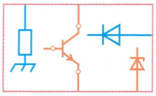
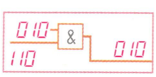
Inhaltsverzeichnis

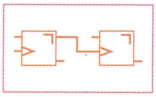
6 Elektronische Schaltungen



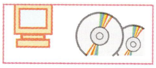
7 Digitaltechnik



8 Sequenzielle Digitaltechnik (Schaltwerke)



9 Computertechnik



1 Rechnen mit Zahlen

Zahlen bestehen aus Ziffern. Im dekadischen Zahlensystem (von lat. decem = zehn) verwendet man Dezimalzahlen, die aus den Ziffern 0 bis 9 gebildet werden. Reelle Zahlen (Kurzzeichen $\mathbb{R}$) sind Zahlen, die durch Brüche darstellbar sind (rationale Zahlen, Kurzzeichen $\mathbb{Q}$) oder es sind Kommazahlen mit unendlich vielen nicht periodischen Nachkommastellen (irrationale Zahlen), **Tabelle 1**.

Die Zahlen gehören meist mehreren Zahlenmengen an. So gehört z. B. die Zahl 5 den Mengen der natürlichen Zahlen, der ungeraden natürlichen Zahlen, der ganzen Zahlen und der rationalen Zahlen an. Die Zahl 5 ist jeweils ein Element (Kurzzeichen $\in$, sprich: ist Element von) der angegebenen Zahlenmengen.

Beispiel 1: Zahlen zuordnen

Zu welchen Zahlenmengen gehören die Zahlen

a) 3 b) 1,8 c) π?

Lösung:

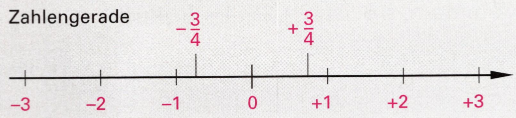
a) $3 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ b) $1{,}8 \in \mathbb{R}, \mathbb{Q}$

c) $\mathbb{R}$, π ist eine **irrationale Zahl.**

Tabelle 1: Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

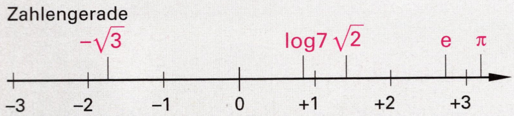
Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$ z. B. –2; –1; 0; 11; 12; …	Gebrochene Zahlen (Brüche)
Natürliche Zahlen $\mathbb{N}_0$ z. B. 0; 1; 2; 3; 4; …	z. B. $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{7}$; 0,5; 0,3



Irrationale Zahlen $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

Algebraische irrationale Zahlen z. B. $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{5}$	Transzendente irrationale Zahlen z. B. e, π, log7



Komplexe Zahlen siehe S. 314

Vorzeichenregeln

$+ \cdot + = +$	$+ \cdot - = -$
$- \cdot + = -$	$- \cdot - = +$
$+ : + = +$	$+ : - = -$
$- : + = -$	$- : - = +$

1.1 Grundgesetze

1.1.1 Vertauschungsgesetz, Verbindungsgesetz, Verteilungsgesetz

Vertauschungsgesetz (Kommutativgesetz)[1]

Bei der Addition kann man die Glieder eines Terms beliebig vertauschen. Dasselbe gilt für die Multiplikation.

Ein Term (von lat. terminus = Ausdruck) besteht aus Zahlen, die mit Rechenzeichen verknüpft sind, z. B. –4 + 7. Bei der Multiplikation sind die Vorzeichenregeln zu beachten.

Verbindungsgesetz (Assoziativgesetz)[2]

Bei der Addition können die Glieder eines Terms beliebig durch Klammern zusammengefasst werden. Dasselbe gilt für die Multiplikation.

Die Klammern werden zuerst ausgerechnet. Das Malzeichen oder Multiplikationszeichen (·) kann zwischen Faktoren entfallen, außer bei Zahlen ohne Klammern.

[1] lat. commutare = ändern, vertauschen, [2] lat. associare = verbinden

Beispiel 2: Kommutativgesetz anwenden

Wenden Sie auf den Term (–3) · 5 · (–6) das Kommutativgesetz an und berechnen Sie ihn.

Lösung:

$(-3) \cdot 5 \cdot (-6) = 5 \cdot (-3) \cdot (-6) = (-6) \cdot (-3) \cdot 5 = \mathbf{90}$

Beispiel 3: Assoziativgesetz anwenden

Wenden Sie auf den Produktterm 3 · 2 · 5 das Assoziativgesetz an und berechnen Sie.

Lösung:

$3 \cdot 2 \cdot 5 = 3 \cdot (2 \cdot 5) = 3\,(2 \cdot 5) = 3 \cdot 10 = \mathbf{30}$

Verteilungsgesetz (Distributivgesetz)[1]

Kommen in einer Rechnung Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division gemischt vor, ohne dass Klammern gesetzt sind, so sind zuerst die durch Malzeichen oder durch Teilzeichen verbundenen Terme zu berechnen (Punktrechnung geht vor Strichrechnung), z. B. ist $5 + 2 \cdot 4 = 5 + 8 = 13$. Wenn anders gerechnet werden soll, setzt man Klammern, z. B. ist $(5 + 2) \cdot 4 = 7 \cdot 4 = 28$.

Bei der Multiplikation von Klammern wird jeder Summand mit dem Faktor multipliziert.

Beispiel 1: Distributivgesetz anwenden

Berechnen Sie nach dem Distributivgesetz: $(-5) \cdot (2 + 7)$.

Lösung:

$(-5) \cdot (2 + 7) = (-5) \cdot 2 + (-5) \cdot 7 = -10 - 35 = \mathbf{-45}$

Aufgaben zu 1.1.1

Wenden Sie das Kommutativgesetz an und berechnen Sie die Terme.

1. a) $3-5+8-1$ b) $6+12-10-3$ c) $2-4+5-9$ d) $8-7+5$

2. a) $7-3-2+8$ b) $5-2+3-1$ c) $9-2+7$ d) $3-1-5+23$

3. a) $(-3) \cdot 2 \cdot 2$ b) $2 \cdot (-5) \cdot (-3)$ c) $2 \cdot 3 \cdot (-7)$ d) $3 \cdot (-2) \cdot 9$

4. a) $(-8) \cdot 4 \cdot 2$ b) $3 \cdot (-5) \cdot (-3)$ c) $2 \cdot 5 \cdot (-2)$ d) $6 \cdot (-1) \cdot 1$

Wenden Sie das Assoziativgesetz auf Terme an und berechnen Sie diese.

5. a) $6+2+4$ b) $-3+2-5$ c) $3-8+11$ d) $8+2-4$

6. a) $5+4+3$ b) $4+2-3$ c) $3-9+6$ d) $8+2-4$

7. a) $3 \cdot 5 \cdot 4$ b) $(-3) \cdot 5 \cdot 2$

8. a) $6 \cdot 4 \cdot 2$ b) $(-2) \cdot 4 \cdot 3$

Berechnen Sie nach dem Distributivgesetz.

9. a) $3\,(5+2)$ b) $5\,(7-4)$

10. a) $4\,(8+3)$ b) $3\,(5-2)$

11. a) $(-2)\,(7+5)$ b) $3\,(7-6+1)$ c) $(-6)\,(8-3)$ d) $(-5)\,(6-14)$

12. a) $(-7)\,(8-6)$ b) $5\,(9-5-4)$ c) $(-4)\,(6-2)$ d) $(-9)\,(8-12)$

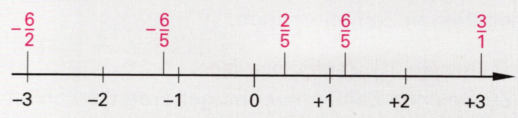
1.1.2 Bruchrechnen

Brüche entstehen bei der Division von z. B. ganzen Zahlen. Die Vorzeichenregeln beim Dividieren entsprechen den Vorzeichenregeln beim Multiplizieren. Man unterscheidet verschiedene Arten von Brüchen **(Tabelle 1)**.

Tabelle 1: Arten von Brüchen

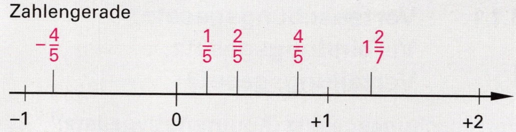
Echter Bruch	Unechter Bruch	Scheinbruch
$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{1}$
Zähler kleiner als Nenner	Zähler größer als Nenner	Nenner gleich 1

Zahlengerade



Gemischte Zahl	Gleichnamige Brüche	Ungleichnamige Brüche
$1\frac{2}{7} = 1 + \frac{2}{7}$	$\frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}; \frac{1}{7}; \frac{5}{9}$
Ganze Zahl und Bruch	Alle Nenner gleich	Alle Nenner ungleich

Zahlengerade



Beispiel 2: Rechnen mit Brüchen

Schreiben Sie 15 : 6 als Bruch und berechnen Sie den Dezimalbruch.

Lösung:

$15 : 6 = \frac{15}{6} = 2\frac{3}{6} = 2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \mathbf{2{,}5}$

Für das Rechnen mit Brüchen gelten besondere Rechenregeln (**Tabelle 1,** folgende Seite).

Brüche werden erweitert oder gekürzt, indem man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl vervielfacht oder durch die gleiche Zahl teilt.

Ein Bruch wird durch einen Bruch geteilt, indem man mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multipliziert.

[1] lat. distribuere = verteilen

Aufgaben zu 1.1.2

Berechnen Sie.

1. a) $\frac{+65}{+13}$ b) $\frac{+144}{+16}$ c) $\frac{-96}{+4}$ d) $\frac{+48}{-3}$

e) $\frac{-27}{-9}$ f) $\frac{+169}{-13}$ g) $\frac{-144}{-12}$ h) $\frac{-27}{+9}$

2. a) $\frac{+88}{-11}$ b) $\frac{+136}{+17}$ c) $\frac{+64}{-16}$ d) $\frac{+156}{-12}$

e) $\frac{-81}{-9}$ f) $\frac{+171}{-19}$ g) $\frac{-232}{-8}$ h) $\frac{-36}{-6}$

3. a) $\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{5}{6}$ b) $\frac{3}{5}-\frac{2}{15}+\frac{7}{30}$

c) $\frac{7}{24}-\frac{11}{30}-\frac{8}{15}+\frac{3}{8}$ d) $\frac{2}{8}+\frac{4}{7}-\frac{8}{6}$

4. a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{8}-\frac{5}{24}+\frac{5}{48}$

c) $\frac{17}{18}-\frac{7}{9}+\frac{11}{12}-\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$

5. a) $\frac{2}{53}\cdot 8$ b) $\frac{5}{7}:\frac{3}{4}$ c) $\frac{8}{21}\cdot 1\frac{2}{5}$

d) $\frac{5}{31}:\frac{2}{13}$ e) $8\frac{5}{7}:3\frac{3}{5}$ f) $\frac{3}{9}:\frac{4}{8}$

6. a) $\frac{5}{37}\cdot 7$ b) $\frac{3}{27}\cdot 4\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{15}\cdot 2\frac{3}{7}$

d) $\dfrac{\frac{7}{75}}{\frac{8}{5}}$ e) $\dfrac{\frac{4}{9}}{7\frac{5}{13}}$ f) $\dfrac{\frac{3}{11}}{\frac{5}{9}}$

7. Wandeln Sie in Dezimalbrüche um.

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{4}{15}$ c) $\frac{12}{125}$ d) $\frac{35}{55}$ e) $\frac{154}{224}$

8. Wandeln Sie in Brüche um.

a) 0,25 b) 0,875 c) 1,23 d) 2,05 e) 0,0075

9. Berechnen Sie.

a) $\left(\frac{5}{6}-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(2\frac{2}{5}-\frac{5}{4}\right)$

b) $\left(4\frac{4}{5}-3\frac{1}{4}\right)\cdot\left(2\frac{1}{5}+1\frac{5}{6}\right)$

10. Berechnen Sie.

a) $\dfrac{8\frac{7}{5}-6\frac{5}{8}}{3\frac{8}{9}+2\frac{2}{5}}$ b) $\dfrac{4\frac{5}{8}-6\frac{3}{4}+3\frac{1}{2}}{6\frac{1}{3}-2\frac{4}{5}-1\frac{1}{8}}$

Tabelle 1: Rechnen mit Brüchen

Art	Regeln, Beispiele
Addition/Subtraktion	**Gleichnamige Brüche:** Zähler addieren oder subtrahieren, Nenner bleibt gleich. $\frac{2}{5}-\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=\frac{2-1+4}{5}=\frac{5}{5}=1$
	Ungleichnamige Brüche: Nenner gleichnamig machen (Hauptnenner bilden, Bruch erweitern). $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{2}{5}\cdot\frac{12}{12}+\frac{3}{4}\cdot\frac{15}{15}-\frac{2}{3}\cdot\frac{20}{20}$ $=\frac{24+45-40}{60}=\frac{29}{60}$
Multiplikation	**Ganze Zahl mit Bruch:** Ganze Zahl mal Zähler, Nenner bleibt gleich. $5\cdot\frac{3}{7}=\frac{5}{1}\cdot\frac{3}{7}=\frac{5\cdot 3}{1\cdot 7}=\frac{15}{7}=2\frac{1}{7}$
	Bruch mit Bruch: Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner. $\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}=\frac{3\cdot 4}{5\cdot 7}=\frac{12}{35}$
	Gemischte Zahl mit ganzer Zahl: Gemischte Zahl in Bruch verwandeln. $2\frac{1}{5}\cdot 4=\frac{11}{5}\cdot 4=\frac{11}{5}\cdot\frac{4}{1}=\frac{44}{5}=8\frac{4}{5}$ oder $2\frac{1}{5}\cdot 4=\left(2+\frac{1}{5}\right)\cdot 4=8+\frac{4}{5}=8\frac{4}{5}$
	Gemischte Zahl mit gemischter Zahl: Gemischte Zahlen in Brüche verwandeln. $1\frac{2}{3}\cdot 2\frac{3}{5}=\frac{5\cdot 13}{3\cdot 5}=\frac{13}{3}=4\frac{1}{3}$
Division	**Bruch durch ganze Zahl:** Ganze Zahl mal Nenner, Zähler bleibt gleich. $\frac{1}{4}:5=\frac{1}{4}:\frac{5}{1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{1}{20}$
	Ganze Zahl durch Bruch: Ganze Zahl mal Kehrwert des Bruches. $5:\frac{3}{7}=\frac{5}{1}\cdot\frac{7}{3}=\frac{5\cdot 7}{3}=\frac{35}{3}=11\frac{2}{3}$
	Bruch durch Bruch: Zählerbruch mal Kehrwert des Nennerbruches. $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 5}=\frac{21}{20}=1\frac{1}{20}$

vel.plus/MELGS01

1.2 Potenzen

In der Mathematik versteht man unter einer Potenz ein Produkt gleicher Zahlen in verkürzter Schreibweise.

1.2.1 Zehnerpotenzen

1.2.1.1 Werte der Zehnerpotenzen

Wird die Zahl 10 als Faktor n-mal verwendet, so bildet man die Potenz, indem man die Grundzahl (Basis) 10 hinschreibt und *n* als Hochzahl (Exponent) dazusetzt **(Bild 1)**.

Beispiel 1: Als Zehnerpotenz schreiben

Schreiben Sie $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ als Zehnerpotenz.

Lösung:

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = \mathbf{10^4}$ (sprich: zehn hoch vier).

Umgekehrt berechnet man eine Zehnerpotenz, indem man sie als Faktorenreihe hinschreibt und diese ausrechnet (**Tabelle 1**).

Beispiel 2: Potenzwert berechnen

Berechnen Sie 10^9 (sprich: zehn hoch neun).

Lösung:

$$10^9 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = \mathbf{1\,000\,000\,000}$$

Man berechnet den Kehrwert einer Potenz, indem man das Vorzeichen der Hochzahl ändert.

Eine negative Hochzahl bedeutet also, dass der Kehrwert der Potenz mit derselben positiven Hochzahl zu berechnen ist.

Beispiel 3: Negativen Exponenten berechnen

Berechnen Sie 10^{-3} (sprich: zehn hoch minus drei).

Lösung:

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = \mathbf{0{,}001}$$

Sehr große oder sehr kleine Zahlen sind als Produktterme von übersehbaren Zahlen und Zehnerpotenzen darstellbar, durch Ermittlung der Zehnerpotenz der Einerstelle des Faktors.

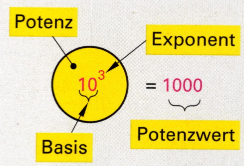
Beispiel 4: Kommastellen versetzen

Die Zahl 0,000 000 001 52 ist so darzustellen, dass 1,52 der Faktor ist.

Lösung:

Die 1 steht an 9. Nachkommastelle $\triangleq 10^{-9}$

$\Rightarrow 0{,}000\,000\,001\,52 = \mathbf{1{,}52 \cdot 10^{-9}}$



$$10^n = \frac{1}{10^{-n}}$$
$$10^0 = 1$$

potens (lat.) = mächtig
basis (lat.) = Sockel
exponere (lat.) = ausstellen

Bild 1: Zehnerpotenz und Kehrwert

Tabelle 1: Zehnerpotenzen (Beispiele)

Potenz	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}
Potenzwert	100	10	1	0,1	0,01

Bei Computern und Taschenrechnern werden große und kleine Zahlen als Produktterme mit Zehnerpotenzen ausgegeben und können auch so eingegeben werden. Für die Basis 10 wird dabei E oder EE ausgegeben oder eingegeben; die nach E folgende Zahl ist der Exponent zur Basis 10. Vor E muss ein Faktor stehen, z. B.: 1E6 $\triangleq 1^6 \triangleq 1 \cdot 10^6$.

Beispiel 5: Potenzwert als Zahl darstellen

Als Ergebnis erscheint auf einem Bildschirm 10.5 E+4.

Welcher Zahlenwert ist das?

Lösung:

10.5 E+4 $= 10{,}5 \cdot 10^4 = \mathbf{105\,000}$

Aufgaben zu 1.2.1.1

Schreiben Sie als Faktorenreihe.

1. a) 10^{+4} b) 10^{-1} c) 10^{+3} d) 10^{-6}

2. a) 10^{-2} b) 10^{+5} c) 10^{-7} d) 10^{+8}

Berechnen Sie die Werte folgender Potenzen.

3. a) 10^6 b) 10^{-3} c) 10^{-2} d) 10^{-9}

4. a) 10^{-1} b) 10^0 c) 10^{-6} d) 10^8

Bilden Sie die Kehrwerte.

5. a) 10^{-6} b) 10^7 c) 10^9 d) 10^{-12}

6. a) 10^{-3} b) 10^0 c) 10^3 d) 10^1

Berechnen Sie die Dezimalzahl der Kehrwerte.

7. a) 10^0 b) 10^1 c) 10^{-3} d) 10^4

8. a) 10^{-6} b) 10^{-4} c) 10^2 d) 10^{-5}

Schreiben Sie als Produkt mit einer Zehnerpotenz.

9. a) 24000 b) 0,0023 c) 700000

10. a) 12000 b) 0,000 12 c) 340000

1.2.1.2 Rechnen mit Zehnerpotenzen

Addition und Subtraktion sind vereinfacht bei gleichen Exponenten.

Beispiel 1: Potenzen addieren

Berechnen Sie $10^6 + 10^3$.

Lösung:

$$10^6 + 10^3 = 1000 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^3 = 1001 \cdot 10^3 = \mathbf{1\,001\,000}$$

Zehnerpotenzen werden multipliziert, indem man die Hochzahlen addiert.

Beispiel 2: Potenzen multiplizieren

Berechnen Sie $10^6 \cdot 10^3$.

Lösung:

$$10^6 \cdot 10^3 = 10^{6+3} = \mathbf{10^9}$$

Durch eine Zehnerpotenz wird dividiert, indem man deren Hochzahl subtrahiert.

Beispiel 3: Potenzen dividieren

Berechnen Sie $10^6/10^3$.

Lösung:

$$10^6/10^3 = 10^{6-3} = \mathbf{10^3}$$

Zehnerpotenzen werden potenziert, indem man die Hochzahlen multipliziert.

Beispiel 4: Potenzen potenzieren

Berechnen Sie $(10^3)^4$.

Lösung:

$$(10^3)^4 = 10^{3 \cdot 4} = \mathbf{10^{12}}$$

Oft werden für die Darstellung von Zehnerpotenzen Einheitenvorsätze verwendet **(Tabelle 1)**.

Tabelle 1: Vorsätze (anstelle von Zehnerpotenzen)

Zeichen	Vorsatz	Faktor	Zeichen	Vorsatz	Faktor
Z	Zetta	10^{21}	d	Dezi	10^{-1}
E	Exa	10^{18}	c	Zenti	10^{-2}
P	Peta	10^{15}	m	Milli	10^{-3}
T	Tera	10^{12}	µ	Mikro	10^{-6}
G	Giga	10^{9}	n	Nano	10^{-9}
M	Mega	10^{6}	p	Piko	10^{-12}
k	Kilo	10^{3}	f	Femto	10^{-15}
h	Hekto	10^{2}	a	Atto	10^{-18}
da	Deka	10^{1}	z	Zepto	10^{-21}

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

a, b beliebige Zahlen $\quad m, n$ Hochzahlen

Aufgaben zu 1.2.1.2

Berechnen Sie.

1. a) $10^6 + 10^2 - 10^0$ b) $10^{-3} + 10^1 - 10^2$
c) $10^6 + 10^3 + 10^3$

2. a) $10^2 - 10^1 - 10^{-2}$ b) $10^{-6} + 10^{-7} + 10^0$
c) $10^{-3} + 10^3 - 10^{-6}$

Stellen Sie als Zehnerpotenz dar.

3. a) $10^{13} : 10^9$ b) $10^6 \cdot 10^5$ c) $10^{12} : 10^{-6}$

4. a) $10^9 : 10^6$ b) $10^{27} : 10^{14}$ c) $10^{-3} \cdot 10^{-6}$

Berechnen Sie.

5. a) $10^{-12} \cdot 10^{12}$ b) $10^3 \cdot 10^{-6}$ c) $10^8 \cdot 10^0 \cdot 10^{-6}$

6. a) $10^0 : 10^{12}$ b) $10^1 \cdot 10^{-6}$ c) $10^{-3} \cdot 10^9$

Berechnen Sie für folgende Brüche den Wert als Dezimalzahl.

7. a) $\dfrac{10 \cdot 10^6}{10^{-3} \cdot 10^6}$ b) $\dfrac{1}{10^6 \cdot 10^{-3}}$ c) $\dfrac{10^3 \cdot (10^{-6})^2}{10^{-9} \cdot 10^{-2}}$

8. a) $\dfrac{10^2 \cdot 10^{-4}}{10^{-12} \cdot 10^9}$ b) $\dfrac{10^{-3} \cdot 10^6}{10^{-4} \cdot 10^5}$ c) $\dfrac{10^{-2} \cdot (10^6)^2}{10^3 \cdot 10^4}$

Zerlegen Sie in Faktoren mit Zehnerpotenzen und berechnen Sie.

9. a) $\dfrac{42\,000 \cdot 500}{0{,}06}$ b) $\dfrac{46\,000 \cdot 0{,}5}{50\,000}$
c) $\dfrac{0{,}0065 \cdot 0{,}025}{13\,000 \cdot 0{,}0005}$ d) $\dfrac{4200 \cdot 0{,}007}{35\,000}$

10. a) $\dfrac{0{,}0035 \cdot 620}{310 \cdot 0{,}07}$ b) $\dfrac{0{,}007 \cdot 630}{0{,}0009}$
c) $\dfrac{28\,000 \cdot 0{,}4}{7000 \cdot 400}$ d) $\dfrac{22 \cdot 0{,}0004}{880}$

11. $\dfrac{(28 \cdot 10^2 - 2{,}6 \cdot 10^3) \cdot 4{,}47 \cdot 7{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 43 \cdot 10^7}{12{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot 122 \cdot 10^{-3}}$

12. $\dfrac{(22{,}7 \cdot 10^5 - 2{,}8 \cdot 10^4) \cdot 343 \cdot 10^{-6} \cdot 66 \cdot 10^{-7}}{21{,}9 \cdot 10^{-2} \cdot 12{,}2 \cdot 10^{-4}}$

vel.plus/
MELGS02

1.2.2 Sonstige Potenzen mit ganzen Exponenten

Man kann sämtliche Zahlen als Grundzahlen (Basis) für Potenzen verwenden.

Je nach Basis unterscheidet man außer den Zehnerpotenzen z.B. Zweierpotenzen, Achterpotenzen und Sechzehnerpotenzen.

Bei Speichern in der Datentechnik wird z.B. die Anzahl der Speicherelemente aus der Anzahl der Adressleiter und der Anzahl der Datenleiter mit Zweierpotenzen berechnet **(Bild 1).**

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert. Sie werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert. Sie werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert. Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert oder dividiert, indem man auf die Basen das Assoziativgesetz anwendet und das Ergebnis potenziert.

Beispiel 1: Speicherzellenzahl berechnen

Wie viele Speicherzellen können mit 20 Adressleitern bei 8 Datenleitern adressiert werden **(Bild 1)?**

Lösung:

$z = 2^{20} \cdot 2^3 = 2^{23} = \mathbf{8388608}$

Beispiel 2: Potenzen dividieren

Berechnen Sie $8^4 : 2^4$.

Lösung:

$8^4 : 2^4 = \left(\frac{8}{2}\right)^4 = 4^4 = \mathbf{256}$

Beispiel 3: Potenzwert berechnen

Berechnen Sie die Potenz $(3^2)^4$.

Lösung:

$(3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8 = \mathbf{6561}$

Aufgaben zu 1.2.2

1. Bestimmen Sie die Zweierpotenzen mit folgenden Exponenten.

a) 2 b) 1 c) 0 d) 4

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren}} = a^n \qquad z = 2^n$$

a beliebige Zahl
n ganzer Exponent (Hochzahl), z.B. Adressleiter
z Anzahl der Speicherzellen

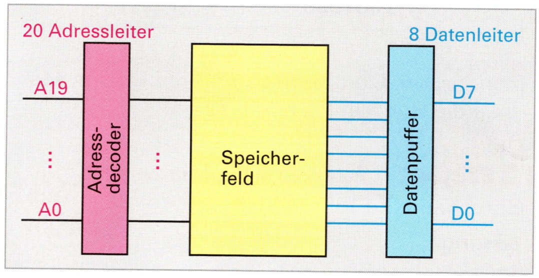


Bild 1: Vereinfachter Speicheraufbau

2. Ermitteln Sie die Achterpotenzen mit folgenden Exponenten.

a) 2 b) 1 c) 0 d) 3

Berechnen Sie.

3. a) $8^2 + 6^2$ b) $8^2 \cdot 8^3$ c) $8^2 \cdot 4^2$ d) $\frac{8^4}{2^4}$

4. a) $\frac{16^2}{8^2}$ b) $4^2 \cdot 4^3$ c) $\frac{4^3}{4^4}$ d) $(4^2)^3$

5. a) $\frac{3^2 \cdot 6^3}{3^4 \cdot 6^4}$ b) $\frac{10^2 \cdot 6^3}{3^{-1} \cdot 6^4}$ c) $\frac{2^8 \cdot 2^{-5}}{2^{-3} \cdot 2^4}$

6. a) $\frac{4^2 \cdot 6^3}{3^3 \cdot 8^2}$ b) $\frac{3^4}{1{,}5^4} + 3^8 \cdot 3^{-6}$ c) $\frac{3^{-2}}{3^{-4}}$

7. a) $\frac{(8^4)^3}{64^3}$ b) $3^{-6} : (3 \cdot 3 \cdot 3)^{-2}$

8. a) $\left(\frac{28 \cdot 2^{-3}}{4 \cdot 2^{-4}}\right)^2$ b) $\left(\frac{7^3 - 3{,}5^2}{7^3 \cdot 2^2}\right)^{-1}$

9. Wie viele Speicherzellen können mit 8 Adressleitern bei 8 Datenleitern adressiert werden?

10. Beim Speicher **Bild 1** ist D7 unterbrochen. Welche Zahlen können mit D0 bis D6 noch dargestellt werden?

11. Die Adressleiter A18 und A19 sind unterbrochen **(Bild 1).** Wie viele Speicherzellen können noch benutzt werden?

1.3 Rechnen mit Wurzeln

Beim Wurzelziehen oder Radizieren[1] zerlegt man eine Zahl a in eine mögliche Anzahl n gleicher Faktoren. Der Faktor ist die Wurzel c.

Wurzeln haben bei geradem Exponenten positives Vorzeichen, bei ungeradem Exponenten ist auch ein negatives Vorzeichen möglich **(Tabelle 1)**.

Die 2. Wurzel heißt auch Quadratwurzel. Bei allen Wurzeln außer der Quadratwurzel müssen die Wurzelexponenten angegeben werden.

Wurzeln können auch als Potenzen geschrieben werden. Der Radikand erhält dabei als Exponent den Kehrwert des Wurzelexponenten. Für die Berechnung von in Potenzen umgewandelten Wurzeln gelten die Potenzrechenregeln.

Quadratwurzeln berechnet man mit dem Taschenrechner. Zur Ermittlung der Stellenzahl der Wurzel zerlegt man die Radikanden in einen Faktor und eine Zehnerpotenz mit *geradzahliger* Hochzahl.

Wurzelexponent — $\sqrt[n]{a} = c$ — Wurzel

Wurzelzeichen — Radikand

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\left(\frac{m}{n}\right)} \qquad \sqrt[n]{a} = a^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

a, b beliebige Zahlen
m, n Exponenten
$|\ |$ Kurzzeichen für Betrag

Tabelle 1: Vorzeichen von Wurzeln

Wurzelart	Wurzelvorzeichen	Beispiel
Wurzelexponent geradzahlig, Radikand positiv	+	$\sqrt{36} = +6$
Wurzelexponent ungerade, Radikand positiv	+	$\sqrt[3]{27} = +3$ da $(+3)^3 = +27$
Wurzelexponent ungerade, Radikand negativ	–	$\sqrt[3]{-27} = -3$ da $(-3)^3 = -27$

Beispiel 1: Quadratwurzel bestimmen

Zerlegen Sie die Zahl $a = 36$ in $n = 2$ gleiche Faktoren und geben Sie die Wurzel an.

Lösung:

$36 = \mathbf{6 \cdot 6} \Rightarrow \sqrt[2]{36} = \sqrt{36} = \mathbf{6}$

($\sqrt{36}$ sprich: Wurzel aus 36)

Beispiel 2: 3. Wurzel berechnen

Berechnen Sie die 3. Wurzel aus 27.

Lösung:

$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \Rightarrow \sqrt[3]{27} = \mathbf{3}$

($\sqrt[3]{27}$ sprich: Dritte Wurzel aus 27)

Beispiel 3: Potenzwert berechnen

Wandeln Sie $\sqrt[6]{74}$ in eine Potenz um und berechnen Sie.

Lösung:

$\sqrt[6]{74} = 74^{\frac{1}{6}} = 74^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \left(74^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{74}} = \mathbf{2{,}049}$

Ist der Radikand ein Summenterm, wird dieser zuerst berechnet und anschließend die Wurzel gezogen.

Aufgaben zu 1.3

Berechnen Sie.

1. a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{2500}$ c) $\sqrt{144}$ d) $\sqrt{1600}$

2. a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt{3600}$ c) $\sqrt{81}$ d) $\sqrt{900}$

3. a) $\sqrt{4240}$ b) $\sqrt{68\,775}$ c) $\sqrt{455\,870}$ d) $\sqrt{30\,428}$

4. a) $\sqrt{6540}$ b) $\sqrt{41\,433}$ c) $\sqrt{867\,654}$ d) $\sqrt{3422}$

5. a) $\sqrt{3^2 + 5^2}$ b) $\sqrt{3{,}5^2 + 4{,}2^2}$ c) $\sqrt{2^2 + 2{,}5^2}$

6. a) $\sqrt{5^2 + 2^2}$ b) $\sqrt{4{,}2^2 + 5{,}3^2}$ c) $\sqrt{2{,}5^2 + 3^2}$

7. a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{17}$ c) $\sqrt{16} : \sqrt{4}$
d) $\sqrt[3]{35} : \sqrt[3]{5}$ e) $\left(\sqrt{5}\right)^3$ f) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

8. a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}$ b) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{32}$ c) $\sqrt{25} : \sqrt{5}$
d) $\sqrt[3]{64} : \sqrt[3]{8}$ e) $\left(\sqrt{7}\right)^3$ f) $\sqrt[4]{\sqrt{256}}$

vel.plus/MELGS03

[1] lat. radix = Wurzel

1.4 Logarithmen

1.4.1 Zehnerlogarithmen

Die Zehnerlogarithmen, z. B. lg 2, haben die Basis 10. Man berechnet sie mit dem Taschenrechner mit der Taste $\boxed{\text{log}}$.

vel.plus/ MELGS04

In der Elektronik benötigt man zur Darstellung von Kennlinien oft logarithmische Maßstäbe, um einen großen Zahlenbereich zu umfassen. Der Abstand eines beliebigen Wertes x vom Anfangspunkt der Achse lässt sich berechnen. Die Zusammenhänge zeigt **Bild 1**.

Logarithmische Maßstäbe dienen zur Darstellung großer Zahlenbereiche.

$$\lg x = \log_{10} x$$

$$\lg x = 0{,}4343 \cdot \ln x$$

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$l_x = l_{10} \cdot \lg \frac{x}{x_A}$$

lg Zehnerlogarithmus
ln natürlicher Logarithmus
l_x Abstand des Wertes x von x_A
l_{10} Abstand für den Faktor 10
x Zahlenwert an der Achse
x_A Zahlenwert am Anfang der Achse

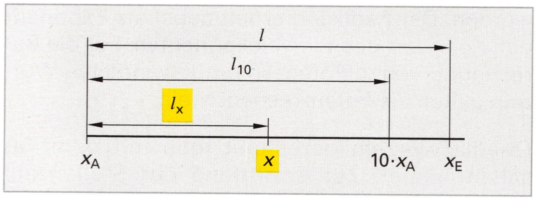


Bild 1: Logarithmische Teilung

Beispiel 1: Logarithmische Einteilung

Teilen Sie eine Strecke von 5 cm von 1 bis 10 im logarithmischen Maßstab.

Lösung:

Man sucht die Zehnerlogarithmen von 1 bis 10 und multipliziert sie jeweils mit der Länge der gewählten Strecke. Die sich ergebenden Werte trägt man vom Anfang der Strecke aus ab und beschriftet die Punkte mit 1 … 10 **(Bild 2)**.

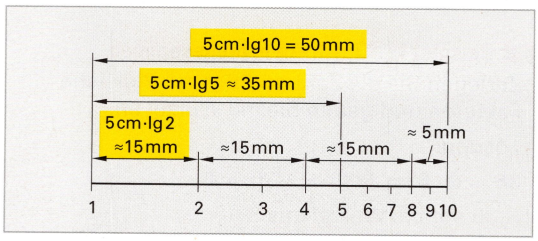


Bild 2: Längeneinteilung bei logarithmischer Teilung

Durch Einteilen einer Strecke in

3 Teile – 4 Teile – 3 Teile

erhält man eine logarithmische Teilung für die Werte **1, 2, 5** und **10 (Bild 3).**

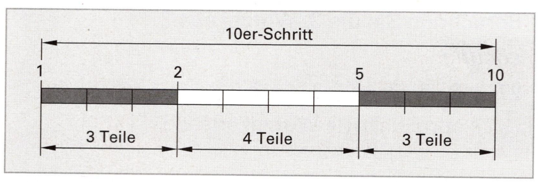


Bild 3: Maßstab zum Zeichnen

Aufgaben zu 1.4.1

Berechnen Sie.

1. a) lg 15 b) lg 23 c) lg 41 d) lg 86 e) lg 87

2. a) lg 26 b) lg 68 c) lg 77 d) lg 96 e) lg 240

3. a) lg 0,5 b) lg 3,5 c) lg 6,8 d) lg 0,043

4. a) lg 0,7 b) lg 8,7 c) lg 5,925 d) lg 0,0084

5. Teilen Sie eine Strecke von 16 cm im logarithmischen Maßstab von 1 bis 10000.

6. Stellen Sie eine logarithmische Teilung von 1 bis 100000 auf einer Strecke mit der Länge von 15 cm her.

7. Welchen Wert l_x in cm hat der Punkt $x = 50$, wenn der Anfangswert $x_A = 10$, Endwert $x_E = 150$ und $l_{10} = 8$ cm sind?

8. Welchen Wert l_x in cm hat der Punkt $x = 0{,}04$ einer Achsteilung, wenn der Endwert $x_E = 0{,}1$ ist? Anfangswert $x_A = 0{,}01$, $l_{10} = 10$ cm.

9. Der Wert x_E einer Achsteilung entspricht 0,3. Sein Abstand vom Achsanfang mit $x_A = 0{,}01$ beträgt 9,54 cm. Wie groß ist l_{10}?

10. Bei einer Achsteilung ist $l_{10} = 8$ cm und entspricht dem Endwert 0,5. Welchem Wert x entspricht $l_x = 6{,}23$ cm ($x_A = 0{,}05$)?

1.4.2 Logarithmische Darstellung, Linearisieren

Durch logarithmische Teilung der Achsen können mehrere Zehnerpotenzen einer Kennlinie übersichtlich dargestellt werden.

Bild 1 zeigt die Kennlinie eines lichtabhängigen Widerstandes (LDR) in doppelt logarithmischer Darstellung. **Bild 2** zeigt die Linearisierung durch Logarithmierung, links linearer, rechts doppelt logarithmischer Maßstab.

Logarithmisch geteilte Achsen haben keinen Nullpunkt.

Beispiel 1: LDR – Stromstärke ablesen

Welcher Strom I_p fließt bei einer Beleuchtungsstärke von 10^3 lx nach **Bild 1**?

Lösung:

Abgelesen aus Kennlinie: I_p = **80 µA**

Natürlicher Logarithmus

Natürliche Logarithmen, z. B. ln 5, haben die Basis e = 2,718... Man kann sie meist direkt mit dem Taschenrechner berechnen, ln x = $\log_e x$.

Aufgaben zu 1.4.2

1. Lesen Sie die jeweils zugehörige Beleuchtungsstärke nach **Bild 1** ab für a) I = 200 µA, b) I = 5 µA.
2. Lesen Sie die jeweils zugehörige Stromstärke nach **Bild 1** ab für a) E = 100 lx, b) E = 2000 lx.
3. Lesen Sie den jeweils zugehörigen Spannungswert nach **Bild 2** ab für a) f = 1000 Hz, b) f = 500 Hz.
4. Lesen Sie die jeweils zugehörige Frequenz nach **Bild 2** ab für a) U = 30 V, b) U = 5 V.
5. Lesen Sie die jeweilige zugehörige Ausgangsspannung V_{OUT} für alle drei angegebenen Temperaturwerte nach **Bild 3** ab für a) Ausgangsstrom I_{OUT} = 1 mA, b) I_{OUT} = 50 mA.
6. Am LM 2775 nach **Bild 3** soll die Ausgangsspannung V_{OUT} bei einer Umgebungstemperatur von T_A = 85 °C 5 V betragen. Lesen Sie den zugehörigen Ausgangsstrom ab.

Ermitteln Sie die natürlichen Logarithmen.

7. a) ln 12 b) ln 24 c) ln 47 d) ln 86 e) ln 96
8. a) ln 35 b) ln 21 c) ln 56 d) ln 75 e) ln 89

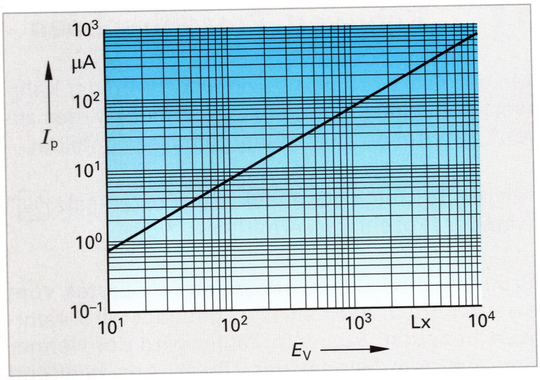


Bild 1: Kennlinie lichtabhängiger Widerstand in doppelt logarithmischer Darstellung

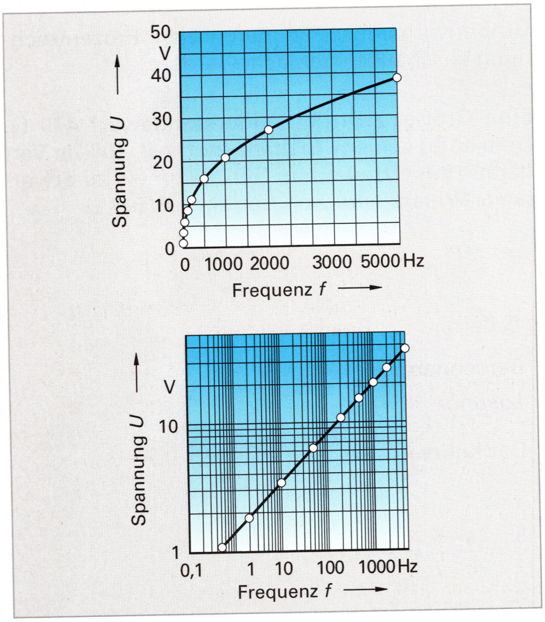


Bild 2: Linearisierung einer Kennlinie

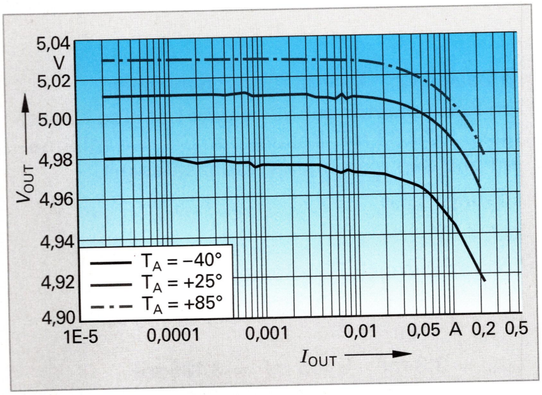


Bild 3: Lastkennlinie LM 2775

1.5 Kehrwert, Prozentrechnen

Mit der Kehrwerttaste $\boxed{1/x}$ oder $\boxed{x^{-1}}$ wird der Kehrwert der zuletzt eingegebenen Zahl bzw. des zuletzt ermittelten Zwischenergebnisses gebildet.

Mit der Tastfolge „Grundwert $\boxed{\times}$ Prozentsatz $\boxed{\%}$“ wird der Prozentwert ermittelt.

Brüche werden dividiert, indem als Erstes vom zweiten Bruch der Kehrwert gebildet wird. Kehrwert bedeutet: Aus dem Zähler wird der Nenner und aus dem Nenner der Zähler. Anschließend werden die beiden Brüche multipliziert (Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner).

Größenverhältnisse können mit der Prozentrechnung anschaulich gemacht werden.

Eine Größe, z. B. der Widerstandswert 470 Ω, kann so zu seinem Toleranzwert, z. B. 10 % in Verhältnis gesetzt werden. Der maximale zu erwartende Widerstandswert beträgt z. B. 517 Ω.

$$1\,\% = \frac{1}{100} \qquad \frac{p}{100} = \frac{W}{G}$$

% Prozent	W Prozentwert
p Prozentsatz	G Grundwert

Beispiel 1: Brüche dividieren

Berechnen Sie $\frac{4}{5} : \frac{7}{6}$

Lösung:

Der Kehrwert von $\frac{7}{6}$ ist $\frac{6}{7}$.

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{7}{6}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} = \frac{24}{35}$$

Beispiel 2: Kapazitätswert berechnen

Ein Kondensator der E24-Reihe hat eine Kapazität von $C = 33$ mF. Bestimmen Sie den minimalen und den maximalen Kapazitätswert.

Lösung:

$\Delta C = W$

Toleranzbereich E24-Reihe 5 %

$$\Delta C = \pm \frac{G \cdot p}{100} = \pm \frac{3{,}3\ \text{mF} \cdot 5}{100} = 0{,}165\ \text{mF}$$

$$C_{min} = 3{,}3\ \text{mF} - 0{,}165\ \text{mF} = \mathbf{3{,}135\ mF}$$
$$C_{max} = 3{,}3\ \text{mF} + 0{,}165\ \text{mF} = \mathbf{3{,}435\ mF}$$

Aufgaben zu 1.5

Berechnen Sie

1. a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{8} + \frac{1}{7} - \frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{7+4-3}$

2. a) $\frac{9}{16} \cdot \frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{8} + \frac{1}{20} - \frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{15}$

3. a) $\frac{6}{1} : \frac{1}{2}$ b) $6 : \frac{1}{2}$ c) $\frac{6}{1} \cdot \frac{1}{2}$ d) $6 \cdot \frac{1}{2}$ e) $\frac{15}{49} : \frac{20}{49}$

4. a) $\frac{1}{2} \cdot 5$ b) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ c) $5 : \frac{1}{2}$

d) $1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{3}$ e) $2\frac{2}{3} : 1\frac{1}{2}$

5. a) $1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3}$ b) $2\frac{2}{3} - 1\frac{1}{2}$ c) $\frac{48}{24} + \frac{24}{12}$

d) $\frac{24}{12} - \frac{48}{24}$ e) $\frac{17}{18} : \frac{11}{18}$

6. a) $4\frac{1}{7} : 1\frac{4}{7}$ b) $4\frac{3}{4} : 5$ c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5}$

d) $\frac{5}{12} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{5}{7}$ e) $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{8}{15}$

7. a) 14 % von 458 b) 162 % von 384 €

8. a) 28,5 % von 64 N b) 18,5 % von 680 m^2

9. Ein Widerstand der E24-Reihe hat einen Widerstandswert von $R = 4{,}7$ kΩ. Bestimmen Sie den minimalen und den maximalen Widerstandswert.

10. Ein Kondensator der E48-Reihe hat eine Kapazität von $C = 15$ mF. Bestimmen Sie den minimalen und den maximalen Kapazitätswert.

11. Ein Großhändler gewährt seinem Kunden einen pauschalen Rabatt von 8 % auf die Rechnungssumme. Welchen Betrag spart ein Kunde, wenn die Rechnungssumme 1570 € beträgt?

12. Ein IT-Händler gewährt bei Zahlung innerhalb 10 Tagen 2 % Skonto. a) Welchen Betrag darf der Kunde abziehen, wenn ein PC für 1850 € gekauft wird? b) Wie viel kostet der PC nach Abzug des Skonto?