# Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

*Universidad Nacional de Córdoba.*

Cátedra de Sistemas de Control I

Trabajo Final: Control de velocidad de un motor DC

Alumnos:

Escribá, Pedro; Matricula: 39072324

Romero Brewer, Franco; Matrícula: 38411396

## Introducción. Objetivos y Consigna:

Se busca mediante la siguiente monografía desarrollar un sistema de control de velocidad del motor de corriente continua de un tren de juguete que actúa sobre dos de sus ruedas. Para ello se debe implementar los conocimientos aprendidos durante el semestre en la materia Sistema de Control I, que abarcan el modelado matemático del sistema, su estabilidad, análisis temporal, error y la compensación necesaria según especificaciones. Para ello se hará uso de programas como MatLab y Simulink, dos herramientas de simulación y desarrollo para sistemas de control muy utilizadas.
Se propone como solución al problema un sistema de control de realimentación negativa.

## Análisis del problema y Modelado Matemático del Motor:

Como ya se mencionó, se busca realizar un sistema de control de velocidad de un motor DC de 12V de un tren de juguete a partir de una tensión de entrada suministrada por un potenciómetro alimentado con 5V. Se pretende conseguir que el tren se desplace a una velocidad de 1m/s cuando se suministran los 5V en la entrada al sistema. Para cumplir con estas especificaciones se debe seleccionar un motor tal que el torque suministrado sea mayor o igual que el torque necesario.

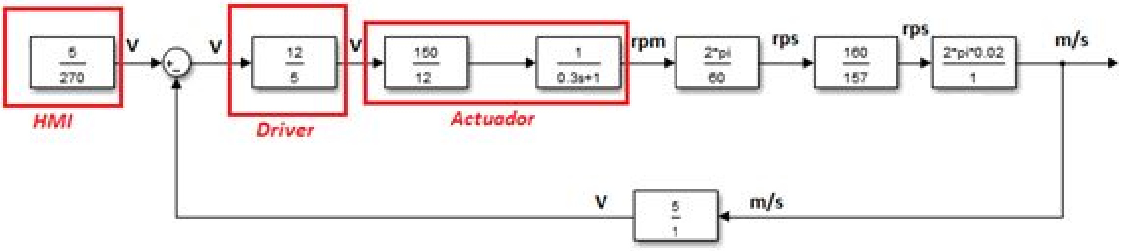
$$T_{motor} \geq T_{necesario}$$
$$F_{motor}R \geq F_{necesaria}R$$

donde F es la fuerza y R radio de las ruedas
Para nuestro caso la $F_{necesaria} = m\ a = m\ \frac{\Delta V\, deseado}{\Delta t\ deseado} = 0.5kg\ 2\frac{m}{seg^2} = 1N$
donde a es la aceleración deseada que tiene que tener nuestro tren al arrancar.
Luego $T_{necesario} = F_{necesaria}R = 1N\ 0.02m = 0.02\ Nm$
Una vez analizadas nuestras necesidades, se procede a seleccionar el motor adecuado cumpliendo la relación de torques: $T_{motor} = 0.23Nm$ . Dicho motor posee una velocidad de giro nominal de $\omega_o = 150rpm$ (o sin carga). Sin embargo, al cargar el motor con el peso del tren, la velocidad de giro $\omega_{motor} = \frac{\omega_o}{2} = 75rpm$ o en radianes por segundo $\omega_{motor} = 7.85\frac{rad}{seg}$ . Por otro lado, la velocidad máxima de las rudas va a ser $V = \omega_{rueda}\, 2\pi\, R = 1\frac{m}{seg} \Rightarrow \omega_{rueda} = \frac{V}{2\pi R} = \frac{1m/seg}{2\pi\ 0.02m} = 7.95\frac{rad}{seg} \approx 8\frac{rad}{seg}$
Se puede observar que la velocidad de giro de las ruedas es mayor a la suministrada por el motor, por lo tanto es necesario recurrir a una relación de reducción con un tren de engranajes a fin de poder utilizar el motor

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\omega_{rueda}}{\omega_{motor}} = \frac{160}{157}$$

En tanto, la función de transferencia de un motor de corriente continua se obtiene analizando las condiciones físicas del entorno donde este se desarrolla. En este caso $U(s) = \frac{k}{(sL_a+R_a)(sJ_m+f)+k}$ donde k ganancia de motor, L la inductancia del bobinado, R la resistencia interna, J momento de inercia y f coeficiente de fricción. Para el tipo de motor usado, su función de transferencia se puede simplificar en $U(s) = \frac{\omega}{v}\frac{1}{(\tau s+1)}$ donde $\tau$ es la constante de tiempo del motor.

La función de transferencia del sistema resultante de hacer todas estas consideraciones se muestra en la siguiente figura:

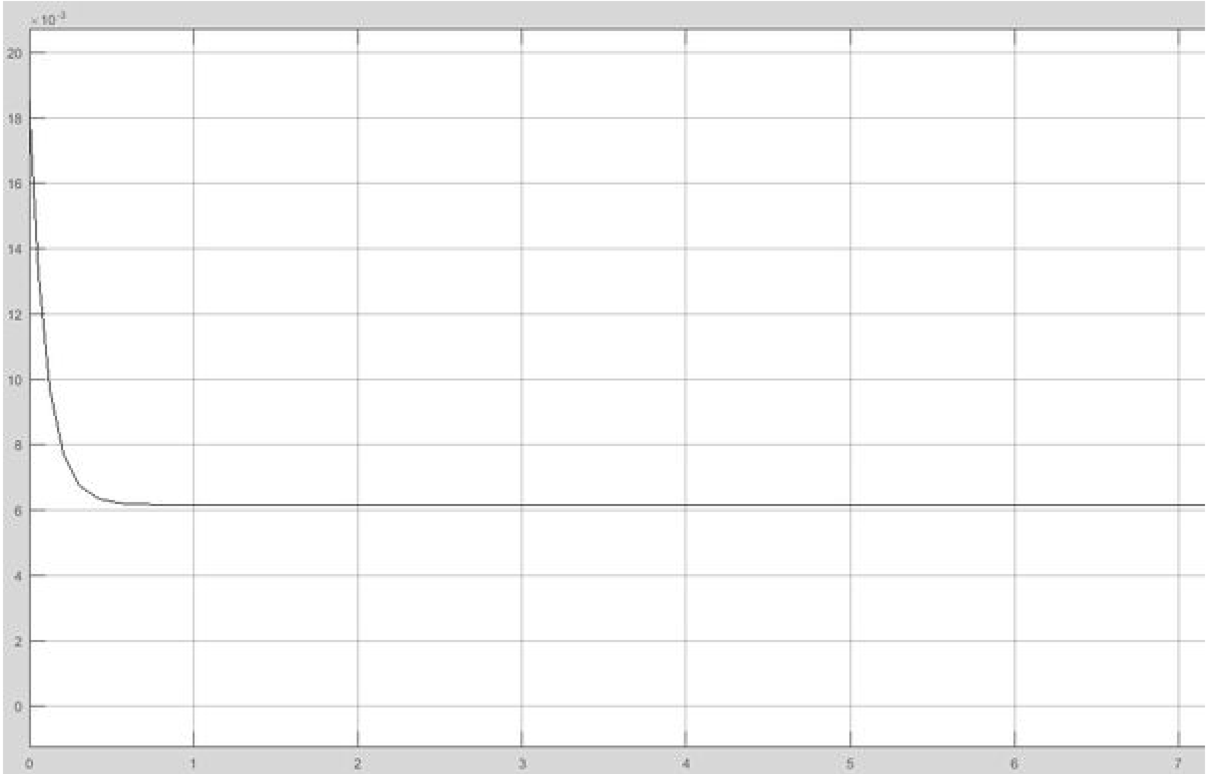



Analizando etapa por etapa, el HMI (human machine interface) consiste en un potenciómetro lineal de 0V a 5V, el cual posee un ángulo de giro de 270º (de acuerdo al ángulo girado, es la tensión que se va a entregar). El driver relaciona la salida del HMI con la entrada del actuador, para este caso son 12V del motor con 5V de salida del potenciómetro. El actuador es el motor, cuya constante de tiempo es de 0.3 seg. (en anexos se explica brevemente algunos métodos de cálculos de las constantes) A continuación se establecen las relaciones de unidades o transferencia para obtener la salida del motor sobre las ruedas, esto sería transformar revoluciones por minuto en radianes por segundo, luego rps en metros por segundo. Finalmente se encuentra la realimentación que consiste en una constante de relación de unidades para pasar de metros por segundos a volts.

## Análisis del error en régimen permanente:

Observando la función de transferencia del sistema, se puede deducir que el mismo es de tipo 0, ya que no posee polos en el origen. El error en régimen permanente (ess) para una entrada escalón va a estar dada por:

$ess = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\frac{1}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+\frac{2.01}{0.3s+1}} = 0.33 = 33\%$. En tanto el error de posición $K_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s) = \lim_{s\to 0}\frac{2.01}{0.3s+1} = 2.01$; Luego se verifica $ess = \frac{1}{1+K_p} = 0.33$




En la etapa de compensación, se buscará reducir este error a 5%.

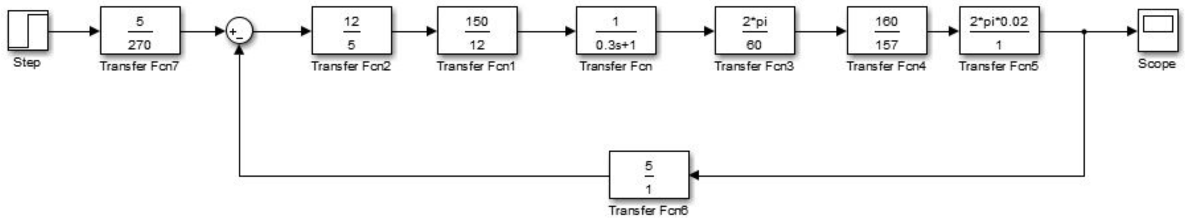
## Análisis de estabilidad y respuesta transitoria:

Para analizar la estabilidad del sistema se hace uso del criterio de Ruth-Hurwitz. Para aplicar el mismo se debe analizar el denominador de la función de transferencia a lazo cerrado del sistema $FT_{LC} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{0.40}{0.3s+3.01}$

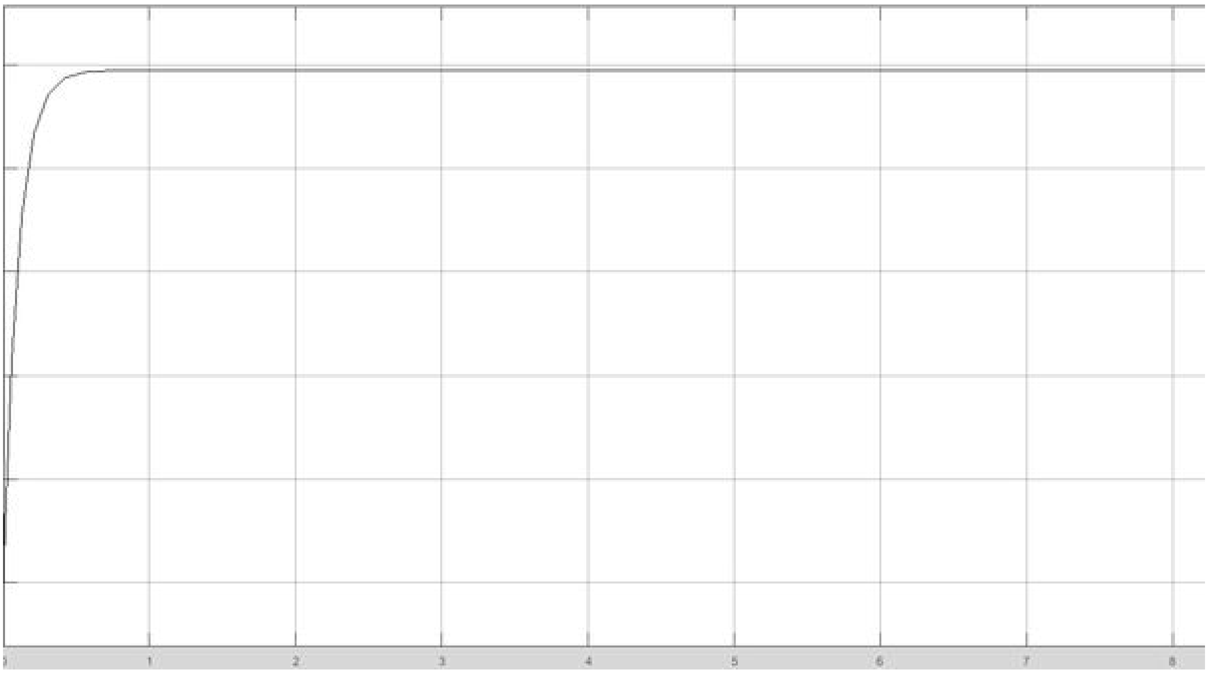
| $s^n$ | | |
|---|---|---|
| $s^1$ | 0.3 | 3.01 |
| $s^0$ | 0 | 0 |

Se puede concluir que, al no haber cambio de signo en la primera columna, el sistema es estable.

Por otro lado se analiza la respuesta transitoria del sistema frente a una entrada de escalón unitario (comúnmente más utilizada en la teoría del control) haciendo uso de MatLab. A continuación el esquema a simular:




Luego la simulación arroja los siguientes resultados:




Se puede confirmar, al analizar el gráfico, la estabilidad del sistema.

En tanto al transitorio, se analiza la $FT_{LC} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{0.40}{0.3s+3.01}$ donde se observa que el τ del motor es 0.3seg . A su vez, por ser un sistema de primer orden, $\xi = 0$.

Analizando estos valores se pueden deducir las siguientes expresiones:

$$Sobrepaso = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0$$

$$Tiempo\ de\ asentamiento\text{:}\ t_s = 4\tau = 4\ 0.3 = 1.2\text{seg}$$

$$Tiempo\ de\ levantamiento\text{:}\ t_r = \tau = 0.3$$

## Análisis de estabilidad mediante Lugar de Raíces:

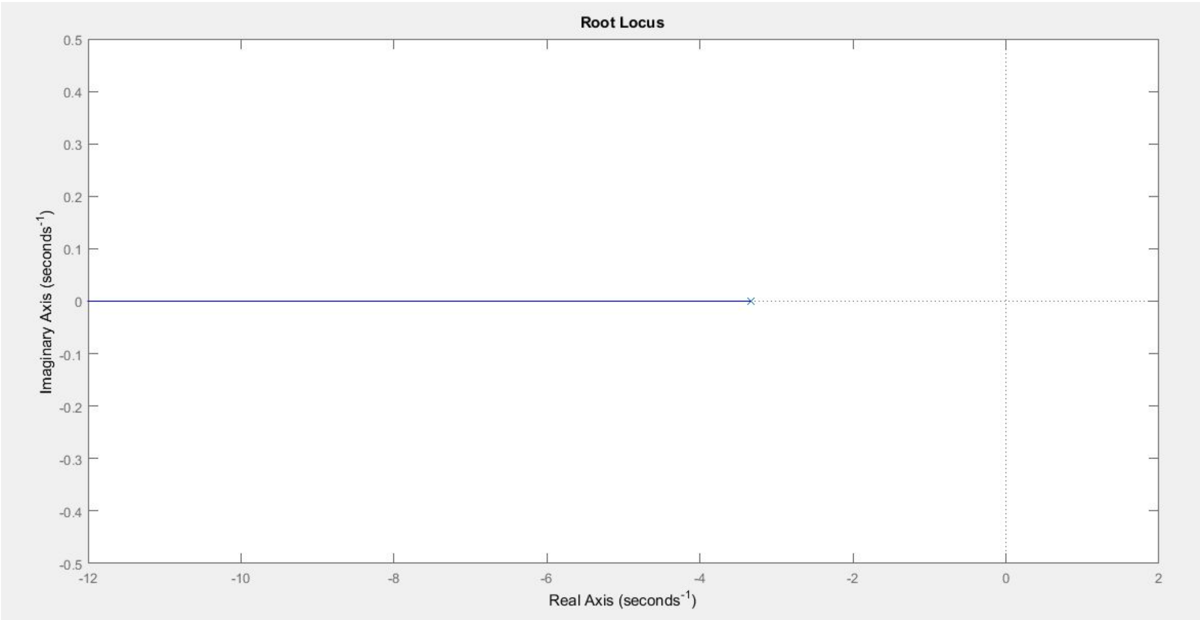
Una forma de verificar la estabilidad del sistema es mediante el análisis de las raíces de la ecuación característica $1 + G(s)H(s) = 0$ ; estas raíces (o polos de lazo cerrado) son los valores de s que cumplen la condición de magnitud ( $|G(s)H(s)| = 1$ ) y condición de ángulo ( $G(s)H(s) = \pm 180(2m+1)\ con\ m \in N$ ).

Luego $1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+z_1)...(s+z_n)}{(s+p_1)...(s+p_n)} = 0$

Los lugares de las raíces para el sistema son los lugares de los polos en lazo cerrado cuando la ganancia K varía de cero a infinito

Para nuestro sistema, $EC = 0.3s + 1$ posee una raíz con parte real negativa en: $s =- 3.33$

Haciendo uso de la función rlocus se puede observar la gráfica del lugar de raíces:

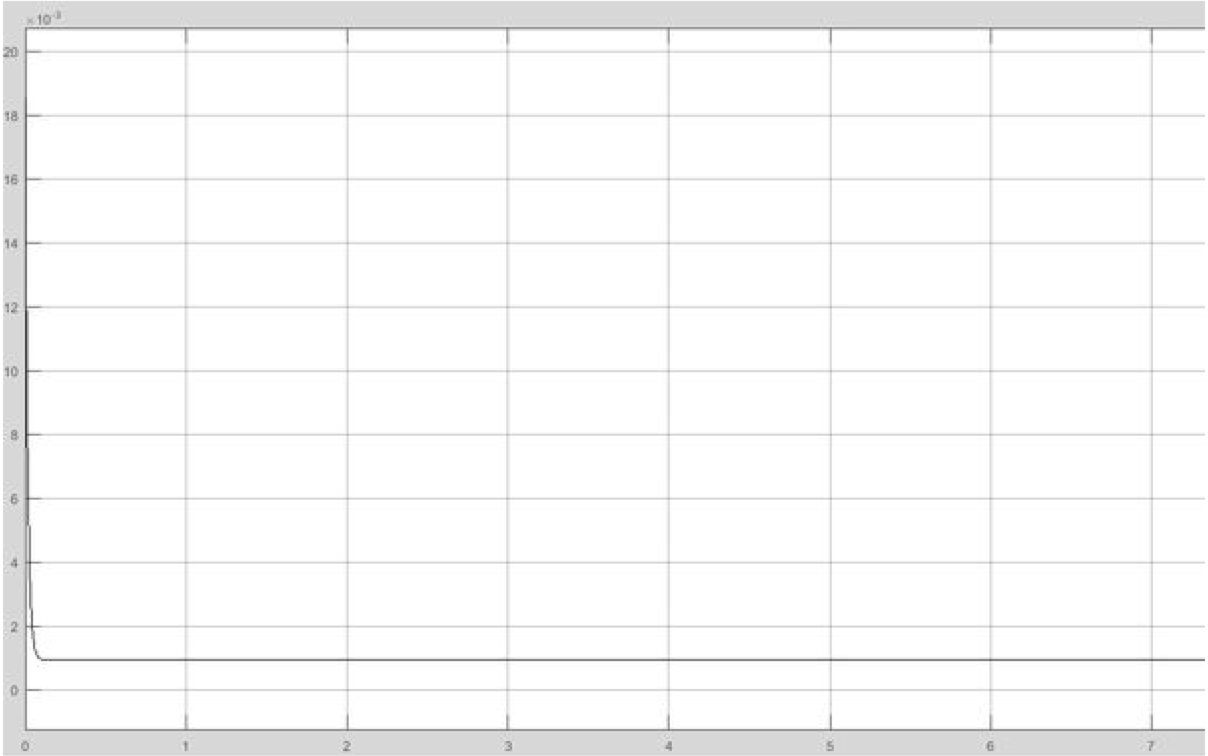



Se puede confirmar la estabilidad del sistema al no haber polos de lazo cerrado con parte real positiva.

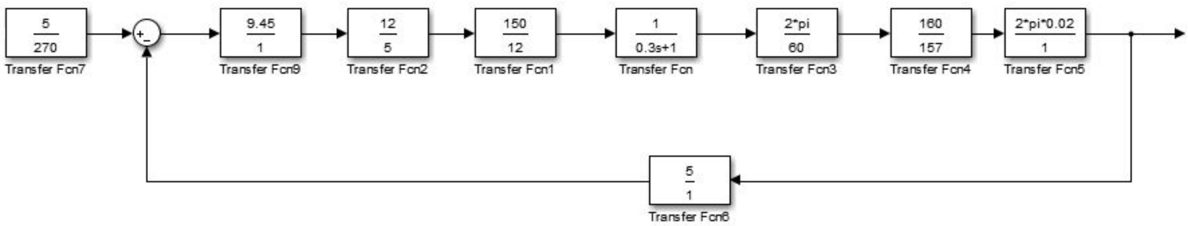
## Compensación del sistema:

Si bien el sistema es estable, el mismo posee un error en régimen permanente muy alto, por lo que se desea que el mismo sea ess=5%

Sabemos que $ess = \frac{1}{1+K_p} = 0.33$ y para que se cumplan nuestras especificaciones, $ess = \frac{1}{1+K_p} = 0.05$. Luego, $K_p = \frac{1}{0.05} - 1 = 19$. Sabiendo que $K_p$ era de 2.01, ahora debe ser de 19; por lo que es necesario agregar una ganancia $K_b$=9.45



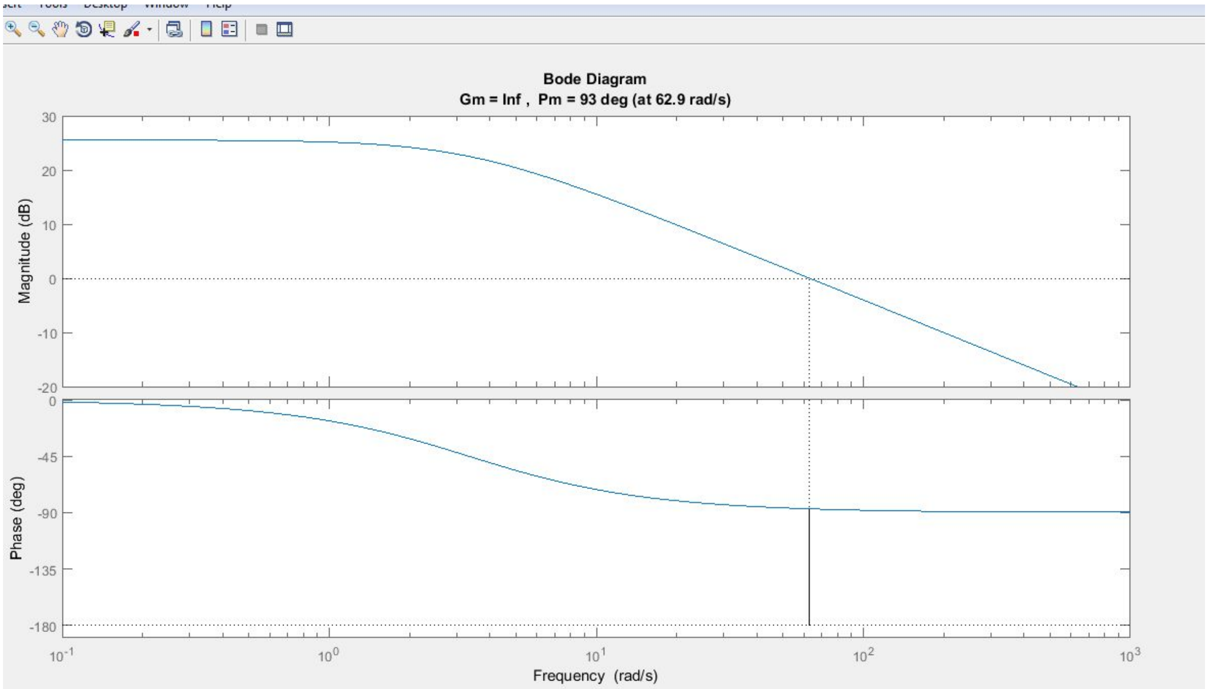

Finalmente el diagrama de bloques del sistema queda:



## Análisis de estabilidad mediante respuesta en frecuencia:

Además de un análisis temporal, es común estudiar la respuesta en frecuencia del sistema en cuestión. Para ello se hace uso de los diagramas de bode la función de transferencia de lazo Abierto, que para nuestro caso era: $FT_{LA} = \frac{2.01}{0.3s+1}$ . Empleando MatLab se observan los gráficos de magnitud y fase del sistema. Cabe aclarar en este punto algunas definiciones que permitirán analizar la estabilidad del sistema con mayor profundidad.

El margen de ganancia representa el factor mediante el cual la ganancia total del lazo debe aumentarse para hacer que el sistema se vuelva inestable. Por otro lado, el Margen de fase representa la cantidad adicional requerida de atraso de fase para hacer que el sistema sea inestable. Una especificación típica es PM > 45°.




En la figura anterior se encuentra la respuesta en frecuencia del sistema trabajado. El margen de fase supera ampliamente los 45º. Al agregar un compensador por Bode, que no es más que un polo, un cero y una ganancia adicional, se observó un aumento considerable en el error en régimen permanente, optando por no incluir el mismo en el sistema.

El margen de magnitud,como la fase nunca corta los -180º, se concluye que es posible agregar cualquier ganancia al sistema sin alterar la estabilidad del mismo.

## Conclusiones

Al llegar al final de este informe ya con un sistema compensado y que cumple con los requisitos deseados, es posible afirmar que se ha cumplido el principal objetivo de este trabajo: desarrollar un sistema de control de velocidad del motor de corriente continua. Para ello fue necesario recurrir a todos los conocimientos teóricos adquiridos durante el curso de Sistemas de Control I. Además fueron de gran ayuda las consultas realizadas con los profesores de la cátedra, que han aportado muchas ideas y sobretodo soluciones a inconvenientes que nos fueron surgiendo en el proceso. Se deja abierto al lector la posibilidad de continuar este proyecto agregando al mismo un sistema de control de posición, que si bien implicaría otro lazo en nuestra función de transferencia, complementaría a la perfección aquel diseñado para la velocidad.

# Anexos: DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS MOTOR DE CORRIENTE CONTINUA DC.

Se analiza los parámetros de la función de transferencia del motor usado en nuestro trabajo: $U(s) = \frac{k}{(sL_a+R_a)(sJ_m+f)+k}$

1. ***Determinación de la constante contraelectromotriz ($K_e$ ) para el motor DC.***

En un motor DC cuando se encuentra en rotación, se induce una tensión proporcional al producto del flujo por la velocidad angular. Si el flujo es constante, la tensión inducida $E_b$ es directamente proporcional a la velocidad angular.

$$K_e = \frac{E_b}{n} = \frac{V}{\omega}$$

Donde:
$E_b$ = V = Fuerza contraelectromotriz (Voltios)
n = Velocidad en (rpm)
ω = Velocidad en (rad/s)

2. ***Determinación de la Resistencia de Armadura ($R_a$)***

Para la determinación de la resistencia de armadura ($R_a$), se pueden aplicar dos métodos. El primero consiste en medir la resistencia con un multímetro en los devanados de la armadura del motor. En el otro caso, se puede ajustar un valor de voltaje mínimo para la alimentación del Motor DC, de tal manera que se mida la corriente de armadura junto antes de comenzar el movimiento del eje del motor, con este valor y aplicando la ley de Ohm se calcula la resistencia de armadura. En este instante el voltaje contraelectromotriz $E_b$ es cero ya que no hay rotación en el eje.

3. ***Determinación Inductancia de Armadura ($L_a$)***

La inductancia de armadura ($L_a$) al igual que la resistencia de armadura se mide en los devanados del motor, utilizando un instrumento que sirve para medir inductancias llamado LCRmeter.

4. ***Determinación teórica de la constante de torque ($K_t$)***

La energía entregada por el motor en su eje de rotación es expresada a través de su par electromagnético $T_m$ el cual es proporcional al producto de la corriente de inducido Ia por el flujo φ en el entrehierro, que a su vez es proporcional a la corriente de campo $I_f$. Pudiéndose entonces escribir:

$$T_m = K_f \cdot I_f \cdot K_i \cdot I_a$$

Cuando el motor posee imanes permanentes entonces se puede asumir que

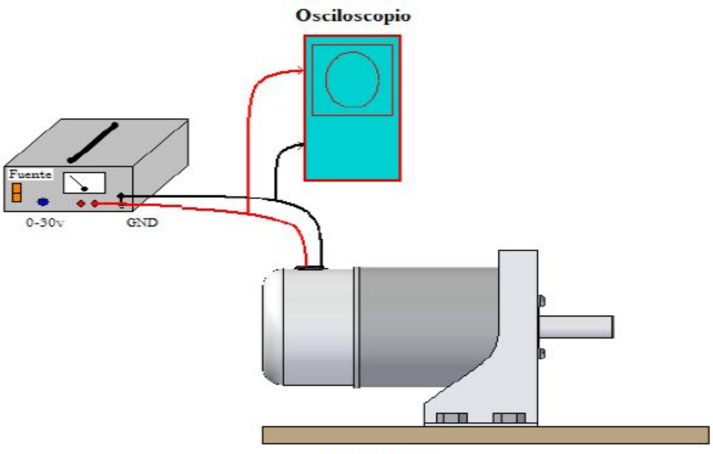
todos los parámetros: $K_f \cdot I_f \cdot K_i \cdot I_a$ se pueden reunir en una sola constante $K_t$.
Por tanto la anterior expresión queda solamente así:

$$\mathbf{T_m = K_t . I_a}$$

Que indica la relación directa del par con la corriente de inducido, siendo la constante Kt de origen experimental.
El producto entre la constante de par $K_t$ y la constante de la fuerza contraelectromotriz $K_e$ dan como resultado la constante K de la función de transferencia del inicio del apartado.

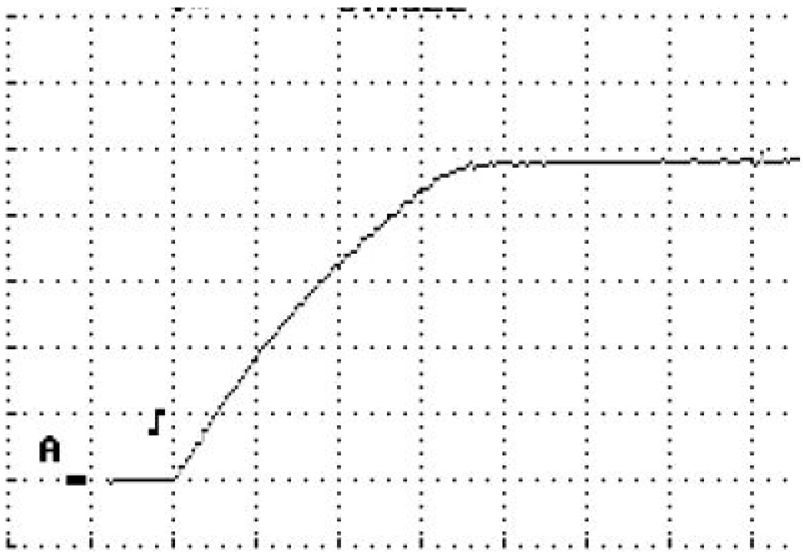
### 5. *Determinación de la constante de tiempo mecánica (τ)*

El modelo matemático de un motor de corriente continua presenta la relación directa entre la tensión de armadura y la velocidad en el eje, que experimentalmente se observa, al aplicar un escalón de voltaje en terminales haciendo generar en principio una característica transitoria de velocidad, seguida de una respuesta de régimen estable para condiciones de carga fija, se involucra por tanto, con esta característica una constante de tiempo, conocida como constante de tiempo mecánica .
Para medir la variable, se conecta el osciloscopio al borne positivo y el cable de tierra al borne negativo del motor.




Al aplicar un voltaje tipo escalón a la armadura del Motor, el osciloscopio construirá la característica equivalente de velocidad.

En la siguiente imagen se muestra la pantalla de osciloscopio para la conexión realizada:




En la gráfica obtenida, se mide el tiempo requerido para que la señal de salida alcance el 63.2% de su valor final, dicho tiempo corresponderá a la constante de tiempo mecánica (τ).

### 6. *Determinación del momento de inercia ($J_m$)*

Se utilizan los parámetros Resistencia de armadura ($R_a$), constante de torque ($K_t$), y constante de voltaje ($K_e$), constante de tiempo mecánica (τ) para calcular el momento de inercia ($J_m$) mediante la expresión:

$$J_m = \frac{\tau K_e K_t}{R_a}$$

### 7. *Determinación de la constante de fricción (f)*

La constante f se determina cuando el sistema se encuentra en estado estable, es decir, el Motor alcanza una velocidad constante, en este instante se tiene que para una velocidad constante la derivada es la aceleración, para este caso es cero, entonces, aplicando la fórmula para el torque mecánico se obtiene :

*ω=Velocidad*

*ώ=Aceleración*

*$T_m$=Torque mecánico*

*f=Constante fricción de coulomb*

Sabemos que:

$$T_m = K_t I_a = J \dot{\omega} + f\,\omega + T_f$$

Para estado estable ώ=0, luego:

$$T_m = K_t I_a = f\,\omega + T_f$$

Luego se despeja el valor de f.