

Universidad de los Andes
Facultad de Ingeniería y Ciencias Aplicadas

Estática

Tarea 2 - Problema 1

Aplicaciones de Fuerzas Distribuidas y Centros de Masa

Integrantes: Mathias Hans Berg
Eduardo Nicolas Sinning
Profesor: José Antonio Abell
Fecha de realización: 28 de abril de 2017
Fecha de entrega: 28 de abril de 2017
Santiago, Chile

Índice de Contenidos

1. Introducción	1
1.1. Presentación del Problema	1
1.2. Parámetros del Problema	2
1.3. Nomenclatura Utilizada	2
1.4. Carecterísticas de las Estructuras	3
2. Cálculo del Grado de Indeterminación Estática	4
3. Cálculo de Datos Preliminares	5
3.1. Cálculo de los Pesos de cada Estructura	5
3.2. Cálculo de los Centros de Masa de cada Estructura	6
4. Cálculo de Reacciones	9
4.1. DCL Global	9
4.2. DCL Punto B a la derecha	10
4.3. DCL Punto D a la derecha	10
4.4. Sistema de Ecuaciones	11
4.5. Resumen Resultados	11

Listado de Figuras

1.1. Modelo del Sistema Utilizado	1
3.1. Descomposición de la Estructura 1 en dos Estructuras Auxiliares (Cuarto de Circulo y Triangulo)	5
3.2. Centro de Masa \bar{x}_1	7
3.3. Descomposición del centro de Masa en dos Estructuras Auxiliares (Cuarto de Circulo y Triangulo)	7
4.1. Diagrama de Cuerpo Libre Global	9
4.2. Diagrama de Cuerpo Rotula B (Lado Derecho)	10
4.3. Diagrama de Cuerpo Rotula D (Porción Inferior)	10

Listado de Tablas

4.1. Resumen de los Valores Encontrados en funcion de R, ρ y g	11
---	----

1. Introducción

1.1. Presentación del Problema

El problema consiste en calcular las reacciones de los apoyos de el sistema de estructuras mostrado en la Figura 1.1 además de la tensión de la barra ubicada entre el punto C y D. El modelo considerado consiste en estructuras de densidad uniforme y vinculaciones tanto externas (Apoyos) como internas. Las vinculaciones externas utilizadas son un *Apoyo Simple* ubicado en el punto G y 2 *Apoyos Deslizantes* ubicados en los puntos A y F. Por otro lado las vinculaciones internas utilizadas son una *Biela* ubicada entre los puntos C y D, y dos *Rotulas* ubicadas en los puntos B y E.

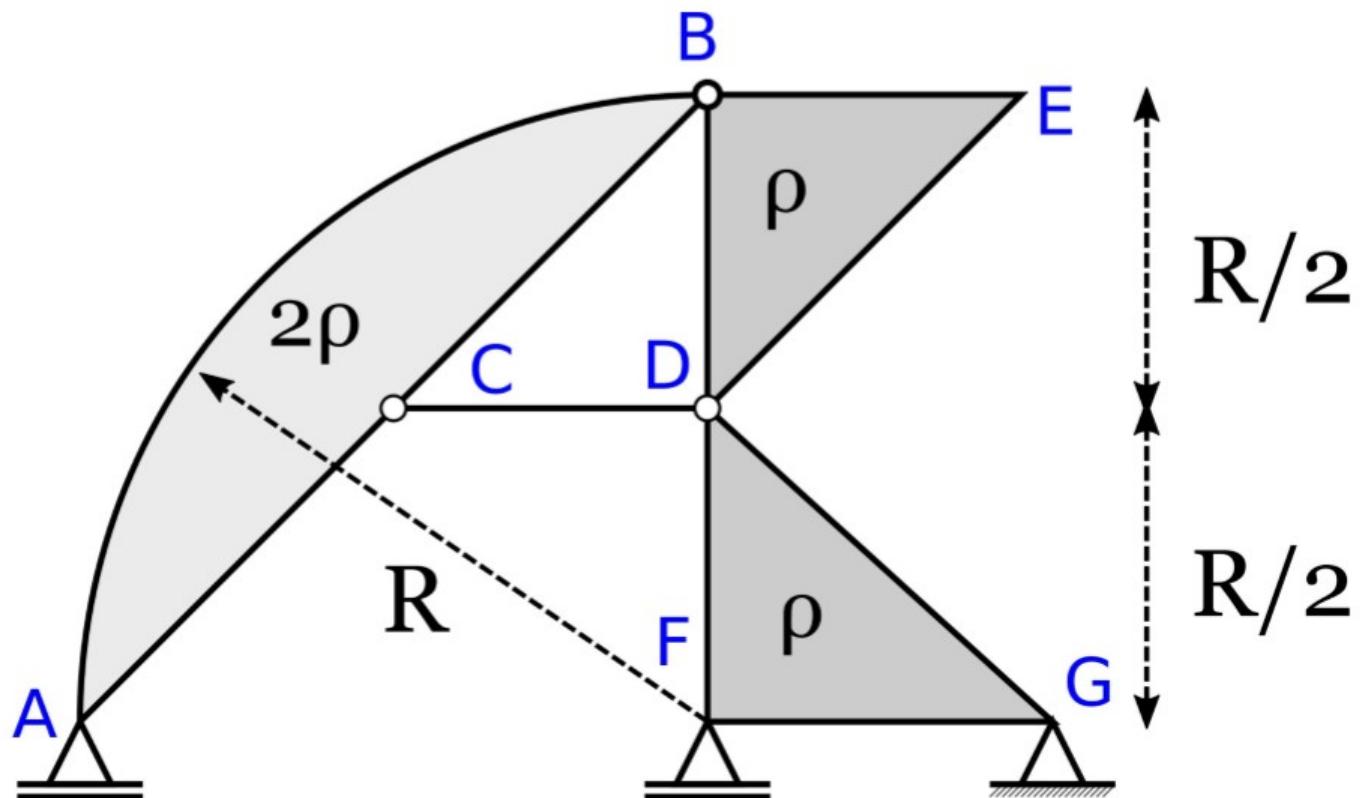


Figura 1.1: Modelo del Sistema Utilizado

Como es posible notar, la densidad de cada estructura provocara una fuerza vertical en sentido contrario a las reacciones de los apoyos ya que se considera que se esta bajo la influencia de la aceleracion de gravedad. de aquí en adelante llamaremos a ésta aceleración como g .

1.2. Parámetros del Problema

A continuación se presentan los parametros utilizados en este problema. Los resultados se dejaran en función de estos parametros.

$$g : \text{Parametro que representa la aceleración de gravedad} \quad (1.1)$$

$$\rho : \text{Parametro con unidades de densidad superficial} \quad (1.2)$$

$$R : \text{Parametro con unidades de longitud} \quad (1.3)$$

1.3. Nomenclatura Utilizada

Para los calculos posteriores fue se utiliza la siguiente nomenclatura:

$$Estructura_1 : \text{Estructura con vertices en los puntos A y B} \quad (1.4)$$

$$Estructura_2 : \text{Estructura con vertices en los puntos D, F y G} \quad (1.5)$$

$$Estructura_3 : \text{Estructura con vertices en los puntos B, D y E} \quad (1.6)$$

$$A_1 : \text{Área de la estructura 1} \quad (1.7)$$

$$A_2 : \text{Área de la estructura 2} \quad (1.8)$$

$$A_3 : \text{Área de la estructura 3} \quad (1.9)$$

$$P_1 : \text{Peso de la estructura 1} \quad (1.10)$$

$$P_2 : \text{Peso de la estructura 2} \quad (1.11)$$

$$P_3 : \text{Peso de la estructura 3} \quad (1.12)$$

$$\bar{x}_1 : \text{Centro de masa de la estructura 1} \quad (1.13)$$

$$\bar{x}_2 : \text{Centro de masa de la estructura 2} \quad (1.14)$$

$$\bar{x}_3 : \text{Centro de masa de la estructura 3} \quad (1.15)$$

$$A_y : \text{Reaccion en el eje y del apoyo deslizante en el punto A} \quad (1.16)$$

$$F_y : \text{Reaccion en el eje y del apoyo deslizante en el punto F} \quad (1.17)$$

$$G_x : \text{Reaccion en el eje x del apoyo simple en el punto G} \quad (1.18)$$

$$G_y : \text{Reaccion en el eje y del apoyo simple en el punto G} \quad (1.19)$$

$$T_{CD} : \text{Tension de la biela entre los puntos C y D} \quad (1.20)$$

1.4. Características de las Estructuras

Las tres estructuras del sistema tienen ciertas características que los diferencian y que son importantes de tener en cuenta antes de empezar a realizar los cálculos correspondientes

- *Estructura₁* tiene las siguientes características:

- Se encuentra a la izquierda de la Figura 1.1, con vértices en los puntos A y B
- Tiene densidad superficial 2ρ
- Esta conformada por la región interior de la intersección de la recta AB y la porción superior de una circunferencia centrada en el punto F de radio R

- *Estructura₂* tiene las siguientes características:

- Se encuentra en la esquina inferior derecha de la Figura 1.1, con vértices en los puntos D, F y G
- Tiene densidad superficial ρ
- Es un triángulo rectángulo isósceles de catetos de largo $\frac{R}{2}$

- *Estructura₃* tiene las siguientes características:

- Se encuentra en la esquina superior derecha de la Figura 1.1, con vértices en los puntos B, D y E
- Tiene densidad superficial ρ
- Es un triángulo rectángulo isósceles de catetos de largo $\frac{R}{2}$

2. Cálculo del Grado de Indeterminación Estática

Para encontrar el grado de indeterminación estática del sistema, primero se deben realizar algunos cálculos previos.

- Grados de Libertad Libres (GDL):

Son los grados de libertad en los que pueden moverse las estructuras por si solas y se calculan en el caso de 2 dimensiones como la siguiente expresión:

$$GDL = 3(N_{cuerpos}) \implies GDL = 9$$

- Grados de Libertad Restringidos (Rest):

Son los grados de libertad que se le restringen al sistema por medio de las vinculaciones externas e internas.

Calculando las restricciones que se tienen por vinculación, se tiene que:

$$Rest_{\text{Apoyo Deslizante}} = 1$$

$$Rest_{\text{Apoyo Simple}} = 2$$

$$Rest_{\text{Bielas}} = 1$$

$$Rest_{\text{Rótula}} = 2$$

$$V = \{ApoyoDeslizante_A, ApoyoDeslizante_F, ApoyoSimple_G, Biela_{CD}, Rótula_B, Rótula_D\}$$

$$\begin{aligned} Rest = \sum_{i \in V} Rest_i &= 2Rest_{\text{Apoyo Deslizante}} + Rest_{\text{Apoyo Simple}} + Rest_{\text{Bielas}} + 2Rest_{\text{Rótula}} \\ &\implies Rest = 9 \end{aligned}$$

Luego la expresión para calcular el Grado de Indeterminación Estática (GIE) es:

$$GIE = -(GDL - Rest) \implies GIE = 0 \implies \text{El sistema es Isostático}$$

3. Cálculo de Datos Preliminares

3.1. Cálculo de los Pesos de cada Estructura

Dado que se tienen los valores de las densidades de cada estructura y estas son uniformes, una vez calculadas las áreas de las estructuras el cálculo de los pesos es trivial.

- Estructura 1:

- Cálculo del Área:

Para el cálculo del área de la Estructura 1 fue necesario notar que esta correspondía a la diferencia entre el área de un cuarto de circunferencia de radio R (A_{CC}) y el área de un triángulo rectángulo isósceles de catetos de largo R (A_T) tal como se muestra en la Figura 2.1

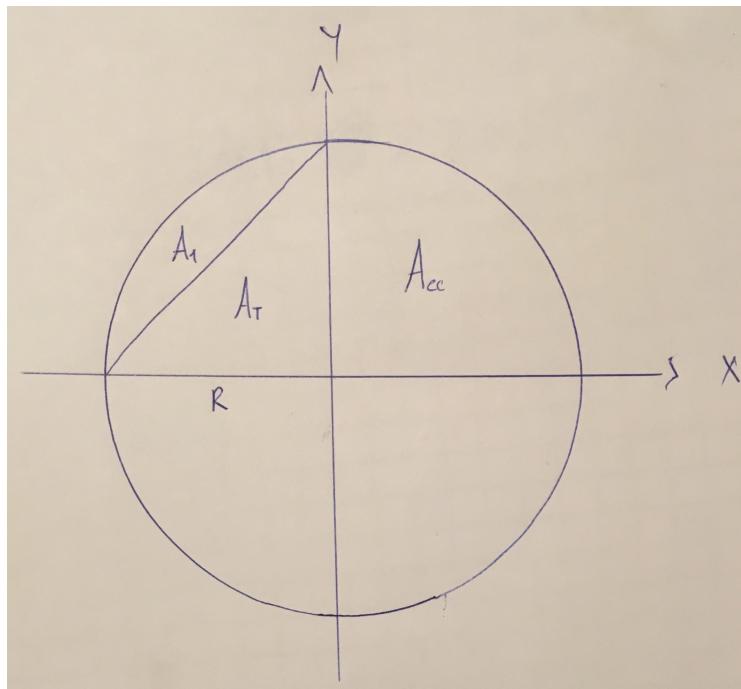


Figura 3.1: Descomposición de la Estructura 1 en dos Estructuras Auxiliares (Cuarto de Circulo y Triangulo)

Luego se tiene que:

$$A_{CC} = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$A_T = \frac{R^2}{2}$$

$$A_1 = A_{CC} - A_T \implies A_1 = \left(\frac{R}{2}\right)^2(\pi - 2)$$

- Cálculo del Peso:

Luego el cálculo del peso es simplemente la masa por la aceleración de gravedad. Con una densidad de 2ρ se tiene que:

$$P_1 = A_1(2\rho g) \implies P_1 = \frac{\rho g R^2(\pi - 2)\rho g}{2}$$

■ Estructura 2:

- Cálculo del Área:

Para el cálculo del área de la Estructura 2 fue necesario notar que esta corresponde a un Triángulo Rectángulo Isósceles de catetos de largo $\frac{R}{2}$. Luego se tiene que:

$$A_2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

- Cálculo del Peso:

Luego trivialmente con una densidad de ρ se tiene que:

$$P_2 = A_2(\rho g) \implies P_2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2\left(\frac{\rho g}{2}\right)$$

■ Estructura 3:

Analogamente a la Estructura 2 se tiene que:

- Cálculo del Área:

$$A_3 = \left(\frac{R}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

- Cálculo del Peso:

$$P_3 = A_3(\rho g) \implies P_3 = \left(\frac{R}{2}\right)^2\left(\frac{\rho g}{2}\right)$$

3.2. Cálculo de los Centros de Masa de cada Estructura

Se procede a calcular la componente x del centro de masa de cada una de las estructuras, ya que al estar los pesos en el eje y solo importara la distancia en x desde algun punto para calcular el momento que producen. En particular en este caso se calculan las distancias desde el punto A.

- Estructura 1:

A continuación se muestra un esquema del Centro de Masa.

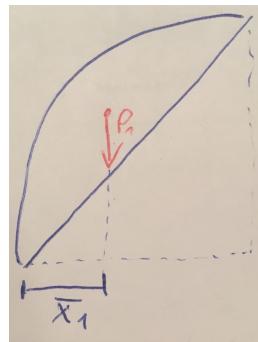


Figura 3.2: Centro de Masa \bar{x}_1

Para calcular el centro de masa, nuevamente se optara por descomponer la estructura 1 en dos estructuras más simples como se muestra en la Figura 2.3

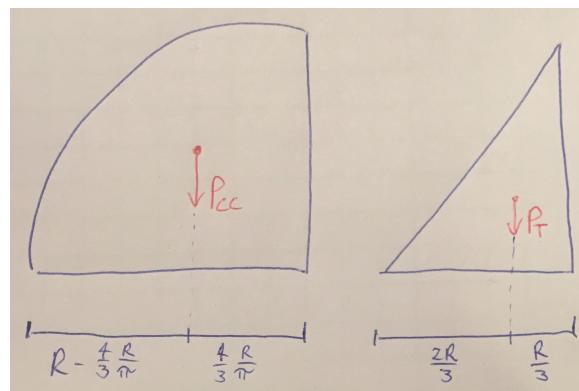


Figura 3.3: Descomposición del centro de Masa en dos Estructuras Auxiliares (Cuarto de Circulo y Triangulo)

El centro de masa de un cuarto de circunferencia y de un triángulo son conocidos y se señalan para este caso particular en la Figura 2.3.

Los valores de los pesos de las Estructuras auxiliares son:

$$P_{CC} = A_{CC}(2\rho g) \implies P_{CC} = \frac{\pi R^2}{2}(\rho g)$$

$$P_T = A_T(2\rho g) \implies P_T = R^2(\rho g)$$

Luego la expresión para calcular el centro de masa es:

$$\bar{x}_1 = \frac{P_{CC}(R - \frac{4R}{3\pi}) - P_T(\frac{2R}{3})}{P_{CC} - P_T} \implies \bar{x}_1 = \frac{3\pi - 8}{3(\pi - 2)}R$$

- Estructura 2:

Para un triangulo rectangulo, el centro de masa en el eje de un cateto siempre está a $\frac{1}{3}$ de la longitud de ese cateto desde el vertice del angulo recto.

Para que los cálculos sean consistentes, se opta por mantener el origen de coordenadas anterior y calcular el centro de masa de esta estructura desde el punto A.

Luego la expresión para calcular el centro de masa es:

$$\bar{x}_2 = R + \frac{R}{2} \frac{1}{3} \implies \bar{x}_2 = \frac{7}{6}R$$

- Estructura 3:

El cálculo para esta estructura es análogo al anterior.

El centro de masa es:

$$\bar{x}_3 = R + \frac{R}{2} \frac{1}{3} \implies \bar{x}_3 = \frac{7}{6}R$$

$$\implies \bar{x}_2 = \bar{x}_3$$

4. Cálculo de Reacciones

En esta sección se calculan las reacciones de los 3 apoyos de la estructura y ademas la tensión de la Biela en CD.

Es posible darnos cuenta de que son 5 incognitas en total que se deben obtener A_y , F_y , G_x , G_y y T_{CD} , y para esto se deben encontrar 5 ecuaciones Linealmente Independientes para poder realizar un adecuado sistema de ecuaciones y poder encontrar el valor de cada una de las variables.

Sin embargo, el DCL global solo entrega 3 ecuaciones L.I. al imponer las condiciones de equilibrio, por lo que se deberan buscar 2 cortes más para obtener más ecuaciones.

4.1. DCL Global

Se comienza identificando todas las fuerzas que actuan en este diagrama de cuerpo libre particular.

Esto se puede ver en la Figura 4.1 en donde las Flechas rojas indican fuerzas.

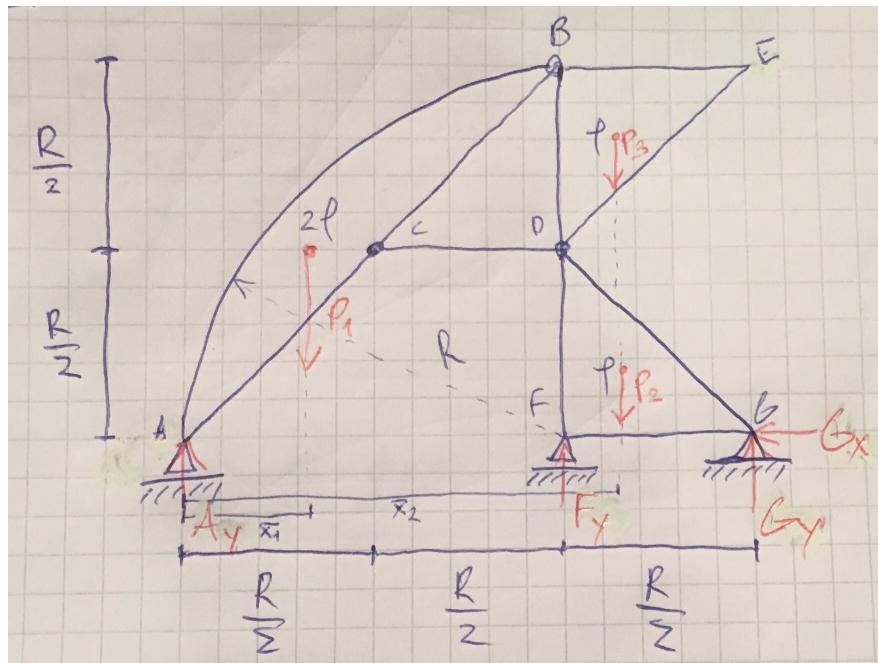


Figura 4.1: Diagrama de Cuerpo Libre Global

Luego se pueden imponer las condiciones de equilibrio en el sistema.
Estas condiciones son las siguientes:

$$\sum F_x = 0 \implies G_x = 0 \quad (4.1)$$

$$\sum F_y = 0 \implies A_y + F_y + G_y = P_1 + P_2 + P_3 \quad (4.2)$$

$$\sum M_A = 0 \implies RF_y + \frac{3}{2}RG_y = \bar{x}_1P_1 + \bar{x}_2(P_2 + P_3) \quad (4.3)$$

4.2. DCL Punto B a la derecha

Se procede a hacer un metodo del corte en la rótula ubicada en el punto B y considerar la estructura que se encuentra a la derecha de ese punto tal como se muestra en la Figura 4.2.

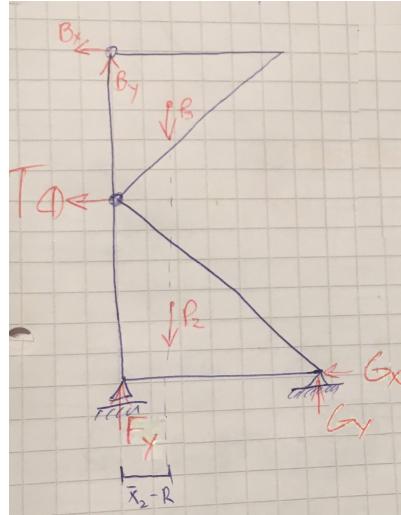


Figura 4.2: Diagrama de Cuerpo Rotula B (Lado Derecho)

En la Figura, las Fuerzas B_x y B_y representan las fuerzas que ejerce la estructura sobre la rotula. En este caso aparece una nueva incógnita que es la tensión de la Bilea DC. Para este DCL solo será relevante la equación de momento en el punto B. Luego:

$$\sum M_B = 0 \implies \frac{R}{2}G_y - RG_x - \frac{R}{2}T_{CD} = (\bar{x}_2 - R)(P_2 + P_3) \quad (4.4)$$

4.3. DCL Punto D a la derecha

Finalmente se realiza un último corte a la estructura en la rótula ubicada en el punto D tomando la estructura abajo de esta como se muestra en la Figura 4.3.

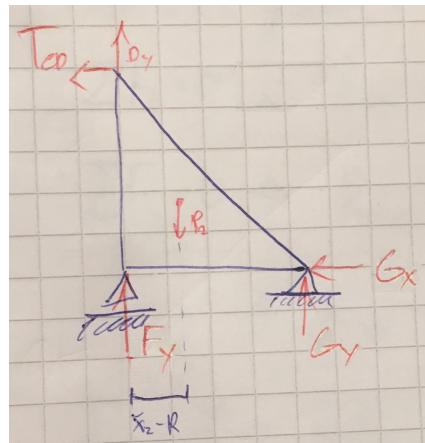


Figura 4.3: Diagrama de Cuerpo Rotula D (Porción Inferior)

En esta Figura la Fuerza D_y Representa la fuerza que ejerce la estructura sobre esa rótula. Calculando el momento en ese punto se encuentra la siguiente expresión:

$$\sum M_D = 0 \implies \frac{R}{2}G_y - \frac{R}{2}G_x = (\bar{x}_2 - R)P_2 \quad (4.5)$$

4.4. Sistema de Ecuaciones

Es posible notar que se tienen 5 incognitas: A_y , F_y , G_x , G_y y T_{CD} , y por medio de las condiciones de equilibrio impuestas en cada uno de los diagramas de cuerpo libre se encontraron 5 ecuaciones LI las cuales son: (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) y (4.5).

Esto permite realizar un sistema de ecuaciones de 5x5 y así encontrar los valores de cada una de las variables.

4.5. Resumen Resultados

En la Tabla 4.1 se muestra una tabla resumen con los valores encontrados de cada una de las incognitas que se deseaban encontrar las cuales eran las 4 reacciones de los apoyos y la tensión de la Biela.

Tabla 4.1: Resumen de los Valores Encontrados en función de R, ρ y g

A_y	F_y	G_x	G_y	T_{CD}
$(\rho g)(\frac{R}{2})^2(\frac{143-28\pi}{12})$	$(\rho g)(\frac{R}{2})^2(\frac{72\pi-181}{12})$	0	$\frac{\rho g}{6}(\frac{R}{2})^2$	$-\frac{\rho g}{6}(\frac{R}{2})^2$

En la tabla anterior es posible observar que la magnitud de la reacción horizontal en G es nula como era esperable ya que la estructura solo se encuentra bajo solicitudes verticales (Pesos de las estructuras). Por otro lado todas las otras fuerzas encontradas son dimensionalmente correctas al tener dimensiones de longitud al cuadrado por densidad superficial, lo cual es masa, y por dimensiones de aceleración, lo cual da como resultado una fuerza.