_{n+1} = j \mid X_n = i\big) = P_{ij}, \qquad \text{independiente de } n.$$

Definición de CMTD

Un proceso estocástico es una *CMTD* si verifica simultáneamente la propiedad markoviana y la estacionaria. Trabajaremos con un espacio de estados numerable $S = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Probabilidades de transición en una etapa

En una CMTD esta probabilidad se define como:

$$P_{ij} = P\big(X_{n+1} = j \mid X_n = i\big)$$

Se cumple tambien que:

$$P_{ij} \geq 0, \qquad \sum_{j \in S} P_{ij} = 1.$$

Matriz de transición

Denominaremos P a la matriz de transición en una etapa.

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots & P_{0j} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & \cdots & P_{1j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ P_{i0} & P_{i1} & \cdots & P_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- Para cada fila i de P , su suma debe ser igual a 1
- La suma de las columnas no necesariamente es igual a 1

Transición en n etapas

En una CMTD esta probabilidad esta dada por:

$$P_{ij}^{(n)} = P\big(X_{m+n} = j \mid X_m = i\big)$$

Para todo $m, n \geq 0$. Note que $P_{ij}^{(1)} = P_{ij}$.

Ecuación de Chapman–Kolmogórov

Se cumple que:

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)} \quad \forall\, m, n \geq 0,\ \forall\, i, j \in S$$

Lo que nos permite calcular probabilidades de transición en n etapas.

Matriz de transición en n etapas

Denominaremos $P^{(n)}$ a la matriz de transición en n etapas. Esta matriz está formada con los $P_{ij}^{(n)}$ de la CMTD.

Se tiene que:

$$P^{(n)} = P^n.$$

Distribución de probabilidades del proceso

Sea $\{Xn, n = 0, 1, 2...\}$ una CMTD con un espacio de estados dados por $\{0, 1, 2, ..., r\}$. Llamaremos al vector distribución de probabilidades del proceso en la etapa n, al vector $f^{(n)}$ tal que:

$$f^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = r) \end{pmatrix}$$

Si se conoce $f^{(0)}$, se puede calcular $f^{(n)}$ con la siguiente ecuación:

$$\left(f^{(n)}\right)^\top = \left(f^{(0)}\right)^\top P^n.$$

Representación gráfica

Cada estado se representa por un *nodo*. Existe una arista dirigida de i a j si $P_{ij} > 0$. El grafo facilita el estudio de comunicación, clases y periodicidad.

5.3. Visitas entre estados

Tiempo de primera visita

El tiempo (número de etapas) empleado para ir desde el estado i al estado j por primera vez está dado por:

$$T(i, j) = \inf \{n : X_n = j,\, n \geq 0\} \mid X_0 = i$$

Probabilidad de primera visita en k pasos

La probabilidad de ir del estado i al estado j en k etapas, sin haber pasado por j antes de la etapa k está dada por:

$$F_k(i, j) = P\big(T(i, j) = k\big)$$

Se tiene que:

$$F_k(i, j) = \sum_{r \neq j} P_{ir}\, F_{k-1}(r, j) \quad \forall\, k \geq 2$$

Probabilidad de visitar un estado en algún momento

La probabilidad de visitar eventualmente el estado j dado que al inicio el proceso está en el estado i se denotará $F(i,j)$ y corresponde a:

$$F(i,j) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(i,j) = P\big(T(i,j) < \infty\big).$$

Se tiene que:

$$F(i,j) = P_{ij} + \sum_{r \neq j} P_{ir}\, F(r,j).$$

Valor esperado del número de etapas para ir de i a j

Si $F(i,j) = 1$,

$$\mathbb{E}\big[T(i,j)\big] = \sum_{k=1}^{\infty} k\, F_k(i,j) = 1 + \sum_{l \neq j} P_{il}\, \mathbb{E}\big[T(l,j)\big].$$

Además, la probabilidad de retornar alguna vez al estado j esta dada por:

$$F(j,j)$$

5.4. Clasificación de estados

Estado recurrente

El estado i se denomina *recurrente* si:

$$F(i,i) = P(T(i,i) < \infty) = 1$$

Además se tiene que:

- Si $\mathbb{E}(T(i,i)) = \infty$, i se denomina *recurrente nulo*
- Si $\mathbb{E}(T(i,i)) < \infty$, i se denomina *recurrente positivo*

Estado transiente

El estado i se denomina *transiente* si:

$$F(i,i) = P(T(i,i) < \infty) < 1$$

Si una CMTD posee una cantidad de estados **finita**, luego:

- No pueden existir estados recurrentes nulos.
- No pueden ser todos los estados transientes.

Comunicación entre estados

Los estados i y j se *comunican* ($i \leftrightarrow j$) si hay camino de i a j y de j a i.
La relación de comunicación satisface las siguientes tres propriedades:

- **Reflexión:** $i \leftrightarrow i$ para todo estado i
- **Simetría:** $i \leftrightarrow j$ si y solo si $j \leftrightarrow i$
- **Transitividad:** Si $i \leftrightarrow k$ y $k \leftrightarrow j$, entonces $i \leftrightarrow j$

Es decir, la relación de comunicación es una relación de equivalencia.

Clases

- La relación de comunicación define clases. Decimos que dos estados pertenecen a la misma clase si estos se comunican.
- Las clases constituyen una partición del conjunto de todos los estados.
- Todos los estados de una clase son del mismo tipo: transientes, recurrentes nulos o recurrentes positivos.
- Las clases de estados recurrentes son **cerradas**, es decir, si el sistema parte de un estado dentro de esa clase nunca sale.

Periodicidad

Un estado es periódico si partiendo desde ese estado solo es posible volver a él en un número de etapas que sea múltiplo de un número entero mayor a uno.

El período, d, de un estado j corresponde al máximo común divisor de los n para los que $P_{jj}^{(n)} > 0$.

- Si $d > 1$, diremos que el estado es periódico con período d.
- Si $d = 1$, diremos que el estado es aperiódico.

5.5. Largo plazo

Se estudia el límite $\lim_{n \to \infty} P_{ij}^{(n)}$.

Resultados clave

- Si j es transiente o recurrente nulo, $\lim_{n \to \infty} P_{ij}^{(n)} = 0$.
- Si j es recurrente positivo:

- Si j es aperiódico:

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \frac{F(i,j)}{\mathbb{E}(T(j,j))}$$

$$\lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mathbb{E}(T(j,j))}$$

- Si j es periódico con período d:
  - Si $i = j$:

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(nd)} = \frac{d}{\mathbb{E}(T(j,j))}$$

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(nd+k)} = 0 \quad \forall\, k \in \{1, 2, .., d-1\}$$

  - Si $i \neq j$ y pertenecen a la misma clase:

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n_0+nd)} = \frac{d}{\mathbb{E}(T(j,j))}$$

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n_0+nd+k)} = 0 \quad \forall\, k \in \{1, 2, .., d-1\}$$

    Donde n_0 es el mínimo de etapas para ir de i hasta j.
  - Si $i \neq j$ e i pertenece a una clase recurrente distinta:

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0$$

  - Si $i \neq j$ e i pertenece a una clase transiente:

    El límite depende de la estructura de la cadena

Existencia de los límites: Los límites $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$ existen para todos i, j *si y sólo si* la cadena no contiene clases recurrentes positivas periódicas.

5.6. Distribución Límite y Distribución Estacionaria

Distribución límite:

Si existen todos los límites para las probabilidades de transición en n etapas y, en todos los casos, estos límites no dependen del estado inicial, diremos que el proceso tiene **distribución de probabilidades límite**. Es decir, en este caso se tiene que para todo j en el espacio de estados se cumple que para cualquier i:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$$

Distribución estacionaria:

Por otra parte, la solución del siguiente sistema se denomia distribución de **probabilidades estacionaria**:

$$\pi^T = \pi^T P$$
$$\sum_i \pi_i = 1$$
$$\pi_i \geq 0 \quad \forall i$$

Si una CMTD tiene distribución límite y distribución estacionaria, entonces ambas coinciden. Usaremos el vector π para denotar esta distribución. Con esto, en este caso podemos entonces escribir:

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j) = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$$

Interpretación: La probabilidad límite de que el proceso se encuentre en el estado j en un tiempo n ($n \to \infty$) es igual a la proporción de tiempo, en el largo plazo, que el proceso estará en el estado j (probabilidad estacionaria).

Cadenas irreducibles

Diremos que una CMTD es ***irreducible*** cuando tiene finitos estados y todos sus estados se comunican.

Notemos que una CMTD irreducible consiste, por lo tanto, de una **única clase recurrente positiva**.

Si una CMTD es irreducible y aperiódica, entonces el proceso tiene distribución límite y distribución estacionaria (las cuales coinciden).

Cadenas con clases transientes

Consideremos una CMTD con espacio de estados $S = C \cup T$, en que C es una clase de estados recurrentes positivos aperiódicos y T es un conjunto de uno o más clases transientes. Si para cada estado i en T se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \in C \mid X_0 = i) = 1$$

entonces la cadena tiene una única distribución estacionaria. Además, se cumplirá que $\pi_j > 0$ para todo $j \in C$ y $\pi_j = 0$ para todo $j \in T$.

6 Cadenas de Markov en Tiempo Continuo

6.1. Definición

Supongamos que tenemos un proceso estacástico en tiempo continuo, $\{X(t), t \geq 0\}$, cuyo espacio de estados ϵ generalmente será el conjunto de enteros no negativos.

Propiedad Markoviana

$\{X(t), t \geq 0\}$ posee la propiedad markoviana si para todo $s, t \geq 0$, todo entero no negativo i, j, y para todo $x(u) \in \epsilon$, $0 \leq u \leq s$,

$$P(X(t+s) = j | X(s) = i, X(u) = x(u) \quad \forall u \in [0, s)) = P(X(t+s) = j | X(s) = i)$$

Propiedad Estacionaria

El proceso $\{X(t), t \geq 0\}$ posee la propiedad de estacionariedad si $P(X(t+s) = j|X(s) = i)$ no depende de s.

Notación: $P_{ij}(t) = P(X(t+s) = j|X(s) = i)$

CMTC

El proceso $\{X(t), t \geq 0\}$ es una CMTC si cumple la propiedad markoviana y con la propiedad estacionaria.

Consecuencias propiedad markoviana y estacionaria:

- No importa el tiempo que haya permanecido en un determinado estado.

$$P(T_i > s + t|T_i > s) = P(T_i > t) \quad \forall s, t \geq 0, \quad i \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

- El tiempo de permanencia en un estado i (T_i) no tiene memoria, por lo que tiene que ser exponencial.

CMTC Definición alternativa

Una CMTC es un proceso $\{X(t), t \geq 0\}$ que tiene las siguientes propiedades:

- Cada vez que entra al estado i, el tiempo que permanece en ese estado antes de efectuar una transición a un estado diferente tiene distribución exponencial de parametro $v_i \to$ tiene media $\frac{1}{v_i}$
- Cuando un proceso deja el estado i, a continuación entra al estado j con una probabilidad P_{ij}. Las probabilidades P_{ij} deben satisfacer:

$$P_{ii} = 0 \quad \forall i\,; \quad \sum_j P_{ij} = 1 \quad \forall i$$

Conclusiones importantes:

- Una CMTC es un proceso estocástico que se mueve de un estado a otro de acuerdo a una CMTD.
- Los P_{ij} corresponden a las componentes de la matriz P de transición de la CMTD asociada.
- Los tiempos de permanencia en un estado dado son iid con distribución exponencial (la media de los tiempos puede ser diferente para distintos estados).
- El tiempo que el proceso permanece en el estado i y el próximo estado a visitar son independientes.

6.2. Probabilidades de Transición

Considere una CMTC. Se llama **probabilidad de transición**, $P_{ij}(t)$, a la probabilidad de que el proceso, dado que ahora está en el estado i, en t unidades de tiempo más esté en el estado j.

$$P_{ij}(t) = P(X(t+s) = j|X(s) = i) \quad \forall i, j\,; \quad \forall s, t \geq 0$$

Ecuación Champan-Kolmogorov

Para todo $s, t \geq 0$ se tiene que:

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) \cdot P_{kj}(s)$$

Tasa de transición instantánea

Se denomina **tasa de transición instantánea**, q_{ij}, a la tasa a la cual el proceso realiza una transición del estado i al estado j. Esta tasa está dada por:

$$q_{ij} = v_i \cdot P_{ij}$$

Las tasas de transición instantáneas determinan los parámetros de una CMTC.

$$P_{ij} = \frac{q_{ij}}{v_i} = \frac{q_{ij}}{\sum\limits_{j \in \epsilon} q_{ij}}$$

Probabilidades Límite

Probabilidad Límite

Considere la probabilidad de que una CMTC esté en el estado j después de un timepo t, con $t \to \infty$. Si esta probabilidad existe y es independiente del estado inicial se llama probabilidad límite:

$$P_j = \lim_{t \to \infty} P_{ij}(t)$$

En este caso, se tiene que cumplir que:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{d}{dt} P_{ij}(t) = 0$$

Esto es análogo a cuando en una CMTD se dice que «$f^{(n+1)} = f^{(n)}$» cuando hay límite.

Ecuación de equilibrio

Es posible demostrar que se cumple lo siguiente, conocido como la ecuación de Kolmogorov:

$$\frac{d}{dt} P_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} v_k P_{ik}(t) P_{kj} - v_j P_{ij}(t)$$

Tomando límite a ambos lados, obtenemos:

$$0 = \sum_{k \neq j} v_k P_k P_{kj} - v_j P_j$$

$$v_j P_j = \sum_{k \neq j} v_j P_k P_{kj}$$

Ecuación de equilibrio en el largo plazo

En una CMTC se cumple que, para cada estado $j \in \epsilon$, la tasa de salida de j en el largo plazo es igual a la suma de las tasas de entrada a j en el largo plazo. Es decir:

$$v_j \cdot P_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} \cdot P_k \quad \forall j \in \epsilon$$

Interpretación:

- Si los P_j existen, se pueden interpretar como la proporción del tiempo que el proeso se encuentra en el estado j en el largo plazo.
- $v_j \cdot P_j$ corresponde a la tasa a la cual el proceso deja el estado j en el largo plazo.
- $\sum_{k \neq j} q_{kj} \cdot P_k$ corresponde a la tasa a la cual el proceso entra al estado j en el largo plazo.

Si a estas ecuaciones le agregamos la ecuación $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$, entonces tendremos un sistema de ecuaciones que permite obtener las probabildades límite del proceso.

Procesos de Nacimiento y Muerte

Un proceso de nacimiento es una CMTC con estados {0,1,2,...} para la cual las transiciones desde el estado i sólo pueden ser al estado $i - 1$ o al estado $i + 1$.

Probabilidades límites para Nacimiento y Muerte

Dado $X(t) = j$ tendremos:

- Tiempo hasta el siguiente nacimiento: $Exp(\lambda_j)$
- TIempo hasta la siguiente muerte: $Exp(\mu_j)$

Luego,

$$v_0 = \lambda_0$$

$$v_j = \lambda_j + \mu_j \quad \forall j \in \{0, 1, 2, ...\}$$

$$P_{01} = 1$$

$$P_{j,j+1} = \frac{\lambda_j}{\lambda_j + \mu_j} \quad \forall j \in \{1, 2, 3, ...\}$$

$$P_{j,j-1} = \frac{\mu_j}{\lambda_j + \mu_j} \quad \forall j \in \{1, 2, 3, ...\}$$

Reemplazando en las ecuaciones de equilibrio:

$$(\lambda_j + \mu_j)P_j = \lambda_{j-1}P_{j-1} + \mu_{j+1}P_{j+1}$$

Es decir, para cada j, esta ecuación sería:

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$

$$(\lambda_1 + \mu_1)P_1 = \lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2$$

$$(\lambda_2 + \mu_2)P_2 = \lambda_1 P_1 + \mu_3 P_3$$

$$\dots$$

$$(\lambda_n + \mu_n)P_n = \lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1}$$

Sumando estas $n+1$ ecuaciones:

$$\lambda_n P_n = \mu_{n+1} P_{n+1}$$

$$P_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_n$$

Realizando el mismo cálculo recursivo, podemos obtener la siguiente expresión:

$$P_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k}{\prod_{k=1}^{n} \mu_k} P_0$$

Además se debe cumplir que:

$$\sum_{n=o}^{\infty} P_n = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k}{\prod_{k=1}^{n} \mu_k} P_0 = 1$$

$$P_0 + P_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k}{\prod_{k=1}^{n} \mu_k} = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k}{\prod_{k=1}^{n} \mu_k}}$$

Estas probabilidades existen si y solo si:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k}{\prod_{k=1}^{n} \mu_k} < \infty$$

7 Sistemas de Espera

Definición

Consideremos un sistema al cual clientes llegan de acuerdo a un proceso estocástico a requerir un servicio (o atención). Una vez que llegan, si no hay capacidad de atención disponible, deben esperar (en una cola)