高等数学

aima 范

目录

1 高等数学预备知识

1. $\arcsin x + \arccos x =$
2. $\arctan x + arccotx =$
3. 单调 $\Rightarrow$ 有反函数

1.1 数列

1. 对于取整函数来说，可以取到（左/右）
2. 等差数列前 n 项和
3. 等比数列前 n 项和
4. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} =$

1.2 三角函数

1. $1 + \tan^2 \alpha =$
2. $1 + \cot^2 \alpha =$
3. $\sin(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) =$
4. $\cos(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) =$
5. $\sin(\pi \pm \alpha) =$
6. $\cos(\pi \pm \alpha) =$
7. $\sin 2\alpha =$
8. $\cos 2\alpha =$
9. $\sin^2 \frac{\alpha}{2} =$
10. $\cos^2 \frac{\alpha}{2} =$
11. $\sin(\alpha \pm \beta) =$
12. $\tan(\alpha \pm \beta) =$
13. $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha =$

1.3 因式分解公式

1. $(a+b)^3 =$
2. $(a-b)^3 =$
3. $a^3 - b^3 =$
4. $a^3 + b^3 =$
5. $(a+b)^n =$

1.4 常用不等式（重要）

1. $|\int_a^b f(x)\,dx| \leq$
2. (重要) $\sqrt{ab} \leq$
3. $e^x \geq x+1$
4. $x-1 \geq \ln x$
5. (夹逼)$\frac{1}{1+x} < \ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x} \quad (x>0)$

2 数列极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$
2. 见到递推公式，一般要用

3 函数极限与连续性

1. 对于 1^∞ 来说，$\lim u^v = e^{\lim v(u-1)}$

3.1 泰勒公式

1. $\sin x =$
2. $\cos x =$
3. $\arcsin x =$
4. $\tan x =$
5. $\arctan x =$
6. $\frac{1}{1-x} =$
7. $\frac{1}{1+x} =$
8. $\ln(1+x) =$

9. $e^x =$

10. $(1+x)^\alpha =$

1. $x - \sin x \sim$

2. $\arcsin x - x \sim$

3. $\tan x - x \sim$

4. $x - \arctan x \sim$

3.2 间断点

1. 第一类间断点有

2. 第二类间断点有

4 一元函数微分学的概念与计算

1. $\frac{d^2y}{dx^2} =$

4.1 定义

1. $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x)-f(\triangle x)}{\triangle x} = f^{'}(x_0)$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f^{'}(x_0)$

3. 左右导数相同，这一点才有导数

4. $\triangle y$ 描述 () 的增量

5. dy 描述 () 的增量

6. $df(x) = f^{'}(x)\,dx$

4.2 反函数的导数

1. $\varphi^{'}(y) =$

2. $\varphi^{''}(y) =$

5 一元函数微分学的几何应用

1. 内部的最值点是极值点

5.1 渐近线

1. 水平渐近线的求法
2. 斜渐近线的 k 和 b

6 中值定理

6.1 涉及函数的中值定理

1. 平均值定理
2. 积分中值定理
3. 零点定理

6.2 设计导数的中值定理

1. 费马定理 (证明)
2. 罗尔定理
    (a) 遇到 $f(x)f^{'}(x)$
    (b) 遇到 $[f^{'}(x)]^2$
    (c) 遇到 $f^{'}(x)+f(x)\varphi^{'}(x)$
3. 拉格朗日中值定理
4. 柯西中值定理
5. 泰勒公式中拉格朗日余项

7 零点问题和积分不等式

1. 实系数奇次方程至少有一个实根

8 一元函数积分学的概念和计算

8.1 概念

1. 定积分的精准定义
2. 积分中值定理

8.2 基本公式表

1. $\int a^x \, dx =$
2. $\int \tan x \, dx =$
3. $\int cot \ x \, dx =$
4. $\int \sec x \, dx =$
5. $\int \csc x \, dx =$
6. $\int \sec^2 x \, dx =$
7. $\int \csc^2 x \, dx =$
8. $\int \sec x \tan x \, dx =$
9. $\int \csc x cot \ x \, dx =$
10. $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx =$
11. $\int \frac{1}{a^2+x^2} \, dx =$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx =$
14. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} \, dx =$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \, dx =$
16. $\int \frac{1}{x^2-a^2} \, dx =$
17. $\int \sqrt{a^2-x^2} \, dx =$
18. $\int \sqrt{1+x^2} \, dx =$
19. $\int \sin^2 x \, dx =$
20. $\int \cos^2 x \, dx =$
21. $\int \tan^2 x \, dx =$
22. $\int cot^2 \ x \, dx =$

8.3 解决定积分计算（不定积分）的方法

1. 凑微分法
2. 换元法
3. 分部积分法
4. 求 $\int \frac{4x^2-6x-1}{(x+1)(2x-1)^2} \, dx$

5. 区间再现法 $\int_b^a f(x)\,dx =$

6. 华莱士公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^9\,dx =$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{10}\,dx =$$
$$\int_0^{\pi} sin^n\,dx =$$
$$\int_0^{2\pi} sin^n\,dx =$$

8.4 一些做题中遇到的经典积分

1. $e^{\arctan\tan x} =$

9 一元积分学的几何应用

写出下列公式

1. 曲线 $y = y_1(x)$ 与 $y = y_2(x)$ 及 $x = a, x = b$ 围成的曲面图形的面积

2. 曲线 $r = r_1(\theta)$ 与 $r = r_2(\theta)$ 及 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成的曲面图形的面积

3. 曲线 $y = y_1(x)$ 及 $x = a, x = b$ 围成的曲面梯形绕 x 轴旋转一周的图形的体积

4. 曲线 $y = y_1(x)$ 及 $x = a, x = b$ 围成的曲面梯形绕 y 轴旋转一周的图形的体积

5. 函数 $y(x)$ 在 $[a, b]$ 上的平均值为

10 多元函数微分学

10.1 基本概念

1. $dz =$

2. 判断函数 $z = f(x, y)$ 是否可微的步骤

3. 判断函数 $z = f(x, y)$ 在某个特殊点 (x_0, y_0) 是否连续的步骤

10.2 多元函数微分法则

1. 链式求导法则

2. 公式法

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \tag{1}$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \tag{2}$$

10.3 多元函数的极值与最值

1. 二元函数无条件如何取极值，判别的公式与条件是什么
2. 有条件约束的情况下的多元函数如何取极值

11 二重积分

求解二重积分要考虑的几点

1. 普通对称性
2. 轮换对称性
3. 直角坐标系 xy 转换
4. 直接坐标系和极坐标系对换 (极坐标系的标志)

12 常微分方程

12.1 一阶微分方程求解

1. 变量可分离
2. 化作变量可分离
   (a) 形如 $\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$
   (b) 形如 $\frac{dy}{dx} = \phi(\frac{y}{x})$
3. 一阶线性微分方程（他的通解）
4. 伯努利方程，形如 $y^{'} + p(x)y = q(x)y^n$

12.2 二阶微分方程求解

1. $y^{''} = f(x, y^{'})$ 型
2. $y^{''} = f(y, y^{'})$ 型
3. 齐次方程的通解（三个情况）
4. 非齐次线性方程的特解 $y^{''} + py^{'} + qy = f(x)$
   (a) $f(x) = P_n e^{\alpha x}$
   (b) $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x]$

13 无穷级数（数学一，三）

13.1 常数项级数

1. 改变级数任意有限项，不会改变级数的敛散性
2. 正项级数敛散性的判别方法
3. 交错级数敛散性的判别方法
4. 任意项级数敛散性的判别
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的敛散性
6. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 的敛散性

13.2 幂级数

1. 判断幂级数敛散性的步骤
2. 重要展开式

$$\frac{1}{1+x} = \tag{3}$$
$$\frac{1}{1-x} = \tag{4}$$
$$\sin x = \tag{5}$$
$$\cos x = \tag{6}$$
$$e^x = \tag{7}$$
$$\ln(1+x) = \tag{8}$$
$$(1+x)^\alpha = \tag{9}$$
$$\tag{10}$$

3. 先导后积的公式
4. 先积后导的公式

14 数学一，数学二专题内容

14.1 一元函数微分学应用

1. 相关变化率
2. $y=y(x)$ 在其上点 $(x,y(x))$ 的曲率公式 $k=$
3. 曲率半径的公式为 $R=$

14.2 一元函数积分学应用

1. 从一个水壶中抽水做的功 $W=$
2. 垂直浸没在水中的平板 ABCD 一侧受到的水压力为 $P=$
3. 某一个形状的形心坐标计算公式

$$\bar{x}= \tag{11}$$

$$\bar{y}= \tag{12}$$

4. 曲线在 直角坐标系/参数方程/极坐标系 下的弧长公式 $s=$
5. 曲线在 直角坐标系/参数方程 下绕 x 轴旋转一周所得到的旋转曲面的表面积是 $S=$

14.3 微分方程的物理应用

1. 加速度 $a=$ 三个公式

14.4 欧拉方程

1. 对于 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+px\frac{dy}{dx}+qy=f(x)$ 经过欧拉方程方程化之后的式子为
2. 如何进行换元的

14.5 傅里叶级数

1. 傅里叶展开公式
2. 傅里叶公式中 $a_n=,b_n=,a_0=$
3. $f(x)$ 与 $S(x)$ 的关系
4. 正弦级数与余弦级数

15 多元函数积分学的基础知识（数学一）

15.1 空间平面与直线

1. 对于一个平面来说，他的点法式方程为
2. 对于一个直线来说，他的点向式方程为
3. 点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离 $d=$

15.2 空间曲线与曲面

1. 曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 在各个坐标轴（以 xOy 轴为例）的投影曲线为

2. 将曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 绕着一条定直线（常常是坐标轴，也有可能是特殊直线）旋转一周形成的曲面的方程为，他的求解步骤是什么

15.3 多元函数微分学的几何应用

1. 现有空间曲线 Γ 由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\\z=\omega(t)\end{cases}$ 要求

   (a) 曲线 Γ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为

   (b) 曲线 Γ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为

   (c) 曲线 Γ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法平面为

2. 假设曲面 Σ 由 $F(x,y,z)=0$ 给出，$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为 Σ 上的点，问 Σ 在 P_0 上的法向量为，切平面方程为

3. 假设曲面 Σ 由 $z=f(x,y)$ 给出，$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为 Σ 上的点，问 Σ 在 P_0 上的法向量为，切平面方程为

15.4 场论初步

1. $u=u(x,y,z)$ 在点 P_0 处沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数为

2. $u=u(x,y,z)$ 在点 P_0 处的梯度为

3. 设 $A(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 求他的散度和旋度为

16 三重积分、曲线曲面积分（数学一）

16.1 三重积分

1. 普通对称性和轮换对称性

2. 三重积分计算的几种方法

   (a) 先一后二法：适用于什么

   (b) 先二后一法：适用于什么

   (c) 柱面坐标系（定积分 + 极坐标下的二重积分）

   (d) 球面坐标系，有下面两个要注意

i. $\begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}$

ii. $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz =$

3. $\iiint\limits_{\Omega} x\,dv =$

16.2 第一型曲线积分的概念、性质与对称性

1. 普通对称性和轮换对称性

2. 第一型曲线积分的计算

   (a) 平面曲线 L 为 $y = y(x)$ 求 $\int_L f(x,y)\,ds =$

   (b) 平面曲线 L 为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 求 $\int_L f(x,y)\,ds =$

   (c) 平面曲线 L 为 $r = r(\theta)$ 求 $\int_L f(x,y)\,ds =$

3. $\int_\Gamma x\,ds =$

16.3 第一型曲面积分的概念、性质和对称性

1. 普通对称性和轮换对称性

2. 第一型曲面积分的计算

   (a) 曲面方程 $z = z(x,y)$，求 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS =$

   (b) 曲面方程 $F(x,y,z) = 0$，求 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS =$

3. $\iint\limits_{\Sigma} x\,dS =$

16.4 重积分和第一型线面积分的应用

1. 对于光滑曲面薄片 $\sum$，若 $\sum$ 由单值函数 $z = z(x,y)$ 给出，D_{xy} 为其在 xOy 的投影，那么 $\sum$ 的面积是 $A =$

2. 对于空间物体，体密度为 $\rho(x,y,z)$，ω 是物体所占空间区域，其重心为

$$\bar{x} = \tag{13}$$

$$\bar{y} = \tag{14}$$

$$\bar{z} = \tag{15}$$

3. 对于空间物体，体密度为 $\rho(x,y,z)$，ω 是物体所占空间区域，计算物体对于 x 轴，y 轴，z 轴和原点 O 的转动惯量 I_x, I_y, I_z, I_O 分别是

$$I_x = \tag{16}$$

$$I_y = \tag{17}$$

$$I_z = \tag{18}$$

$$I_O = \tag{19}$$

16.5 第二型曲线积分

平面第二型曲线的计算

1. 平面有向曲线 L 由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 决定，那么 $\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$
2. 格林公式满足的三个条件
3. $\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$
4. 当格林公式不满足条件时可以采用补线法和挖去法来满足条件

16.6 第二型曲面积分

1. 高斯公式 $\iint\limits_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy =$

16.7 空间第二型曲线积分

1. 斯托克斯公式 $\oint_l = P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$

16.8 辨别下列各种积分

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \tag{20}$$

$$\iint_{D} f(x,y)\,d\sigma = \tag{21}$$

$$\int f(x)\,dx = \tag{22}$$

$$\oint_{L} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \tag{23}$$

$$\oint_{l} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \tag{24}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = \tag{25}$$

$$\int_{L} f(x,y)\,ds = \tag{26}$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \tag{27}$$