

# 高等数学

aima 范

## 目录

<b>1 高等数学预备知识</b>	<b>3</b>
1.1 数列	3
1.2 三角函数	3
1.3 因式分解公式	4
1.4 常用不等式（重要）	4
<b>2 数列极限</b>	<b>4</b>
<b>3 函数极限与连续性</b>	<b>4</b>
3.1 泰勒公式	4
3.2 间断点	5
<b>4 一元函数微分学的概念与计算</b>	<b>5</b>
4.1 定义	5
4.2 反函数的导数	5
<b>5 一元函数微分学的几何应用</b>	<b>5</b>
5.1 渐近线	6
<b>6 中值定理</b>	<b>6</b>
6.1 涉及函数的中值定理	6
6.2 设计导数的中值定理	6
<b>7 零点问题和积分不等式</b>	<b>6</b>
<b>8 一元函数积分学的概念和计算</b>	<b>6</b>
8.1 概念	6
8.2 基本公式表	7
8.3 解决定积分计算（不定积分）的方法	7
8.4 一些做题中遇到的经典积分	8
<b>9 一元积分学的几何应用</b>	<b>8</b>

目录	2
<b>10 多元函数微分学</b>	<b>8</b>
10.1 基本概念	8
10.2 多元函数微分法则	8
10.3 多元函数的极值与最值	9
<b>11 二重积分</b>	<b>9</b>
<b>12 常微分方程</b>	<b>9</b>
12.1 一阶微分方程求解	9
12.2 二阶微分方程求解	9
<b>13 无穷级数 (数学一, 三)</b>	<b>10</b>
13.1 常数项级数	10
13.2 幂级数	10
<b>14 数学一, 数学二专题内容</b>	<b>10</b>
14.1 一元函数微分学应用	10
14.2 一元函数积分学应用	11
14.3 微分方程的物理应用	11
14.4 欧拉方程	11
14.5 傅里叶级数	11
<b>15 多元函数积分学的基础知识 (数学一)</b>	<b>11</b>
15.1 空间平面与直线	11
15.2 空间曲线与曲面	12
15.3 多元函数微分学的几何应用	12
15.4 场论初步	12
<b>16 三重积分、曲线曲面积分 (数学一)</b>	<b>12</b>
16.1 三重积分	12
16.2 第一型曲线积分的概念、性质与对称性	13
16.3 第一型曲面积分的概念、性质和对称性	13
16.4 重积分和第一型线面积分的应用	13
16.5 第二型曲线积分	14
16.6 第二型曲面积分	14
16.7 空间第二型曲线积分	14
16.8 辨别下列各种积分	15

## 1 高等数学预备知识

1.  $\arcsin x + \arccos x =$

2.  $\arctan x + \operatorname{arccot} x =$

3. 单调  $\Rightarrow$  有反函数

### 1.1 数列

1. 对于取整函数来说, 可以取到 (左/右)

2. 等差数列前  $n$  项和

3. 等比数列前  $n$  项和

4.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} =$

### 1.2 三角函数

1.  $1 + \tan^2 \alpha =$

2.  $1 + \cot^2 \alpha =$

3.  $\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) =$

4.  $\cos(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) =$

5.  $\sin(\pi \pm \alpha) =$

6.  $\cos(\pi \pm \alpha) =$

7.  $\sin 2\alpha =$

8.  $\cos 2\alpha =$

9.  $\sin^2 \frac{\alpha}{2} =$

10.  $\cos^2 \frac{\alpha}{2} =$

11.  $\sin(\alpha \pm \beta) =$

12.  $\tan(\alpha \pm \beta) =$

13.  $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha =$

### 1.3 因式分解公式

1.  $(a+b)^3 =$

2.  $(a-b)^3 =$

3.  $a^3 - b^3 =$

4.  $a^3 + b^3 =$

5.  $(a+b)^n =$

### 1.4 常用不等式 (重要)

1.  $|\int_a^b f(x) dx| \leq$

2. (重要)  $\sqrt{ab} \leq$

3.  $e^x \geq x + 1$

4.  $x - 1 \geq \ln x$

5. (夹逼)  $\frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x} \quad (x > 0)$

## 2 数列极限

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$

2. 见到递推公式, 一般要用

## 3 函数极限与连续性

1. 对于  $1^\infty$  来说,  $\lim u^v = e^{\lim v(u-1)}$

### 3.1 泰勒公式

1.  $\sin x =$

2.  $\cos x =$

3.  $\arcsin x =$

4.  $\tan x =$

5.  $\arctan x =$

6.  $\frac{1}{1-x} =$

7.  $\frac{1}{1+x} =$

8.  $\ln(1+x) =$

9.  $e^x =$

10.  $(1+x)^\alpha =$

1.  $x - \sin x \sim$

2.  $\arcsin x - x \sim$

3.  $\tan x - x \sim$

4.  $x - \arctan x \sim$

### 3.2 间断点

1. 第一类间断点有

2. 第二类间断点有

## 4 一元函数微分学的概念与计算

1.  $\frac{d^2 y}{dx^2} =$

### 4.1 定义

1.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$

2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

3. 左右导数相同, 这一点才有导数

4.  $\Delta y$  描述  $(\Delta x)$  的增量

5.  $dy$  描述  $(dx)$  的增量

6.  $df(x) = f'(x) dx$

### 4.2 反函数的导数

1.  $\varphi'(y) =$

2.  $\varphi''(y) =$

## 5 一元函数微分学的几何应用

1. 内部的最值点是极值点

## 5.1 渐近线

1. 水平渐近线的求法
2. 斜渐近线的  $k$  和  $b$

# 6 中值定理

## 6.1 涉及函数的中值定理

1. 平均值定理
2. 积分中值定理
3. 零点定理

## 6.2 设计导数的中值定理

1. 费马定理 (证明)
2. 罗尔定理
  - (a) 遇到  $f(x)f'(x)$
  - (b) 遇到  $[f'(x)]^2$
  - (c) 遇到  $f'(x) + f(x)\varphi'(x)$
3. 拉格朗日中值定理
4. 柯西中值定理
5. 泰勒公式中拉格朗日余项

# 7 零点问题和积分不等式

1. 实系数奇次方程至少有一个实根

# 8 一元函数积分学的概念和计算

## 8.1 概念

1. 定积分的精准定义
2. 积分中值定理

## 8.2 基本公式表

1.  $\int a^x dx =$
2.  $\int \tan x dx =$
3.  $\int \cot x dx =$
4.  $\int \sec x dx =$
5.  $\int \csc x dx =$
6.  $\int \sec^2 x dx =$
7.  $\int \csc^2 x dx =$
8.  $\int \sec x \tan x dx =$
9.  $\int \csc x \cot x dx =$
10.  $\int \frac{1}{1+x^2} dx =$
11.  $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx =$
12.  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$
13.  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx =$
14.  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx =$
15.  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx =$
16.  $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx =$
17.  $\int \sqrt{a^2-x^2} dx =$
18.  $\int \sqrt{1+x^2} dx =$
19.  $\int \sin^2 x dx =$
20.  $\int \cos^2 x dx =$
21.  $\int \tan^2 x dx =$
22.  $\int \cot^2 x dx =$

## 8.3 解决定积分计算（不定积分）的方法

1. 凑微分法
2. 换元法
3. 分部积分法
4. 求  $\int \frac{4x^2-6x-1}{(x+1)(2x-1)^2} dx$

5. 区间再现法  $\int_b^a f(x) dx =$

6. 华莱士公式

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 dx &= \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} dx &= \\ \int_0^{\pi} \sin^n dx &= \\ \int_0^{2\pi} \sin^n dx &= \end{aligned}$$

## 8.4 一些做题中遇到的经典积分

1.  $e^{\arctan \tan x} =$

# 9 一元积分学的几何应用

写出下列公式

1. 曲线  $y = y_1(x)$  与  $y = y_2(x)$  及  $x = a, x = b$  围成的曲面图形的面积
2. 曲线  $r = r_1(\theta)$  与  $r = r_2(\theta)$  及  $\theta = \alpha, \theta = \beta$  围成的曲面图形的面积
3. 曲线  $y = y_1(x)$  及  $x = a, x = b$  围成的曲面梯形绕  $x$  轴旋转一周的图形的体积
4. 曲线  $y = y_1(x)$  及  $x = a, x = b$  围成的曲面梯形绕  $y$  轴旋转一周的图形的体积
5. 函数  $y(x)$  在  $[a, b]$  上的平均值为

# 10 多元函数微分学

## 10.1 基本概念

1.  $dz =$
2. 判断函数  $z = f(x, y)$  是否可微的步骤
3. 判断函数  $z = f(x, y)$  在某个特殊点  $(x_0, y_0)$  是否连续的步骤

## 10.2 多元函数微分法则

1. 链式求导法则



## 2. 公式法

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \quad (1)$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \quad (2)$$

## 10.3 多元函数的极值与最值

1. 二元函数无条件如何取极值, 判别的公式与条件是什么
2. 有条件约束的情况下的多元函数如何取极值

## 11 二重积分

求解二重积分要考虑的几点

1. 普通对称性
2. 轮换对称性
3. 直角坐标系  $xy$  转换
4. 直接坐标系和极坐标系对换 (极坐标系的标志)

## 12 常微分方程

## 12.1 一阶微分方程求解

1. 变量可分离
2. 化作变量可分离
  - (a) 形如  $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$
  - (b) 形如  $\frac{dy}{dx} = \phi(\frac{y}{x})$
3. 一阶线性微分方程 (他的通解)
4. 伯努利方程, 形如  $y' + p(x)y = q(x)y^n$

## 12.2 二阶微分方程求解

1.  $y'' = f(x, y')$  型
2.  $y'' = f(y, y')$  型
3. 齐次方程的通解 (三个情况)
4. 非齐次线性方程的特解  $y'' + py' + qy = f(x)$ 
  - (a)  $f(x) = P_n e^{\alpha x}$
  - (b)  $f(x) = e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + P_n(x) \sin \beta x]$

## 13 无穷级数 (数学一, 三)

### 13.1 常数项级数

1. 改变级数任意有限项, 不会改变级数的敛散性
2. 正项级数敛散性的判别方法
3. 交错级数敛散性的判别方法
4. 任意项级数敛散性的判别
5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  的敛散性
6.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$  的敛散性

### 13.2 幂级数

1. 判断幂级数敛散性的步骤
2. 重要展开式

$$\frac{1}{1+x} = \quad (3)$$

$$\frac{1}{1-x} = \quad (4)$$

$$\sin x = \quad (5)$$

$$\cos x = \quad (6)$$

$$e^x = \quad (7)$$

$$\ln(1+x) = \quad (8)$$

$$(1+x)^\alpha = \quad (9)$$

$$(10)$$

3. 先导后积的公式

4. 先积后导的公式

## 14 数学一, 数学二专题内容

### 14.1 一元函数微分学应用

1. 相关变化率
2.  $y = y(x)$  在其上点  $(x, y(x))$  的曲率公式  $k =$
3. 曲率半径的公式为  $R =$

### 14.2 一元函数积分学应用

1. 从一个水壶中抽水做的功  $W =$
2. 垂直浸没在水中的平板 ABCD 一侧受到的水压力为  $P =$
3. 某一个形状的形心坐标计算公式

$$\bar{x} = \quad (11)$$

$$\bar{y} = \quad (12)$$

4. 曲线在 直角坐标系/参数方程/极坐标系 下的弧长公式  $s =$
5. 曲线在 直角坐标系/参数方程 下绕  $x$  轴旋转一周所得到的旋转曲面的表面积是  $S =$

### 14.3 微分方程的物理应用

1. 加速度  $a =$  三个公式

### 14.4 欧拉方程

1. 对于  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + px \frac{dy}{dx} + qy = f(x)$  经过欧拉方程方程化之后的式子为
2. 如何进行换元的

### 14.5 傅里叶级数

1. 傅里叶展开公式
2. 傅里叶公式中  $a_n =, b_n =, a_0 =$
3.  $f(x)$  与  $S(x)$  的关系
4. 正弦级数与余弦级数

## 15 多元函数积分学的基础知识 (数学一)

### 15.1 空间平面与直线

1. 对于一个平面来说, 他的点法式方程为
2. 对于一个直线来说, 他的点向式方程为
3. 点  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  到平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  的距离  $d =$

### 15.2 空间曲线与曲面

1. 曲线  $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$  在各个坐标轴 (以  $xOy$  轴为例) 的投影曲线为
2. 将曲线  $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$  绕着一条定直线 (常常是坐标轴, 也有可能是特殊直线) 旋转一周形成的曲面的方程为, 他的求解步骤是什么

### 15.3 多元函数微分学的几何应用

1. 现有空间曲线  $\Gamma$  由参数方程  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$  要求
  - (a) 曲线  $\Gamma$  在  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处的切向量为
  - (b) 曲线  $\Gamma$  在  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处的切线方程为
  - (c) 曲线  $\Gamma$  在  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处的法平面为
2. 假设曲面  $\Sigma$  由  $F(x, y, z) = 0$  给出,  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  为  $\Sigma$  上的点, 问  $\Sigma$  在  $P_0$  上的法向量为, 切平面方程为
3. 假设曲面  $\Sigma$  由  $z = f(x, y)$  给出,  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  为  $\Sigma$  上的点, 问  $\Sigma$  在  $P_0$  上的法向量为, 切平面方程为

### 15.4 场论初步

1.  $u = u(x, y, z)$  在点  $P_0$  处沿方向  $\vec{l}$  的方向导数为
2.  $u = u(x, y, z)$  在点  $P_0$  处的梯度为
3. 设  $A(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  求他的散度和旋度为

## 16 三重积分、曲线曲面积分 (数学一)

### 16.1 三重积分

1. 普通对称性和轮换对称性
2. 三重积分计算的几种方法
  - (a) 先一后二法: 适用于什么
  - (b) 先二后一法: 适用于什么
  - (c) 柱面坐标系 (定积分 + 极坐标下的二重积分)
  - (d) 球面坐标系, 有下面两个要注意

$$\begin{aligned} \text{i. } & \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases} \\ \text{ii. } & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \end{aligned}$$

$$3. \iiint_{\Omega} x dv =$$

## 16.2 第一型曲线积分的概念、性质与对称性

1. 普通对称性和轮换对称性
2. 第一型曲线积分的计算

$$(a) \text{ 平面曲线 } L \text{ 为 } y = y(x) \text{ 求 } \int_L f(x, y) ds =$$

$$(b) \text{ 平面曲线 } L \text{ 为 } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{ 求 } \int_L f(x, y) ds =$$

$$(c) \text{ 平面曲线 } L \text{ 为 } r = r(\theta) \text{ 求 } \int_L f(x, y) ds =$$

$$3. \int_{\Gamma} x ds =$$

## 16.3 第一型曲面积分的概念、性质和对称性

1. 普通对称性和轮换对称性
2. 第一型曲面积分的计算

$$(a) \text{ 曲面方程 } z = z(x, y), \text{ 求 } \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$

$$(b) \text{ 曲面方程 } F(x, y, z) = 0, \text{ 求 } \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS =$$

$$3. \iint_{\Sigma} x dS =$$

## 16.4 重积分和第一型线面积分的应用

1. 对于光滑曲面薄片  $\Sigma$ , 若  $\Sigma$  由单值函数  $z = z(x, y)$  给出,  $D_{xy}$  为其在  $xOy$  的投影, 那么  $\Sigma$  的面积是  $A =$
2. 对于空间物体, 体密度为  $\rho(x, y, z)$ ,  $\omega$  是物体所占空间区域, 其重心为

$$\bar{x} = \tag{13}$$

$$\bar{y} = \tag{14}$$

$$\bar{z} = \tag{15}$$

3. 对于空间物体, 体密度为  $\rho(x, y, z)$ ,  $\omega$  是物体所占空间区域, 计算物体对于  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴和原点  $O$  的转动惯量  $I_x, I_y, I_z, I_O$  分别是

$$I_x = \quad (16)$$

$$I_y = \quad (17)$$

$$I_z = \quad (18)$$

$$I_O = \quad (19)$$

### 16.5 第二型曲线积分

平面第二型曲线的计算

1. 平面有向曲线  $L$  由参数方程  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  决定, 那么  $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy =$
2. 格林公式满足的三个条件
3.  $\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy =$
4. 当格林公式不满足条件时可以采用补线法和挖去法来满足条件

### 16.6 第二型曲面积分

1. 高斯公式  $\iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy =$

### 16.7 空间第二型曲线积分

1. 斯托克斯公式  $\oint_l P dx + Q dy + R dz =$

## 16.8 辨别下列各种积分

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \quad (20)$$

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \quad (21)$$

$$\int f(x) dx = \quad (22)$$

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \quad (23)$$

$$\oint_l P dx + Q dy + R dz = \quad (24)$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \quad (25)$$

$$\int_L f(x, y) ds = \quad (26)$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \quad (27)$$