1. Introducción y Laplace

La propiedad más importante de la transformada de Laplace:

$L[x] = X(s)$ $\quad$ $L[\dot{x}] = sX(s) - x(0)$ $\quad$ y $\quad$ $L[\ddot{x}] = s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$

Reglas para la expansión en fracciones simples:

Caso 1: polos reales p_1 y p_2: $\quad \frac{\dots}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{A}{(s-p_1)} + \frac{B}{(s-p_2)}$

Caso 2: polo doble $\quad \frac{\dots}{(s-p)(s-p)} = \frac{A}{(s-p)} + \frac{B}{(s-p)^2}$

Caso 3: polos imaginarios $\quad \frac{\dots}{(s-z)(s-\bar{z})} = \frac{\dots}{s^2+ps+q} = \frac{s+A}{(s+A)^2+B^2}\ o\ \frac{B}{(s+A)^2+B^2}$

Caso 4: polos imaginarios dobles $\quad \frac{\dots}{(s-z)^2(s-\bar{z})^2} = \frac{\dots}{(s^2+ps+q)^2} = \frac{As+B}{(s^2+ps+q)} + \frac{Cs+D}{(s^2+ps+q)^2}$

Se calculan los coeficientes A, B, … comparando los coeficientes de $s^n, s^{n-1}, \dots, s, s^0$

2. Función de transferencia, diagrama de bloques y Mason

Conclusiones:

1) Un sistema lineal "se mueve" cuando hay una señal de entrada y/o condiciones iniciales
2) La función de transferencia $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ es independiente de las condiciones iniciales

Regla de Mason: $\quad M = \frac{\sum_{k=1}^{N} M_k \Delta_k}{\Delta}$

N: número total de rutas directas
M_k: ganancia de la ruta directa "k"

$\Delta = 1 - \sum ganancia\ de\ los\ lazos\ indicidua les +$

$\sum ganancia\ de\ productos\ de\ todas\ las\ posibles\ combinaciones\ de\ dos\ lazos\ que\ no\ se\ toquen -$

$\sum ganancia\ de\ productos\ de\ todas\ las\ posibles\ combinaciones\ de\ tres\ lazos\ que\ no\ se\ toquen +$

$\sum \dots$

$\Delta_k = \Delta$ con todos los lazos que tocan la ruta directa "k" igual a cero

3. Mason, diagrama de flujos y modelos matemáticos

nodo de entrada: solo salen ramas   nodo de salida: solo entran ramas

Cualquier nodo puede ser una salida pero no cualquier nodo puede ser una entrada!

4. Modelos matemáticos y respuesta transitoria

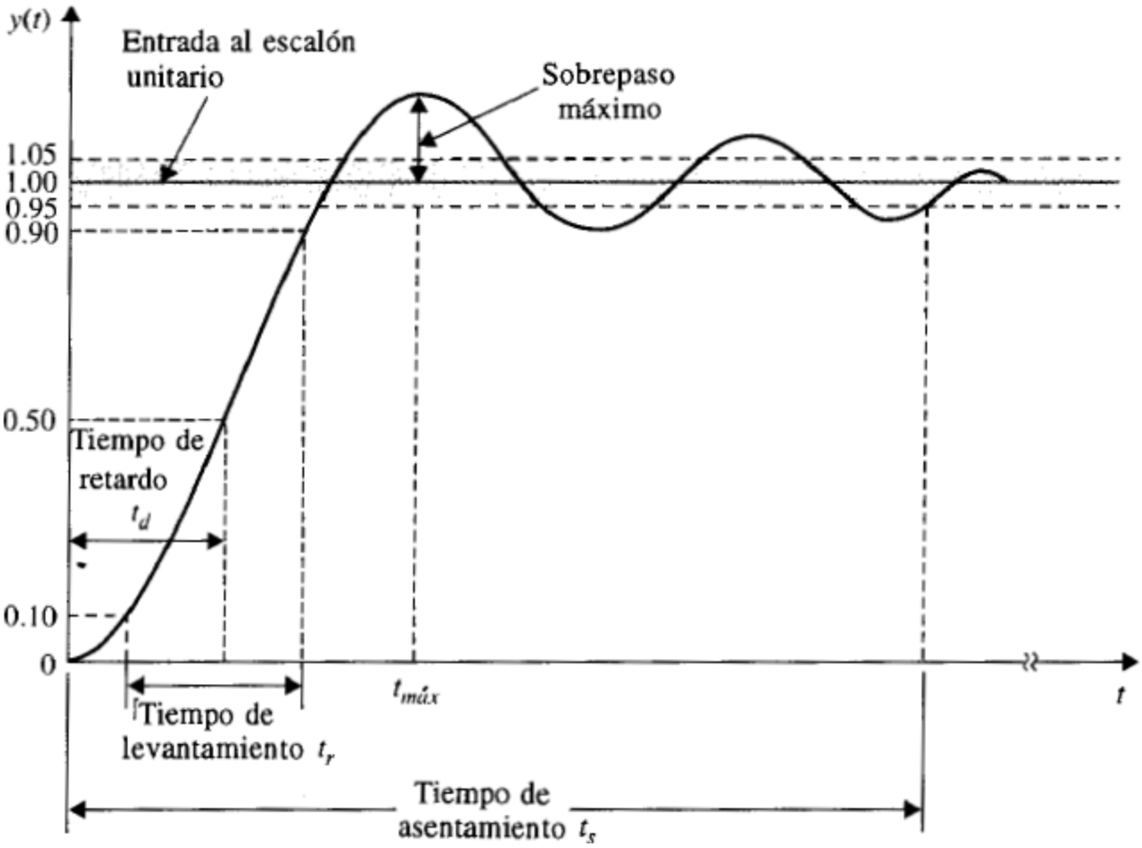
<u>Respuesta temporal de un sistema</u>

La respuesta temporal de un sistema lineal se divide normalmente en dos partes:

$$y(t) = \underbrace{y_t(t)}_{\text{respuesta transitoria (corto plazo)}} + \underbrace{y_{ss}(t)}_{\text{respuesta en estado estable (largo plazo)}}$$

<u>Respuesta transitoria</u>

La señal de entrada que se usa generalmente es un escalón.



5. Ruth-Hurwitz y error en régimen permanente

<u>Criterio de Ruth-Hurwitz</u> Dado $G(s) = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$

$$\begin{array}{l|llll}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\
s^{n-2} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots \\
. & \beta_1 & \beta_2 & & \\
. & & & & \\
s^0 & & & &
\end{array}$$

$\alpha_1 = -\det(\,[\,a_n \;\; a_{n-2}\;;\; a_{n-1} \;\; a_{n-3}\,]\,) / a_{n-1}$

$\alpha_2 = -\det(\,[\,a_n \;\; a_{n-4}\;;\; a_{n-1} \;\; a_{n-5}\,]\,) / a_{n-1}$

Cada cambio de signo de la primera columna indica que haya un polo con parte real positivo.

Error en régimen permanente

Señales de prueba:

Escalón $R(s) = \frac{1}{s}$ ➔ $\varepsilon_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+H(s)G(s)}$ $r(t) = 1$ Error de posición: $k_p = \lim_{s\to 0}\big(H(s)G(s)\big)$

Rampa $R(s) = \frac{1}{s^2}$ ➔ $\varepsilon_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+s*H(s)G(s)}$ $r(t) = t$ Error de velocidad: $k_v = \lim_{s\to 0}\big(s * H(s)G(s)\big)$

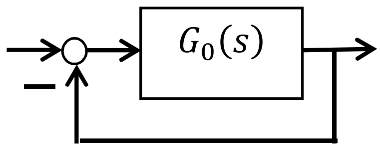
Parábola $R(s) = \frac{1}{s^3}$ ➔ $\varepsilon_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2+s^2*H(s)G(s)}$ $r(t) = t^2$ Error de aceleración: $k_a = \lim_{s\to 0}\big(s^2 * H(s)G(s)\big)$

Tipos de sistemas:

Tipos de sistema	Constantes de error			Error de estado estable	Entrada de rampa	Entrada parábola
j	K_p	K_v	K_a	$\frac{R}{1+K_p}$	$\frac{R}{K_v}$	$\frac{R}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{R}{1+K}$	∞	∞
1	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$	∞
2	∞	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$
3	∞	∞	∞	0	0	0

6. Régimen permanente, polos/ceros y lugar de raíces

Dado $\mathrm{G_0(s)} = \mathrm{k}\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$ $\mathrm{n} \geq \mathrm{m}$ $\mathrm{k} \geq 0$ ➔ $1 + \mathrm{G_0(s)} = 0.$



Reglas para el lugar de raíces:

1. El lugar de raíces es simétrico con respecto al eje real
2. Las partes del eje real que se encuentra a la izquierda de una cantidad impar de raíces y ceros son lugares de raíces
3. Para k=0 los lugares de las raíces son los polos de G_0
4. Para k=∞ los lugares de las raíces son los ceros de G_0 o ∞
5. Hay n-m asíntotas
6. Las asíntotas se cruzan en el punto: $s = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m}$
7. Los ángulos de las asíntotas son: $\varphi = \frac{(2r-1)\pi}{n-m}$, r=1,2,…,n-m
8. Los lugares de raíces se dividen en los puntos x que cumplan: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-p_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{x-z_i}$

Si la función de transferencia tiene un factor -1 (para todos los ceros y polos de la forma (s ± const)) cambian algunas reglas:

2. Las partes del eje real que se encuentra a la izquierda de una cantidad par de raíces y ceros son lugares de raíces

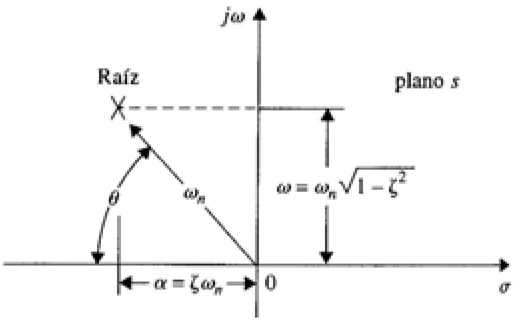
7. Los ángulos de las asíntotas son: $\varphi = \frac{(2r-2)\pi}{n-m}$, r=1,2,…,n-m

8. Lugar de raíces y compensación “a ojo”

<u>Conclusiones lugar de raíces:</u>

1) A veces no es claro como dibujar el lugar de raíces
2) No es posible cancelar un polo <u>positivo</u> con un cero
3) Mientras más a la izquierda se encuentran los polos mejor
4) Para mejorar el tiempo de levantamiento es generalmente conveniente elegir polos con parte imaginaria
5) Generalmente conviene agregar la misma cantidad de ceros y polos porque cada polo tiende a inclinar el lugar de raíces hacia el lado inestable mientras cada cero tiene el efecto contrario
6) Los polos cerca del eje imaginario que no tienen un cero cerca son los polos dominantes

9. Compensación mediante lugar de raíces



$0 < \zeta < 1$ con $\zeta = \cos(\theta)$

Fórmulas para el sistema prototipo de segundo orden:

$sobrepaso = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ para $0 < \zeta < 1$

$tiempo\ de\ retardo\ t_d \approx \frac{1+0.7\zeta}{\omega_n}$ para $0 < \zeta < 1$ (llegar al 50 % del valor final)

$tiempo\ de\ levantamiento\ t_r \approx \frac{0.8+2.5\zeta}{\omega_n}$ para $0 < \zeta < 1$ (del 10 al 90 % del valor final)

$$tiempo\ de\ asentamiento\ t_s \approx \begin{cases} \frac{3.2}{\zeta\omega_n}\ para\ 0 < \zeta < 0.69 \\ \frac{4.5\zeta}{\omega_n}\ para\ 0.69 < \zeta \end{cases}$$ (establecer en valor final +/- 5%)

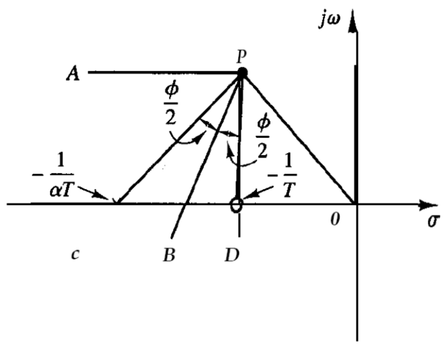
<u>Compensación mediante lugar de raíces:</u>

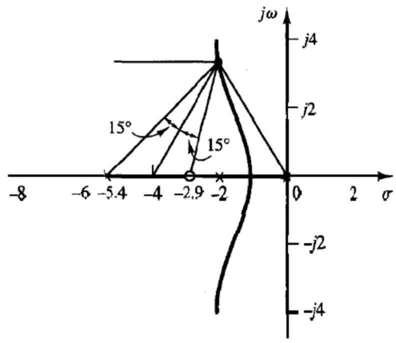
Consideraciones para el diseño de un compensador mediante lugar de raíces:

1) Especificaciones de desempeño no deben ser más rigurosas de lo necesario para efectuar la tarea definida
2) Un compensador es solo necesario si no se puede alcanzar el lugar de raíces deseado con una ganancia
3) Un compensador en adelanto hace el sistema más rápido (mejora la respuesta transitoria), un compensador en atraso mejora el error en régimen permanente. También existen compensadores en adelanto-atraso que mejoran la respuesta transitoria y el error en régimen permanente
4) Generalmente se busca mejorar el sobrepaso máximo, el tiempo de levantamiento o el tiempo de asentamiento

Compensación en adelanto: $Compensador\ G_c = k_c * \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} = k_c * \frac{s-c}{s-p}$

Algoritmo:
1) Especificaciones de desempeño → ubicación deseada de los polos dominantes
2) Si no alcanza una ganancia para mover los polos a la ubicación deseada → calcular el ángulo α
3) Determinar la ubicación del polo y del cero del compensador para contribuir el ángulo ϕ
4) Determinar la ganancia de lazo abierto con la condición de magnitud





10. Diagrama de Bode

Dado el sistema lineal $G(s) = k * s^r * \underbrace{\frac{(s-c_1)*\ldots*(s-c_n)}{(s-p_1)*\ldots*(s-p_m)}}_{G^*}.$

Receta de cocina para el diagrama de Bode:

1) Calcular las frecuencias de los ceros y polos reales e imaginarios
   a. Ceros/polos reales: $(\boldsymbol{s - c/p}) \rightarrow\ \boldsymbol{\omega_i = |c|/|p|}$
   b. Ceros/polos conjugados complejos: $(\boldsymbol{s^2 + 2zws + w^2}) \rightarrow\ \boldsymbol{\omega_i = |w|}$

   Ojo: siempre la función de transferencia tiene que quedar (1*s - k) y no (k*s - 1)

Magnitud:

2) El punto de inicio para la magnitud es: $\boldsymbol{M_{db}(\omega_{min}) = 20 * \log_{10}(|k * G^*(0)| * (\omega_{min})^r)}$
3) Del punto de inicio se dibuja una recta hacia la izquierda con inclinación $\boldsymbol{r * 20 \frac{db}{decada}}$
4) La amplitud se inclina según los ceros y polos:
   a. Ceros reales: $\boldsymbol{+20\ db/decada}$
   b. Cero conjugados complejos: $\boldsymbol{+40\ db/decada}$
   c. Polos reales: $\boldsymbol{-20\ db/decada}$
   d. Polos conjugados complejos: $\boldsymbol{-40\ db/decada}$

Fase:

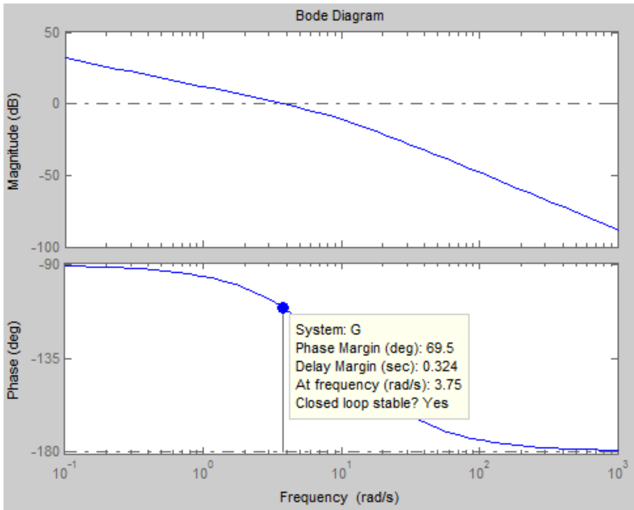
5) La fase para la frecuencia 0 es: $\boldsymbol{\varphi(0) = \begin{cases} r * 90° & si \;\; k * G^*(0) > 0 \\ -180 + r * 90° & si \;\; k * G^*(0) < 0 \end{cases}}$

6) La fase cambia en cada frecuencia ω_i según las reglas:
   a. Ceros reales: la fase hace un salto de $\boldsymbol{-90° * signo(cero)}$
   b. Ceros conjugados complejos: la fase hace un salto de $\boldsymbol{+180 * signo(z * w)}$
   c. Polos reales: la fase hace un salto de $\boldsymbol{+90° * signo(polo)}$
   d. Polos conjugados complejos: la fase hace un salto de $\boldsymbol{-180 * signo(z * w)}$

7) Si hay ceros/polos del estilo $(s^2 + \omega^2)$ se puede considerar la fase en cero como cualquiera de los dos casos de la regla 5)

Para tener en cuenta: La magnitud sigue la aproximación de rectas mucho mejor que la fase!

11. Compensación Bode



Compensador:

Margen de fase:

$$G_c(s) = K_c\alpha\frac{\tau s+1}{\alpha\tau s+1} = K\frac{\tau s+1}{\alpha\tau s+1} \quad 0 < \alpha < 1$$

1. Determine la ganancia K que satisfaga el requisito de constante estática de error propuesta
2. Dibuje el diagrama de Bode K*G, que es el sistema con la ganancia ajustada sin compensar
3. Determine el ángulo de fase que se necesita agregar al sistema. A ese valor, agréguele de 5º a 12º más (por el desplazamiento de la magnitud)
4. Con el ángulo deseado, determine el factor de atenuación $sen(\theta_m) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$
5. Determine la frecuencia donde la magnitud del sistema no compensado sea $-20\log\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$
   Esta frecuencia es la nueva frecuencia de cruce de ganancia.
   Utilizando esta frecuencia la ecuación $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\tau}$ se obtiene el valor del cero y del polo $\frac{1}{\tau}$ y $\frac{1}{\alpha\tau}$
6. Con K y α , calcule la constante del compensador: $K_c = \frac{K}{\alpha}$

12. Variables de estado

Formula general:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0 u$$

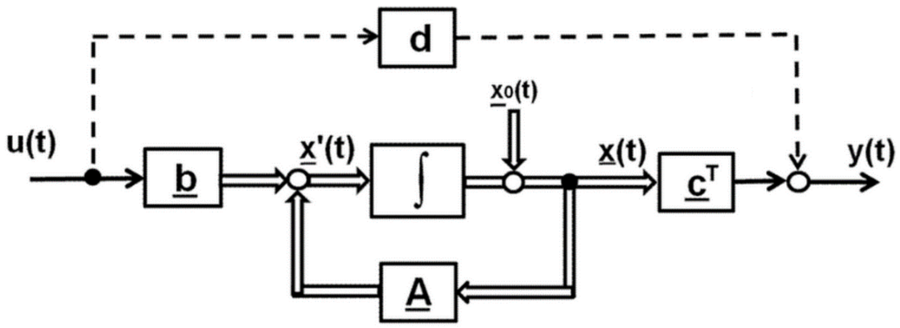
Variables de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_0 - b_n a_0 \;,\; b_1 - b_n a_1 \;,\; \dots \;,\; b_{n-1} - b_n a_{n-1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u$$ **(b_n es generalmente cero!)**

Comentarios variables de estado:

1) No hay una solución única para “A” y “b”
2) Los autovalores de A son los polos del sistema
3) Bajo ciertas condiciones las variables de estados permiten diseñar mejores compensadores que la función de transferencia
4) Se puede calcular la función de transferencia dado las variables de estado y viceversa
5) El diagrama de bloques de variables de estado queda como:



Definición **Controlable**: La controlabilidad de estado significa usualmente que es posible, por entradas admisibles, cambiar los estados de cualquier valor inicial a cualquier otro valor final dentro de un intervalo de tiempo.

Según el método de Kalman un sistema es controlable si y solo si la matriz “C” tiene rango completo:

$$C = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \ldots]$$

Definición **Observable**: Un sistema es observable si, mediante cualquier secuencia de los vectores de estado y de control, el estado actual puede determinarse en un tiempo finito usando solamente las salidas.

Según el método de Kalman un sistema es observable si y solo si la matriz “O” tiene rango completo:

$$O = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A^2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

13. Compensación variables de estado

Diseño de un compensador para variables de estado:

Con la realimentación $u = k * x = [k_1 \quad k_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ tenemos: $\dot{x} = Ax + (b * k)x = (A + b * k)x$

Donde los polos se calcula con: $det\big((A + b * k) - sI\big) = 0$

Por lo tanto puedo encontrar k_1 y k_2 comparando los coeficientes del polinomio característico.