

# Diseño y Construcción de un Sistema de Control Lineal

Ariel Iván Rabinovich  
Juan José Arce  
*Sistemas de Control I*

## Resumen

En base a los contenidos estudiados en la materia *Sistemas de Control I*, se diseñó un sistema de control lineal continuo aplicado al control de posición angular del eje de un motor. Luego se lo implementó como un sistema discreto sobre una placa de desarrollo Arduino. En este documento se desarrolla el proceso completo.

## 1. Introducción

En el presente informe se desarrollará el diseño del sistema de control de la posición angular del eje de un motor eléctrico, el cual tiene acoplado un tren de engranajes reductores de velocidad.

El motor utilizado es de corriente continua y funciona con una tensión nominal de 12Vcc. Al no contar con la hoja de datos de este motor, se debieron realizar las mediciones pertinentes para determinar sus especificaciones, las que se desarrollan más adelante en este trabajo

## 2. Modelado de un Motor de C.C.

A partir de la física electromagnética se conocen los fenómenos eléctricos que suceden en el interior de un motor de C.C. Se lo modelará a partir de las siguientes ecuaciones:

$$e(t) = R_a i(t) + L_a \frac{di(t)}{dt} + f_{emi} \quad \text{Ecuación 1}$$

$$f_{emi}(t) = K_b \omega(t) \quad \text{Ecuación 2}$$

Donde

- $e(t)$  es la tensión de alimentación del motor
- $R_a$  es la resistencia de la bobina
- $L_a$  es la inductancia de la bobina
- $i(t)$  es la corriente que circula por el motor
- $f_{emi}$  es la F.E.M inducida en la bobina por efecto Faraday-Lenz

Luego, por mecánica rotacional se explican los fenómenos relacionados a la rotación del eje y el cambio del comportamiento de este ante torques externos y objetos que actúen como carga. Se modelará utilizando la segunda ley de Newton aplicada a la rotación:

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = T_m - T_L - B\omega(t) \quad \text{Ecuación 3}$$

$$T_m = K_a i(t) \quad \text{Ecuación 4}$$

Donde

- $J$  es el momento de inercia del eje y su carga
- $T_m$  es el torque ejercido por el motor
- $T_L$  es el torque externo ejercido sobre el eje
- $B$  es el coeficiente de fricción viscosa del motor y de la carga asociada al eje

Como la ecuación 1 y 3 se deben cumplir simultáneamente, conforman un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, y si los valores de  $R$ ,  $L$ ,  $J$  y  $B$  no varían, estas ecuaciones son además a coeficiente constante.

Por estas razones se resolverá el sistema aplicando la Transformada de Laplace. De esta manera, y reemplazando los equivalentes de las ecuaciones 2 y 4 en 1 y 3, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$E(s) = I(s)(R_a + sL_a) + K_b \Omega(s) \quad \text{Ecuación 5}$$

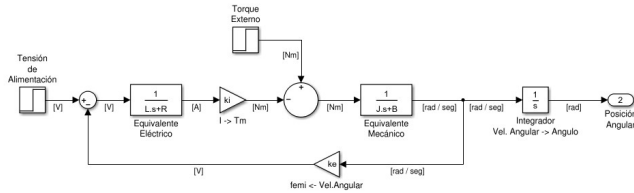
$$Js\Omega(s) = K_a I(s) - T_L - B\Omega(s) \quad \text{Ecuación 6}$$

Operando convenientemente se llega a:

$$\Omega(s) = \frac{I(s)K_a - T_L}{Js + B} \quad \text{Ecuación 7}$$

$$I(s) = \frac{E(s) - K_b \Omega(s)}{L_a s + R_a} \quad \text{Ecuación 8}$$

El diagrama en bloques equivalente es el siguiente:



NOTA : VER AMPLIACIÓN EN ANEXO

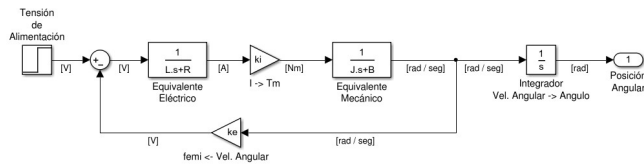
Si suponemos que sobre el eje no se ejercerán torques externos ( $T_L=0$ ) como es en el caso a desarrollar, reemplazamos la ecuación 8 sobre 7 y obtenemos

$$k_a E(s) = (L_a s + R_a)(J s + B)\Omega(s) + K_a K_b \Omega(s) \quad \text{Ecuación 9}$$

Despejando obtenemos la función de transferencia del motor:

$$\frac{\Omega(s)}{E(s)} = \frac{K_a}{J L_a s^2 + (L_a B + J R_a) s + R_a B + K_b K_a} \quad \text{Ecuación 10}$$

La función obtenida se modela por el siguiente diagrama en bloques:



### 3. Proceso de Medición de los Parámetros de un Motor de C.C y Determinación de la Función de Transferencia

A continuación se describe el proceso de medición de los siguientes parámetros del motor:

- $R_a$  Resistencia del bobinado
- $L_a$  Inductancia del bobinado
- $J$  Momento de Inercia
- $B$  Coeficiente de Fricción Viscosa
- $K_a$  Constante de Torque
- $K_b$  Constante Contra-electromotriz

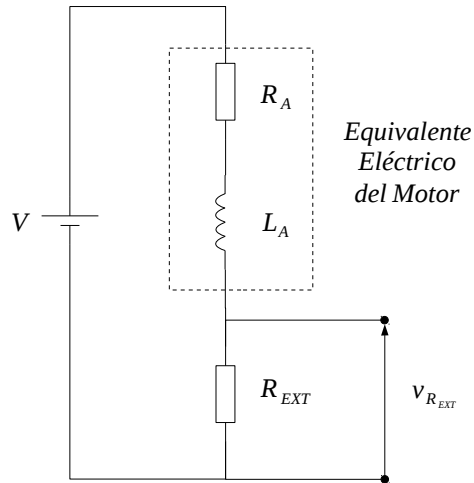
#### 3.1 Medición de $R_a$

Se utilizó el método del óhmetro, obteniendo como resultado:

$$R_a = 3,5 \Omega$$

#### 3.2 Medición de $L_a$

Para la medición de la inductancia del motor se aprovechó el fenómeno transitorio sobre la corriente de un circuito RL serie. Para esto se construyó el siguiente circuito:



Donde

- $R_{ext} = 3,3 \Omega$
- $V = 5 V$

Utilizando un osciloscopio, se midió sobre  $R_{ext}$  el tiempo de crecimiento ( $T_{RL}$ ) desde  $V_{R_{ext}} = 0$  hasta  $V_{R_{ext}} = 90\% V$  resultando  $T_{RL} = 73,53 \mu s$

Luego, a partir de la ecuación que modela a este fenómeno se sabe que  $\tau = \frac{L_a}{R_a + R_{ext}} = \frac{T_{RL}}{4}$ , de donde se llega a:

$$L_a = 2 mHy$$

#### 3.3 Medición de Velocidad Angular

Si bien la velocidad angular no es un parámetro de un motor, conocer su valor para distintas amplitudes de escalones de entrada nos es útil para identificar otros valores necesarios.

Para esta medición, se acopló un disco ranurado al eje del motor, con separación angular entre ranuras  $\Delta \theta$  conocida. Luego, mediante un sensor óptico de barrera y un microcontrolador Arduino, se midió el

tiempo que el motor demoraba en girar cada intervalo  $\Delta \theta$ . A partir de esto se pudo aproximar la velocidad angular instantánea  $\omega$  para cada instante de giro del motor como:

$$\omega \approx \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

### 3.4 Medición de $K_a$ y $K_b$

Para determinar  $K_b$  se alimenta al motor y se lo deja llegar a velocidad de régimen para escalones de entrada de distinta amplitud. Luego se calcula el  $K_b$  de la muestra como  $\hat{K}_b = \frac{V_{in}}{\omega} = \left[ \frac{V}{rad/seg} \right]$ . Luego, el  $K_b$  del motor es la media de los  $\hat{K}_b$

$$K_b = \frac{\sum_{i=0}^N \hat{K}_b}{N} = 32,13 \frac{mV}{rad/seg}$$

Utilizando las unidades del Sistema Internacional se cumple  $K_a = K_b$ . Por lo tanto:

$$K_a = 32,13 \frac{mNm}{A}$$

### 3.5 Medición de B

Para medir la constante de fricción viscosa B, se hace funcionar al motor en vacío para distintos valores de tensión de entrada. Se mide la velocidad angular

$\omega_0$  y la corriente  $I_0$  y a partir de estas se estima

$\hat{B} = \frac{K_a I_0}{\omega_0}$  y se toma el parámetro B como la media

entre las estimaciones  $B = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{B}_i}{N}$

Las mediciones realizadas arrojaron los siguientes resultados:

V [V]	w [rad/seg]	I [A]	B estimada
15	3,92E+02	0,33	2,70E-05
12	3,33E+02	0,29	2,80E-05
9	2,64E+02	0,25	3,04E-05
7	2,08E+02	0,23	3,55E-05
6	1,92E+02	0,22	3,67E-05
5	1,78E+02	0,21	3,78E-05
4	1,57E+02	0,19	3,89E-05

$$B = 3,34872 \times 10^{-5} \frac{Nm}{rad/seg}$$

### 3.6 Medición de J

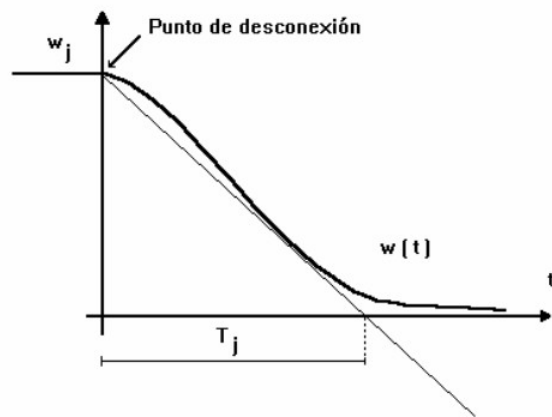
Para la medición de J se observa la inercia del rotor ante la desconexión del motor, para esto se plantea la segunda ley de Newton aplicada a la rotación:

$$M_B = J \frac{d\omega}{dt}$$

Donde  $M_B$  es el momento de frenado del motor. La derivada de  $\omega$  se aproxima con la pendiente

media  $\frac{d\omega}{dt} \approx \frac{\omega_j}{T_j}$

Velocidad angular



A partir de la conservación de la energía se tiene:

$$P_F|_{\omega_j} = V I - I^2 R_a$$

$$P_F|_{\omega_j} = M_B \omega_j \Rightarrow M_B = \frac{P_F}{\omega_j}$$

$$J = M_B \frac{T_j}{\omega_j}$$

Donde  $P_F$  es la potencia de frenado

V [V]	9
w [rad/seg]	2,64E+02
I [A]	0,25
PF [W]	2,03E+00
MB [Nm]	7,69E-03
w/Tj [rad/seg²]	477,02
J [Kg m²]	1,61E-05

$$J = 1,61 \times 10^{-5} Kg m^2$$

### 3.7 Tren de Engranajes

El motor a utilizar tiene asociado un tren de cuatro engranajes doble dentados, lo que afecta a la función de transferencia del motor. Para modelar esto matemáticamente, se expresa a cada par de engranajes como una relación de su número de dientes.

Para que se puedan utilizar dos engranajes  $E_1$  y  $E_2$  en conjunto, deben tener igual densidad de dientes  $n$ . Además, en el punto de contacto de  $E_1$  y  $E_2$  se debe cumplir  $V_1 = V_2$ . De ahí:

$$\begin{aligned}\omega_1 r_1 &= \omega_2 r_2 \\ \omega_1 n N_1 &= \omega_2 n N_2 \\ F\left(\frac{E_2}{E_1}\right) \frac{\omega_2}{\omega_1} &= \frac{N_1}{N_2}\end{aligned}$$

Luego, la función de transferencia del tren de engranajes completo resulta:

$$F(s) = \frac{N_1 N_3 N_5 N_7}{N_2 N_4 N_6 N_8}$$

### 3.8. Determinación de la Función de Transferencia del Sistema

Utilizando la ecuación 10 y los parámetros medidos del motor, se fija la función de transferencia del motor a utilizar con su tren de engranajes  $G_\Omega(s)$ :

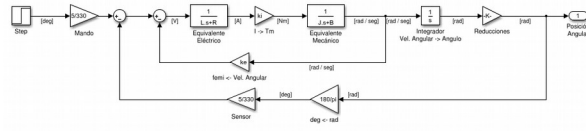
$$G_\Omega(s) = \frac{24613}{s^2 + 1752s + 35641} \frac{\text{rad/seg}}{V}$$

Como la variable a controlar es el ángulo y no la velocidad angular, se integra  $G_\Omega(s)$  para obtener  $G(s)$

$$\begin{aligned}G(s) &= \frac{24613}{s^3 + 1752s^2 + 35641s} \\ G(s) &= \frac{24613}{s(s+1731)(s+20,59)}\end{aligned}$$

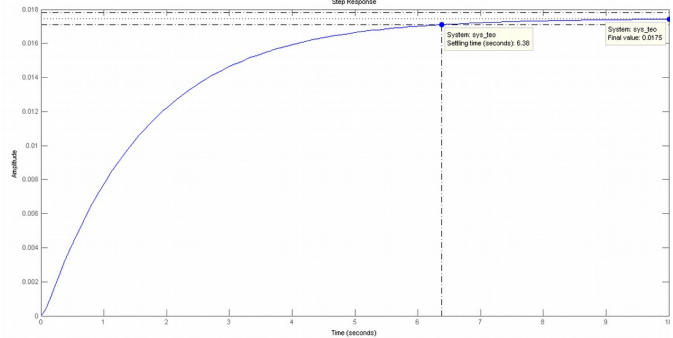
### 4. Respuesta Temporal del Sistema

A fin de estudiar el comportamiento del sistema, se lo modeló con un lazo de realimentación utilizando un potenciómetro como sensor. El diagrama en bloques que lo representa es el siguiente:



NOTA: VER AMPLIACIÓN EN ANEXO

En un análisis de respuesta temporal con ganancia unitaria ante un escalón de amplitud  $1^\circ$  se obtiene el siguiente gráfico, expresado en radianes:



NOTA : VER AMPLIACIÓN EN ANEXO

Se observa que el sistema es sobre-amortiguado y tiene un tiempo de establecimiento de  $6,4 \text{ seg}$  aproximadamente y valor de régimen de  $0.0175 \text{ rad} = 1^\circ$

### 5. Ecuación Característica y Diagrama de Lugar de Raíces de la Ecuación Característica

Dada la planta  $G(s)$ , y el lazo de realimentación  $H(s)$  queda fija la ecuación característica del sistema

$$1 + k_c G(s) H(s) = 0 \quad \text{Ec. Característica General}$$

$$s^3 + 1752s^2 + 35641s + k_c 1094047,85 = 0$$

Ec. Característica del sistema

De allí se obtienen las dos condiciones de lugar de raíces.

- Condición de Módulo

$$|C(s)GH(s)| = \frac{1}{k_c}$$

- Condición de Ángulo

$$\angle G(s)H(s) = 180(2n+1)^\circ$$

Variando  $k_C$ , las raíces de la ecuación característica se desplazan desde los polos de la función de transferencia a lazo abierto ( $k_C=0$ ) hasta los ceros ( $k_C=\infty$ ). Con esto se traza el diagrama del lugar de raíces del sistema a lazo abierto.

NOTA: VER DIAGRAMA DE LUGAR DE RAÍCES EN ANEXO

## 6. Respuesta en Frecuencia del Sistema

Otra forma de caracterizar a los sistemas lineales e invariantes en el tiempo es a través de su respuesta en frecuencia. Esto equivale a alimentar el sistema con una entrada sinusoidal y hacer variar su frecuencia desde  $\omega=0$  hasta  $\omega=\infty$  registrando los valores módulo y fase de la señal de salida.

Además, sabemos que la respuesta temporal de un sistema de control a lazo cerrado está caracterizada por la respuesta del sistema a lazo abierto. Por lo tanto el análisis en frecuencia se hace para el sistema a lazo abierto  $GH(s)$

Para lograr esto de forma práctica se traza el diagrama de Bode del sistema a lazo abierto, basándose en la función de transferencia, el cual se observa más adelante en este informe.

Se observa una caída de  $20 \frac{dB}{dec}$  desde el origen, lo que implica que el sistema es de tipo 1, un margen de ganancia de 69.3dB y de fase 88.3°.

Además  $\omega_1=0,6 \frac{rad}{seg}$  y  $\omega_\pi=189 \frac{rad}{seg}$

NOTA: VER DIAGRAMA DE BODE EN ANEXO

## 7. Requerimientos del Sistema

Se imponen las siguientes condiciones al sistema:

- El tiempo de establecimiento debe ser de 1 seg
- El sobrepasamiento máximo debe ser del 4%
- No debe haber error en estado estable

Al ser este un sistema tipo 1, naturalmente no tiene error en estado estable para una entrada escalón, como la que se utilizará.

Utilizando el modelo general de un sistema de segundo grado:

$$F(s) = \frac{k\omega_0}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Se cumple:

- Sobrepasamiento máximo:  $M_p = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$
- Tiempo de establecimiento:  $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_0}$

De donde se llega a

- $\zeta=0,707$
- $\omega_0=5,66 \frac{rad}{seg}$

Esto implícitamente fija el punto de diseño. En coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  se tiene:

- $\zeta = \cos^{-1}(\theta)$
- $\omega_0 = \rho$

Por lo tanto:  $P_D = -4 \pm j4 \frac{rad}{seg}$

## 8. Compensación

Para fijar el punto de diseño obtenido en nuestro sistema de control es requisito que ese punto sea lugar de raíces del sistema a lazo abierto.

$F_{T_{LA}} = GH(s) = G(s)H(s)$  Si no lo es, es necesario agregar un módulo compensador que modifique el conjunto para lograr que si lo sea.

Un punto  $P_i = \sigma_i + j\omega_i$  será lugar de raíces de  $C(s)GH(s)$  si se cumplen las condiciones de módulo y ángulo fijadas previamente.

Si  $P_i$  no es lugar de raíces, el compensador es el encargado de modificar el lugar de raíces para que sí lo sea.

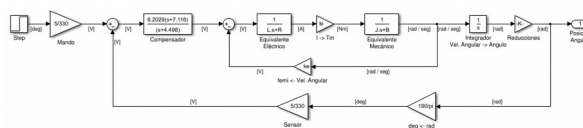
El método de compensación utilizado en este diseño es el de bisectriz, resultando:

- Ángulo aportado por el compensador:  $|C(s)| = -30,38^\circ$
- Polo del compensador:  $P_C = -4,498$
- Cero del compensador  $Z_C = -7,116$
- Ganancia del compensador  $k_C = 6,2029$

Por lo tanto, el compensador resulta:

$$C(s) = \frac{6,2029(s+7,116)}{(s+4,498)}$$

El sistema compensado se expresa por el siguiente diagrama en bloques:



NOTA: VER AMPLIACIÓN EN ANEXO

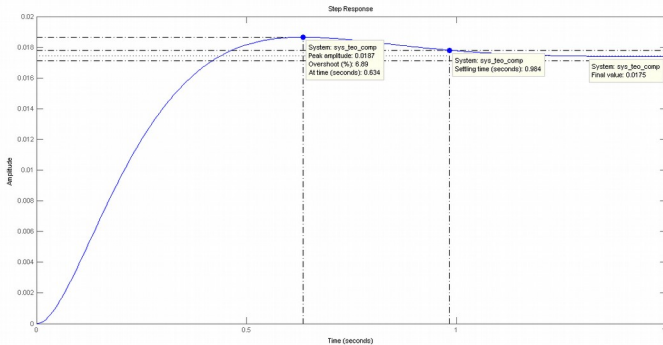
## 9. Respuesta Temporal y en Lugar de Raíces del Sistema Compensado

A fin de lograr la respuesta deseada, se agrega el compensador  $C(s)$  al sistema y se analiza su nuevo comportamiento.

Observando el diagrama de lugar de raíces, se ve que  $P_D$  pertenece a una de las ramas del diagrama, es decir, es lugar de raíces del sistema.

Luego, al examinar la respuesta al escalón unitario, se nota:

- $t_s = 0,984 \text{ seg}$
- $M_p = 6,89 \%$
- $Error = 0 \%$

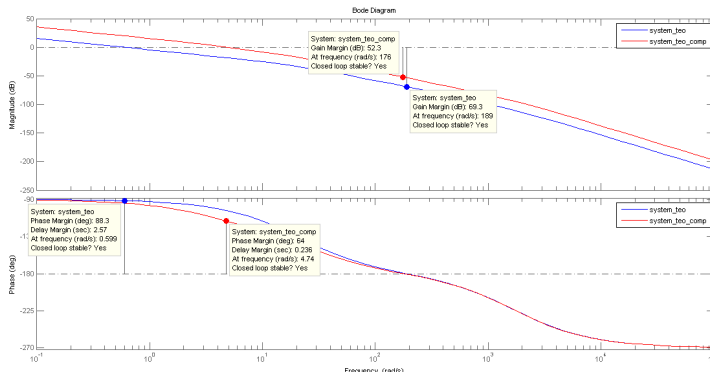


NOTA : VER AMPLIACIÓN EN ANEXO

Los valores obtenidos se consideran aceptables. De no serlo, se puede corregir el comportamiento del sistema modificando la ganancia del compensador.

## 10. Respuesta en Frecuencia del Sistema Compensado

Una vez aplicado el bloque compensador, se vuelve a trazar el diagrama de Bode para ver su respuesta en frecuencia:



NOTA: VER DIAGRAMA DE BODE EN ANEXO

Luego de aplicada la compensación, los nuevos datos a observar son:

- $\omega_1 = 4,7 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$
- $\omega_\pi = 176$
- $M_F = 64^\circ$
- $M_G = 52,3 \text{ dB}$

El margen de fase da una idea del sobrepasamiento. Si MF se expresa en grados, se cumple  $\frac{M_F[\text{deg}]}{100} \approx \zeta$ ,

por lo que  $\zeta \approx 0,64$ , es decir  $M_p \approx 7 \%$  como vimos en la respuesta temporal.

Por otra parte, el margen de ganancia representa la ganancia que se le puede agregar al sistema antes de que este se vuelva inestable.

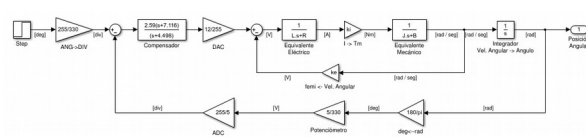
## 11. Modificación del Sistema para su Implementación

Dado que la implementación del sistema se realizará de manera digital, es necesario agregar al modelo una serie de bloques extra que representen el comportamiento de algunos subsistemas necesarios como pueden ser ADC, fuente externa, DAC, PWM, etc.

A su vez, como se modificó el sistema, se debe recalculer el compensador. El nuevo compensador es el siguiente:

$$C(s) = \frac{2,59(s + 7,116)}{(s + 4,498)}$$

El modelo resultante de esta transformación es el siguiente:



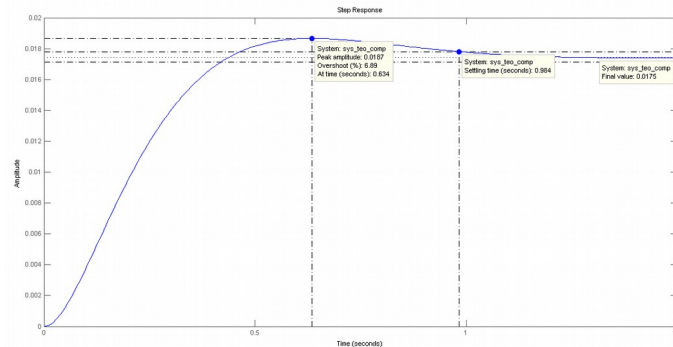
NOTA: VER AMPLIACIÓN EN ANEXO

## 12. Análisis Temporal y en Lugar De Raíces Del Sistema Modificado

Dado que el sistema fue modificado y el compensador recalculado, es necesario analizar nuevamente su respuesta a fin de corroborar que el comportamiento es el requerido.

Si se observa la respuesta temporal al escalón del nuevo sistema ya compensado se ve lo siguiente:

- $t_s = 0,989 \text{ seg}$
- $M_p = 6,88 \%$
- $\text{Error} = 0 \%$

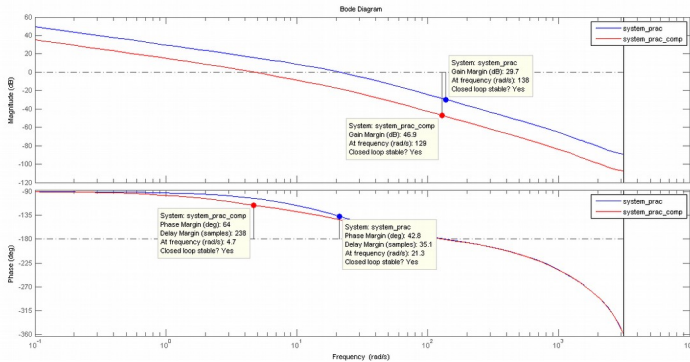


Una vez más, la respuesta temporal es muy cercana a la deseada.

En el diagrama de lugar de raíces se observa que para una ganancia unitaria, el punto de trabajo es muy cercano al propuesto originalmente.

### 13. Análisis en Frecuencia del Sistema Modificado

Trazando el diagrama de Bode del nuevo sistema, con y sin compensación, se aprecia lo siguiente:



El sistema compensado tiene una respuesta en frecuencia en argumento muy similar al primer diseño, por lo que es aceptable.

$$\omega_1 = 4,7 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

$$M_F = 64^\circ$$

$$\omega_\pi = 129 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$

$$M_G = 46,9 \text{ dB}$$

El hecho de que el margen de ganancia disminuyera respecto del anterior dice que este nuevo sistema admite menos ganancia extra antes de hacerse inestable.

### 14. Equivalente Digital del Compensador

Un compensador, como todo SLIT de tiempo continuo tiene su equivalente en tiempo discreto, es decir que un SLIT en dominio S tiene su contraparte en dominio Z. Esta relación se evidencia en la siguiente ecuación:

$$z = e^{sT}$$

Donde T es el período de muestreo.

Además sabemos que  $s = \sigma + j\omega$  por lo que:

$$z = e^{T\sigma} e^{jT\omega} = e^{T\sigma} e^{j(T\omega + 2k\pi)}$$

Se observa que la ubicación de los polos y ceros del SLIT discreto equivalente no solo depende de los polos y ceros del SLIT continuo sino también de la frecuencia de muestreo. Además, para polos y ceros cuya frecuencia en dominio S difiera en un número entero de  $2\pi$ , su ubicación en dominio Z corresponderá al mismo punto.

Dado que  $\sigma$  es negativo en un SLIT continuo estable, para el equivalente discreto  $|z| = e^{T\sigma} < 1$ , es decir que los polos y ceros del equivalente discreto se ubican sobre un círculo de radio 1 centrado en el origen.

Basándose en este criterio, se obtuvo un SLIT equivalente en tiempo discreto para frecuencia de muestreo  $f_m = 1000 \text{ Hz}$

$$C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{2,59(z - 0,9929)}{(z - 0,9955)}$$

### 15. Implementación en placa Arduino

Una vez obtenido el compensador digital, se procedió a implementarlo en un programa que corre sobre una placa Arduino Mega 2560. El mismo se encarga de tomar muestras del valor de posición actual a una frecuencia de 1000Hz. La ecuación del compensador digital obtenida anteriormente se transforma para su implementación de la siguiente forma:

- Se parte de la función de transferencia en Z:

$$C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{2,59(z-0,9929)}{(z-0,9955)}$$

- Dividiendo numerador y denominador por z, y aplicando propiedad fundamental de proporciones:

$$U(z) - 0,9955 U(z) z^{-1} = 2,59 E(z) - 2,5716 E(z) z^{-1}$$

- Reordenando términos:

$$U(z) = 2,59 E(z) - 2,5716 E(z) z^{-1} + 0,9955 U(z) z^{-1}$$

- Antitransformando, y por propiedad de desplazamiento en tiempo discreto se tiene:

$$u_n = 2,59 e_n - 2,5716 e_{n-1} + 0,9956 u_{n-1}$$

Donde:

- $u_n$  salida del compensador para el tiempo n
- $u_{n-1}$  salida del compensador para el instante anterior a n.
- $e_{n-1}$  señal error para el instante anterior a n.

El error se obtiene de la diferencia entre la posición medida y la deseada.

A través de esta ecuación obtenemos un valor numérico de 8 bits que sirve de parámetro a un generador de

PWM, el que se encargará de modular el voltaje aplicado al motor a través de una interfaz transistorizada con esquema un puente-H que permite realizar la inversión de giro.

NOTA: VER CIRCUITO Y CÓDIGO FUENTE EN ANEXO.

### 13. Comunicación y uso desde PC

Para realizar la comunicación del compensador con la PC, a fines de visualizar los datos y establecer el ángulo deseado, se hace uso del puerto USB y las funciones de comunicación en serie que provee Arduino. Además se desarrolló un producto de software en lenguaje Java, que recibe los datos enviados desde el microcontrolador permitiendo la interacción con el usuario a través de una interfaz gráfica, donde puede ingresarse el ángulo de posición deseado, y verse el ángulo instantáneo en que se encuentra el sistema.

NOTA: VER IMÁGENES EN ANEXO.

### 14. Referencias

[1] Física – Sears y Zemansky – Ed. 1975

[2] Ingeniería de Control Moderna – Ogata – Quinta edición

[3] Sistemas de Control en Tiempo Discreto – Ogata – Segunda Edición