

DSP ラジオの原理

2016 年 6 月 25 日

技術書典

マクスウェル方程式から、IQ 検波
Wifi に技適が必要な法的根拠まで



電波を理論的に導いてみる

はじめに

ここでは無線関係、特に電磁波、交流理論の非常に基礎的な部分で私が学習していて気になった部分について述べる。教科書に載っている程度のレベルの話であり、読者がこの程度のことを理解しているのであれば、確実に退屈するであろう。また、冗長ではあるがなるべく計算の過程を省略せずにかく。これは私が後に振り返った時にどうしてそうなったかを思い出すためである。もしも読者が学習途上にあるなら、自分の手を動かして、私が辿った過程をなぞってみることをお勧めする。

交流電圧の実効値の導出

まず本題に入る前の肩慣らしとして、交流電圧の実効値の導出をやってみよう。中学の技術の教科書や、高校の物理の教科書には、正弦波交流電圧の実効値は振幅の $\sqrt{2}$ 分の 1 であると書かれている。この $\sqrt{2}$ 分の 1 はどこから出てきたのだろうか。

交流電圧が正弦波交流と仮定すると、電圧 V は、振幅を V_0 とすると以下のように書ける。

$$V = V_0 \sin(\omega t) \quad (1)$$

ここで ω とは角振動数で単位時間あたりの位相の変化率である。角振動数

は、周波数を f とすると

$$\omega = 2\pi f$$

であり、振動の周期を T とすると

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

である。交流電圧の実効値 V_e は、1 周期あたりの平均の電圧である。sin 関数を 1 周期の間で積分すると 0 になってしまうため、 V を二乗して積分し、その結果の平方根を実効値とする。すなわち

$$V_e^2 = \frac{1}{T} \int_0^T V_0^2 \sin^2(\omega t) dt \quad (2)$$

sin の二乗の積分はすぐにはできないので、倍角公式を使って $\cos 2\omega t$ の積分に変換する。倍角公式は、

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

であるから、式 (2) に上式を代入して積分を実行すると

$$\begin{aligned} V_e^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T V_0 \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt \\ &= \frac{V_0^2}{2T} \int_0^T 1 - \cos 2\omega t dt \\ &= \frac{V_0^2}{2T} \left[t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right]_0^T \\ &= \frac{V_0^2}{2} \end{aligned}$$

両辺の平方根をとり、符号が正のものを実効値とすると、

$$V_e = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

となり、正弦波交流電圧の実効値が、振幅の $\sqrt{2}$ 分の 1 であることが示された。。

正弦波交流の複素表示

さて、これから電場の時間変化が、時間的、空間的にどう影響を及ぼすかを考えていくわけだが、交流電場の微分や積分がたくさん出てくる。この微積分の計算を簡単にするために、オイラーの公式 (Eular's Formula)

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

を用いて、以下のように正弦波交流を表現することにする。

式 (1) で、時刻 t における正弦波交流の電圧の瞬時値 V を定義したが、オイラーの公式を用いて、

$$V = V_0 e^{j\omega t} \quad (3)$$

と書く。ここで $j = \sqrt{-1}$ である。電圧の計算値が必要な場合は、この虚部をとれば良い。

さて、本当にこんな事で微分が簡単になるのだろうか。これが簡単になる。なぜなら、 λ を定数とすると、関数 $f(t) = e^{\lambda t}$ の時間微分は

$$\frac{df}{dt} = \lambda e^{\lambda t}$$

であるから、たとえば正弦波交流が作る電場の大きさを $E = E_0 e^{j\omega t}$ とすると、この時間微分は

$$\frac{dE}{dt} = E_0 j\omega e^{j\omega t} = j\omega E$$

となり、微分を定数 $j\omega$ との掛け算に変換することができる。すばらしい。これが、オイラーの公式が「人類で最も美しい式」と呼ばれる所以である。

オイラーの公式の証明

少し脱線して、オイラーの公式の証明をやってみよう。マクローリン展開を用いて証明するのが一般的なようだが、ここでは微分方程式を用いた方

法でやってみよう。関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \cos x + j \sin x$$

と定義する。この $f(x)$ の x による微分を計算すると、

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = -\sin x + j \cos x$$

となる。次に、 $f'(x)$ を $f(x)$ で割ると

$$\begin{aligned} \frac{f'}{f} &= \frac{-\sin x + j \cos x}{\cos x + j \sin x} \\ &= \frac{(-\sin x + j \cos x)(\cos x - j \sin x)}{(\cos x + j \sin x)(\cos x - j \sin x)} \\ &= \frac{-\sin x \cos x + j \sin^2 x + j \cos^2 x - j^2 \sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin x \cos x + \sin x \cos x + j(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos^2 x + \sin^2 x} \\ &= j \end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dx} = j$$

という微分方程式になる。これを解くと

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} \frac{df}{dx} &= j \\ \frac{1}{f} df &= j dx \\ \int \frac{1}{f} df &= \int j dx \\ \ln |f| &= jx + C_1 \\ f &= e^{jx+C_1} \\ &= e_1^C e^{jx} \\ &= C e^{jx} \end{aligned}$$

となる。ただし、 C_1 、 C は積分定数。 e^{C_1} は定数なので、 $e^{C_1} = C$ とした。
そういえば最初に、 $f(x) = \cos x + j \sin x$ としたので、

$$\cos x + j \sin x = Ce^{jx}$$

である。 $x = 0$ の時 $f(0) = 1$ で、 $Ce^0 = C$ なので、 $C = 1$ よって

$$\cos x + j \sin x = e^{ix}$$

が示された。

マクスウェル方程式

閑話休題。本題に戻ろう。さて、電磁波はマクスウェル方程式から波動方程式が導出できることからその存在が予言され、ヘルツによって電磁波の存在が実験的に確かめられた。この節では、その過程をたどってみよう。

マクスウェル方程式は、マクスウェルが既に知られていたファラデーの電磁誘導の法則、アンペールの回路法則、ガウスの定理をまとめたもので、誘電率を ϵ 、透磁率を μ として、以下の簡潔な方程式で表現されている。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7)$$

また、

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (8)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (9)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (10)$$

である。ここで、 \mathbf{E} は電場、 \mathbf{H} は磁場、 \mathbf{D} は電束密度、 \mathbf{B} 磁束密度で、 ∇ は \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} を x 、 y 、 z 方向の単位ベクトルとすると

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

という演算子のベクトルである。 ∇ を任意のベクトル $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$ に作用させると

$$\nabla \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\mathbf{k}$$

これは、「ベクトル \mathbf{A} の x 、 y 、 z 方向のそれぞれの変化率をベクトルにしたもの」である。ベクトルのスカラー積、ベクトル積も確認しておこう。ベクトル \mathbf{A} の他に、もう一つ任意のベクトル $\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$ を使うことにすると、 \mathbf{A} と \mathbf{B} の内積（スカラー積）および外積（ベクトル積）は

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\ \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k}\end{aligned}$$

である。また、 $\mathbf{A} \perp (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ 、 $\mathbf{B} \perp (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ である。そして ∇ と \mathbf{A} との内積、外積は、

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}\end{aligned}$$

である。

式 (9) を式 (4) に、また式 (8)、式 (8) を式 (5) に代入すると、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (11)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (12)$$

となる。式 (11) を見ると、左辺が 0 でないとき ($\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$)、右辺と左辺の間のイコール(=)を成立させるためには、 μ が定数なので、磁場の時間変

化 $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ は 0 になれない。すなわち空間の電場が変化すると、磁場が時間的に変化することを意味する。同様に、式 (12) を見ると、空間の磁場が変化する ($\nabla \times \mathbf{H} \neq 0$) と、電場の時間変化を引き起こすことがわかる。よってなんらかの原因で空間の電場が変化すると、磁場が変化し、その磁場の変化が電場を変化させ、その電場の変化が.... と電場と磁場の変化の連鎖が継続することがわかる。はじめに磁場が変化した場合も同様である。

波動方程式

さて、電波の存在は示すことができたが、具体的に問題を解くにはどうすれば良いのだろう。

∇ と $\nabla \times \mathbf{E}$ の外積をとると、式 (11) より

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H})$$

式 (12) を代入すると

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (13)$$

となる。空間に電荷がない場合を考えると、 $\nabla \mathbf{D} = \epsilon \nabla \mathbf{E} = 0$ であるから、ベクトル公式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

は、

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

となる。これを式 (13) に代入すると、

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (14)$$

と書ける。これを電磁波の波動方程式といい、マイクロ波の問題はこの波動方程式に境界条件を適用することで解くことができる。

ヘルムホルツ方程式

現在考えている電波は正弦波交流で生じたものである。この場合、波動方程式はどう書けるだろうか。

まず、電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{H} を式 (3) と同様に

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{j\omega t} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 e^{j\omega t}\end{aligned}$$

と書く。すると式 (4) は、

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}_0 e^{j\omega t} \\ &= -j\omega\mu \mathbf{H}_0 e^{j\omega t} \\ &= -j\omega\mu \mathbf{H}\end{aligned}\tag{15}$$

となり、同様に式 (5) は、

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E} + \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_0 e^{j\omega t} \\ &= \sigma \mathbf{E} + j\omega\mu \mathbf{E}_0 e^{j\omega t} \\ &= (\sigma + j\omega\mu) \mathbf{E}\end{aligned}\tag{16}$$

となる。またこの時の波動方程式は、

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} &= \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}_0 e^{j\omega t}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}_0 e^{j\omega t}}{\partial t^2} \\ &= \mu\sigma j\omega \mathbf{E}_0 e^{j\omega t} + \mu\epsilon j^2 \omega^2 \mathbf{E}_0 e^{j\omega t} \\ &= \mu\sigma j\omega \mathbf{E} - \mu\epsilon \omega^2 \mathbf{E} \\ &= (j\mu\sigma\omega - \omega^2\mu\epsilon) \mathbf{E} \\ &= -k^2 \mathbf{E}\end{aligned}$$

となる。ここで $k^2 = \mu\epsilon\omega^2 - j\omega\mu\sigma$ とした。これは

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0\tag{17}$$

であり、ヘルムホルツ方程式と呼ばれる形である。

磁場についても、 ∇ と $\nabla \times \mathbf{E}$ の外積をとり、式 (12) を代入し同様のことを行くと、磁場についてのヘルムホルツ方程式を得る。

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (18)$$

さて、そろそろ「ヘルムホルツ方程式ってなに？それおいしいの？」という疑問が出てきているだろう。そのとおり。おいしいのである。なぜなら、ヘルムホルツ方程式の解き方はすでにわかっているからだ。正弦波交流から生じる電波の問題を解く時、この解き方のわかっているヘルムホルツ方程式を解けば、答えが出てくるのである。

電磁波の速度（光速）の導出

導電率 $\sigma = 0$ の空間において、すなわち、空気のように空間に満たされている物質の抵抗が十分大きい場合で、 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} が z のみの関数であるときを考える。式 (15) を E 、 H が正弦波と仮定して計算すると、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \mathbf{k} \\ & = -j\omega\mu(H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (19)$$

で、成分ごとに書くと、

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} = -j\omega\mu H_x \quad (20)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu H_y \quad (21)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = -j\omega\mu H_z \quad (22)$$

となる。また、式 (16) も同様に、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) \mathbf{k} \\ & = (\sigma + j\omega\epsilon)(H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (23)$$

で、成分ごとに書くと、

$$\left(\frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y}\right)\mathbf{i} = \sigma + (j\omega\epsilon)H_x \quad (24)$$

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z}\right)\mathbf{j} = \sigma + (j\omega\epsilon)H_y \quad (25)$$

$$\left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x}\right)\mathbf{k} = \sigma + (j\omega\epsilon)H_z \quad (26)$$

となる。 \mathbf{E} が z のみに依存する関数であれば、 x 、 y 方向の微分は 0 であることに注意すると

$$H_z = E_z = 0 \quad (27)$$

よって

$$\frac{dE_x}{dz} = -j\omega\mu H_y \quad (28)$$

$$\frac{dH_y}{dz} = -j\omega\epsilon E_x \quad (29)$$

$$\frac{dE_y}{dz} = -j\omega\mu H_x \quad (30)$$

$$\frac{dH_x}{dz} = -j\omega\epsilon E_y \quad (31)$$

となる。式 (28) の両辺を z で微分し、式 (29) を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_x}{dz^2} &= -j\omega\mu \frac{dH_y}{dz} \\ &= -j\omega\mu(-j\omega\epsilon E_x) \\ &= -\omega^2 \mu\epsilon E_x \end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + \omega^2 \mu\epsilon E_x = 0 \quad (32)$$

である。式 (29) は、両辺を z で微分した後、式 (28) を代入する。

$$\begin{aligned}\frac{d^2 H_y}{dz^2} &= -j\omega\epsilon \frac{dE_x}{dz} \\ &= -j\omega\epsilon(-j\omega\mu H_y) \\ &= -\omega^2\mu\epsilon H_y\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{d^2 H_y}{dz^2} + \omega^2\mu\epsilon H_y = 0 \quad (33)$$

である。同様に E_y と H_x も、

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + \omega^2\mu\epsilon E_y = 0 \quad (34)$$

$$\frac{d^2 H_x}{dz^2} + \omega^2\mu\epsilon H_x = 0 \quad (35)$$

となる。これらの、式 (32) から式 (35) の 4 つの式は、振動を表す微分方程式である。

$\kappa^2 = \omega^2\mu\epsilon$ とおくと、式 (32) は、

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + \kappa^2 E_x = 0$$

である。 $E_x = e^{\lambda z}$ と仮定して、 z の一階微分、二階微分を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{dE_x}{dz} &= \lambda e^{\lambda z} \\ \frac{d^2 E_x}{dz^2} &= \lambda^2 e^{\lambda z}\end{aligned}$$

なので、元の微分方程式に代入すると

$$(\lambda^2 + \kappa^2)e^{\lambda z} = 0$$

となる。 $e^{\lambda z} \neq 0$ なので、 $\lambda^2 + \kappa^2 = 0$ 。よって $\lambda = \pm j\kappa$ 。ゆえに一般解は C_1 、 C_2 を定数として

$$E_x = C_1 e^{j\kappa z} + C_2 e^{-j\kappa z}$$

である。前述のオイラーの公式を用いて、 C_1 、 C_2 を適当に選ぶと、

$$E_x = A_1 \cos \kappa z + j B_1 \sin \kappa z \quad (36)$$

である。残りの式も同様に、

$$H_y = A_2 \cos \kappa z + j B_2 \sin \kappa z \quad (37)$$

$$E_y = A_3 \cos \kappa z + j B_3 \sin \kappa z \quad (38)$$

$$H_x = A_4 \cos \kappa z + j B_4 \sin \kappa z \quad (39)$$

となる。 \mathbf{E} および \mathbf{H} は、角速度 $\omega = 2\pi f$ の正弦波であると仮定していたことを思い出すと、 $E_x = A'_1 \sin \omega t + B'_1 \cos \omega t$ と書けるはずである。電磁波の伝搬速度を v とすると、 $z = vt$ であるから

$$\begin{aligned} E_x &= A_1 \cos \kappa vt + j B_1 \sin \kappa vt \\ &= A_1 \cos \omega \sqrt{\mu\epsilon} vt + j B_1 \sin \omega \sqrt{\mu\epsilon} vt \\ &= A_1 \cos \omega t + j B_1 \sin \omega t \end{aligned}$$

\sin または \cos の引数を比較すると、 $\omega v \sqrt{\mu\epsilon} t = \omega t$ であるから、

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (40)$$

である。真空中の場合、 $\mu = 4\pi \times 10^{-7} [\text{H/m}]$ 、 $\epsilon = 8.85418782 \times 10^{-12} [\text{s}^4 \text{A}^2 / \text{kg} \cdot \text{m}^3]$ であるから、 $v = 2.99792458 \times 10^8 [\text{m/s}]$ となる。光は電磁波であることがわかっているので、この v は光速 c に一致する。

0.0.1 真空のインピーダンス

この章の最後に、真空のインピーダンスを求めておこう。もしも、真空中にダイポールアンテナが水平に張られており、それに周波数 f の高周波電圧が印可されていたとすると、水平方向に電場の変化が生じる。すなわち

$$E_x = E \cos \omega t + j E \sin \omega t, \quad E_y = E z = 0$$

の電場が生じる。式 (21) に代入して

$$\begin{aligned}
 0 - \frac{d}{dz}(E_x \cos \kappa z + jE_x \sin \kappa z) &= -(-E_x \kappa \sin \kappa z + jE_x \kappa \cos \kappa z) \\
 &= -(-E_x \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sin \kappa z + jE_x \omega \sqrt{\mu \epsilon} \cos \kappa z) \\
 &= -j\omega \mu H_y \\
 H_y &= jE_x \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sin \kappa z + E_x \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cos \kappa z \\
 \zeta = \frac{E_x}{H_y} &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \\
 &= \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}}{8.85418782 \times 10^{-12}}} \\
 &= 736.730313
 \end{aligned} \tag{41}$$

となる。 ζ は、インピーダンスの次元を持ち、真空中ではおよそ 377Ω である。

以上のように、マクスウェル方程式から波動関数を導き、電場または磁場が正弦波であることを仮定すると空間を伝播する電場と磁場の波、すなわち電磁波の存在を導くことができた。

DSP ラジオの原理 — AM 編—

最近秋葉原にあるパーツショップである aitendo(<http://www.aitendo.cc>)さんから発売され、個人的に気になっている DSP AM/FM ラジオキットの復調原理を説明する。一般にラジオは、アンテナで受信した電波を共振回路に入力することで選局し、検波回路で音声信号を取り出し、アンプで増幅してスピーカーで音にしている。これらは普通はアナログ回路である。例えば共振回路はコイルとコンデンサーを使ったもので、コンデンサーの容量を変化させることで、共振周波数、すなわち受信する周波数を決定している。また検波回路はダイオードの線形性を使って実現されている。一方、DSP ラジオでは、共振回路は同様だが、検波回路は IQ 検波と呼ばれる方法が用いられている。aitendo さんの DSP ラジオでは AM 放送、FM 放送、短波放送を聴くことができる。今回は、IQ 検波を使った AM の復調原理を説明する。FM は次号としよう。

前回同様、私の思考の過程を読者が辿れるようにするため、冗長なのは百も承知だが、数式の過程はできるだけ省かないことにする。また、章末の Listing 1 に、GNU R でこの復調をシミュレーションした時のソースコードを掲載しておく。

AM 変調とは

マクスウェルが電磁波の存在を理論的に示し、ヘルツによって電磁波の存在が実験的に確認され、マルコーニによって無線通信の実証が行われた。この時の通信は、まだ変調されておらずモールス信号のような、電波の ON/OFF のパターンで情報を表現するものだった。この方式では、文字を伝えることはできるのだが、効率が悪く、熟練者でも 1 分間に 200 から 300 文字程度がせいぜいである。そこで、電波を連続的に変化させることで電波に情報を乗せることが考えられた。この電波に情報を乗せることを変調という。

周波数 f の電波がアンテナに受信された時、その出力電圧を V とすると、

$$V = A \sin(2\pi f t + \phi) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (42)$$

と書ける。ここで A を振幅、 $\omega = 2\pi f$ を角振動数、 t は時間、 ϕ を初期位相とする。この A を変化させて信号を乗せるのが、AM (Amplitude Modulation: 振幅変調) である。ちなみに f を変化させるのが FM (Frequency Modulation: 周波数変調)、 ϕ を変化させるのが PM (Phase Modulation: 位相変調) である。

変調によって、信号は電波に乗せられる。信号を乗せる電波のことを搬送波 (Carrier) という。この搬送波の周波数を f_c 、振幅を C とすると、搬送波は

$$V_c = C \sin(2\pi f_c t) = C \sin \omega_c t \quad (43)$$

と書ける。一方、搬送波に乗せられる信号波 V_s は、音声信号が単一の周波数 f_s のみで構成されているとすると、振幅を S とすると、以下のように書ける。

$$V_s = S \sin(2\pi f_s t) = S \sin \omega_s t \quad (44)$$

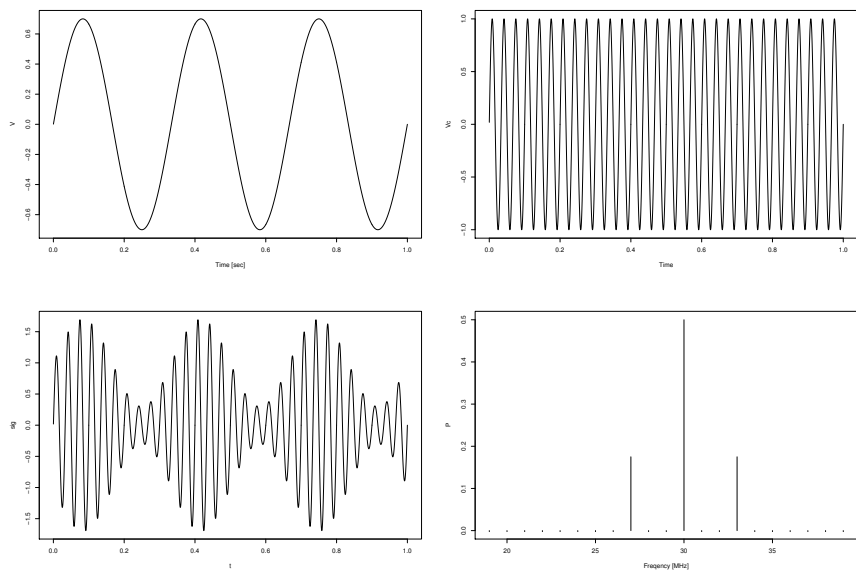


図1 信号波 (上段左)、搬送波 (上段右)、AM 変調波 (下段左)、AM 変調波のスペクトル (下段右) の例

この搬送波 V_c が、 V_s に AM 変調されると、

$$V_m = (V_s + C) \sin \omega_c t \quad (45)$$

$$\begin{aligned} &= (S \sin \omega_s t + C) \sin \omega_c t \\ &= V_s \sin \omega_s t \sin \omega_c t + C \sin \omega_c t \\ &= \frac{V_s}{2} \{ \sin(\omega_c + \omega_s)t + \sin(\omega_c - \omega_s)t \} + C \sin \omega_c t \end{aligned} \quad (46)$$

となる。ここでは三角関数の公式 $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$ を用いた。式 (46) を見ると、AM 変調波は、 $\omega_s \pm \omega_c$ と、 ω_c の3つの周波数成分をもっていることがわかる。話を簡単にするために、信号は ω_s の単一の周波数成分しかもたないことを仮定したが、実際は複数の周波数成分を

もっている。よって式 (45) は、

$$\begin{aligned} V_m &= \left(\sum_n s_n \sin \omega_n t + C \right) \sin \omega_c t \\ &= \sum_n a_n \sin \omega_n t \sin \omega_c t + C \sin \omega_c t \\ &= \frac{1}{2} \sum_n a_n \{ \sin(\omega_c + \omega_n)t + \sin(\omega_c - \omega_n)t \} + C \sin \omega_c t \end{aligned}$$

となる。これはシグマが付いているだけで、式 (46) と同じ形であるので、これ以降、信号波単一の周波数成分からなるものとする。

IQ 検波

さて、本题の DSP ラジオの原理を説明しよう。放送局から送信された AM 変調波を式 (45) で書ける信号をアンテナから受信する。これから搬送波と信号波を分離し、信号波を取り出すことを検波という。つまり式 (45) から式 (44) を取り出すことが検波である。

aitendo さんの DSP ラジオキットで使用されている DSP ラジオ IC Si4825-A10 のデータシートにあるブロックダイアグラムを図 2 に示す。アンテナから入力された信号は、ALC(Auto Level Control) 回路で増幅率を制御された低ノイズアンプ (LNA:Low Noise Amp) で増幅することで入力レベルを一定にしている。XTAL1 ピンから入力された正弦波を AFC(Automatic Frequency Control) 回路で周波数を制御して発信器に入力することで、局部発信器 (Local Oscillator) を構成している。局部発信器で作った正弦波を 2 分割し、一方の位相を 90 度変化させ、アンテナから入力された信号と Double Balanced Mixer でそれぞれ混合する。位相を 90 度変化させた正弦波とアンテナからの入力を混合したものを Q 成分、位相を変化させない正弦波と混合したものを I 成分と呼ぶ。これらの二つの信号が、ADC(Analog/Digital Converter) でデジタル信号に変換され DSP でデ

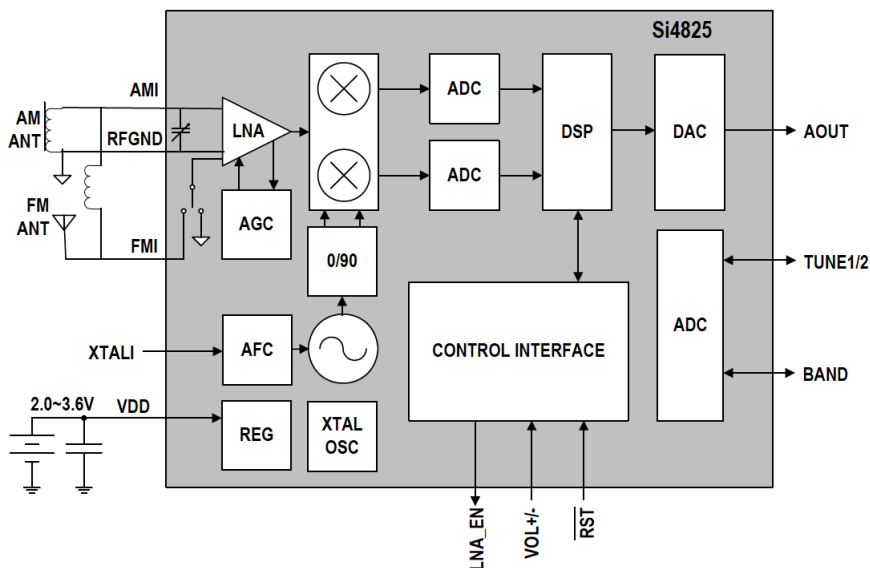


図2 DSP ラジオ IC Si4825-A10 のブロックダイアグラム

デジタル信号処理される。

局部発信器で作られた正弦波の周波数を f_L し、振幅を A_L とすると、局部発信器の出力は

$$V_L = A_L \sin(2\pi f_L t) = A_L \sin \omega_L t \quad (47)$$

となる。ここで $\omega_L = 2\pi f_L$ である。Double Balanced Mixer は、二つの入力端子の積が出力する。I 成分の Mixer 出力は、

$$\begin{aligned} V_I &= V_m A_L \sin\left(\omega_L t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= V_m A_L \cos \omega_L t \\ &= (V_s + C') \sin \omega_c t \cos \omega_L t \\ &= \frac{V_s + C}{2} \{\sin(\omega_c + \omega_L)t + \sin(\omega_c - \omega_L)t\} \end{aligned} \quad (48)$$

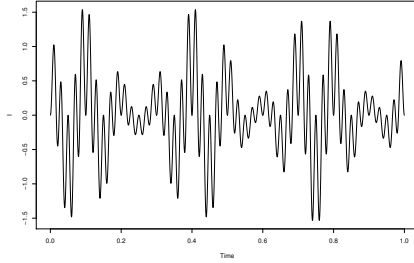


図3 I成分

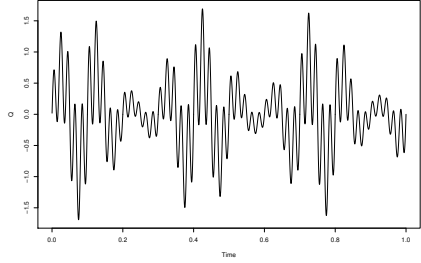


図4 Q成分

であり、Q成分も同様に

$$\begin{aligned}
 V_Q &= V_m A_L \sin \omega_L t \\
 &= (V_s + C) \sin \omega_c t \sin \omega_L t \\
 &= \frac{V_s + C}{2} \{ \cos(\omega_c + \omega_L)t - \cos(\omega_c - \omega_L)t \} \quad (49)
 \end{aligned}$$

である。

一般に高い周波数成分の信号を扱うのは、その周波数に対応できるだけの高速な回路が必要なので難しい。よってなるべく低い周波数に落とせるなら落としてから処理したほうが回路が簡単になるし安くすむ。この場合は、 $\omega_c + \omega_L$ と $\omega_c - \omega_L$ の両方の周波数成分に信号の情報 V_s が含まれている。よって周波数の高い $\omega_c + \omega_L$ の成分を捨てても全く問題はない。よってDSPに入力されたI、Qそれぞれの信号から、DSPの中のLPFで $\omega_c + \omega_L$ の成分を除去する。

$$V'_I = \frac{V_s + C}{2} \cos(\omega_c - \omega_L) \quad (50)$$

$$V'_Q = \frac{V_s + C}{2} \sin(\omega_c - \omega_L) \quad (51)$$

その後、式 (50) と式 (51) の二乗の和の平方根、すなわち

$$\sqrt{V_I'^2 + V_Q'^2} = \frac{V_s + C}{2} \sqrt{\cos^2(\omega_c - \omega_L)t + \sin^2(\omega_c - \omega_L)t} \quad (52)$$

$$= \frac{V_s + C}{2} \quad (53)$$

を計算する。これで搬送波の周波数成分および局部発信器の周波数成分を除去することができた。搬送波の振幅である C が残っているが、アンテナからの入力、ALC で増幅率を制御された低ノイズアンプによって入力レベルが一定になっている。すなわち C が一定なので、DSP で高域フィルタ (High Pass Filter) をかけることで、直流成分 C を除去することができる。これが、AM 変調波における IQ 検波の原理である。実際にシミュレーションしてみると、検波後の信号は図 5 のようになり上部がガタガタして、高周波成分が残っていることがわかる。今回のシミュレーションでは理想的なフィルターを実装したつもりだったが、不完全だったようだ。実際の回路や DSP の信号処理でも素子の非線形性や、外乱などで回路やデジタル処理は理想的なものではない。よって高調波成分を LPF で除去すると、図 6 のようにきれいに信号波を、取り出すことができる。図 1 の上段左と同じ波形である。あとは、スピーカーで音が出る程度にアンプで増幅してあげれば、AM ラジオのできあがりである。

最後に、GNU R で IQ 検波をシミュレーションしたときのソースコードを、Listing1 に示す。GNU R のインストール方法、詳細は、<http://www.r-project.org> を参照してほしい。主要な Linux ディストリビューションではパッケージになっているので、そちらを使ったほうが楽にインストールできるだろう。

Listing 1 シミュレーションのソースコード

```
1 # Low Pass Filter (LPF)
2 lpf <- function(signal, time, cutoff, smplfreq){
3     offset <- min(signal)
```

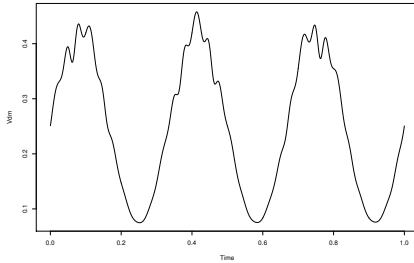


図5 IQ 検波された信号波

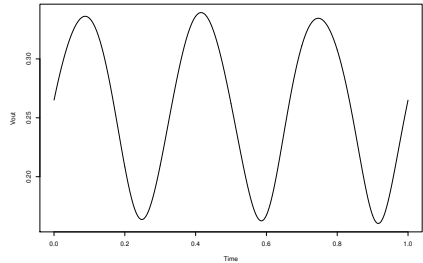


図6 LPF 通過後の出力信号

```

4         if(offset>0){
5             offset = 0
6         }
7         spec <- fft(signal + abs(offset))
8         idx = cutoff/(smpufreq/length(signal))
9         spec[idx:length(spec)] = 0
10        abs(fft(spec, inverse=TRUE))/length(spec)+offset
11    }
12
13    N <- 10000 # Sampling Frequency
14    t <- 1:N/N # Time
15    C = 1      # Carrier Amplitude
16    fc= 30     # Carrier Frequency
17    A = 0.7    # Signal Amplitude
18    fs= 3      # Signal Frequency
19    fl= 20     # Local Osc Freq
20

```

```
21  # AM Modulation
22  Vam <- (A*sin(2*pi*fs*t) + C) * sin(2*pi*fc*t)
23
24  Q = Vam * cos(2*pi*fl*t)
25  I = Vam * sin(2*pi*fl*t)
26
27  cutoff = 15 # Cutoff Frequency of LPF
28  Q2 <- lpf(Q, t, cutoff, N)
29  I2 <- lpf(I, t, cutoff, N)
30
31  # Demodulated Signal
32  Vdm = sqrt(Q2*Q2 + I2*I2)
33
34  # Outout Signal
35  Vout = lpf(Vdm, t, 10, N)
```


DSP ラジオの原理 ― FM 編―

前作に引き続き、aitendo(<http://www.aitendo.cc> さんから発売されている DSP AM/FM ラジオキットに使われている IC SI4825-A10 のデータシートに載っているブロックダイアグラムをネタに、FM 復調の原理を紹介する。

もちろん今回も冗長なのは百も承知で、数式の展開の過程はできるだけ省かないこととする。

FM 変調

まず FM 変調波がどのような数式で書けるか考えよう。周波数 f の電波がアンテナに受信された時、その出力電圧を V とすると、

$$V = A \sin(2\pi f t + \phi) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (54)$$

と書ける。ここで A を振幅、 $\omega = 2\pi f$ を角振動数、 t は時間、 ϕ を初期位相とする。この f 、すなわち ω を変化させて信号を乗せるのが、FM (Frequency Modulation: 周波数変調) である。ちなみに A を変化させるのが AM (Amplitude Modulation: 振幅変調)、 ϕ を変化させるのが PM (Phase Modulation: 位相変調) である。前回同様、信号を乗せる電波である搬送波 (Carrier) の周波数を f_c 、振幅を C とし、

$$V_c = C \sin(2\pi f_c t) = C \sin \omega_c t \quad (55)$$

と書く。一方、搬送波に乘せられる信号波 V_s は、音声信号が単一の周波数 f_s のみで構成されているとするとし、振幅を S して、以下のように書く。

$$V_s = S \sin(2\pi f_s t) = S \sin \omega_s t \quad (56)$$

V_s に応じて、 V_c の周波数を変化させるのが FM 変調であるので、変調波 V_{fm} は θ_m を時刻 t の関数とすると、

$$V_{fm} = C \sin \theta_m \quad (57)$$

である。

信号入力電圧 1V あたりの周波数の変化量は、マイク等から入力された音声信号の電圧の最大値を S 、その時の角周波数の変化量を $\Delta\omega$ とすると、

$$\delta\omega = \frac{\Delta\omega}{S}$$

となる。 θ_m は

$$\begin{aligned} \theta_m &= \omega_c t + \delta\omega \int_0^t S \sin \omega_s t dt \\ &= \omega_c t + \frac{\Delta\omega}{S} \int_0^t S \sin \omega_s t dt \\ &= \omega_c t + \frac{\Delta\omega}{S} \left[\frac{S}{\omega_s} \cos \omega_s t \right]_0^t \\ &= \omega_c t + \frac{\Delta\omega}{\omega_s} \cos \omega_s t \\ &= \omega_c t + m \cos \omega_s t \end{aligned} \quad (58)$$

となる。ここで m は変調指数と呼ばれる定数で、

$$m = \frac{\Delta\omega}{\omega_s} = \frac{\Delta f}{f_s} \quad (59)$$

である。 Δf は最大周波数偏位で、FM 放送では 75kHz と決められている。

最後に、式 59 を、式 57 に代入することで FM 変調波の一般式が求められる。

$$V_m = C \sin(\omega_c t + m \cos \omega_s t) \quad (60)$$

FM 復調

次は、式 60 で変調された信号を IQ 検波してみよう。IQ 検波については、前号を参照してほしい。

局部発信機 (Local Oscillator) の周波数を f_L 、角周波数 $\omega_L = 2\pi f_L$ とする。I 成分および Q 成分は、

$$\begin{aligned} I &= C \sin(\omega_c t + m \cos \omega_s t) \sin \omega_L t \\ Q &= C \sin(\omega_c t + m \cos \omega_s t) \sin(\omega_L t + \frac{\pi}{2}) \\ &= C \sin(\omega_c t + m \cos \omega_s t) \cos(\omega_L t) \end{aligned}$$

三角関数の公式

$$\begin{aligned} \sin x \sin y &= \frac{1}{2} \cos(x - y) - \cos(x + y) \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2} \sin(x + y) + \sin(x - y) \end{aligned}$$

に注意して、局部発振周波数と搬送波周波数を一致させる。すなわち $\omega_L = \omega_c$ とすると、

$$\begin{aligned} I &= \frac{C}{2} \{ \cos(m \sin \omega_s t) - \cos(2\omega_c t + m \sin \omega_s t) \} \\ Q &= \frac{C}{2} \{ \sin(m \sin \omega_s t) + \sin(2\omega_c t + m \sin \omega_s t) \} \end{aligned}$$

となり、LPF(Low Pass Filter) で、搬送波の成分を除去すると、

$$\begin{aligned} I' &= \frac{C}{2} \cos(m \sin \omega_s t) \\ Q' &= \frac{C}{2} \sin(m \sin \omega_s t) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\frac{Q'}{I'} = \frac{\sin(m \sin \omega_s t)}{\cos(m \sin \omega_s t)} = \tan(m \sin \omega_s t)$$
$$\therefore \sin \omega_s t = \frac{1}{m} \tan^{-1} \frac{Q'}{I'}$$

となり、信号波を搬送波から分離することができた。これが、FM 変調波の IQ 復調の原理である。

Wifi に技適が必要な法的根拠

はじめに

Raspberry Pi 3 model B が Wifi を持っているのだが、まだ技適を受けていないので個人輸入は控えたほうが良い (注：現在は取得済み) という書き込みを見て、Wifi デバイスが技適を受けなければならない法的根拠を調べてみました。以下、引用は法令データ提供サービスからで、強調は引用者が行ったものです。

免許が不要な無線局

まず無線局を開設する時、原則総務大臣から免許を受けなければなりません。これは電波法第 4 条に規定されています。

電波法 第四条 無線局を開設しようとする者は、総務大臣の免許を受けなければならない。ただし、次の各号に掲げる無線局については、この限りでない。

(中略)

三 空中線電力が一ワット以下である無線局のうち総務省令で定めるものであつて、次条の規定により指定された呼出符号又は呼出名称を自動的に送信し、又は受信する機能その他総務省令で定める機能

を有することにより他の無線局にその運用を阻害するような混信その他の妨害を与えないように運用することができるもので、かつ、適合表示無線設備のみを使用するもの

電波法第4条は、無線局の開設には免許が必要である事を規定していますが、同時に免許が不要な無線局についても規定しています。ここに規定されている「総務省令で定めるもの」は、電波法施行規則に規定されています。

電波法施行規則 第六条 法第四条第一号に規定する発射する電波が著しく微弱な無線局を次のとおり定める。

(中略)

4 法第四条第三号の総務省令で定める無線局は、次に掲げるものとする。

(中略)

四 主としてデータ伝送のために無線通信を行うもの（電気通信回線設備に接続するものを含む。）であつて、次に掲げる周波数の電波を使用し、かつ、空中線電力が〇・五八ワット以下であるもの（以下「小電力データ通信システムの無線局」という。）

(1) 二、四〇〇MHz以上二、四八三・五MHz以下の周波数

(2) 二、四七一MHz以上二、四九七MHz以下の周波数

(3) 五、一五〇MHzを超え五、三五〇MHz以下の周波数（屋内その他電波の遮蔽効果が屋内と同等の場所であつて、総務大臣が別に告示する場所において使用するものに限る。）

(4) 五、四七〇MHzを超え五、七二五MHz以下の周波数（上空にあつては、航空機内で運用する場合に限る。）

(以下略)

無線 LAN で使用されている周波数の 2.4GHz 帯は各チャンネルの中心周波数 2412MHz～2472MHz で、専有周波数帯幅は 20MHz（片側 10MHz）

なので、(1) に該当します。また 5GHz 帯は、各チャンネルの中心周波数 5180MHz～5320MHz と 5500MHz～5700MHz で、専有周波数帯幅が 20MHz なので、(3) と (4) に該当します。よって、電波法第 4 条 3 項の規定により、適合表示無線設備すなわち、技術適合証明を受けた機器のみを使用する場合に限り、無免許で使用することができます。逆に言えば、技適を受けていない無線 LAN デバイスを日本国内で使用すると、免許を受けずに無線局を開設したことになり、電波法 第百十条により、1 年以下の懲役または 100 万円以下の罰金に処せられます。

無線 LAN を無線従事者でなくとも操作できる理由

そういえば、無線局とはなんでしょう。無線局は電波法第 2 条で定義されています。

電波法 第二条 この法律及びこの法律に基づく命令の規定の解釈に関しては、次の定義に従うものとする。

(中略)

四 「無線設備」とは、無線電信、無線電話その他電波を送り、又は受けるための電氣的設備をいう。

五 「無線局」とは、無線設備及び無線設備の操作を行う者の総体をいう。但し、受信のみを目的とするものを含まない。

電波法第二条第四号により、無線 LAN デバイスが無線設備であることは明らかです。また第五号で、無線局は無線設備と無線設備の操作を行う者の集合であると規定されています。さらに電波法第三十九条には、無線操作を行う者は、原則無線従事者免許を受けた者でなければならないことが規定されています。

電波法 第三十九条 第四十条の定めるところにより無線設備の操

作を行うことができる無線従事者以外の者は、無線局の無線設備の操作（簡易な操作であつて総務省令で定めるものを除く。）を行つてはならない。（一部略）

どうやら、「簡易な操作であつて総務省令で定めるもの」であれば、無線従事者でなくても良いようです。この簡易な操作は、電波法施行規則にありました。

電波法施行規則 第三十三条 法第三十九条第一項本文の総務省令で定める簡易な操作は、次のとおりとする。ただし、第三十四条の二各号に掲げる無線設備の操作を除く。

一 法第四条第一号から第三号までに規定する免許を要しない無線局の無線設備の操作
（略）

第一号で無線従事者でなくとも操作ができるのは電波法第四条第一号から第三号までと規定されています。無線 LAN デバイスは、電波法第四条第三号に該当しますので、無線 LAN デバイスは無線従事者でなくとも操作することができます。

陸上無線従事者の操作範囲に通信操作が含まれない理由

余談ですが、無線従事者の資格の操作範囲は、通信操作と技術操作に分かれています。通信操作とは、例えばマイクやキーボードや電鍵を使って電文を送信することです。一方技術操作は、アンテナを立てたり、無線機を設置、操作したり、調整したりといった操作です。これには無線設備を設計といったことから、無線機の電源を入れる事も含まれます。

実は、陸上の無線従事者の資格の操作範囲に通信操作が含まれていません。以前から疑問に思っていたのですが、今回いろいろ調べていて、偶然、

陸上無線の操作範囲に 通信操作を含まない法的根拠を見つけました。

電波法施行規則 第三十三条 法第三十九条第一項本文の総務省令で定める簡易な操作は、次のとおりとする。ただし、第三十四条の二各号に掲げる無線設備の操作を除く。

(中略)

四 次に掲げる無線局（特定無線局に該当するものを除く。）の無線設備の通信操作

(1) 陸上に開設した無線局（海岸局、航空局、船上通信局、無線航行局及び海岸地球局並びに次号（４）の航空地球局を除く。）

(2) 携帯局

(3) 航空機地球局（航空機の安全運航又は正常運航に関する通信を行わないものに限る。）

(4) 携帯移動地球局

なんと陸上の無線従事者の操作範囲に含まれるすべての通信操作は簡易な操作であり、無線従事者でなくても行うことができるとは。

編集後記

DSP ラジオの原理をお送りします。これはコミケ等で頒布した、雑音工房偽術部彙報 vol.1～3 をまとめたものに、私の個人 blog noisefactory (<http://www.k.nakao.name/blog>) に書いた記事 (無線 LAN デバイスが技術適合証明を受けなければならない理由) を追加したものです。

十分にチェックしたつもりですが、計算やロジックに間違いがある可能性があります。もし間違いがありましたらそれは 100% 私の責任です。何かありましたら、下記の twitter アカウント、もしくは github リポジトリ (<https://github.com/chomy/DSPRadioFundamental>) の Issue でお知らせください。

さて今後ですが、夏コミには、「Nginx で LuaLua する」というタイトルで、Nginx の Lua 拡張を使って何か Web サービスを作って見た的なものを出そうと考えています。(まだ 1 文字も書いていませんが、もしかしたらこのイベントに間に合うかもしれません) また先日、私事ですが学者を廃業して IT セキュリティの世界に入りましたのでセキュリティ絡みで何か書けなかなと画策しております。

最後に、この同人誌は Debian/GNU Linux、 \TeX Live2015、psutils、git、GNU Make、vim といった、オープンソースソフトウェアを使って作成されました。また日本語のフォントは IPAex フォントを PDF に埋め込んでいます。このような有益なソフトウェアを開発、維持、管理していただいているすべての皆様に感謝します。また、このページまでたどり着いてくれた読者の方 (おそらくあなただけです) に感謝します。ありがとうございました。

2016 年 5 月 Keisuke Nakao (@jm6xxu)

参考文献

- 中島将光「マイクロ波工学」 森北出版 ISBN4-627-71030-5
- 常川光一「線状アンテナから電波が出るしくみ」 CQ 出版社 RF ワールド No.11 pp.30-39, ISBN978-4-7898-4890-9
- SI4825-A10 データシート [http://www.silabs.com/Support Documents/TechnicalDocs/Si4825-A10.pdf](http://www.silabs.com/Support/Documents/TechnicalDocs/Si4825-A10.pdf)
- 法令データ提供サービス <http://law.e-gov.go.jp/cgi-bin/idxsearch.cgi>
電波法、電波法施行規則

この作品はクリエイティブ・コモンズ・ライセンス 表示 - 継承 2.1 日本 の下に提供されています。このライセンスのコピーを見るためには、<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.1/jp/> をご覧ください。