Universidad Nacional de Córdoba
Facultad de Ciencias Exactas Física y Naturales
República Argentina

Sistemas de Control I

TRABAJO FINAL

"CONTROL DE GRUA"

Rueda, René Alejandro 34346712
Ingeniería en Computación

Ing. Ladislao Mathé

Córdoba, Agosto 2010

Indice

2

Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es poner en practica todos los conocimiento aprendidos sobre Sistemas de Control, como ***Modelos Matemáticos, Análisis de Estabilidad, Compensación.*** Para ello vamos a analizar y diseñar un control de posición para en una pequeña grúa.

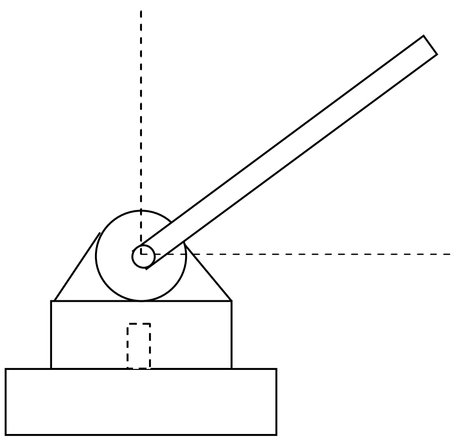

Figura 1a
Esquema de grúa vista de perfil

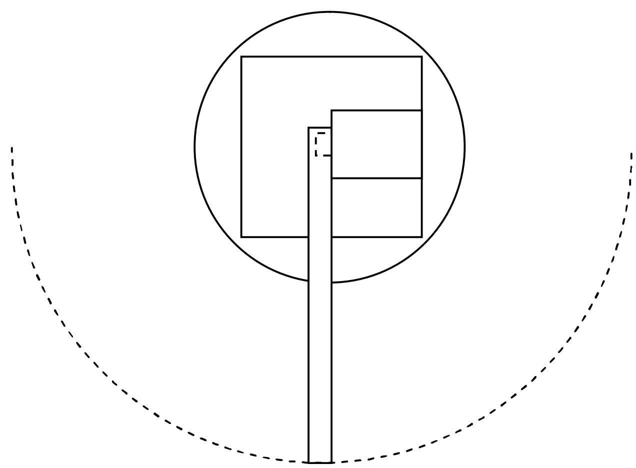

Figura 1b
Esquema de grúa vista superior

Como se ve en las figuras 1a y 1b, se realizarán dos controladores de posición uno para el eje vertical y otro para el eje horizontal, con las restricciones de que el controlador para el eje vertical solo se mueve de 0º a 90º y el controlador horizontal de 0º a 180º. Salvando las restricciones el diseño para ambos controladores va a ser el mismo.

3

Modelo Matemático

La descripción matemática de las características dinámicas de un sistema se denomina modelo matemático [1]

La siguiente figura mostrará el esquema circuí tal para uno de los controladores

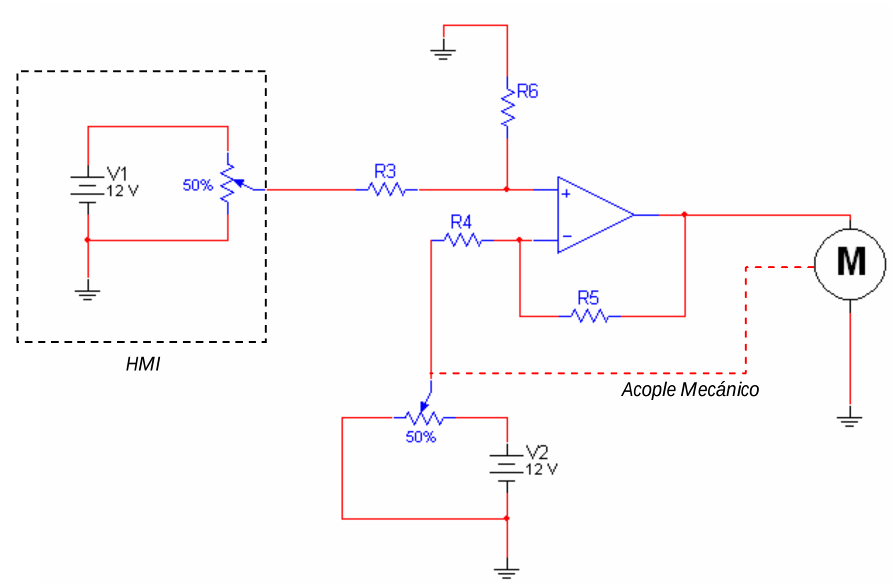

Figura 2
Esquema Circuital del Controlador

Como vemos en la figura nuestro controlador cuenta con dos potenciómetros un circuito restador y un motor de continua (actuador).

El HMI (human machine interface) es el mecanismo por el cual seteamos la posición deseada por medio de uno de los potenciómetros y la transformará en una señal analógica de referencia.

El circuito compuesto por el Amplificador operacional en configuración con las cuatro resistencias es un restador, que nos dará la diferencia entre la señal de referencia y la

[1] *Ingeniería de Control Moderna*, **KATSUHIKO OGATA**

señal de realimentación. Este generará una señal de error que se comunicará con el motor de continua, para hacerlo mover hacia la izquierda o hacia la derecha según corresponda

El motor de continua es el actuador del sistema, será el encargado de mover el segundo potenciómetro del circuito de realimentación, para generar la señal de retroalimentación

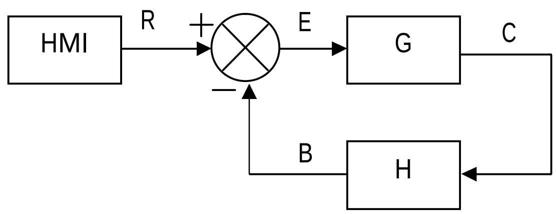

Figura 3
Diagrama de Bloque del Sistema

	Entrada	Salida
HMI	Angulo [º]	Tensión [V]
G	Tensión [V]	Angulo [º]
H	Angulo [º]	Tensión [V]

La función de transferencia de HMI esta dada por

$\frac{v}{270}$, donde v es la tensión de la pila que alimenta el circuito HMI y 270, es el máximo giro que puede realizar el potenciómetro medido en grados. Al igual que HMI el bloque H tiene la misma función de transferencia.

La función de transferencia de G esta dada por el modelo matemático del motor de continua dado por $\frac{k}{(Ra+sLa)\cdot(Js+b)+k^2}$

Ra: representa la resistencia de armadura
La: impedancia de armadura
B: coeficiente de fricción
J: momento de inercia
K: constante de ganancia

La función de transferencia de un motor de este tipo se puede simplificarse a una función de segundo orden, como la siguiente: $\frac{\omega}{V_{\max}s}\cdot\frac{1}{(s\tau+1)}$

El motor con el que vamos a trabajar tiene una constate de tiempo τ igual a 120 ms, soporta una tensión máxima de 9v

Como el torque máximo del motor es inferior al torque mínimo para girara la perilla del potenciómetro, se requiera la implementación de un juego de engranajes. La relación de engranajes es de $\frac{1}{10}$. Además aprovechamos para reducir la velocidad de giro del motor.

Entonces nuestro modelo matemático quedaría de la siguiente manera

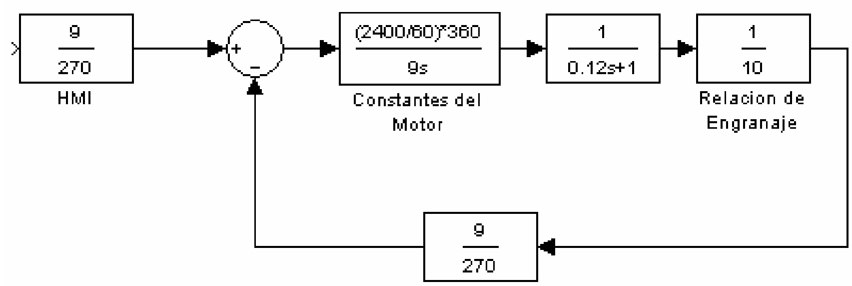

Figura 4
Modelo Matemático del Sistema

4

Respuesta Transitoria

A Continuación vamos a ver la respuesta transitoria de nuestro sistema ante una entrada de tiempo escalón unitario, ya que ésta va a ser la entrada típica de nuestro sistema.

Haciendo uso de la herramienta Simulink de Matlab®, podemos simular la respuesta transitoria de nuestro sistema para un entrada escalón.

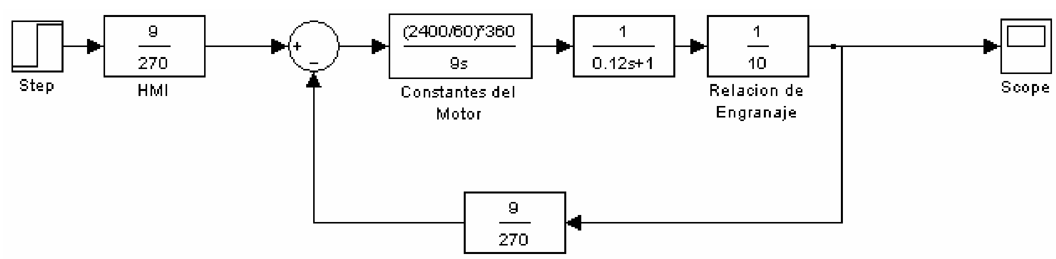

Figura 5a
Simulación en Simulink

Figura 5b
Simulación en Simulink
Respuesta Transitoria

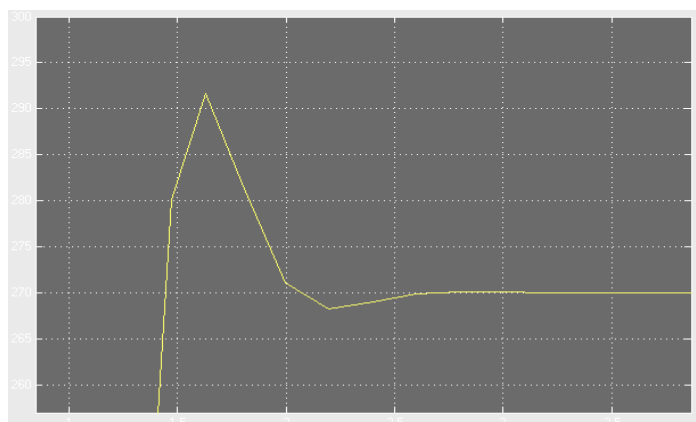

Figura 5c
Simulación en Simulink
Acercamiento al sobrepasamiento

Se puede apreciar un sobrepasamiento de un 8% y además que el sistema responde demasiado rápida, y esto perjudica ya que estaría balanceando la carga.

Error y Tipo de Sistema

Nuestro sistema es de ***tipo 1***, por poseer un único polo en el origen. Por esta característica, podemos observar en la simulación que posee un error de régimen cero ante una entrada escalón unitario.

Lo corroboramos analíticamente de la siguiente manera

$e_{ss} = \frac{1}{1+k_p}$, donde y G(s) = $\frac{160}{0{,}12s^2 + s}$; $H(s) = \frac{9}{270}$

Entonces $\lim_{s \to 0} \frac{160}{0.12s^2 + s} \cdot \frac{9}{270} = \infty$. Por lo que $K_p = 0$

El ***sobrepasamiento*** lo calculamos de la siguiente manera

$m = e^{\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$, pero primero tenemos que calcular ξ

Entonces de la Función de Transferencia de lazo Cerrado

$$FT_{lc} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{\frac{160}{0{,}12s^2 + s}}{1 + \frac{160}{0{,}12s^2 + s} \cdot \frac{9}{270}} = \frac{160}{0.12s^2 + s + 5.33}$$

Reacomodando para que quede de la forma $\frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}$ obtenemos

$$FT_{lc} = \frac{1333.33}{s^2 + 8.33s + 44.42}$$

Donde ω=6.66 y $\xi = \frac{8.33}{2\omega} = 0.625$

Por lo que el sobrepasamiento $m = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{\frac{-\pi 0.625}{\sqrt{1-0.625^2}}} = 0.081$ y concuerda con la simulación

Tiempo de Establecimiento

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega} = \frac{3}{6.66 \cdot 0.625} = \frac{3}{4.1625} = 0.721 seg$$

5

Análisis de Estabilidad

La característica mas importante del comportamiento dinámico de un sistema de control es la estabilidad absoluta, es decir si el sistema es inestable o estable.

Podemos emplear el criterio de Routh para analizar la estabilidad del sistema.

La Función de Transferencia de lazo cerrado

Es $FT_{lc} = \dfrac{1333.33}{s^2 + 8.33s + 44.42}$. La ecuación característica $s^2 + 8.33s + 44.42$

S^2	1	44.42
S^1	8.33	0
S^0	b	

$b = \dfrac{8.33 \cdot 44.42}{1}$ =370.0

Como ningún coeficiente cambió de signo no se puede asegurar que el sistema es inestable, es decir que no posee polos en la parte real positiva.

Se puede determinar la estabilidad de un sistema lineal de lazo cerrado por la ubicación de los polos de lazo cerrado en el plano S. Además es interesante determinar baje que condiciones es estable, por eso vamos a estudiar como se mueven los polos en el plano S si variamos la ganancia de lazo.

Para ello vamos a utilizar el ***método de lugar*** de raíces.

Primero determinamos los polos de lazo cerrado que son las raíces de la ecuación característica

$$s^2 + 8.33s + 44.42 = 0$$

2 Raíces complejas conjugadas

-4.1650 + 5.2032i

-4.1650 - 5.2032i

Como ambas se encuadran en el lado izquierdo del plano S, el sistema es estable

Haciendo uso de la herramienta Matlab ®, podemos graficar el lugar de raíces con el comando ***rlocus***

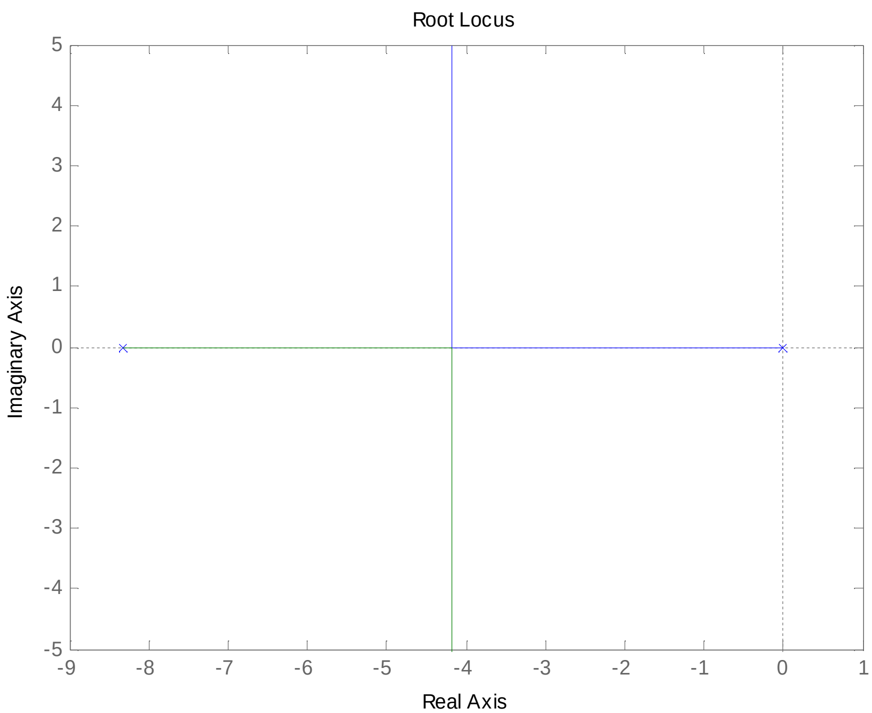

Figura 6

Lugar de Raíces

6

Compensación

Una vez realizados los análisis previos de estabilidad y respuesta transitoria, vemos que nuestro sistema no responde a nuestras necesidades, que son una respuesta lenta para no balancear la carga, y un porcentaje relativamente bajo de sobrepasamiento. Para lograr que nuestro sistema cumpla con las especificaciones dadas, es necesario compensar nuestro sistema.

En nuestro caso esas especificaciones son:

- Un sobrepasamiento menor o igual al 3%
- Un tiempo de establecimiento de 3 segundos.

Como lo que tenemos que modificar es el comportamiento transitorio utilizaremos un compensador en adelanto. Cuya función de transferencia está dad por la siguiente expresión

$$G_c(s) = \frac{Ts+1}{Ts+\frac{1}{\alpha}}$$

Primero determinamos la posición deseada de los polos dominantes

Según las especificaciones el sobrepasamiento debe ser de 3%

$$0.03 = e^{\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{\left(-\frac{\pi}{\ln 0.03}\right)^2 + 1}} = 0.744$$

El tiempo de establecimiento son 3 segundos

$$3 = \frac{3}{\xi\omega} \Rightarrow \omega = \frac{3}{3\xi} = \frac{1}{\xi} = 1.343$$

Una vez conseguidos estos parámetros podemos encontrar el punto por donde tiene que trabajar nuestro sistema para cumplir con las especificaciones. Este punto será

$$-\xi\omega + j\omega\sqrt{1-\xi^2} = -1 + j0.897$$

La función de transferencia directa es $G(s)\cdot H(s) = \dfrac{5.333}{s(0,12s+1)} = \dfrac{44.442}{s(s+8.333)}$

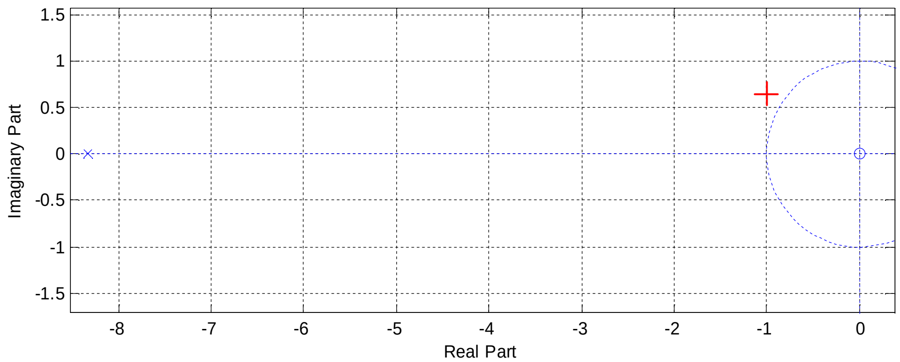

Figura 7

Diagrama de Ceros y polos

Por la condición de fase tenemos que

$$\sum\theta_z - \sum\theta_p = \pm 180^{\circ}(2k+1)$$

A continuación vamos a calcular el aporte hecho por los distintos polos de la función de transferencia de lazo abierto G(s)H(s).

Aporte por el polo en 0

$$\theta_0 = 180^{\circ} - arctg\left(\frac{\omega\sqrt{1-\xi^2}}{\xi\omega - 0}\right) = 138.07^{\circ}$$

Aporte por el polo en 8.33

$$\theta_{8.33} = arctg\left(\frac{\omega\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi\omega + 8.33}\right) = 6.98^{\circ}$$

$$0 - (\theta_0 + \theta_{8.33}) = -145.05^{\circ}$$

Tomando k = 0, tenemos que el aporte por el compensador es de -34,95º

A nuestro cero de compensador lo ponemos debajo del punto por el cual nuestro sistema tiene que trabajar.

Por lo que la fase del polo del compensador debe ser

90º - (-34.95º)= 124.95º

Y el polo estará ubicado en –j0.627

Una vez conseguidos el polo y el cero del compensador, podemos escribir la función de Transferencia del compensador

$$G_c(s) = \frac{K_c(s+1)}{s+0.627}$$

Con esto nuestro punto de trabajo es parte del lugar de raíces pero tiene que cumplir con la condición de amplitud para que sea una raíz de la ecuación característica o un polo de lazo cerrado. Por esto planteamos la condición de magnitud.

$$|G_c(s)G(s)H(s)| = 1$$

$$|G_c(s)G(s)\cdot H(s)| = \left|\frac{44.442}{s(s+8.333)}\cdot\frac{s+1}{s+0.627}\right|_{-1+j0.897} = 6.0163$$

$$K_c = \frac{1}{6.0163} = 0.166$$

Finalmente la función de transferencia de nuestro compensador es la siguiente

$$G_c(s) = \frac{0.166\cdot(s+1)}{s+0.627}$$

Y nuestro sistema quedaría de la siguiente manera

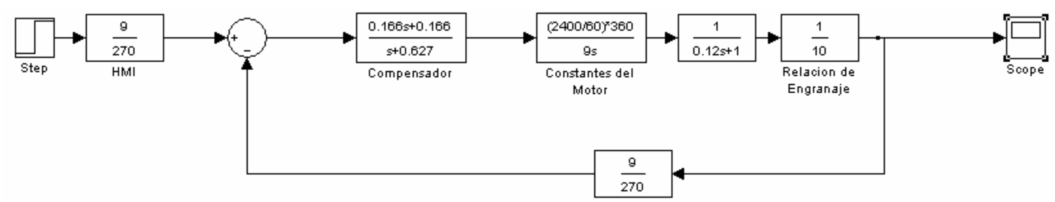

Figura 8
Esquema de sistema Con compensador

FT de lazo cerrado

$$\frac{7171s + 7171}{32.4s^3 + 290.3s^2 + 408.3s + 239}$$

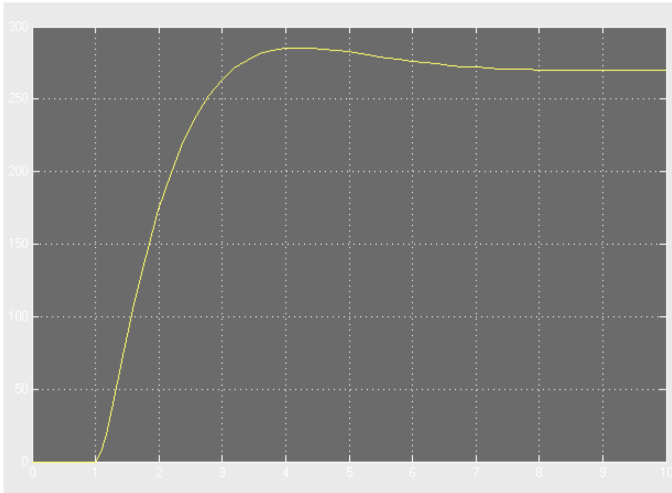

Figura 10
Respuesta transitoria sistema compensado

Ahora nuestro sistema cumple con las especificaciones y se puede apreciar una respuesta más lenta y un menor sobrepasamiento.

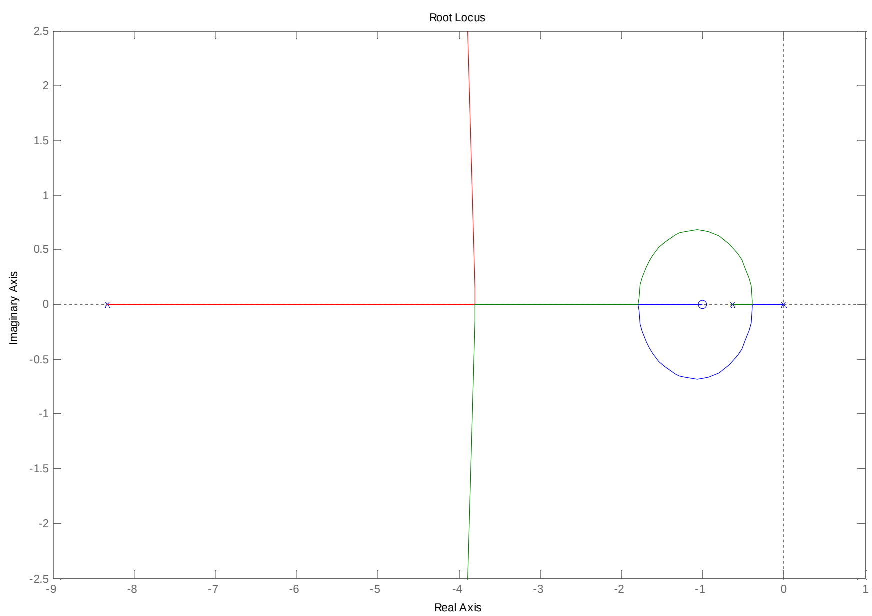

Figura 9
Lugar de Raíces sistema compensado