线性代数

aima 范

目录

1 行列式 **2**

2 矩阵 **2**

2.1 矩阵的定义和基本运算 2

2.2 有关秩的几个重要式子 3

3 向量组 **3**

3.1 向量与向量组的线性相关性 3

3.2 极大线性无关组，等价向量组，向量组的秩 4

4 线性方程组 **4**

4.1 具体型线性方程组 4

4.2 抽象性线性方程组 5

4.3 公共解和同解 5

5 特征值与特征向量 **5**

5.1 特征值与特征向量 5

5.2 矩阵的相似 5

6 二次型 **6**

6.1 化二次型为标准型和规范型 6

6.2 正定二次型的判别 6

1 行列式

1. 范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} =$$

2. 对于一个行列式来说，更换某一行（列）按余子式展开的系数之后的式子的值为

2 矩阵

2.1 矩阵的定义和基本运算

1. 四个东西的基本运算

$$\begin{cases} ||A|| = \\ (A^T)^T = \\ (A^{-1})^{-1} = \\ (A^*)^* = \end{cases}$$

$$\begin{cases} |kA| = \\ (kA)^T = \\ (kA)^{-1} = \\ (kA)^* = \end{cases}$$

$$\begin{cases} |AB| = \\ (AB)^T = \\ (AB)^{-1} = \\ (AB)^* = \end{cases}$$

$$\begin{cases} (A^{-1})^T = \\ (A^{-1})^* = \\ (A^*)^T = \end{cases}$$

$$\begin{cases} |A^T| = \\ |A^{-1}| = \\ |A^*| = \end{cases}$$

$$\begin{cases} |A+B| \ ?= |A| + |B| \\ (A+B)^T \ ?= A^T + B^T \\ (A+B)^{-1} \ ?= A^{-1} + B^{-1} \\ (A+B)^* \ ?= A^* + B^* \end{cases}$$

2. 求逆矩阵的几个方法

   (a) 用定义去求解

(b) 将矩阵分解为几个可逆矩阵的相乘然后去乘

(c) 用伴随矩阵求逆矩阵

(d) 用初等变换去求逆矩阵

(e) 分块矩阵用定义去求，另外

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \tag{2}$$

此对于数量矩阵也同样适用

3. 求解 A^n 的几个方法

(a) 运用乘法交换律

(b) 试算法

(c) 分解法

4. 施密特标准正交化，对于两个无关向量组 α_1, α_2 的标准正交化为

5. 正交矩阵的判别方法是

6. 可逆矩阵 A 一定可以经过有限次初等变化变为 E，也即任何一个矩阵都可以由若干个初等矩阵相乘来得到

2.2 有关秩的几个重要式子

$$r(AB)\ ?\ \min(r(A), r(B)) \tag{3}$$

$$r(A+B)\ ?\ r(A)+r(B) \tag{4}$$

$$r(A^*) = \begin{cases} ?, & r(A)=n \\ ?, & r(A)=n-1 \\ ?, & r(A)<n-1 \end{cases} \tag{5}$$

$$当AB=0时, r(A)+r(B)= \tag{6}$$

3 向量组

3.1 向量与向量组的线性相关性

1. 如果 t 个向量组 β 可以由 s 个向量组 α 表示，并且 $t > s$ 那么 β 向量组线性相关（以少表多，多的相关）

2. 对于 m 个 n 维向量，如果

   (a) $m > n$
   (b) $n > m$
   (c) $m = n$

   则这个向量组是否线性相关

3. 部分相关，整体必相关；整体无关，部分必无关

3.2 极大线性无关组，等价向量组，向量组的秩

1. 矩阵 A 和 B 等价的充要条件是
2. 两个向量组等价的充要条件是
3. 两向量组，被表出的秩 (大/小)
4. 矩阵 C 是由基 $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ 到 $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$ 的过渡矩阵，那么可以列出等式：
5. 下列变换哪个可以行列都变，哪个只可以变行
   (a) 求秩的大小
   (b) 求极大无关组
   (c) 解方程组
6. 线性无关则行列式不为 0
7. 对于两个矩阵相乘来说：线性无关 * 线性无关 = 线性无关；线性有关 * 线性无关（有关）= 线性有关

4 线性方程组

4.1 具体型线性方程组

1. 齐次线性方程组的求解步骤
   (a) 将方程组化成阶梯型，并求出秩
   (b) 根据 $S = n - r(A)$ 算出基础解系的个数，其中 n 是矩阵的列数，即自变量的个数
   (c) 写出基础解系 ξ 的框架，在自由变量处填入线性无关的数字，然后根据上面的已化成阶梯型的矩阵来补充基础解系其他位置的数字
   (d) 最后该方程组的解系为 $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i \xi_i$
2. 非齐次方程组的求解步骤
   (a) 求解出非齐次方程组对应的齐次方程组的通解
   (b) 写出特解 η 的框架，在自由变量处填 0，然后根据上面的已化成阶梯型的矩阵来补充特解其他位置的数字
   (c) 最后该方程组的解系为 $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i \xi_i + \eta$

4.2 抽象性线性方程组

假设存在矩阵 A_{m*n}，有以下几种情况

1. $Ax=0$ 只有零解，那么 $r(A)$ 和 n 的关系，$Ax=b$ 是否有解
2. $Ax=0$ 有无穷多解，那么 $r(A)$ 和 n 的关系，$Ax=b$ 是否有解
3. 若 $r(A)=m$ 那么 $Ax=b$ 是否有解
4. 若 $Ax=b$ 有唯一解，那么 $Ax=0$ 是否有非零解
5. 若 $Ax=b$ 有无穷解，那么 $Ax=0$ 是否有非零解

4.3 公共解和同解

1. 求两个方程组公共解的步骤
2. 同解就是两个方程组的解系互相代入对方的解系，然后求出结果
3. $r(A)=r(A^T)=r(AA^T)=r(A^TA)$

5 特征值与特征向量

5.1 特征值与特征向量

1. 关于原矩阵 A，特征值和相应的特征向量 λ,ξ 的关系表达
2. 求解一个具体的值的特征值和特征向量的步骤
3. 对于 λ_i 是矩阵 A 的特征值，那么有

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=$$
$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=$$

4. 对于 A 的不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量 ξ_1,ξ_2 他们是否线性相关，同一特征值的两个特征向量呢
5. 对于 A 以及 A 有关的常用矩阵的特征值和特征向量的总结

矩阵	A	kA	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$	A^T
特征值								
特征向量								xx

5.2 矩阵的相似

1. 矩阵的相似有传递性
2. 矩阵相似，那么有以下四点相同，分别是
3. 两矩阵相似，那么他们的多项式如何，矩阵的逆如何，矩阵的转置如何

4. 两矩阵相似的定义
5. 矩阵相似对角化的步骤
6. 对称矩阵化为相似正交对角化的步骤
7. 对称矩阵属于不同特征值的特征向量是否相互正交，属于同一特征值的特征向量呢
8. 假设 A 为矩阵，Λ 为 A 的相似矩阵，那么用 Λ 表示以下 A 的式子

   $A =$
   $A^k =$
   $f(A) =$

6 二次型

6.1 化二次型为标准型和规范型

1. 标准型和规范型的定义是什么
2. 讲二次型化成标准型和规范性的两种方法
   (a) 配方法
   (b) 正交变换法 $(X = QY)$
3. A 合同于 B 的充要条件是

6.2 正定二次型的判别

1. 正定二次型判别的五个充要条件
2. 判断说法的充要性
   (a) A 正定与 A^T 正定
   (b) A 正定与 A^{-1} 正定
   (c) A 正定与 A^* 正定