1.6 Funktionen

Die Funktion $P(I)$, d.h. die Abhängigkeit der elektrischen Leistung P vom Strom I, soll an einem 1Ω-Widerstand dargestellt werden. Dazu wird die Messschaltung in **Bild 1** aufgebaut.

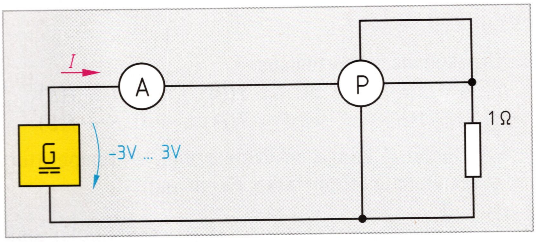


Bild 1: Messschaltung

vel.plus/ MELGS05

Durch Ändern der Spannung werden 5 Stromstärken und 3 Leistungen gemessen **(Bild 2)**. Das Pfeildiagramm zeigt, dass jedem Stromwert genau ein Leistungswert zugeordnet ist. Man nennt diese Zuordnung Funktion. $P = f(I)$ oder allgemein $y = f(x)$ (sprich: „y ist eine Funktion von x").Dabei ist der Strom I ($\triangleq x$) die unabhängige Variable und die Leistung P ($\triangleq y$) die vom Strom abhängige Variable.

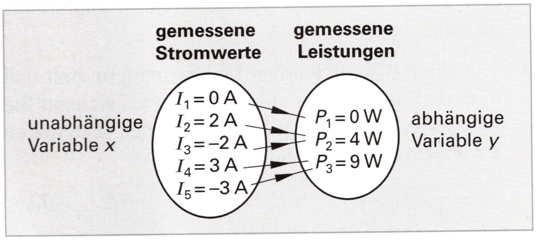


Bild 2: Pfeildiagramm

1.6.1 Beschreibungsformen bei Funktionen

Pfeildiagramm

Mit dem Pfeildiagramm können nur einzelne (diskrete) Werte sichtbar zugeordnet werden.

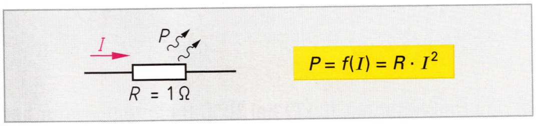


Bild 3: Funktionsgleichung

Funktionsgleichung

Mit der Funktionsgleichung **(Bild 3)** erfolgt die Zuordnung durch Rechnung für jede beliebige Variable x des Definitionsbereiches. Ersetzt man I durch x und P durch y, erhält man

$$y = f(x) = R \cdot x^2 \text{ mit } x \in \mathbb{R}$$

$x = I$ in A	−3	−2	−1	0	1	1,5	2	2,5	3
$y = P$ in W	9	4	1	0	1	2,25	4	6,25	9

Bild 4: Wertetabelle

Mit dem Zusatz $x \in \mathbb{R}$ wird die zulässige Zahlenmenge angegeben, d.h. für x dürfen alle reellen Werte in die Formel eingesetzt werden. Ist die Stromstärke in jede Richtung auf 3 A begrenzt, gilt für den Definitionsbereich

$$-3 \leq x \leq 3 \text{ und } x \in \mathbb{R}$$

Wertetabelle

Um eine Funktion grafisch darzustellen, erstellt man eine Wertetabelle. Diese kann durch Rechnung mithilfe der Funktionsgleichung oder Messen am Widerstand gewonnen werden **(Bild 4)**. Die empirisch erfassten (gemessenen) Werte weichen von den berechneten ab, weil Messfehler und Umwelteinflüsse die Messung beeinträchtigen.

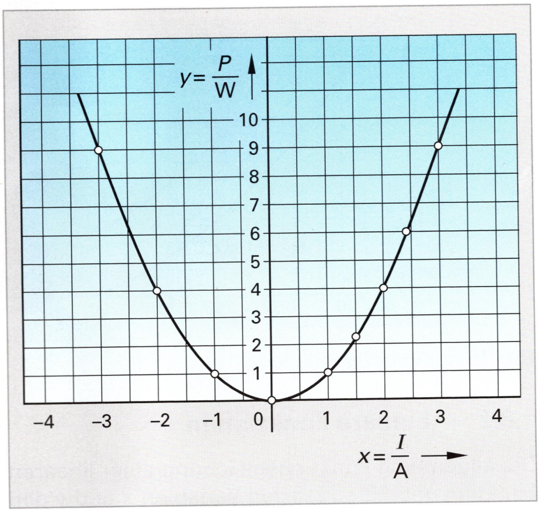


Bild 5: Schaubild

Schaubild

Das Schaubild (Graph) einer Funktion ist eine Kurve im kartesischen Koordinatensystem **(Bild 5)**. Um sie zu erhalten, werden geeignete Wertepaare als Punkte in das Koordinatensystem übertragen. Die unabhängige Variable x (I in A) wird stets in der Waagrechten, die abhängige Variable y (P in W) stets in der Senkrechten gezeichnet.

Bei Funktionen ist jeder Stelle x nur ein Funktionswert $f(x)$ zugeordnet.

Aufgaben zu 1.6.1

1. Drücken Sie in Worten aus.
a) $A = f(l)$ b) $R = f(\vartheta)$ c) $I = f(U)$
d) $U = f(R)$ e) $P = f(I)$ f) $P = f(U)$
(A Fläche, l Länge, R Widerstand, ϑ Temperatur, U Spannung, I Stromstärke, P Leistung)

2. Schreiben Sie in Kurzform: a) Der Umfang ist eine Funktion des Durchmessers. b) Die elektrische Leistung ist bei konstanter Spannung eine Funktion des Stromes.

3. Von einer Z-Diode wurden Messwerte ermittelt und in einer Wertetabelle aufgeschrieben. Zeichnen Sie den Graph der Funktion $I = f(U)$ mit den Maßstäben 1 V ≙ 1 cm und 1 mA ≙ 0,1 cm.

U in V	−7,9	−7,5	−7,35	−7,2	−7,1
I in mA	−52,5	−26,7	−15	−6	−3

U in V	−7,0	−6,8	−6,7	−6,5	0
I in mA	−2	−1,1	−0,5	0	0

4. Ein Heißleiter mit 10 kΩ bei 20 °C Raumtemperatur hat die Kennlinie **Bild 1**. Wie groß ist der Widerstand bei a) −10 °C, b) 10 °C, c) 30 °C, d) 180 °C, e) 150 °C, f) 60 °C?

5. Ein Heißleiter mit 100 kΩ hat die Kennlinie **Bild 1**. Wie groß ist der Widerstand bei a) 30 °C, b) 50 °C, c) 70 °C, d) 100 °C, e) 130 °C, f) 160 °C?

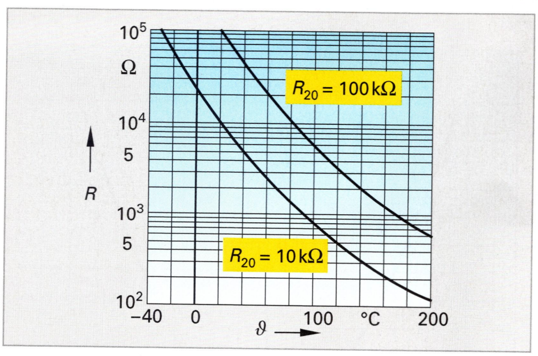


Bild 1: Heißleiterkennlinien

1.6.2 Lineare Funktionen

Die allgemeine Funktionsgleichung einer linearen Funktion enthält außer den Variablen x und y den Faktor m sowie eine Konstante b. Der Faktor m ist der Steigungsfaktor und b der y-Achsenabschnitt des Graphen **(Bild 2)**. Ist der Steigungsfaktor negativ, so fällt die Gerade nach rechts. Ist $b = 0$, so verläuft der Graph durch den Ursprung (Nullpunkt).

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

$$y = f(x) = mx + b \qquad y = m \cdot (x - x_p) + y_p$$

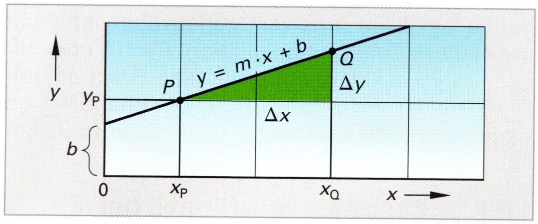


Bild 2: Graph einer linearen Funktion

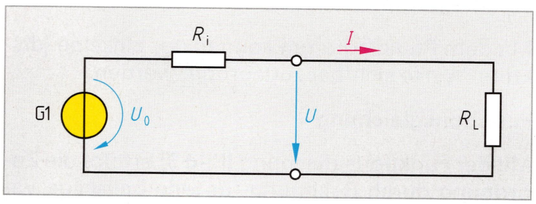


Bild 3: Belasteter Spannungserzeuger

Zur Bestimmung einer linearen Funktion sind zwei Punkte der Funktion (Wertepaare) notwendig, z. B. P und Q.

Aufgaben zu 1.6.2

1. Die Abhängigkeit des Stromes von der an einem Widerstand angelegten Spannung soll als Graph dargestellt werden für a) R_1 = 1 kΩ, b) R_2 = 2,2 kΩ, c) R_3 = 3,9 kΩ, d) R_4 = 8,2 kΩ. Zeichnen Sie die Kurvenschar für Spannungen bis 100 V. 10 V ≙ 1 cm; 10 mA ≙ 2 cm.

2. Der zurückgelegte Weg hängt bei konstanter Geschwindigkeit von der Fahrzeit ab. Stellen Sie die Abhängigkeit bis jeweils 30 Minuten Fahrzeit zeichnerisch dar. Für a) v = 45 km/h, b) v = 65 km/h. 10 min ≙ 1 cm; 5 km ≙ 1 cm.

3. Ermitteln Sie für die Schaltung **Bild 3** mit U_0 = 20 V und R_i = 10 Ω, a) die Funktionsgleichung für U, b) Wertetabelle und Graph der Funktion $U = f(I)$. c) Berechnen Sie den Steigungsfaktor des Graphen.

4. In Schaltung **Bild 3** ist I von U_0 abhängig. R_i = 10 Ω, R_L = 30 Ω, U_0 = 0 V bis 10 V. a) Stellen Sie für $I = f(U_0)$ die Funktionsgleichung auf. b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion. c) Berechnen Sie die Steigung m der Funktion.

1.6.3 Trigonometrische Funktionen

Das Verhältnis zweier Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck hängt vom spitzen Winkel α bzw. β ab. Entsprechend den verschiedenen Seitenverhältnissen unterscheidet man z. B. die Winkelfunktionen (trigonometrischen Funktionen) Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens.

1.6.3.1 Sinusfunktion und Kosinusfunktion

Das Verhältnis der Gegenkathete eines spitzen Winkels zur Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck bezeichnet man als Sinus (sin) des Winkels. Der Kosinus (cos) ist das Verhältnis Ankathete zu Hypotenuse **(Bild 1).** Die Werte von Sinus und Kosinus bei den verschiedenen Winkeln bilden die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion. Diese Werte liegen zwischen –1 und +1 und können auf dem Taschenrechner abgelesen werden.

Beispiel 1: Sinus berechnen

Berechnen Sie zum Winkel β **(Bild 1)** den Sinus, wenn $b = 8$ mm und $c = 12$ mm sind.

Lösung:

$$\sin\beta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} = \frac{8\text{ mm}}{12\text{ mm}} = \mathbf{0{,}667}$$

Um den Winkel zu erhalten, benötigt man die Umkehrfunktion, den Arkussinus (arcsin), auf dem Taschenrechner ist dies meist die Taste $\boxed{\sin^{-1}}$.

Beispiel 2: Winkel berechnen

Berechnen Sie den Winkel β von Beispiel 1.

Lösung:

Eingabe: $\boxed{\sin^{-1}}\,\boxed{.}\,\boxed{6}\,\boxed{6}\,\boxed{7}$ oder $\boxed{.}\,\boxed{6}\,\boxed{6}\,\boxed{7}\,\boxed{\sin^{-1}}$

Anzeige: *41.8359* $\Rightarrow \beta = \mathbf{41{,}8°}$

Gibt der Taschenrechner stattdessen *0.73017* aus, so muss man den Rechner vom Bogenmaß ins Gradmaß umstellen. In den Grundeinstellungen des Taschenrechners kann zwischen Gradmaß (DEG), Bogenmaß (RAD) und Neugrad (GRA oder GRAD) gewählt werden **(Tabelle 1).**

Tabelle 1: Winkelmaße

Modus	DEG	RAD	GRA(D)
rechter Winkel	90°	$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$	100°
Halbkreis	180°	$\pi \approx 3{,}14$	200°
Vollkreis	360°	$2\pi \approx 6{,}28$	400°

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\alpha = \arcsin\frac{a}{c} \qquad \alpha = \arcsin\frac{b}{c}$$

α Winkel bis 90°
a Gegenkathete zu α
b Ankathete zu α
c Hypotenuse

1

vel.plus/
MELGS06

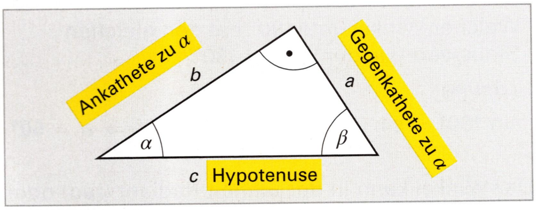


Bild 1: Rechtwinkliges Dreieck

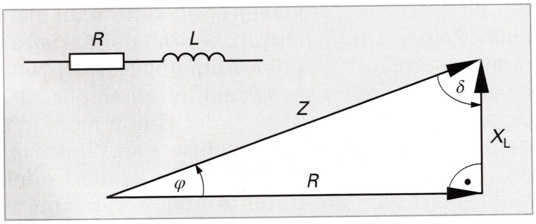


Bild 2: Widerstandsdreieck

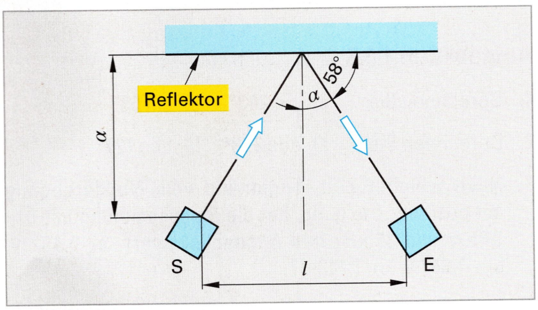


Bild 3: Ultraschall-Messschaltung

Aufgaben zu 1.6.3.1

1. Berechnen Sie für **Bild 2** die fehlenden Winkel und Seiten, wenn
   a) $X_L = 2{,}4\,\text{k}\Omega$, $\varphi = 72{,}4°$ b) $R = 128\,\Omega$, $\varphi = 80°$
   c) $Z = 603\,\Omega$, $\delta = 7{,}22°$.
2. Bestimmen Sie für **Bild 2** $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ sowie φ, δ und den fehlenden Widerstand R bzw. X_L, wenn
   a) $X_L = 2{,}6\,\text{k}\Omega$, $Z = 2{,}8\,\text{k}\Omega$, b) $R = 378\,\Omega$, $Z = 1260\,\Omega$,
   c) $X_L = 43\,\text{k}\Omega$, $Z = 56{,}7\,\text{k}\Omega$.
3. Die Entfernung l zwischen Schallsender S und Empfänger E in **Bild 3** beträgt 5,85 m. Berechnen Sie den Weg des Schalls.

vel.plus/MELGS07

1.6.3.2 Graphen der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion

Der Graph der Sinusfunktion und der Graph der Kosinusfunktion entstehen aus einem sich gegen den Drehsinn des Uhrzeigers drehenden Zeiger mit $r = 1$ **(Bild 1)**. Winkelfunktionen für Winkel über 90° lassen sich auf solche für Winkel unter 90° zurückführen, z. B. für α zwischen 180° und 270° ist $\sin \alpha = -\sin(\alpha - 180°)$.

Beispiel 1: Winkel berechnen

Welcher Winkel unter 90° hat den gleichen Sinuswert wie der Winkel 130°?

Lösung:

$\sin 130° = \sin(180° - 130°) = \sin 50° \Rightarrow \alpha = \mathbf{50°}$

Der Winkel kann in der Einheit Radiant (rad) oder in der Einheit Grad (°) angegeben werden **(Bild 1)**.

Bei elektrischen Wechselgrößen kann man sich einen Zeiger, z. B. $\hat{u}$, denken, der mit der Kreisfrequenz ω umläuft. Für den Augenblickswert zum Zeitpunkt t wird ωt als Winkel in rad eingesetzt. Beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ der Graph nicht mit dem Augenblickswert 0, so muss zum Winkel ωt der Phasenverschiebungswinkel φ addiert oder subtrahiert werden. Durch Addition der Augenblickswerte der Teilspannungen erhält man die Gesamtspannung **(Bild 2)**.

$y = \sin \alpha$	$y = \cos \alpha$
$u = \hat{u} \cdot \sin \omega t$	$u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{rad})$
$i = \hat{i} \cdot \sin \omega t$	$i = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{rad})$

α Winkel; $\alpha \in \mathbb{R}$
u Augenblickswert der Spannung
$\hat{u}, \hat{i}$ Amplitude (Maximalwert, Scheitelwert)
i Augenblickswert des Stromes
ω Kreisfrequenz
t Zeit
φ_{rad} Phasenverschiebungswinkel in rad

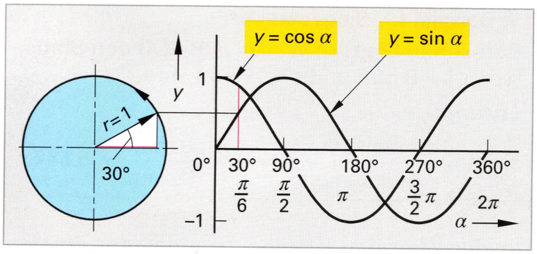


Bild 1: Sinusfunktion und Kosinusfunktion

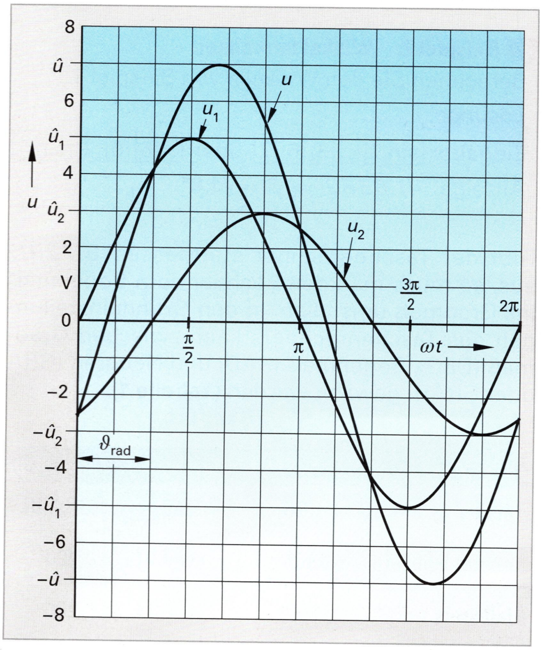


Bild 2: Linienbilder von Spannungen

Aufgaben zu 1.6.3.2

1. Berechnen Sie a) sin 243° b) sin 63°
2. Berechnen Sie a) cos 348° b) cos 127°
3. Nach welcher Zeit, beginnend vom Nulldurchgang mit positiver Steigung, hat die Sinusspannung mit $\hat{u}$ = 1,85 V und 35 kHz den Augenblickswert a) 0,482 V, b) −1,247 V, c) 1,743 V?
4. Ein Sinusstrom hat $\hat{i}$ = 22,8 µA. Wie groß ist seine Frequenz, wenn die Zeit zum Anstieg von 0 auf 7,834 µA a) 4,82 µs, b) 982 µs, c) 3,728 ns beträgt?

Berechnen Sie die Augenblickswerte für die folgenden Funktionen.

5. $i = \hat{i} \cos \omega t$ mit $\hat{i}$ = 8 mA und f = 100 kHz nach
   a) t = 1,5 µs b) t = 1,85 µs c) t = 2,75 µs
6. $u = \hat{u} \cos \omega t$ mit $\hat{u}$ = 5 V und f = 50 kHz nach
   a) t = 0,8 µs b) t = 1,05 µs c) t = 4,2 µs
7. Stellen Sie $u = \hat{u} \sin \omega t$ für $\hat{u}$ = 2 V, f = 5 kHz und t von 0 bis 200 µs zeichnerisch dar.
8. Stellen Sie $i = \hat{i} \cos \omega t$ für $\hat{i}$ = 5 mA, f = 20 kHz und eine Periodendauer zeichnerisch dar.

1.6.3.3 Tangensfunktion

Das Verhältnis einer Gegenkathete zur Ankathete im rechtwinkligen Dreieck bezeichnet man als Tangens (tan). Die Werte für tan α liegen für Winkel von 0° bis 90° zwischen 0 und ∞ und können mit dem Taschenrechner berechnet werden.

Den Winkel selbst berechnet man mit der Umkehrfunktion Arkustangens (arctan; $\boxed{\tan^{-1}}$-Taste des Taschenrechners).

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \alpha = \arctan\frac{a}{b}$$

a Gegenkathete zu α
b Ankathete zu α
α Winkel 90°

Beispiel 1: Winkel berechnen

Berechnen Sie für **Bild 1,** links β mit $a = 42$ mm und $b = 18{,}5$ mm.

Lösung:

$$\tan\beta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{b}{a} = \frac{18{,}5\ \text{mm}}{42\ \text{mm}} = 0{,}44$$

$$\beta = \arctan 0{,}44 = \mathbf{23{,}7°}$$

Beispiel 2: Tangens berechnen

Berechnen Sie tan 53° mit dem Taschenrechner.

Lösung:

Modus DEG anwählen

Eingabe: $\boxed{5}\,\boxed{3}\,\boxed{\tan}$ oder $\boxed{\tan}\,\boxed{5}\,\boxed{3}$

Anzeige: *1.3270448* $\Rightarrow$ tan 53° = **1,327**

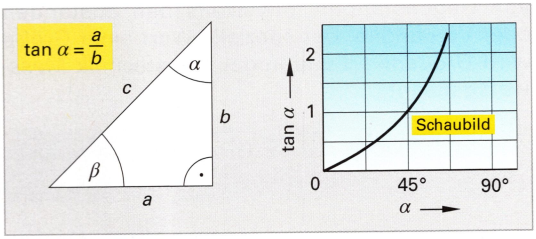


Bild 1: Tangens für $0 < \alpha < 90°$

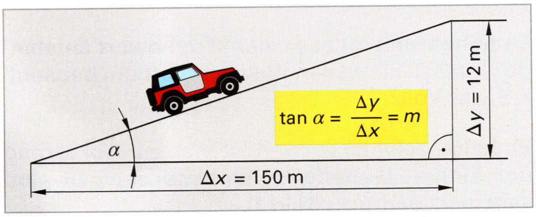


Bild 2: Steigung

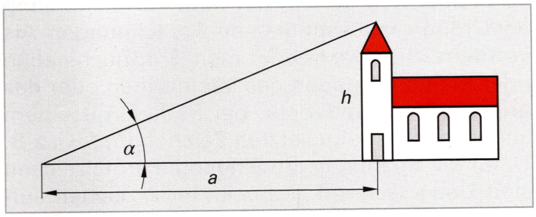


Bild 3: Höhenmessung

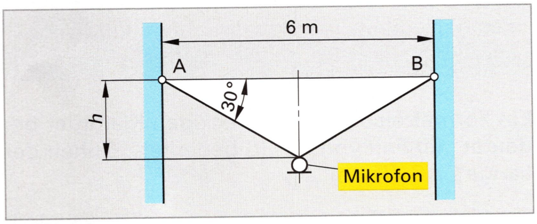


Bild 4: Mikrofonaufhängung

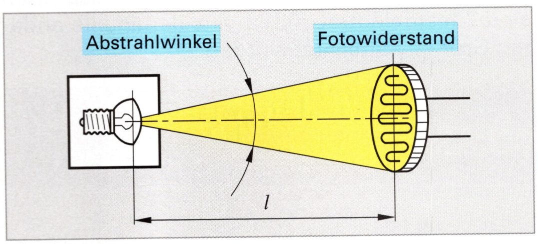


Bild 5: Lichtschranke

Aufgaben zu 1.6.3.3

1. Ein Jeep fährt eine linear steigende Straße hinauf (**Bild 2**). Berechnen Sie a) die Steigung in Prozent, b) den Steigungswinkel α.

2. Im Abstand von 120 m wird ein Kirchturm unter einem Winkel von 22,4° gesehen (**Bild 3**). Wie hoch ist der Kirchturm?

3. Ein Fernsehbild hat ein Seitenverhältnis 16:9 (Breite:Höhe). a) Unter welchem Winkel liegt die Bilddiagonale?, b) Bestimmen Sie die Seitenlängen bei einer Bilddiagonalen von 47" (120 cm).

4. Ein Mikrofon soll nach **Bild 4** zentriert aufgehängt werden. Berechnen Sie a) den Durchhang h, b) die Drahtlänge zwischen den Aufhängepunkten A und B.

5. Die Lichtquelle einer Lichtschranke strahlt in einem Winkel von 15° Licht aus (**Bild 5**). a) In welcher Entfernung muss ein Fotowiderstand mit einer wirksamen Kreisfläche von 0,785 cm^2 aufgestellt werden, damit dieser gerade voll ausgeleuchtet wird? b) Wie groß ist die ausgeleuchtete Kreisfläche in 10 cm Entfernung?

vel.plus/MELGS08

2 Rechnen mit Größen

2.1 Begriffe beim Rechnen mit Größen

vel.plus/
MELGS09

Physikalische Größen, z. B. Länge, Masse, Energie, Stromstärke, sind messbare Eigenschaften von Gegenständen, physikalischen Zuständen oder Vorgängen. Der spezielle Wert einer Größe wird *Größenwert* und in der Messtechnik *Messwert* genannt.

> Der spezielle Wert einer Größe ist das Produkt aus Zahlenwert und Einheit.

Das Malzeichen (·) wird beim Rechnen mit Buchstaben meist weggelassen.

Einheiten sind oft aus einem Fremdwort entstanden oder zu Ehren von Wissenschaftlern benannt, z. B. das Volt[1].

Einheitenzeichen verwendet man zur Abkürzung der Einheit **(Tabelle 1)**. Einheitenzeichen sind senkrecht gedruckt **(Bild 1)**.

Formelzeichen verwendet man zur Abkürzung der Größen, insbesondere bei Berechnungen. Als Formelzeichen verwendet man Großbuchstaben oder Kleinbuchstaben des lateinischen oder des griechischen Alphabets, bei Bedarf mit einem angehängten, tiefgesetzten Zeichen (*Index*), z. B. U_1 für die Spannung am Eingang. Formelzeichen sind *kursiv* (schräg) gedruckt, Indexzeichen aufrecht.

> Formelzeichen werden im Buch *kursiv* geschrieben, Einheitenzeichen aufrecht.

Ein Formelzeichen in einer eckigen Klammer bedeutet „Einheit von …". [l] bedeutet „Einheit der Länge", z. B. [l] = m.

Die meisten Formelzeichen, Einheiten und Einheitenzeichen sind genormt **(Tabelle 1)**. *Basisgrößen* sind 7 festgelegte Größen, aus denen alle anderen Größen abgeleitet wurden.

> Beim Rechnen mit Größen müssen die Einheiten angegeben werden, auch bei der Zwischenrechnung.

[1] nach Alessandro Volta, ital. Physiker, 1745 bis 1827

Tabelle 1: Wichtige Größen

Größe	Formelzeichen	Einheit	Einheitenzeichen
Basisgrößen (Auswahl)			
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Stromstärke	I	Ampere	A
Temperatur	T	Kelvin	K
Stoffmenge	n	Mol	mol
Lichtstärke	I_v	Candela	cd
Abgeleitete Größen (Beispiele)			
Frequenz	f	Hertz	Hz
Kraft	F	Newton	N
Leistung	P	Watt	W
Spannung	U	Volt	V
Widerstand	R	Ohm	Ω

Bild 1: Darstellung eines Messwertes

Aufgaben zu 2.1

1. Geben Sie von folgenden Angaben die physikalischen Größen in Worten an.
a) U = 220 V b) I = 16 A c) t = 70 s
d) l = 80 m e) R = 80 Ω

2. Geben Sie von folgenden Angaben die Einheiten in Worten an.
a) U = 1500 V b) I = 0,7 A c) m = 70 kg
d) R = 750 Ω e) t = 420 s

3. Schreiben Sie die Sätze a) und b) nach dem folgenden Muster vollständig:
In einer Halogenglühlampe fließt ein Strom von 0,5 A.
a) ____ Diode ____ Spannung von 1,5 __
b) ____ Schichtwiderstand ____ Strom von 0,6 A.

4. Wie heißen die Sätze a) und b) nach dem folgenden Muster vollständig?
Durch eine Spule fließt ein Strom von 0,3 A.
a) ____ Kondensator liegt ____ 120 V.
b) ____ Diode ________ 0,2 A.

2.2 Umrechnen der Einheiten

Vorsätze

Ist der Zahlenwert einer Größe sehr klein, z. B. bei 0,000002 A, oder aber sehr groß, z. B. bei 20000 V, so verwendet man einen Vorsatz zur Einheit. Dieser gibt eine Zehnerpotenz an, mit welcher der Zahlenwert malzunehmen ist **(Tabelle 1)**.

Beispiel 1: Widerstand berechnen

100 kΩ sind in Ω auszudrücken.

Lösung:

100,00000... kΩ = 100000 Ω

Beispiel 2: Strom berechnen

50000 μA sind in A auszudrücken.

Lösung:

50000 μA = 050,0 mA = **0,050 A**

Zur Vermeidung von Verwechslungen von Vorsatz m (Milli) mit Einheit m (Meter) wird die Einheit m (Meter) stets an das Ende gesetzt. Am bedeutet also Ampere mal Meter, mA bedeutet Milliampere.

Soll eine aus Einheiten zusammengesetzte Einheit, z. B. km/h (h von lat. hora = Stunde), in eine aus anderen Einheiten zusammengesetzte Einheit umgerechnet werden, so rechnet man die gegebenen Einheiten einzeln nacheinander um. Dabei multipliziert man mit Brüchen vom Wert 1, z. B. $\frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}}$, die so gewählt sind, dass die unerwünschte Einheit herausgekürzt wird.

Beispiel 3: Geschwindigkeit berechnen

Eine Geschwindigkeit beträgt 72 km/h. Geben Sie diese in m/s an.

Lösung:

$$72\ \text{km/h} = \frac{72\ \text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3600\ \text{s}} = \mathbf{20\ m/s}$$

Tabelle 1: Vorsätze zu Einheiten, Vorsatzzeichen

Exponent > 1	Exa	Peta	Tera	Giga	Mega	Kilo
	E	P	T	G	M	k
	10^{18}	10^{15}	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}
Exponent < 1	Milli	Mikro	Nano	Piko	Femto	Atto
	m	μ	n	p	f	a
	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}

Aufgaben zu 2.2

1. Wandeln Sie um.
a) 44200 mV in V b) 0,002 A in mA
c) 220 μV in V d) 88 000 μV in mV

2. Wandeln Sie um.
a) 7,05 kV in V b) 880 mΩ in Ω
c) 840 μA in mA d) 825 ns in s

3. Der Eingangswiderstand eines Feldeffekttransistors beträgt 10^{10} Ω. Wie viel MΩ sind das?

4. Ein Isolationswiderstand beträgt 820 Millionen Ω. Wie viel kΩ sind das?

5. Bei einem Kurzschluss treten 8020 A auf. Wie viel kA sind das?

6. Die Leistung eines Thermoelements berechnet man zu $18 \cdot 10^{-4}$ W. Wie viel mW sind das?

2.3 Addition und Subtraktion

Man kann nur Größen mit gleicher Einheit addieren oder subtrahieren. Dabei wandelt man diese Größen so um, dass ihre Einheiten die gleichen Vorsätze haben.

Beispiel 4: Addition anwenden

20 mV + 1,5 V = 0,02 V + 1,5 V = **1,52 V**

oder

20 mV + 1,5 V = 20 mV + 1500 mV = **1520 mV**

Für die Subtraktion gilt das Kommutativgesetz ebenfalls, man muss aber die Größen zusammen mit ihren Vorzeichen vertauschen.

Beispiel 5: Subtraktion anwenden

12 V – 4 V + 2 V = 12 V + 2 V – 4 V = **10 V**

Aufgaben zu 2.3

Addieren Sie.

1. a) 233 V und 1,1 kV b) 0,38 A und 400 mA
c) 144 Ω und 0,12 kΩ

2. a) 2330 mA und 1,2 A b) 220 mV und 0,3 A
c) 27 cm und 1220 mm

Berechnen Sie.

3. a) 220 V weniger 4800 mV b) 0,22 A weniger 120 mA
c) 320 kΩ – 1500 Ω

4. a) 220 V – 1500 mV b) 23 mV – 2350 μV
c) 1500 ms – 0,7 s

Fassen Sie die Terme zusammen.

5. a) 25 V + 18 V – 23 A + 25 A – 17 V – 24 A – 24 V
b) 660 mV – 2,3 A + 44 V + 2,2 A – 560 mV

6. a) 7 ms – 8 mm + 540 A – 320 V – 6 ms + 0,7 cm – 40 A + 20 V
b) 22 mV – 3 kΩ + 2,2 A – 25 mV + 2500 Ω – 200 mA

2.4 Multiplikation und Division

Multiplizieren (malnehmen) und dividieren (teilen) kann man mit allen Einheiten und mit beliebigen Vorsätzen.

Die Einheit des Ergebnisses ist das Produkt oder der Quotient aus den Einzeleinheiten. Wie bei den Zahlen gilt das Kommutativgesetz der Multiplikation.

Beispiel 1: Multiplikation anwenden

Wenden Sie bei 3 s · 6 A das Kommutativgesetz an und berechnen Sie.

Lösung:

3 s · 6 A = 3 · 6 s · A = **18 As**

In entsprechender Weise ist eine Division möglich, wenn der Zahlenwert des Teilers von Null verschieden ist.

Beispiel 2: Division anwenden

Berechnen Sie 6 kg/2 s.

Lösung:

$$6\ \text{kg}/2\ \text{s} = \frac{6\ \text{kg}}{2\ \text{s}} = \mathbf{3\ kg/s}$$

Jede physikalische Größe kann mit jeder anderen Größe multipliziert oder durch sie dividiert werden.

Der Vorsatz der Einheit des Ergebnisses richtet sich nach den Vorsätzen der verwendeten Einheiten. Man arbeitet dabei mit Zehnerpotenzen.

Beispiel 3: Multiplikation anwenden

Berechnen Sie mit Verwendung von Zehnerpotenzen 6 mV · 3 kA.

Lösung:

$6\ \text{mV} \cdot 3\ \text{kA} = 6 \cdot 10^{-3}\ \text{V} \cdot 3 \cdot 10^{3}\ \text{A} = \mathbf{18\ VA}$

Da die Vorsätze Zehnerpotenzen bedeuten, können sie malgenommen und gekürzt werden **(Tabelle 1)**.

Tabelle 1: Rechnen mit Vorsätzen

Multiplizieren	
1 mal m = m	1 V · 2 mA = 2 mVA
1 mal k = k	3 V · 1 kA = 3 kVA
k mal m = 1	3 kV · 2 mA = 6 VA
k mal µ = m	5 kV · 3 µA = 15 mVA
M mal µ = 1	3 MΩ · 4 µA = 12 AΩ
m mal m = µ	2 mV · 5 mA = 10 µVA
Dividieren	
m durch 1 = m	6 mVA / 2 A = 3 mV
k durch 1 = k	4 kVA / 2 V = 2 kA
1 durch m = k	6 VA / 3 mA = 2 kV
1 durch k = m	8 VA / 4 kA = 2 mV
k durch m = M	2 kVA / 4 mA = 0,5 MV
k durch M = m	3 kV / 1,5 MΩ = 2 mV/Ω
m durch m = 1	3 mVA / 2 mA = 1,5 V

m milli, k Kilo, M Mega, µ Mikro

Beispiel 4: Division anwenden

Berechnen Sie nach Tabelle 1: 6 VA/4 mA.

Lösung:

$$6\ \text{VA}/4\ \text{mA} = \frac{6\ \text{VA}}{4\ \text{mA}} = 1{,}5\ \text{kV}$$

Aufgaben zu 2.4

Berechnen Sie.

1. a) 6 V · 7 A b) 6 mV · 7 A
c) 12 mA · 2 mV d) 18 kV · 2 mA

2. a) 7 mA · 6 V b) 3 kA · 2 mV
c) 8 kV · 2 µA d) 3,5 mV · 12 µA

3. a) $\frac{3\ \text{mVA}}{1{,}2\ \text{mA} \cdot 0{,}5\ \text{A}}$ b) $\frac{6\ \mu\text{VA}}{2\ \text{mV} \cdot 2\ \text{mA}}$

4. a) $\frac{42\ \text{VA}}{7\ \text{mV} \cdot 3\ \text{kA}}$ b) $\frac{36\ \Omega^2}{6\ \text{m}\Omega}$

5. a) 22 pAs / (11 mA) b) 12 mVA / (6 kV)
c) 24 µVA / (12 mA) d) 28 mm / (4 ms)

6. a) 18 m/s / (9 mm) b) 3 mA / (2 mAs)
c) 30 kVA / (2 mA) d) 12 m / (1,2 µs)

3 Rechnen mit Formeln

3.1 Umstellen von Formeln

Formeln beschreiben Gesetzmäßigkeiten aus der Natur und der Technik in mathematisch knapper Form. Formeln sind Gleichungen. Sie bestehen aus Linksterm, Gleichheitszeichen und Rechtsterm. Statt Linksterm sagt man auch linke Seite, statt Rechtsterm rechte Seite.

Beim Formelumstellen verändert man beide Terme so lange, bis die gesuchte Größe allein auf der linken Seite steht. Die Veränderungen müssen zu gleichwertigen Formeln führen.

Aufgaben zu 3.1

1. Multiplizieren Sie beide Seiten der Formel $V = \frac{a^2 \cdot h}{3}$ mit folgenden Faktoren.
   a) 2 b) 3 c) −6 d) −1
2. Addieren Sie zu $R_1 + R_2 = \frac{U}{I}$ beiderseits die Summanden.
   a) R_3 b) R_1 c) $-R_2$ d) $\frac{U_3}{I}$
3. Stellen Sie nach x um.
   a) $\frac{1}{x} = a - b$ b) $x^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$
   c) $x - 2 \cdot y = \frac{D}{2}$ d) $2 \cdot U = 3x + 6y$
4. Formen Sie nach y um.
   a) $y + 2x = \frac{2 \cdot a}{5}$ b) $y - \frac{A}{x} = 7 \cdot d$
   c) $\frac{x}{y} = \frac{5 \cdot a}{3 \cdot b}$ d) $b = a + 3 \cdot y$
5. Stellen Sie $A = \frac{(d+e)\,h}{2}$ nach h um.
6. Gewinnen Sie aus $V = \frac{(F-G) \cdot h}{3}$ eine Formel für h.
7. Eine Formel für d ist herzuleiten aus folgenden Gleichungen.
   a) $V = \frac{d^2 \cdot \pi \cdot l}{4}$ b) $V = \frac{d^3 \cdot \pi}{12}$
8. Lösen Sie die Formeln nach N auf.
   a) $U = \frac{2\pi \cdot N \cdot A \cdot \hat{B} \cdot f}{\sqrt{2}}$ b) $R = \frac{4 \cdot D \cdot N \cdot \varrho}{d^2}$
9. Stellen Sie $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$ nach folgenden Größen um.
   a) R_1 b) R_2 c) R_3 d) R_4

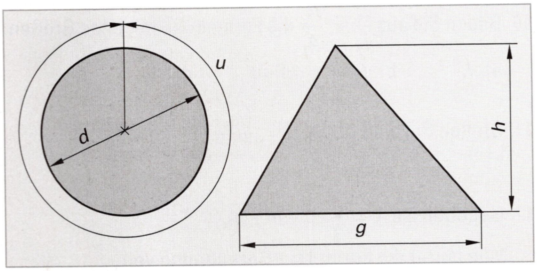


Bild 1: Kreis und Dreieck

Beispiel 1: Formel umstellen

Stellen Sie die Formel $u = d \cdot \pi$ für den Kreisumfang **Bild 1** um, bis d allein auf der linken Seite des Gleichheitszeichens steht.

Lösung:

Gegeben: $u = d \cdot \pi \,|\, : \pi$

Beide Seiten durch π dividieren: $\frac{u}{\pi} = d$

Terme vertauschen: $\Rightarrow d = \frac{u}{\pi}$

Beispiel 2: Formel umstellen

Stellen Sie die Formel $A = \frac{l \cdot b}{2}$ so um, dass l berechnet werden kann, wenn A und b bekannt sind.

Lösung:

$$A = \frac{l \cdot b}{2} \quad | \cdot 2$$
$$\Rightarrow 2 \cdot A = l \cdot b \quad | : b$$
$$\Rightarrow \frac{2 \cdot A}{b} = l$$
$$\Rightarrow l = \frac{2 \cdot A}{b}$$

Beispiel 3: Formel umstellen

Die Formel $A = \frac{d^2\pi}{4}$ dient zur Berechnung der Kreisfläche aus dem Durchmesser. Ermitteln Sie die Formel für den Fall, dass die Kreisfläche A bekannt und der Durchmesser d gesucht ist.

Lösung:

$$A = \frac{d^2\pi}{4} \quad | \cdot 4$$
$$\Rightarrow 4 \cdot A = d^2\pi \quad | : \pi$$
$$\Rightarrow \frac{4 \cdot A}{\pi} = d^2 \quad | \sqrt{\ }$$
$$\Rightarrow d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}$$

10. Bilden Sie aus $\frac{l_1}{l_2} = \frac{A_2}{A_1}$ die Formeln für folgende Größen.
a) l_1 b) l_2 c) A_2 d) A_1

11. Stellen Sie die Formel $G = \frac{(m-n) \cdot h}{3}$ nach
a) h b) n um.

12. Gegeben ist $A = \frac{h}{3} \cdot (l + m + n)$.
Wie lautet die Formel zur Berechnung von
a) h b) m ?

13. Gegeben ist die Formel $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.
Bilden Sie die Formel für R_1.

14. Eine Formel lautet $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.
Bilden Sie die Formel für C_2.

15. Setzen Sie $R = \frac{\varrho \cdot l}{A}$ in $I = \frac{U}{R}$ ein und stellen Sie die entstandene Formel nach l um.

16. Setzen Sie $I = \frac{U}{R}$ in $P = U \cdot I$ ein und bilden Sie eine Formel für R.

17. Stellen Sie die Formel $f_x = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ so um, dass
a) L, b) $\sqrt{C}$ berechnet werden kann.

18. In der Formel $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ ist gesucht:
a) R, b) L

19. Eine Wegberechnung erfolgt mit der Formel
$s = \frac{v_a + v_e}{2} \cdot \frac{v_a - v_e}{a}$. Wie heißt die Formel, wenn die Endgeschwindigkeit v_e die gesuchte Größe ist?

20. Die nicht vereinfachte Formel zur Berechnung einer Fläche heißt $A = a^2 - 2\left(a^2 - \frac{a^2 \cdot \pi}{4}\right)$.
a) Vereinfachen Sie die Formel.
b) Die Strecke a ist aus der Fläche A zu berechnen.

21. Ein Verstärkungsfaktor V kann aus Widerständen nach der Formel $V = \frac{1 + \frac{R_k}{R_e}}{1 + \frac{R_1}{R_2}}$ berechnet werden. Wie heißt die Formel, wenn der Widerstand R_e gesucht ist, während V und die anderen Widerstände gegeben sind?

22. Ein Widerstand kann berechnet werden aus $R = \frac{U_1 - U_z}{I_1 + I_3}$ oder aus $R = \frac{U_2 - U_z}{I_2 + I_4}$.

Eine saubere Darstellungsweise beim Umstellen von Formeln vermeidet Fehler.

Beispiel 1: Umformung für Aufgaben 15 bis 23

Stellen Sie die Formel $2a + 2b = u$ um, bis a allein im Linksterm steht.

Lösung:

$$2a + 2b = u \quad | -2b$$
$$\Rightarrow \quad 2a = u - 2b \quad | :2$$
$$\Rightarrow \quad a = \frac{u - 2b}{2}$$

Beispiel 2: Umformung für Aufgabe 24

Nach dem Exponent umstellen
⇒ Logarithmieren

zur Basis 10:

Stellen Sie die Formel $y = a \cdot 10^x$ nach x um.

$$y = a \cdot 10^x \quad | :a$$
$$\frac{y}{a} = 10^x \quad | \text{ Logarithmieren (Umkehrfunktion)}$$
$$lg\,\frac{y}{a} = lg\,10^x = x$$
$$\Rightarrow \quad x = lg\,\frac{y}{a}$$

zur Basis e*:

Stellen Sie die Formel $y = a \cdot e^x$ nach x um.

$$y = a \cdot e^x \quad | :a$$
$$\frac{y}{a} = e^x \quad | \text{ Logarithmieren}$$
$$ln\,\frac{y}{a} = ln\,e^x = x$$
$$\Rightarrow \quad x = ln\,\frac{y}{a}$$

*e = 2,71828…

Für das Spannungsverhältnis $V = \frac{U_1}{U_2}$ soll eine Formel entwickelt werden.

23. In einer Schaltung gilt $2\pi f C_1 = \frac{1}{2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C_2}}$.
Leiten Sie die Formel zur Berechnung von f her.

24. Bei einem um einen Zylinder geschlungenen bewegten Seil besteht zwischen den beiden Kräften der Verstärkungsfaktor $V = e^{\mu \cdot \alpha}$ (Seilreibungsformel). Gesucht ist die Formel
a) für den Umschlingungswinkel α
b) für den Reibungskoeffizienten μ.

3.2 Formel als Größengleichung

Größengleichungen gelten unabhängig von den Einheiten. Bei der Auswertung setzt man für die Formelzeichen den Produktterm Zahlenwert mal Einheit ein.

3.2.1 Längen und Flächen

Längen werden z. B. in m, mm, km gemessen.

Ebene Flächen haben zwei Ausdehnungen, die Länge l und die Breite b **(Tabelle 1)**.

Beispiel 1: Kreis berechnen

Berechnen Sie von einem Kreis mit $d = 6$ mm Durchmesser a) Umfang, b) Flächeninhalt.

Lösung:

a) $u = d \cdot \pi = 6\text{ mm} \cdot \pi = \mathbf{18{,}85\text{ mm}}$

b) $A = \dfrac{d^2 \cdot \pi}{4} = \dfrac{(6\text{ mm})^2 \cdot \pi}{4} = \mathbf{28{,}27\text{ mm}^2}$

Aufgaben zu 3.2.1

1. Die Länge eines Antennenmastes ist $l = l_1 + l_2 + l_3$. Die erste Befestigungsschelle ist am Mastfuß angebracht, die zweite Schelle ist von dieser $l_1 = 0{,}75$ m entfernt. Die Satelliten-Schüssel ist von der zweiten Schelle $l_2 = 2$ m entfernt befestigt. Die Mastlänge ist $l = 3{,}85$ m.
   a) Wie groß ist der Abstand l_3 zwischen SAT-Schüssel und der an der Mastspitze befestigten DAB-Antenne?
   b) Welche Zeichnungslängen ergeben sich für l, l_1, l_2 und l_3 im Maßstab 1:50?

2. Ein Antennenmast hat eine Länge von $l = 3{,}9$ m. Die zweite Befestigungsschelle ist $l_1 = 0{,}75$ m vom Mastfuß angebracht. Die DAB-Antenne ist $l_2 = 1$ m von dieser Schelle, die SAT-Schüssel $l_3 = 1$ m von der DAB-Antenne entfernt angebracht.
   a) Wie groß ist die Entfernung l_4 von der SAT-Schüssel bis zur Mastspitze?
   b) Wie groß sind die Längen im Maßstab 1:20?

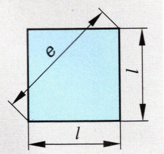
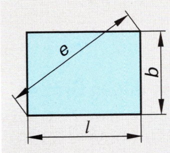
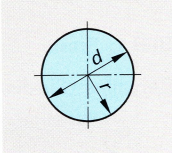
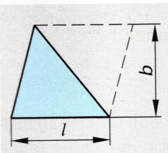
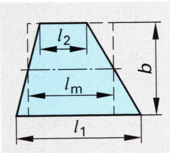
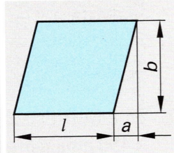
3. Der Spulenkörper einer Rundspule **Bild 1** hat die Abmessungen $d = 9$ mm, $h = 8$ mm, $b = 30$ mm. Der Durchmesser des isolierten Kupferdrahtes beträgt $d_2 = 0{,}18$ mm. Berechnen Sie
   a) D, b) z, c) N_1, d) d_m, e) N, f) l,
   g) Querschnitt A des Kupferdrahtes (Dicke der Lackschicht 0,01 mm).

$$l \approx \pi \cdot d_m \cdot N \qquad z \approx \frac{h}{d_2} \qquad N \approx N_1 \cdot z$$

$$D = d + 2h$$

l	Drahtlänge	d_m	mittlerer Durchmesser
z	Lagenzahl	d_2	Drahtdurchmesser
N_1	Windungszahl pro Lage	h	Höhe der Wicklung
N	Windungszahl	b	Breite der Wicklung
D	Durchmesser der Wicklung		

Tabelle 1: Längen und Flächen

Quadrat	Rechteck	Kreis
		
$A = l^2$ $u = 4 \cdot l$ $e = \sqrt{2} \cdot l$	$A = l \cdot b$ $u = 2(l + b)$ $e = \sqrt{l^2 + b^2}$	$A = \dfrac{d^2 \cdot \pi}{4}$ $\approx 0{,}785 \cdot d^2$ $u = d \cdot \pi$
Dreieck	**Trapez**	**Parallelogramm**
		
$A = \dfrac{l \cdot b}{2}$	$A = l_m \cdot b$ $l_m = \dfrac{l_1 + l_2}{2}$	$A = l \cdot b$
Umfang = Summe der Seiten		

l	Länge	u	Umfang
b	Breite	d	Durchmesser
e	Eckenmaß (Diagonale)	r	Radius
A	Fläche	l_m	mittlere Länge

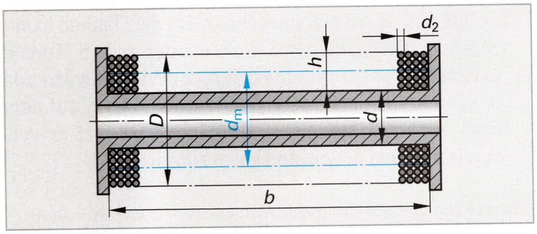


Bild 1: Spulenwicklung

4. Eine Rechteckspule **(Bild 1)** hat die Maße $a_1 = 10$ mm, $b_1 = 4$ mm, $b = 40$ mm, $h = 6$ mm. Die Wicklung besteht aus Kupferlackdraht mit $d_2 = 0{,}18$ mm Durchmesser. Berechnen Sie a) Außenmaße der Spule, b) Windungszahl N_1 je Lage, c) Lagenzahl z, d) Gesamtwindungszahl N, e) mittlere Windungslänge l_m, f) Drahtlänge l, g) Querschnitt A des Kupferdrahtes (Dicke der Lackschicht 0,0075 mm).

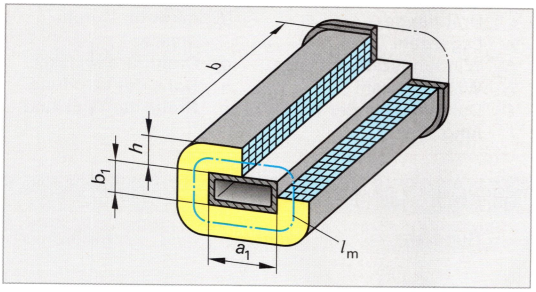


Bild 1: Spule

Berechnen Sie die fehlenden Größen.

5.

Art	Quadrat	Dreieck	Kreis
Gegeben	$l = 4$ cm	$l = 2$ cm $b = 3$ cm	$d = 5$ cm
Gesucht	A, u, e	A	A, u

6.

Art	Quadrat	Trapez	Kreis
Gegeben	$A = 36$ cm^2	$l_m = 20$ mm $b = 5$ mm	$r = 5$ mm
Gesucht	l, u, e	A	A, u

7. Eine Gefriertruhe hat die Innenmaße 880 mm × 450 mm × 450 mm. Berechnen Sie das Volumen der Truhe in m^3 und Liter.

8. Ein Aluminium-Stahl-Seil für Freileitungen besteht aus 26 Al-Drähten mit einem Durchmesser von je 3 mm und aus 7 St-Drähten mit je 2,33 mm Durchmesser. Berechnen Sie
a) den gesamten Al-Querschnitt,
b) den gesamten St-Querschnitt,
c) das Verhältnis von Al-Querschnitt zu St-Querschnitt.

9. Auf einem Scheunendach sollen Solarmodule montiert werden. Ein Solarmodul hat die Abmessungen $l = 100$ cm, $b = 80$ cm. Berechnen Sie die Flächen in m^2, wenn a) je 4 Module in 3 Reihen, oder b) je 5 Module in 2 Reihen angebracht werden. c) Wie viele Module m können maximal installiert werden, wenn auf dem Dach eine quadratische Grundfläche von 12,25 m^2 vorhanden ist und d) wie sind sie anzuordnen?

3.2.2 Satz des Pythagoras

$c^2 = a^2 + b^2$	a, b Katheten c Hypotenuse

Im rechtwinkligen Dreieck **(Bild 2)** ist die Fläche des Hypotenusenquadrats so groß wie die Summe der Flächen der Kathetenquadrate.

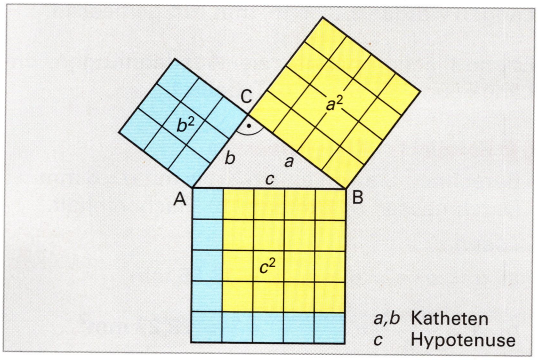


Bild 2: Satz des Pythagoras[1]

Beispiel 1: Dreieck berechnen

Ein rechtwinkliges Dreieck hat die Katheten $a = 6$ cm und $b = 4$ cm. Wie groß ist die Hypotenuse c?

Lösung:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2\,\text{cm}^2 + 4^2\,\text{cm}^2} = \sqrt{52\,\text{cm}^2}$$
$$= \mathbf{7{,}21\ cm}$$

Aufgaben zu 3.2.2

Berechen Sie die fehlenden Größen.

1.

Kathete a	12 cm	?	14 m
Kathete b	6 cm	5 cm	?
Hypotenuse c	?	25 cm	36 m

2.

Kathete a	2,5 m	2,7 cm	1,8 m
Kathete b	?	3,3 cm	?
Hypotenuse c	16 m	?	2,4 m

3. Ein Mikrofon ist an 2 gleich langen Seilen aufgehängt. Die beiden gleich hohen Aufhängepunkte sind 8 m voneinander entfernt. Der senkrechte Abstand zwischen den Aufhängepunkten und der Oberkante des Mikrofons beträgt 0,8 m. Berechnen Sie die Länge eines Seiles.

[1] Pythagoras von Samos, griech. Mathematiker (* um 570 v. Chr. † nach 510 v. Chr.) Der Lehrsatz war schon vor Pythagoras den Babyloniern bekannt.

3.2.3 Geschwindigkeiten

Die Geschwindigkeit ist ein Maß für die Bewegung. Bei der gleichförmigen Bewegung unterscheidet man die geradlinige Bewegung **(Bild 1)** und die kreisförmige Bewegung **(Bild 2).** Einheiten für Geschwindigkeiten sind km/h, km/s, m/min, m/s, cm/s, mm/min. Die Einheit für die Winkelgeschwindigkeit ist rad/s, rad ist eine Einheit des Winkels, das Verhältnis Bogenlänge zu Radius.

Beispiel 1: Wegstrecke berechnen

Ein PKW fährt mit einer Geschwindigkeit von 80 km/h. Welchen Weg hat er in einer Sekunde zurückgelegt?

Lösung:

$v = s/t \quad \Rightarrow \quad s = v \cdot t = 80\ \text{km/h} \cdot 1\ \text{s}$
$= 80000\ \text{m} \cdot 1\ \text{s}/3600\ \text{s}$
$= \mathbf{22{,}22\ m}$

$$v = \frac{s}{t} \qquad v = d \cdot \pi \cdot n$$

$$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad [n] = \frac{1}{\text{s}}$$

$$\omega = 2\pi \cdot n \qquad v = \omega \cdot r$$

v	Geschwindigkeit, Umfangsgeschwindigkeit
s	Weg
t	Zeit
d	Scheibendurchmesser
n	Umdrehungsfrequenz (Drehzahl)
ω	Winkelgeschwindigkeit
r	Scheibenradius

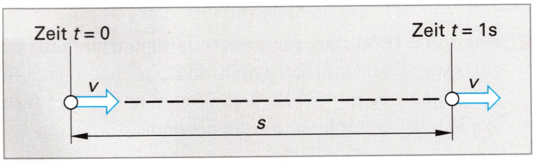


Bild 1: Geradlinige Bewegung

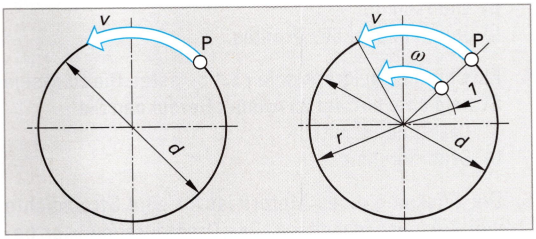


Bild 2: Kreisförmige Bewegung

Aufgaben zu 3.2.3

1. Ein Elektrofahrrad fährt mit einer Geschwindigkeit von 38 km/h. Welchen Weg hat es nach 15 Minuten zurückgelegt?

2. Ein Bandantrieb hat eine Bandgeschwindigkeit von 9,5 cm/s. Welche Spieldauer ergibt sich bei einer Bandlänge von 90 m?

3. Die Entfernung zum Mond beträgt 384400 km. Ein Radiosignal legt in der Sekunde rund 300000 km zurück. Wie lange dauert es, bis das von der Erde abgesandte und vom Mond reflektierte Signal wieder auf der Erde empfangen wird?

4. Ein Intercityzug befährt die Strecke Stuttgart – München mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 140 km/h. Welche Fahrzeit ergibt sich bei einer Entfernung von 241 km?

5. Ein Gleichstrommotor hat die Umdrehungsfrequenz 1450/min. Die Welle hat einen Durchmesser von 30 mm.
a) Wie groß ist die Umfangsgeschwindigkeit?
b) Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit?

6. Ein Riemenantrieb hat die Geschwindigkeiten v_1 = 9,5 cm/s und v_2 = 4,75 cm/s. Der Wellendurchmesser beträgt 4 mm.
a) Welche Drehzahlen n_1 und n_2 sind erforderlich?
b) Welche Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 erhält man?

7. Der Motor eines Festplattenlaufwerkes dreht sich mit 12000/min. Berechnen Sie
a) die Winkelgeschwindigkeit in rad/s,
b) den Drehwinkel in ° innerhalb 1 ms.

8. Bei einem Festplattenlaufwerk befindet sich der Lesekopf zum Zeitpunkt t_1 am Ende des Sektors 2. Er soll auf Daten im Sektor 8 zugreifen. Die Drehzahl beträgt 12000/min. Wie groß ist die Zugriffszeit t_2, wenn die Platte mit 9 Sektoren formatiert ist?

9. Geben Sie den Faktor für die Umrechnung der Geschwindigkeit von m/s in km/h an.

10. Ein Verkehrsflugzeug fliegt mit 930 km/h in 10000 m Höhe.
a) Wie lange braucht ein Radarsignal mit Lichtgeschwindigkeit ($c_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s) von der Erdoberfläche zum Flugzeug und zurück?
b) Welche Strecke fliegt das Flugzeug in dieser Zeit relativ zum Boden (ground speed)?

vel.plus/
MELGS11

4 Elektrotechnische Grundlagen

4.1 Stromdichte

Die Stromdichte ist die Stromstärke je Leiterquerschnitt.

$$[J] = \frac{[I]}{[A]} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{mm}^2} \qquad J = \frac{I}{A}$$

J Stromdichte; I Stromstärke; A Leiterquerschnitt

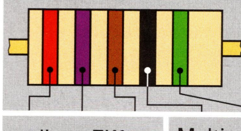
Aufgaben zu 4.1

1. Die Netzanschlussleitung eines Fernsehempfängers hat einen Querschnitt von 0,75 mm². Das Gerät nimmt 1,36 A auf. Wie groß ist die Stromdichte?
2. Nach VDE 0100 sind den Leiterquerschnitten höchstzulässige Stromstärken zugeordnet, bei beweglichen Leitungen z. B. I = 10 A zu A = 0,75 mm² und I = 125 A zu A = 35 mm². Berechnen Sie die Stromdichten.
3. Der Kupferdraht einer Spule hat eine zulässige Stromdichte von 1,5 A/mm². Der Strom beträgt 67,5 mA. Berechnen Sie
   a) Querschnitt,
   b) Durchmesser des Drahtes.
4. Ein Chromnickeldraht ist mit 5 A belastet. Die zulässige Stromdichte beträgt 25 A/mm². Berechnen Sie
   a) Drahtquerschnitt,
   b) Drahtdurchmesser.
5. Die Wicklung eines Motors ist für eine Stromdichte von 4 A/mm² bemessen. Der Drahtdurchmesser beträgt 0,22 mm (blank). Wie groß ist die höchstzulässige Stromstärke?
6. Eine Transformatorwicklung mit einem Drahtdurchmesser von 0,3 mm hat eine zulässige Stromdichte von 1,5 A/mm². Wie groß ist die zulässige Stromstärke?
7. Die Leiterbahnen einer Leiterplatte haben eine Schichtdicke von 35 µm. Für eine Bahnbreite von 1 mm ist bei einer zulässigen Übertemperatur von 50 K ein Strom von 3,1 A zulässig. Berechnen Sie
   a) Querschnitt einer Leiterbahn,
   b) Stromdichte.
8. Eine Leiterplatte trägt Leiterbahnen der Schichtdicke 70 µm. Bei einer Bahnbreite von 2 mm ist bei einer Übertemperatur von 20 K ein Strom von 4,1 A zulässig. Berechnen Sie
   a) Querschnitt einer Leiterbahn,
   b) Stromdichte.

4.2 Widerstände

4.2.1 Widerstand und Leitwert

Tabelle 1: Farbschlüssel für Widerstände



Kennfarbe	Widerstandswert in Ω				Toleranz des Widerstandswertes	Reihe
	codierte Ziffern			Multiplikator		
	1.	2.	3.			
Keine	–	–	–	–	±20 %	E6
Silber	–	–	–	10^{-2}	±10 %	E12
Gold	–	–	–	10^{-1}	±5 %	E24
Schwarz	–	0	0	10^{0}	–	
Braun	1	1	1	10^{1}	±1 %	E96
Rot	2	2	2	10^{2}	±2 %	E48
Orange	3	3	3	10^{3}	–	
Gelb	4	4	4	10^{4}	–	
Grün	5	5	5	10^{5}	±0,5 %	E192
Blau	6	6	6	10^{6}	±0,25 %	
Violett	7	7	7	10^{7}	±0,1 %	
Grau	8	8	8	10^{8}	±0,05 %	
Weiß	9	9	9	10^{9}	–	

Ein 6. Farbring gibt den Temperaturkoeffizienten an, wenn drei Ringe für den Widerstandswert verwendet wurden.

Bei kleinen Abmessungen des Widerstandes, z. B. bei Schichtwiderständen, sind Widerstand und Toleranz durch entsprechende Farbringe auf dem Widerstand angegeben **(Tabelle 1)**. Der erste Ring liegt dabei näher am einen Ende des Widerstandes und kennzeichnet die 1. Ziffer.

Widerstände mit großer Toleranz haben nur vier Farbringe. Dabei bedeuten 3. Farbring = Multiplikator und 4. Farbring = Toleranz.

Beispiel 1: Farbcodierung auswerten

Ein Widerstand hat in der Ablesereihenfolge die Farbringe Rot-Violett-Orange-Gold. Wie groß sind Widerstand und Toleranz?

Lösung:

Rot	Violett	Orange	Gold
2	7	mal 10^3	± 5 %

lies: $27 \cdot 10^3\,\Omega \pm 5\,\% \Rightarrow$ **27 kΩ, Toleranz ± 5 %**

Der Widerstand hat die Einheit Ohm[1] (Ω). Der Leitwert hat die Einheit Siemens[2] (S).

$[R] = \Omega = \frac{1}{S}$	$R = \frac{1}{G}$
$[G] = S = \frac{1}{\Omega}$	$G = \frac{1}{R}$
R Widerstand	G Leitwert

Doppelter Widerstand ergibt den halben Leitwert, dreifacher Widerstand ein Drittel des Leitwertes. Der Leitwert ist also der Kehrwert des Widerstandes **(Tabelle 1)**.

Tabelle 1: Leitwert und Widerstand

Leitwert	Widerstand	Leitwert	Widerstand
0,002 S	500,0 Ω	2 S	0,5 Ω
0,004 S	250,0 Ω	5 S	0,2 Ω
0,006 S	166,7 Ω	10 S	0,1 Ω
0,008 S	125,0 Ω	20 S	0,05 Ω
0,1 S	10,0 Ω	50 S	0,02 Ω
0,5 S	2,0 Ω	100 S	0,01 Ω
1 S	1,0 Ω	200 S	0,005 Ω

Aufgaben zu 4.2.1

1. Berechnen Sie zu den Widerständen die Leitwerte.
   a) 30 Ω b) 10 Ω c) 15 kΩ
   d) 2 MΩ e) 0,8 mΩ f) 8,2 kΩ

2. Berechnen Sie zu den Leitwerten die Widerstände.
   a) 15 S b) 8 mS c) 0,48 S
   d) 0,161 mS e) 3 μS f) 0,124 mS

3. Bestimmen Sie Widerstand und Toleranz nach den in Ablesereihenfolge angegebenen Farbringen. a) Grau-Rot-Braun-Silber, b) Braun-Grün-Rot-Gold, c) Braun-Grün-Braun-Gold, d) Gelb-Violett-Rot, e) Blau-Grau-Grün-Gold.

4. Bestimmen Sie für die in Ablesereihenfolge angegebenen Farbringe die zugehörigen Widerstände mit Toleranz. a) Rot-Violett-Grün-Silber, b) Grün-Blau-Rot-Gold, c) Grau-Rot-Gelb-Gold, d) Gelb-Violett-Orange-Silber, e) Rot-Gelb-Gelb-Silber.

[1] nach Georg Simon Ohm, deutscher Physiker, 1787 bis 1854
[2] nach Werner von Siemens, deutscher Erfinder, 1816 bis 1892

4.2.2 Widerstand und Temperatur

Die Widerstandsänderung bei Erwärmung ist vom Widerstand R_1 bei Temperatur ϑ_1, dem Temperaturkoeffizienten α und der Übertemperatur abhängig. Der Warmwiderstand R_2 bei höherer Temperatur ϑ_2 setzt sich aus dem Kaltwiderstand und der Widerstandsänderung zusammen.

Der Temperaturkoeffizient α ist temperaturabhängig und wird meist für 20 °C angegeben. Dann gilt R_1 für 20 °C und $\Delta\vartheta$ oder ΔT für Übertemperatur über 20 °C.

$$\Delta R = \alpha \cdot R_1 \cdot \Delta\vartheta \qquad \Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$$

$$R_2 = R_1 + \Delta R \qquad R_2 = R_1 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$$

ΔR Widerstandsänderung
(Δ griech. Großbuchstabe Delta)
R_1 Widerstand bei Temperatur ϑ_1
(ϑ griech. Kleinbuchstabe Theta)
$\Delta\vartheta$ Temperaturunterschied in °Celsius
ΔT Temperaturunterschied in Kelvin
R_2 Widerstand bei Temperatur ϑ_2
α Temperaturkoeffizient
ϑ_2 Endtemperatur
ϑ_1 Anfangstemperatur

Aufgaben zu 4.2.2

1. Zwei Widerstände aus Nickelin $\left(\alpha = 0{,}000\,15\,\frac{1}{K}\right)$ bzw. Kohle $\left(\alpha = -0{,}0005\,\frac{1}{K}\right)$ haben bei 20 °C je 100 Ω. Im Betrieb steigt die Temperatur auf 80 °C an. Wie groß sind die Warmwiderstände?

2. Eine Spule aus Kupferdraht $\left(\alpha = 0{,}0039\,\frac{1}{K}\right)$ und ein Kohleschichtwiderstand $\left(\alpha = -0{,}0005\,\frac{1}{K}\right)$ haben bei 20 °C je 60 Ω. Die Betriebstemperatur beträgt 50 °C. Wie groß sind die Warmwiderstände?

3. Ein NTC-Widerstand hat bei 25 °C einen Widerstand von 470 Ω, bei 100 °C beträgt sein Widerstand 30 Ω. Welchen mittleren Temperaturkoeffizienten erhält man für diesen Temperaturbereich?

4. Ein Kaltleiter hat bei 80 °C einen Widerstand von 3 kΩ, bei 100 °C beträgt der Widerstand 500 kΩ. Wie groß ist der mittlere Temperaturkoeffizient in diesem Temperaturbereich?

4.2.3 Leiterwiderstand

vel.plus/
MELGS12

Der Leiterwiderstand ist von der Länge des Leiters, vom Querschnitt und vom Leiterwerkstoff abhängig.

Bei Leiterwerkstoffen wird γ meist in m/(Ω · mm²) angegeben. Dort ist es zweckmäßig l in m und A in mm² einzusetzen **(Bild 1)**. Bei Isolierstoffen wird ϱ meist in Ω · cm angegeben. Dort setzt man zweckmäßig l in cm und A in cm² ein.

$$R = \frac{\varrho \cdot l}{A} \qquad R = \frac{l}{\gamma \cdot A}$$

R Widerstand
ϱ spezifischer Widerstand
(ϱ griech. Kleinbuchstabe Rho)
l Leiterlänge
A Leiterquerschnitt
γ Leitfähigkeit = $1/\varrho$
(γ griech. Kleinbuchstabe Gamma)

Beispiel 1: Widerstandswert berechnen

Ein Drahtwiderstand besteht aus 2,185 m Manganindraht mit $\gamma = 2{,}3\ \text{m}/(\Omega \cdot \text{mm}^2)$ und einem Querschnitt von 0,0095 mm². Berechnen Sie den Widerstand.

Lösung:

$$R = \frac{l}{\gamma \cdot A} = \frac{2{,}185\ \text{m}}{2{,}3\ \text{m}/(\Omega \cdot \text{mm}^2) \cdot 0{,}0095\ \text{mm}^2} = \mathbf{100\ \Omega}$$

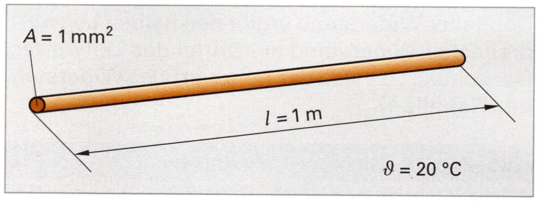


Bild 1: Spezifischer Widerstand

Tabelle 1: Leitfähigkeit und spezifischer Widerstand

Werkstoff ϑ = 20 °C	γ_{20} in $\frac{\text{m}}{\Omega \cdot \text{mm}^2}$	ϱ_{20} in $\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$
Aluminium	36,00	0,0286
Cu Mn 12 Ni	2,30	0,4350
Cu Ni 44	2,01	0,490
Kupfer	56,00	0,01786
Stahl (WM13)	7,70	0,13
Zink	16,00	0,06250

Aufgaben zu 4.2.3

1. Die Netzanschlussleitung eines Fernsehgerätes aus Kupferdraht **(Tabelle 1)** hat einen Querschnitt von 0,75 mm² und ist 1,5 m lang. Wie groß ist der Widerstand der Netzanschlussleitung?

2. Die Spule eines Relais ist aus Kupferdraht **(Tabelle 1)** mit 0,24 mm Durchmesser gewickelt. Die Drahtlänge beträgt 3,024 m. Wie groß ist der Widerstand der Relaisspule?

3. Wie groß ist der Widerstandswert eines aus Chromnickeldraht von 4 mm Durchmesser und 33 m Länge hergestellten Vorwiderstandes, wenn $\gamma = 1\ \text{m}/(\Omega\ \text{mm}^2)$ beträgt?

4. Welchen Widerstand hat ein aus Cu Ni 30 Mn hergestellter Drahtwiderstand mit 1,8 mm Durchmesser und 150 m Drahtlänge ($\varrho = 0{,}4\ \Omega\text{mm}^2/\text{m}$)?

5. Ein Stellwiderstand mit 10 Ω soll neu bewickelt werden. Der Drahtdurchmesser beträgt 0,5 mm, $\varrho = 1{,}1\ \Omega\ \text{mm}^2/\text{m}$. Berechnen Sie die Drahtlänge.

6. Eine Magnetspule aus Kupferdraht mit 0,4 mm Durchmesser hat einen Widerstand von 160 Ω. Berechnen Sie die Drahtlänge.

7. Eine Kupferleitung $\gamma_{Cu} = 56\ \text{m}/(\Omega\text{mm}^2)$ soll durch eine gleich lange, widerstandsgleiche Aluminiumleitung ersetzt werden. Welchen Querschnitt muss die Aluminiumleitung haben?

8. Drei gleich lange Leitungen aus Kupfer, Aluminium und Eisen haben den gleichen Widerstand. In welchem Verhältnis stehen die Querschnitte zueinander? ($\gamma_{Fe} = 7{,}7\ \text{m}/(\Omega\text{mm}^2)$)

9. Eine Glasplatte ($\varrho = 10^{12}\ \Omega\text{cm}$) ist 5 mm dick und trägt auf beiden Seiten einander gegenüberliegende Metallüberzüge von je 5 cm². Welcher Widerstand besteht zwischen den Metallbelägen?

10. Ein Porzellanisolator ist 100 mm lang und hat 50 mm Durchmesser ($\varrho = 0{,}5 \cdot 10^{15}\ \Omega\text{cm}$). Berechnen Sie den Widerstand zwischen den beiden Stirnflächen des Isolators.

4.3 Das Ohm'sche Gesetz

Das Ohm'sche Gesetz gibt den Zusammenhang zwischen Stromstärke, Spannung und Widerstand an.

Beim Rechnen mit dem Ohm'schen Gesetz ist zu beachten, dass die zusammengehörigen Größen verwendet werden müssen, z. B. die Stromstärke im Widerstand und die Spannung am selben Widerstand.

$$[I] = \frac{[U]}{[R]} = \frac{\mathrm{V}}{\Omega} = \mathrm{A} \qquad I = \frac{U}{R}$$

I Stromstärke
U Spannung
R Widerstand

Beispiel 1: Stromstärke berechnen

In der Schaltung **Bild 1** treten verschiedene Spannungen auf. Wie groß ist die Stromstärke im Widerstand R_2?

Lösung:

Zum Widerstand $R_2 = 1\ \mathrm{k\Omega}$ gehört die Spannung $U_2 = 20\ \mathrm{V}$.

$$I = \frac{U_2}{R_2} = \frac{20\ \mathrm{V}}{1\ \mathrm{k\Omega}} = \mathbf{20\ mA}$$

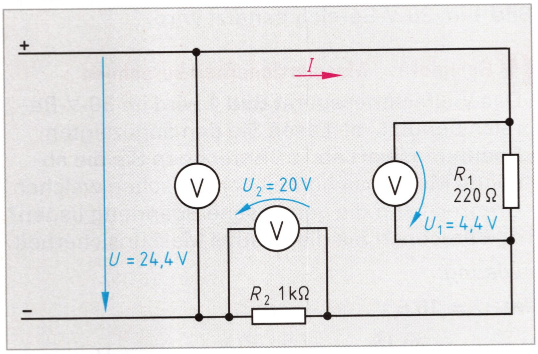


Bild 1: Spannungen an einer Reihenschaltung

Aufgaben zu 4.3

1. Die Stromstärke in R_1 von **Bild 1** soll in A berechnet werden.
2. Der Widerstand von R_2 von **Bild 2** soll in Ω berechnet werden. Welchen Wert hat er?
3. Von Schaltung **Bild 2** soll der Widerstand zwischen den Anschlussklemmen berechnet werden.
4. Die Spannung an R_2 von **Bild 3** soll in V berechnet werden.
5. Vier Widerstände sind nach **Bild 3** geschaltet. Berechnen Sie den Widerstand R_3.
6. Berechnen Sie von der Schaltung **Bild 3**
   a) den Widerstand R_1,
   b) die Spannung am Widerstand R_4.
7. Von der Schaltung **Bild 2** ist der gesamte Widerstand zwischen den Anschlussklemmen für $U = 110$ V und $I = 2$ A zu berechnen.
8. Berechnen Sie von der Schaltung **Bild 3** den gesamten Widerstand zwischen den Anschlussklemmen.
9. Drei in Reihe geschaltete gleich große Widerstände mit 220 Ω liegen an 12,6 V. Berechnen Sie die Stromstärke für jeden Widerstand.
10. Die Stromstärke bei drei parallel geschalteten gleich großen Widerständen mit 220 Ω beträgt pro Widerstand 25 mA. Berechnen Sie a) die Spannung für jeden Widerstand und b) die Gesamtspannung.

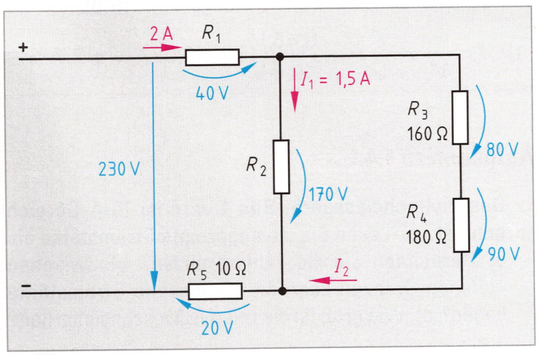


Bild 2: Spannungen an einer gemischten Schaltung

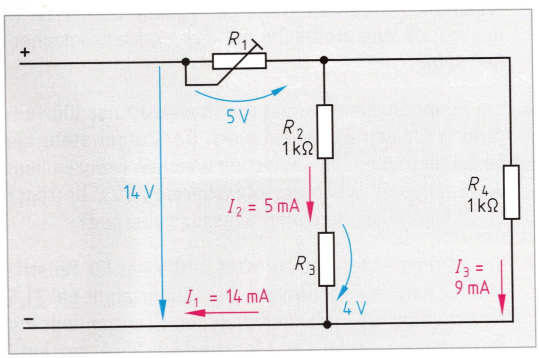


Bild 3: Gemischte Schaltung

vel.plus/ MELGS13

4.4 Messen

4.4.1 Anzeigefehler bei Zeigermessgeräten

Auf der Skala von elektrischen Messgeräten ist die Genauigkeitsklasse angegeben. Die Klasse gibt die Fehlergrenzen in % des Endwertes vom benutzten Messbereich an. Diese betragen z. B. ± 1,5 % von 30 V, wenn das Vielfachmessgerät **Bild 1** im 30-V-Bereich benutzt wird.

Beispiel 1: Messunsicherheit berechnen

Das Vielfachmessgerät **Bild 1** wird im 30-V-Bereich benutzt. a) Lesen Sie den angezeigten Spannungswert ab. b) Berechnen Sie die absolute Messunsicherheit. c) Zwischen welchen Grenzen kann die gemessene Spannung liegen? d) Berechnen Sie die relative Messunsicherheit.

Lösung:

a) $U = \mathbf{16{,}5\ V}$

b) $F = \pm \frac{k \cdot U_E}{100} = \pm \frac{1{,}5 \cdot 30\ \text{V}}{100} = \mathbf{\pm 0{,}45\ V}$

c) $U_{max} = U + F = 16{,}5\ \text{V} + 0{,}45\ \text{V} = \mathbf{16{,}95\ V}$

$U_{min} = U - F = 16{,}5\ \text{V} - 0{,}45\ \text{V} = \mathbf{16{,}05\ V}$

d) $f \approx \frac{F}{M_i} = \frac{F}{U} = \pm \frac{0{,}45\ \text{V}}{16{,}5\ \text{V}} = \pm 0{,}027 = \mathbf{\pm 2{,}7\ \%}$

$$F = \pm \frac{k \cdot B_M}{100} \qquad f = \frac{F}{M_s} \qquad f \approx \frac{F}{M_i}$$

F absolute Messunsicherheit
k Klassenzahl
B_M Messbereich
f relative Messunsicherheit
M_s Messsollwert
M_i Messistwert

Fehler und Messunsicherheit

- Die Abweichung eines Wertes vom Bezugswert (Referenzwert) wird als Fehler bezeichnet.
- Die Messunsicherheit sagt, wie gut die Messung ist. Bei jeder Messung gibt es einen gewissen „Zweifelsfaktor". Die Größe dieses Faktors entscheidet, ob die Messung für den Messzweck gut genug ist.
- Nach DIN 1319 wird statt Messfehler Messunsicherheit oder Abweichung verwendet.

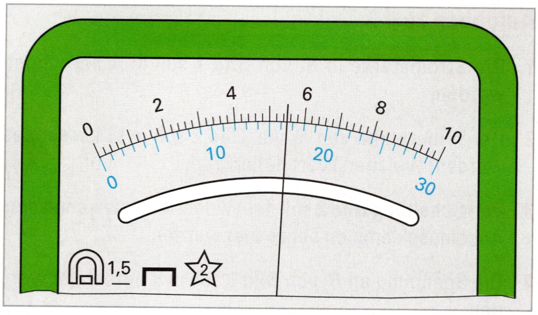


Bild 1: Anzeige Analog-Vielfachmessgerät

Aufgaben zu 4.4.1

1. Das Vielfachmessgerät **Bild 1** wird im 10-A-Bereich benutzt. a) Lesen Sie die angezeigte Stromstärke ab. b) Berechnen Sie die Fehlergrenzen. c) Zwischen welchen Grenzen kann die gemessene Stromstärke liegen? d) Wie groß ist die relative Messunsicherheit?

2. Das Vielfachmessgerät **Bild 1** wird im 60-mA-Bereich benutzt. a) Lesen Sie die angezeigte Stromstärke ab. b) Berechnen Sie die Fehlergrenzen. c) Zwischen welchen Grenzen kann die gemessene Stromstärke liegen? d) Wie groß kann die relative Messunsicherheit sein?

3. Ein Spannungsmesser mit der Klasse 0,1 hat 100 Teilstriche für den Skalenendwert. Der Zeiger steht bei 52,3 Teilstrichen. a) Zwischen welchen Grenzen liegt die Spannung, wenn der Messbereich 50 V beträgt? b) Wie groß ist die relative Messunsicherheit?

4. Ein Strommesser mit der Klasse 0,5 hat 50 Teilstriche für den Skalenendwert. Der Zeiger steht bei 31,5 Teilstrichen. a) Zwischen welchen Grenzen liegt die Stromstärke, wenn der Messbereich 25 A beträgt? b) Welche relative Messunsicherheit besteht dann?

5. Bei einer Kennlinienaufnahme sind Ströme von 100 µA bis 1 mA ohne Bereichsumschaltung und mit höchstens ± 3 % Fehler zu messen. Welche Klasse muss der Strommesser bei einem Messbereich von 1,2 mA haben?

6. Eine Spannung von 230 V wird mit einem Spannungsmesser der Klasse 0,5 gemessen. Welche Messunsicherheit und welcher mögliche prozentuale Fehler finden sich bei Verwendung a) des 300-V-Bereiches, b) des 1000-V-Bereiches?

7. Ein Vielfachspannungsmesser hat für Wechselspannungen Klasse 1,5 und für Gleichspannungen Klasse 0,5. Für Wechselspannungen gibt es die Bereiche 0,5 V, 2,5 V und 15 V. Für Gleichspannungen gibt es die Bereiche 0,5 V, 1,5 V, 5 V und 15 V. Wie groß sind die möglichen Anzeigefehler a) für Wechselspannung, b) für Gleichspannung, wenn jedesmal 4,5 V mit dem vorteilhaftesten Bereich gemessen werden?

4.4.2 Digitales Messen mit DMM

Bei einem Digitalmultimeter wird die analoge Messgröße über einen Analog-Digital-Umsetzer z. B. in Werte zwischen 0 und 1999 umgesetzt und der Messwert wird in Ziffern angezeigt **(Bild 1)**.

Die Anzeige des Messwerks erfolgt dann z. B. 3½-stellig **(Tabelle 1)**.

Der angezeigte Messwert weicht um die absolute Messunsicherheit vom wahren Messwert ab. Die absolute Messunsicherheit (Unsicherheitsgrenze) besteht aus einem Unsicherheitsfaktor in % und einer Messunsicherheit (Zählfehler) in Digits (dgt).

$$A = \frac{B_M}{B_A}$$

$$F = \pm(x \cdot M_i + n \cdot A)$$

Bei $F \ll M_s$:

$$M_i = M_s + F$$

$$f = \frac{F}{M_s}$$

$$f \approx \frac{F}{M_i}$$

A Auflösung
B_M Messbereich
B_A Anzeigebereich
F absolute Messunsicherheit (Unsicherheitsgrenze), z. B. in mV
x Unsicherheitsfaktor in % vom Messistwert
M_i angezeigter Messwert (Messistwert)
M_s wahrer Messwert (Messsollwert)
n Zählunsicherheit in Digits (Messunsicherheit)
f relativer Messunsicherheit

Beispiel 1: Berechnung der Auflösung

Mit einem 3½-stelligen Digitalmultimeter wird im Messbereich 19,99 V gemessen.

Wie groß ist die Auflösung?

Lösung:

$$A = \frac{B_M}{B_A} = \frac{19{,}99\ \text{V}}{1999} = 0{,}01\ \text{V} = \mathbf{10\ mV}$$

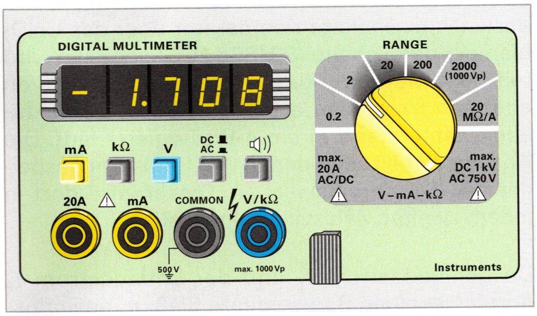


Bild 1: Digitalmultimeter (DMM)

Tabelle 1: Zählbereich (Auswahl)

Anzeige	Ziffernumfang
3½	0 bis 1 999
3¾	0 bis 3 999
4½	0 bis 19 999
4¾	0 bis 39 999
5½	0 bis 199 999

Aufgaben zu 4.4.2

1. Ein 3¾-stelliges Digitalmultimeter hat eine Auflösung von 0,1 mV. Wie groß ist sein Messbereich?

2. Ein Widerstandsmessgerät mit digitaler Anzeige hat einen Messbereich von 9,9999 MΩ.
   a) Wie viele Stellen hat die Anzeige?
   b) Wie groß ist die Auflösung?

3. Für einen digitalen Strommesser mit einer Auflösung von 1 µA wird eine Unsicherheitsgrenze von ±(0,25 % vom Messwert + 1 Digit) angegeben. In welchem Bereich liegt der wahre Messwert für einen angezeigten Strom von 2,500 mA?

4. Mit einem 4¾-stelligen Digitalmultimeter werden im 200-V-Messbereich mit einer Unsicherheitsgrenze von ±(0,5 % vom Messistwert + 4 Digits) 32,852 V gemessen. Berechnen Sie
   a) die Auflösung,
   b) die absolute Messunsicherheit,
   c) die relative Messunsicherheit.

5. Mit einem digitalen Widerstandsmessgerät wird im 3,2-MΩ-Messbereich mit einer Auflösung von 1 kΩ und einer Fehlergrenze von ±(1,2 % vom Messwert + 4 Digits) ein Widerstandswert von 0,234 MΩ gemessen. Im 320-kΩ-Messbereich mit einer Unsicherheitsgrenze von ±(0,7 % vom Messwert + 4 Digits) werden 247,8 kΩ gemessen. Berechnen Sie für den 3,2-MΩ-Messbereich
   a) den Anzeigebereich,
   b) die absolute Messunsicherheit,
   c) die relative Messunsicherheit.
   d) Wie groß ist die relative Messunsicherheit im 320-kΩ-Messbereich?

6. Ein Spannungsnormal mit 1,258 V wird mit einem 4½-stelligen Digitalmultimeter im 2-V-Messbereich bei ±2 Digits Messunsicherheit mit 1,246 V gemessen. Wie groß sind
   a) die relative Messunsicherheit,
   b) der Unsicherheitsfaktor in % vom Messistwert?

4.4.3 Digitales Multimeter DMM

Bei Messungen mit digitalen Multimetern wird fast ausschließlich das Dual-Slope-Verfahren eingesetzt (dual = zwei und slope = Rampe).

Das Messverfahren ist zwar nicht sehr schnell, dafür aber sehr genau. Der erforderliche Analog-Digital-Umsetzer besteht aus einem integrierenden Rampenwandler **(Bild 1)**. Mit der Messspannung U_{mess} wird der Kondensator C mit dem Gleichstrom I_L geladen. Die Spannung $u_1(t)$ nimmt linear ab. Der Ladevorgang beginnt beim Zählerstand 000 und endet beim Zählerstand 999. Er hat damit genau die Dauer von 1000 Zählimpulsen, also einem Zählzyklus. Nach diesem Ladevorgang wird der Schalter S1 geöffnet und gleichzeitig S2 geschlossen. *C* wird nun über die Referenzspannungsquelle U_{ref} mit dem Gleichstrom I_E entladen. Ist C_1 entladen ($u_1 = 0$), öffnet der nachgeschaltete Komparator über das UND-Element den Schalter S2 **(Bild 1)**. Gleichzeitig wird mit dem Monoflop der Freigabeimpuls *en* (von enable = freigeben) erzeugt, welcher den aktuellen Zählerstand in ein 4-Bit-Register lädt. Die Anzeigeeinheit zeigt den in den Registern gespeicherten Spannungswert an. Dieser wird dort in jedem zweiten Zählzyklus aktualisiert.

Da der Ladestrom I_L und der Entladestrom I_E durch dieselben Bauelemente fließen, beeinflussen die Bauelementetoleranzen den Messwert nicht. Beim Laden und Entladen wird genau dieselbe Ladungsmenge transportiert ($Q_L = Q_E$).

$$Q_L = I_L \cdot t_L \qquad I_L = \frac{U_{mess}}{R} \qquad t_L = 1000 \cdot T$$

$$Q_E = I_E \cdot t_E \qquad I_E = \frac{U_{ref}}{R} \qquad t_E = n \cdot T$$

$$Q_L = Q_E \qquad U_{mess} = \frac{n}{1000} \cdot U_{ref}$$

Q_L, I_L, t_L	Ladung, Strom, Zeit beim Laden
Q_E, I_E, t_E	Ladung, Strom, Zeit beim Entladen
R	Integrierwiderstand
T	Generatortaktperiodendauer
U_{mess}, U_{ref}	Messspannung, Referenzspannung
n	Zahl der Zählimpulse

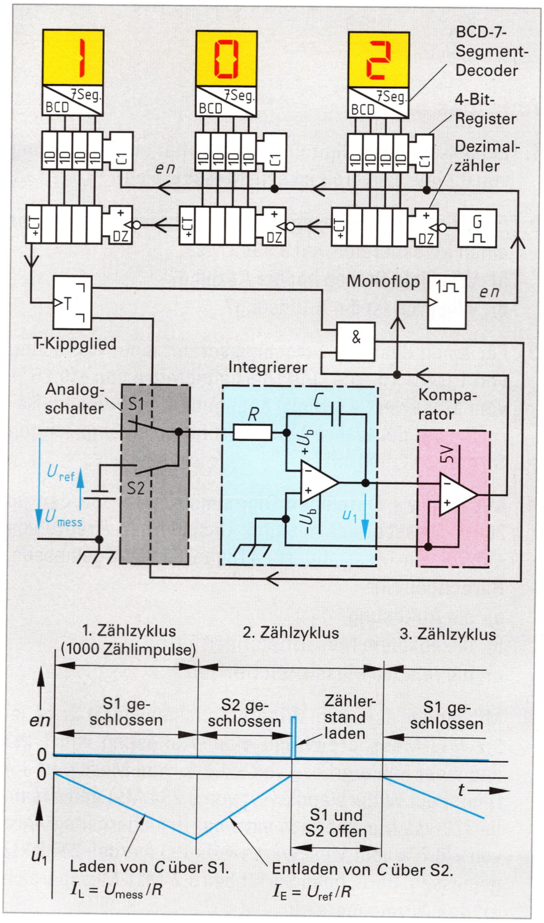


Bild 1: Dual-Slope-Messung

Aufgaben zu 4.4.3

1. Beim Multimeter aus **Bild 1** beträgt $U_{ref} = 1$ V. Wie viele Zählimpulse *n* werden benötigt, wenn der angezeigte Wert 102 in mV angezeigt wird?

2. Wie groß muss U_{ref} sein, wenn bei der Messung aus Aufgabe 1 die Anzahl *n* der Zählimpulse 51 beträgt?

3. Ein Multimeter hat die Werte $U_{ref} = 1$ V, $T = 0{,}5$ ms und $R = 10$ kΩ.

   a) Welche Ladungsträgermenge wird beim Messen von 0,3 V benötigt?

   b) Wie groß sind der Ladestrom und der Entladestrom des Kondensators?

4. Nach welcher Gesamtzeit wird die Messspannung aus Aufgabe 3 angezeigt?

4.5 Rechnen mit Bezugspfeilen

Strombezugspfeile

Eine Stromstärke bezeichet man als positiv, wenn Stromrichtung und Bezugspfeilrichtung (Zählpfeilrichtung) gleich sind **(Bild 1)**. Bei verschiedenen Richtungen von Strom und Bezugspfeil ist die Stromstärke negativ.

Spannungsbezugspfeile

Ist die Richtung der Spannung (+ nach –) gleich der Bezugspfeilrichtung, so ist die Spannung positiv **(Bild 2)**. Sind die Richtungen von Spannung und Bezugspfeil verschieden, so ist die Spannung negativ.

Knotenregel (1. Kirchhoff'sches[1] Gesetz)

Bei jedem Knoten fließt so viel Strom zu wie ab **(Bild 3)**. Setzt man die Bezugspfeile in Richtung auf den Knoten, erhält man die allgemeine Schreibweise der Knotenregel.

Maschenregel (2. Kirchhoff'sches Gesetz)

Bei jedem elektrischen Netzwerk ist die Summe der Spannungen null, wenn man von einem Punkt des Netzwerkes auf beliebigem Weg zu ihm selbst zurückfährt **(Bild 3)**. Dabei müssen die Spannungen positiv gezählt werden, wenn der Umfahrungssinn gleich der Richtung des Bezugspfeils ist, und negativ, wenn diese Richtungen zueinander verschieden sind.

> Die Ergebnisse können auch negativ sein, da man Bezugspfeile oft willkürlich setzen kann.

Aufgaben zu 4.5

Die Aufgaben sollen mit Anwendung der Knotenregel und der Maschenregel gelöst werden.

1. In Schaltung **Bild 4** ist $I = 2$ A und $R_1 = 2\ \Omega$, die Spannung an G1 beträgt 6 V. Wie groß ist die Spannung U am Ladegerät G2?
2. Wenn in der Schaltung **Bild 4** die Spannung $U = 10$ V beträgt, sind $U_{G1} = 8$ V und $I = 4$ A. Wie viel Ohm hat R_1?
3. Wie groß ist R_L in Schaltung **Bild 5**, wenn $I_1 = 3$ A ist?
4. In Schaltung **Bild 5** ist ein Akkumulator frisch geladen, der andere entladen. Welche Stromstärke I_2 stellt sich ohne R_L ein und welche Richtung hat I_2?

---

1 Gustav Kirchhoff, dt. Physiker, 1824 bis 1887

Knotenregel:	**Maschenregel:**
$I_1 + I_2 + \ldots = 0$	$U_1 + U_2 + \ldots = 0$

$I_1, I_2, \ldots$ Stromstärken in Richtung der Bezugspfeile
$U_1, U_2, \ldots$ Teilspannungen an den Schaltelementen

vel.plus/ MELGS14

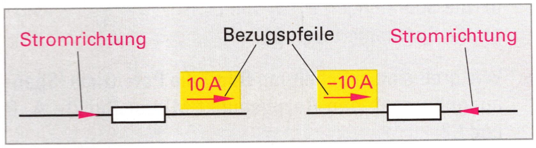


Bild 1: Stromrichtungen und Bezugspfeile

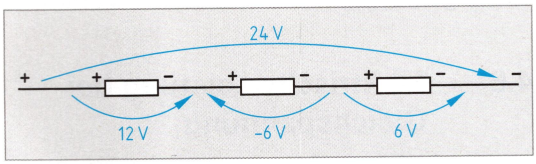


Bild 2: Spannungsbezugspfeile

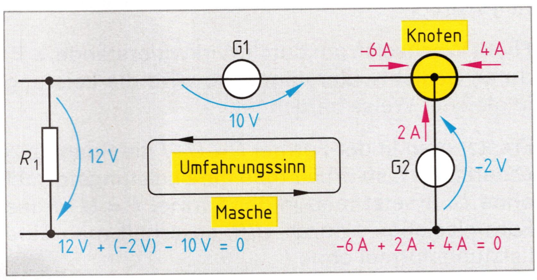


Bild 3: Anwendung der Knotenregel und Maschenregel

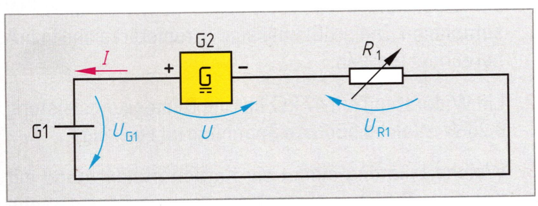


Bild 4: Ladeschaltung für Akkumulator

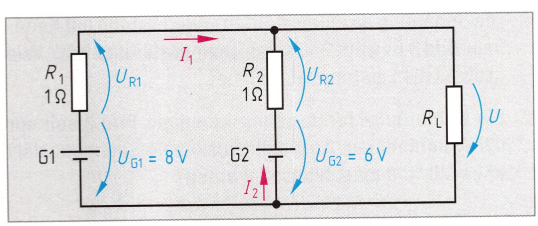


Bild 5: Netzwerk mit Akkumulatoren

5. In Schaltung **Bild 1** ist der Spannungsmesser so hochohmig, dass seine Stromaufnahme unberücksichtigt bleiben kann. Wie groß ist U?

6. Wie groß ist in Schaltung **Bild 1** die Spannung U_5, wenn die Stromaufnahme vom Spannungsmesser unberücksichtigt bleiben kann?

7. In Schaltung **Bild 2** ist nur der Punkt M mit Masse verbunden. Wie groß sind
   a) die Spannungen U_1, U_2 und U_3,
   b) die Spannung U von G1?

8. Wie groß sind in Schaltung **Bild 2** die Potenziale (Spannungen gegen den Bezugspunkt M) der Punkte A, B und C?

9. Berechnen Sie in der Schaltung **Bild 2** die Spannungen U_{AB}, U_{AC} und U_{BA}

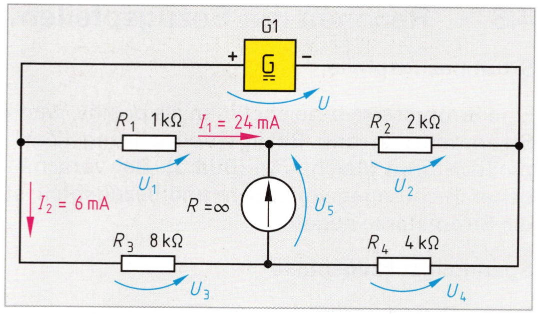


Bild 1: Widerstandsbrücke

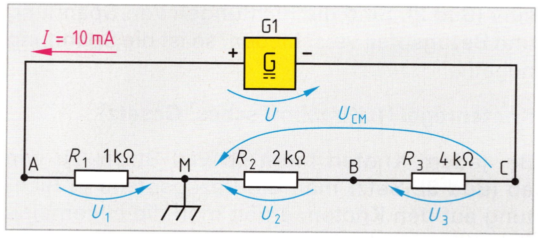


Bild 2: Widerstandsschaltung mit Masseanschluss

4.6 Elektrische Leistung bei Gleichspannung

Die elektrische Leistung ist das Produkt aus Spannung mal Stromstärke. Die Leistung hat die Einheit Watt (W)[1].

Fließt Wechselstrom durch Wirkwiderstände, z. B. durch Schichtwiderstände, so wird die Leistung in gleicher Weise berechnet.

Ersetzt man in der Formel $P = U \cdot I$ die Spannung U durch $R \cdot I$, so erhält man eine Leistungsformel ohne U. Ersetzt man in der Formel $P = U \cdot I$ das Formelzeichen I durch U/R, so erhält man eine Leistungsformel ohne I.

$[P] = \mathrm{V} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{W}$	$P = U \cdot I$
$[P] = \mathrm{A}^2 \cdot \Omega = \mathrm{W}$	$P = I^2 \cdot R$
$[P] = \dfrac{\mathrm{V}^2}{\Omega} = \mathrm{W}$	$P = \dfrac{U^2}{R}$

P Leistung
I Stromstärke
U Spannung
R Widerstand

Aufgaben zu 4.6

vel.plus/ MELGS15

1. Ein Widerstand hat 10 kΩ und soll nicht mehr als 0,1 W aufnehmen. Die größtzulässige Stromstärke soll in mA berechnet werden.

2. Ein Widerstand mit 47 kΩ hat die Bemessungsleistung 0,25 W. Welche höchste Spannung ist zulässig?

3. Welche Leistung nimmt ein Kaltleiterwiderstand mit Kennlinie **Bild 3** an einer Spannung von 5 V auf, wenn seine Temperatur 40 °C beträgt?

4. Die Spannung an einem Kaltleiterwiderstand mit Kennlinie **Bild 3** beträgt 2 V, seine Temperatur ist 20 °C. Wie groß ist die Leistungsaufnahme?

5. Ein Kaltleiterwiderstand mit Kennlinie **Bild 3** soll nur 0,5 W aufnehmen. An welche maximale Spannung darf er bei 20 °C angeschlossen werden?

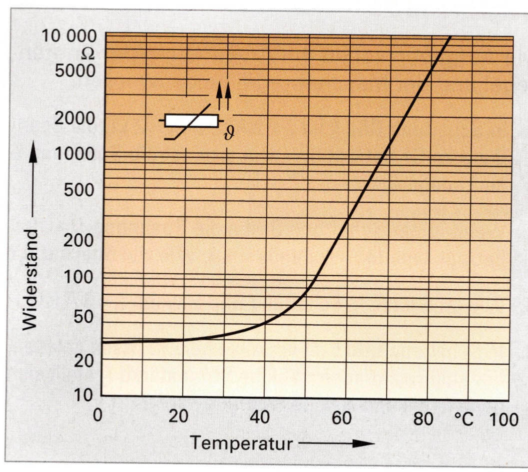


Bild 3: Kennlinie eines Kaltleiterwiderstandes

[1] James Watt, engl. Ingenieur, 1736 bis 1819

6. Wie hoch darf die Spannung an Schichtwiderständen mit einer Belastbarkeit von 0,25 W höchstens sein bei a) 18 Ω, b) 270 Ω, c) 2,7 kΩ, d) 56 kΩ?

7. Drei Glühlampen sind an 12 V angeschlossen **(Bild 1)**. Berechnen Sie die Leistung, die
a) die 15 V/15 W-Lampe aufnimmt,
b) die anderen beiden Lampen aufnehmen (die Temperaturabhängigkeit ist vernachlässigbar).

8. Der Transistor K1 im Schaltungsauszug **Bild 2** arbeitet als Schalter. Wie groß ist dann bei angesteuertem Transistor (geschlossener Schalter S) für den Widerstand 2,7 kΩ
a) Strom,
b) Leistungsaufnahme? Die verbleibende Spannung am Transistor bleibt unberücksichtigt.

9. Der Transistor in **Bild 3** arbeitet als Schalter. Wie groß ist bei angesteuertem Transistor für die Relaiswicklung
a) Strom,
b) Leistungsaufnahme? Die Kollektor-Emitter-Sättigungsspannung am Transistor bleibt unberücksichtigt.

10. Eine Siliciumdiode wird nach **Bild 4** geschaltet. Für den Durchlassbereich misst man $U_F = 1{,}2$ V und $I_F = 1$ A. Berechnen Sie
a) Durchlasswiderstand der Diode,
b) Verlustleistung P_F.

11. Eine Siliciumdiode wird nach **Bild 4** geschaltet, jedoch an eine höhere Betriebsspannung umgekehrter Polung gelegt. Für diesen Sperrbereich misst man $U_R = 800$ V und $I_R = 5\,\mu$A. Berechnen Sie
a) Sperrwiderstand der Diode,
b) Verlustleistung P_R.

12. Eine Relaisspule ist aus Kupferlackdraht mit 0,2 mm Kupferdurchmesser gewickelt, die Drahtlänge beträgt 40 m. Die Verlustleistung der Wicklung darf höchstens 2 W betragen. Die höchstzulässige Erregerspannung ist zu berechnen.

13. Eine Aluminium-Sammelschiene in einer Gleichrichteranlage ist 10 mm breit und 160 mm hoch. Die Länge der Schiene beträgt 20 m. In der Schiene fließen 2400 A. Es ist die Verlustleistung der Sammelschiene zu berechnen.

14. Berechnen Sie von Schaltung **Bild 5,** jedoch mit einer von 220 V auf 110 V herabgesetzten Anschlussspannung,
a) gesamte Leistungsaufnahme,
b) Leistungsaufnahme von R_1.

15. Berechnen Sie von Schaltung **Bild 5** die Leistungsaufnahme von R_3, wenn die Anschlussspannung
a) auf 440 V erhöht wird,
b) auf 110 V herabgesetzt wird.

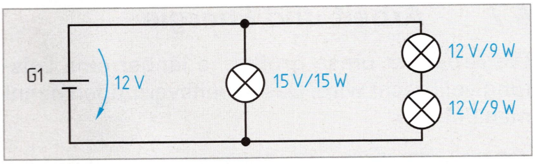


Bild 1: Glühlampen

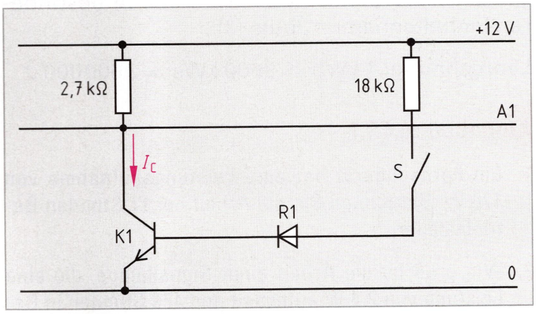


Bild 2: Schaltungsauszug

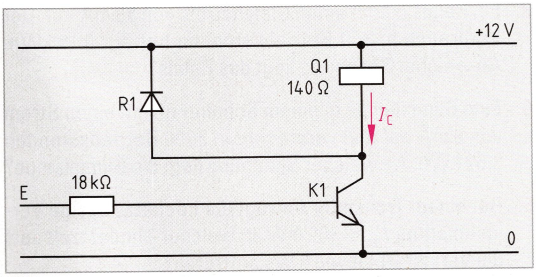


Bild 3: Transistor als Schalter

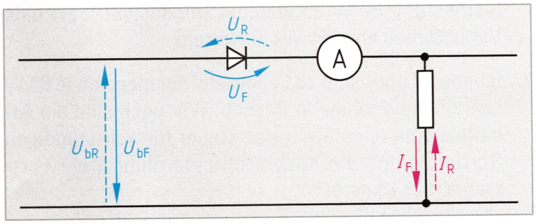


Bild 4: Diodenschaltung

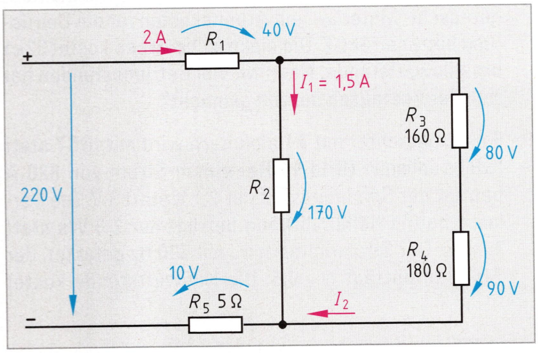


Bild 5: Gemischte Schaltung

4.7 Arbeit und Energie

Die Arbeit ist umso größer, je länger eine Leistung vollbracht wird. Das Arbeitsvermögen nennt man Energie.

4.7.1 Elektrische Arbeit

Die Einheit Wattsekunde (Ws) hat den besonderen Einheitennamen Joule (J)[1].

Umrechnung: 1 kWh = 3600 kWs = 3600000 J

$[W] = \mathrm{V \cdot As = Ws = J}$

$$W = U \cdot Q$$

$$W = P \cdot t$$

$$K_A = W \cdot T_A$$

$$1\,\mathrm{Ws} = 1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{Nm} = 1\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

W elektrische Arbeit
U Spannung
Q elektrische Ladung
P Leistung
t Zeit
K_A Arbeitskosten
T_A Tarifpreis für die Arbeit

Beispiel 1: Elektrische Arbeit berechnen

An einer Diode liegen in Rückwärtsrichtung 100 V, der Rückwärtsstrom beträgt 0,5 mA. Wie groß ist die elektrische Arbeit in 8 Stunden?

Lösung:

1. Weg: $W = U \cdot Q = U \cdot I \cdot t = 100\,\mathrm{V} \cdot 0{,}5\,\mathrm{mA} \cdot 8\,\mathrm{h}$
$= 400\,\mathrm{mWh} = 0{,}4\,\mathrm{Wh} \cdot 3600\,\mathrm{s/h} = \mathbf{1440\,J}$

2. Weg: $W = P \cdot t = U \cdot I \cdot t = 100\,\mathrm{V} \cdot 0{,}5\,\mathrm{mA} \cdot 8\,\mathrm{h}$
$= 400\,\mathrm{mWh} \cdot 3600\,\mathrm{s/h} = \mathbf{1440\,J}$

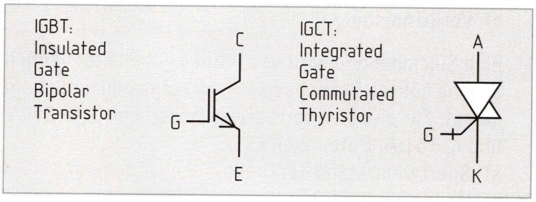


Bild 1: IGBT und IGCT

Aufgaben zu 4.7.1

1. Ein Fernsehgerät hat eine Leistungsaufnahme von 120 W. Berechnen Sie die Arbeit bei 17 Stunden Betriebsdauer.

2. Wie groß ist die Arbeit einer Signallampe, die eine Leistung von 2,4 W aufnimmt und 420 Stunden in Betrieb ist?

3. Ein Relais nimmt einen Gleichstrom von 80 mA auf. Der Verbrauch in 360 Betriebsstunden beträgt 0,15 kWh. An welcher Spannung liegt das Relais?

4. Eine Glimmlampe in einem Schalter nimmt einen Strom von 8 mA auf und verbraucht in 2000 Betriebsstunden 3,52 kWh. An welcher Spannung liegt die Glimmlampe?

5. Bei einem Transistor beträgt die höchstzulässige Verlustleistung $P_{tot} = 300$ mW. In welcher Mindestzeit darf die Verlustarbeit von 6 Ws auftreten?

6. Bei einem Thyristor beträgt die höchstzulässige Verlustleistung 32 W. In welcher Mindestzeit darf eine Verlustarbeit von 200 Ws auftreten?

7. In einem Labor sind 28 Leuchtstofflampen von je 63 W Leistungsaufnahme in Betrieb. Wie hoch sind die Arbeitskosten ohne Mehrwertsteuer für achtstündigen Betrieb, wenn die Kilowattstunde ohne Mehrwertsteuer 0,25 € kostet?

8. In einer Halle werden 24 Leuchtstofflampen mit 58 W gegen LED-Röhren mit 19 W Leistungsaufnahme ausgetauscht. Material- und Arbeitskosten für die Umrüstung betragen 360 €. Die elektrische Arbeit kostet 32 ct pro Kilowattstunde. Nach wieviel Betriebsstunden hat sich der Austausch bezahlt gemacht?

9. Ein Stromrichter mit 4 Halbleitern wird mit IGCT statt IGBT realisiert **(Bild 1)**. Bei einem Strom von 820 A beträgt der Spannungsfall nur 2,1 V statt 3 V. Die Verlustarbeit je Schaltvorgang beträgt nur 2,8 Ws statt 3,8 Ws. Der Stromrichter wird mit 500 Hz getaktet, der Tastgrad beträgt $g = 0{,}5$. Die Kilowattstunde kostet 0,26 € ohne Mehrwertsteuer. Berechnen Sie die Verlustarbeit pro Betriebsstunde a) eines IGBT, b) eines IGCT. c) Wie groß ist die Kostenersparnis pro Betriebsstunde?

10. In einem chemischen Reaktor wird die Temperatur mit einem Widerstandsthermometer Pt 1000 gemessen. Der Widerstand während der Reaktionszeit von 24 Stunden beträgt 1308 Ω. Bislang fließt während der Messung ein Konstantstrom von 5 mA. Zur Verminderung der elektrischen Arbeit wird der Strom getaktet. 3 ms lang fließt Strom, 47 ms dauert die Pause. Berechnen Sie die elektrische Arbeit a) bei Konstantstrom, b) bei getaktetem Strom.

11. Ein Bildschirm nimmt 90 W auf und ist im Jahr an 200 Tagen durchschnittlich 2 Stunden in Betrieb. Die Kilowattstunde kostet ohne Mehrwertsteuer 0,26 €. Berechnen Sie die jährlichen Arbeitskosten ohne Mehrwertsteuer für den Betrieb des Gerätes.

1 James Prescott Joule (sprich: [dZuˇl]), engl. Physiker, 1818 bis 1889

4.7.2 Mechanische Arbeit und Leistung

Die mechanische Arbeit ist das Produkt aus Kraft mal Weg in Richtung dieser Kraft. Die Leistung ist die Arbeit dividiert durch die Zeit.

Durch zweckmäßige Zerlegung der Formel $P = F \cdot \frac{s}{t}$ erhält man verschiedene Größengleichungen. Man kann rechnen mit $\frac{F \cdot s}{t}$, z. B. bei einem fahrenden Zug, oder mit $\frac{F}{t} \cdot s$, z. B. bei einer Wasserpumpe.

$$W = F \cdot s \qquad P = \frac{W}{t}$$

$$[P] = \frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W} \qquad P = \frac{F \cdot s}{t}$$

$$[F] = \mathrm{N} = \mathrm{kg\ m/s^2}$$

$$g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \approx 10\ \mathrm{m/s^2} \qquad F = m \cdot g$$

W	Arbeit	*t*	Zeit
P	Leistung	*s*	Weg in Kraftrichtung
F	Kraft	*g*	Ortsfaktor, Erdbeschleunigung
m	Masse		

Beispiel 1: Nutzleistung berechnen

Eine Wasserpumpe hat eine Förderleistung von 2 Liter je Sekunde bei einer Förderhöhe von 15 m. Wie groß ist die von der Wasserpumpe abgegebene Nutzleistung *P*?

Lösung:

2 Liter Wasser haben eine Masse von 2 kg. Zum Anheben dieser Masse sind etwa 2 kg · 10 N/kg = 20 N erforderlich.

$$P = \frac{F \cdot s}{t} = \frac{F}{t} \cdot s = \frac{20\ \mathrm{N}}{1\ \mathrm{s}} \cdot 15\ \mathrm{m}$$
$$= 300\ \mathrm{Nm/s} = \mathbf{300\ W}$$

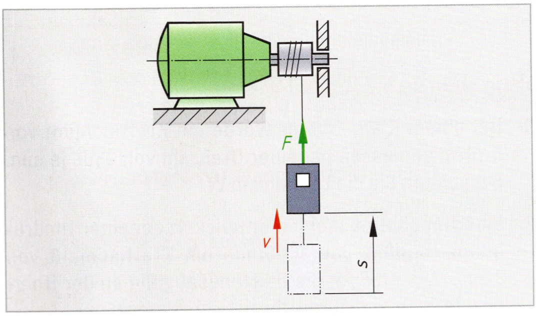


Bild 1: Aufzug

Aufgaben zu 4.7.2

1. Ein Kran hebt eine Last von 25 kN senkrecht 3,25 m hoch. Wie groß ist die verrichtete Arbeit?

2. Beim Heben einer 9 kN schweren Last wird eine Arbeit von 180 kJ verrichtet. Berechnen Sie die Hubhöhe.

3. Ein Aufzug soll von einer Kraft von 800 N angetrieben werden und dabei eine Geschwindigkeit von 2 m/s erreichen **(Bild 1)**. Berechnen Sie die erforderliche Leistung in kW.

4. Ein Elektroauto muss eine Reibungskraft von 400 N überwinden und soll eine Geschwindigkeit von 60 km/h erreichen. Berechnen Sie die erforderliche Antriebsleistung.

5. Ein Wasserkraftwerk hat die Fallhöhe von 12 m bei einem Wasserstrom von 4 $\mathrm{m^3/s}$. Berechnen Sie die Leistungsaufnahme der Turbine.

6. Für eine Beregnungsanlage sollen je Minute 800 Liter Wasser mit einem Druck von 10 m Wassersäule verspritzt werden. Die Verluste bleiben unberücksichtigt. Wie groß muss die Leistung des Antriebsmotors sein?

7. Ein Förderband mit 10 m Länge und 30° Neigung transportiert 200 kg Sand pro Minute. Berechnen Sie
   a) die mechanische Leistung,
   b) die verrichtete Arbeit nach einer Stunde Betrieb.

8. Ein Lkw mit 40 t Gesamtmasse fährt mit 40 km/h eine Passstraße mit einer Neigung von 5,74° bergan. Berechnen Sie
   a) die mechanische Leistung,
   b) die Leistung des Dieselmotors bei einem Wirkungsgrad von 60% der Zugmaschine.

9. Ein Lkw mit 28 t Gesamtmasse fährt über den Simplon-Pass und bewältigt dabei einen Anstieg von 1732 Höhenmetern. Berechnen Sie die erforderliche Menge Dieselkraftstoff in Litern.

   Hinweis: Dieselkraftstoff hat eine Energiedichte von 10 kWh pro Liter. Es werden 25% der chemischen Energie in die für den Anstieg erforderliche mechanische Energie umgesetzt.

4.7.3 Leistung und Arbeit bei Drehbewegung

Bei drehender Bewegung, z. B. bei Motoren, steigt die mechanische Leistung mit dem Kraftmoment und der Winkelgeschwindigkeit.

Beispiel 1: Leistungsabgabe

Ein Schrittmotor hat ein Kraftmoment von 0,5 Nm und dreht sich mit 1200 Umdrehungen je Minute. Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit und die abgegebene Leistung.

Lösung:

$\omega = 2\pi \cdot n = 6{,}28 \cdot 1200/\text{min} \cdot 1\ \text{min}/60\ \text{s}$

$= 125{,}6\ 1/\text{s}$

$P = M \cdot \omega = 0{,}5\ \text{Nm} \cdot 125{,}6\ 1/\text{s} = 62{,}8\ \text{Nm/s}$

$= \mathbf{62{,}8\ W}$

$[M] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{Nm}$	$M = F \cdot r$
$[\omega] = \frac{1}{\text{s}} = \text{rad/s}$	$\omega = 2\pi \cdot n$
$[P] = \text{Nm} \cdot \frac{1}{\text{s}} = \text{W}$	$P = M \cdot \omega$
$[W] = \text{Nm} = \text{J}$ $[\varphi] = \text{rad}$	$W = M \cdot \varphi$
$[J] = \text{kg} \cdot \text{m}$	$W = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$

M Kraftmoment, Drehmoment
F Kraft
r Hebelarm
ω Winkelgeschwindigkeit
(ω griech. Kleinbuchstabe Omega)
n Umdrehungsfrequenz (Drehzahl)
P Leistung
W Arbeit, Energie
φ Drehwinkel
J Trägheitsmomente, Schwungmasse

Aufgaben zu 4.7.3

1. Bei einem Kleinstmotor wurde ein Kraftmoment von 5 mNm gemessen bei einer Drehzahl von 2800 je min. Berechnen Sie die Leistung in W.

2. Eine Handbohrmaschine entwickelt bei einer Umdrehungsfrequenz von 1600/min ein Kraftmoment von 8 Nm. Wie groß ist die Leistungsabgabe an der Bohrspindel?

3. Ein Kleinmotor für einen USB-Ventilator gibt an seiner Welle eine Leistung von 1,8 W bei einer Drehzahl von 1800/min ab. Wie groß sind
   a) Winkelgeschwindigkeit,
   b) Kraftmoment?

4. Ein Kleinmotor für eine Drohne soll ein Kraftmoment von 5 mNm bei einer Winkelgeschwindigkeit von 200 rad/s entwickeln. Wie groß sind
   a) Leistungsabgabe,
   b) Drehzahl?

5. Bei welchem Drehmoment geben Elektromotoren ihre Bemessungsleistung von 120 W ab, wenn die Bemessungsdrehzahl angegeben ist mit
   a) 24/s,
   b) 75000/min,
   c) 970/min?

6. Ein Schraubantrieb muss 900° in 0,5 s drehen. Das maximale Drehmoment beträgt 1,2 Nm. Berechnen Sie
   a) die Winkelgeschwindigkeit,
   b) die Leistung des Antriebsmotors.

7. Der Motor eines E-Bike kann die Bergfahrt mit maximal 30 Nm unterstützen. Die maximale Leistung des Motors beträgt 500 W. Das angetriebene Hinterrad hat einen Durchmesser von 70 cm.
   a) Wie schnell dreht das Hinterrad?
   b) Wie schnell fährt das Fahrrad bergan?

8. Der Motor eines E-Bike mit Hinterradantrieb unterstützt bei einer Geschwindigkeit von 25 km/h mit 10 Nm. Das Hinterrad hat einen Durchmesser von 65 cm.
   a) Welche Leistung gibt der Motor ab?
   b) Der Akku hat eine Ladung von 360 Wh. Wie lange kann die Unterstützung gewährt werden?

9. Ein Stellmotor bewegt sich um 240°, um eine Klappe zu schließen. Für die Dauer von 15 s ist ein Drehmoment von 120 Nm erforderlich.
   a) Welche Arbeit verrichtet der Motor beim Schließen?
   b) Welche Leistung muss der Motor aufbringen?

10. Ein rotierender Energiespeicher hat eine Schwungmasse von 50 kgm und dreht mit 12000 1/min. Welche Energie ist eingespeichert?

11. Die Turbinen eines großen Wasserkraftwerks speichern bei einer Drehzahl von 3000 1/min eine Energie von 300 MJ. Berechnen Sie das Trägheitsmoment.

4.7.4 Wirkungsgrad und Arbeitsgrad

Wirkungsgrad η und Arbeitsgrad ζ sind die Verhältnisse von Nutzen zu Aufwand. Für Akkumulatoren gibt es den Nutzungsgrad (Amperestundenwirkungsgrad, Ah-Wirkungsgrad).

Der Gesamtwirkungsgrad berechnet sich als Produkt der Einzelwirkungsgrade.

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{auf}} \qquad \eta_{ges} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3$$

$$W_{ab} = P_{ab} \cdot t_1 \qquad W_{auf} = P_{auf} \cdot t_2 \qquad \zeta = \frac{W_{ab}}{W_{auf}}$$

η	Wirkungsgrad, Nutzungsgrad (η griech. Kleinbuchstabe Eta)
ζ	Arbeitsgrad (ζ griech. Kleinbuchstabe Zeta)
P_{ab}	Leistungsabgabe
P_{auf}	Leistungsaufnahme
W_{ab}	abgegebene Arbeit während t_1
W_{auf}	aufgenommene Arbeit während t_2

Beispiel 1: Leistung berechnen

Der Motor eines CD-Spielers hat einen Wirkungsgrad von 0,2 und nimmt 2 W auf. Wie groß ist seine mechanische Leistungsabgabe?

Lösung:

$\eta = P_{ab}/P_{auf} \Rightarrow P_{ab} = \eta \cdot P_{auf} = 0{,}2 \cdot 2\ \text{W} = \mathbf{0{,}4\ W}$

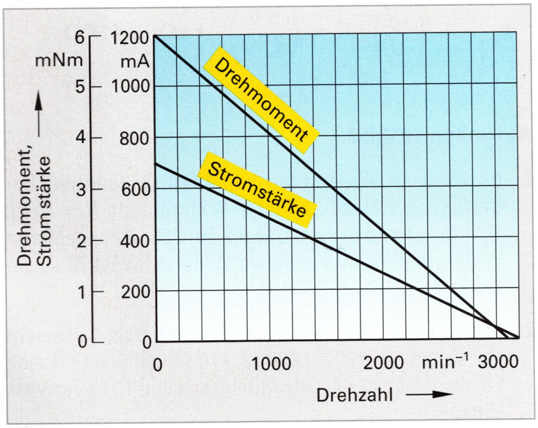


Bild 1: Kennlinien eines Kleinmotors

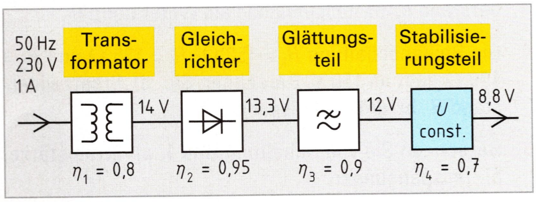


Bild 2: Stabilisiertes Netzgerät

Aufgaben zu 4.7.4

1. Ein Kleinmotor entwickelt ein Kraftmoment von 4 mNm bei einer Umdrehungsfrequenz von 100 je s. Seine Stromaufnahme beträgt dabei 3500 mA bei einer Spannung von 3,2 V. Berechnen Sie den Wirkungsgrad.
2. Der Motor einer Kühlpumpe gibt ein Kraftmoment von 1 Nm bei einer Umdrehungsfrequenz von 1500 je min ab. Sein Wirkungsgrad wird zu 10 % geschätzt. Berechnen Sie die Stromaufnahme bei 6 V Gleichspannung.
3. Berechnen Sie den Wirkungsgrad des 3,2-V-Motors von **Bild 1** bei einer Belastung von 2 mNm.
4. Berechnen Sie aus den Kennlinien **Bild 1** den Wirkungsgrad des 3,2-V-Motors bei einer Drehzahl von 2800/min.
5. Berechnen Sie vom stabilisierten Netzgerät **Bild 2**
   a) Ausgangsleistung des Transformators,
   b) Ausgangsleistung des Gleichrichters,
   c) Eingangsleistung des Stabilisierungsteils,
   d) Wirkungsgrad der Strecke Eingang Transformator bis Ausgang Gleichrichter.
   e) Geben Sie eine Formel zur Berechnung eines Gesamtwirkungsgrades aus den einzelnen Wirkungsgraden an.
6. Das Netzgerät **Bild 2** besteht aus vier Baugruppen mit verschiedenen Wirkungsgraden.
   a) Geben Sie eine Formel zur Berechnung des Gesamtwirkungsgrades aus den Einzelwirkungsgraden an.
   b) Berechnen Sie die Ausgangsströme der einzelnen Baugruppen.
7. Ein Transformator für eine Sicherheitsstromversorgung nimmt im Jahr während 4350 Stunden eine Leerlaufleistung von 4 W auf. Während 30 Stunden im Jahr gibt er 120 W bei einem Wirkungsgrad von 85 % ab.
   Wie groß sind
   a) Arbeitsaufnahme,
   b) Arbeitsgrad?
8. Eine Akkumulatorenbatterie für eine unterbrechungsfreie Stromversorgung erfordert während 2400 Stunden zur Erhaltungsladung 15 W. Während 1980 Stunden wird mit einem Wirkungsgrad von 80 % eine Leistung von 1,2 kW abgegeben. Wie groß sind
   a) gesamte Arbeitsaufnahme,
   b) Nutzungsgrad?

vel.plus/ MELGS16

4.8 Grundschaltungen

4.8.1 Reihenschaltung

In der Reihenschaltung **(Bild 1)** fließt überall derselbe Strom. Die Gesamtspannung ist gleich der Summe der Teilspannungen.

Reihenschaltungen Parallelschaltungen } ⇒	Gemischte Schaltungen, z. B. belasteter Spannungsteiler, Brückenschaltung

Beispiel 1: Widerstandsberechnung

Die Reihenschaltung von R_1 und R_2 hat einen Ersatzwiderstand von 1 kΩ. Die Gesamtspannung beträgt 12 V. An R_2 liegen 5 V. Wie groß ist der Widerstand von R_2?

Lösung:

$$\frac{R_2}{R} = \frac{U_2}{U}$$

$$\Rightarrow R_2 = \left(\frac{U_2}{U}\right) \cdot R = \left(\frac{5\ \text{V}}{12\ \text{V}}\right) \cdot 1\ \text{k}\Omega = \mathbf{417\ \Omega}$$

$U = U_1 + U_2 + \ldots$	$R = R_1 + R_2 + \ldots$
$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$	$\frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R}$
$P_1 = U_1 + I_1$	$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = I^2 \cdot R_1$

U	Gesamtspannung	$P_1, P_2, \ldots$	Teilleistungen
$U_1, U_2, \ldots$	Teilspannungen	I	Stromstärke
R	Ersatzwiderstand		
$R_1, R_2, \ldots$	Einzelwiderstände		

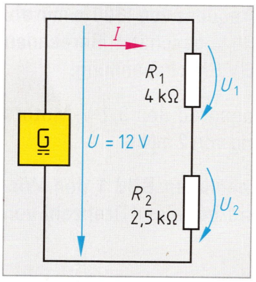


Bild 1: Reihenschaltung

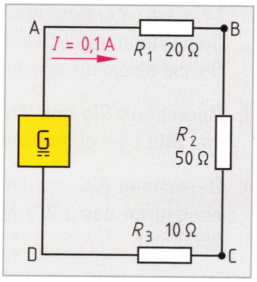


Bild 2: Reihenschaltung

Aufgaben zu 4.8.1

1. Es wird ein Widerstand von 1340 Ω benötigt. Zur Verfügung stehen die festen Widerstände R_1 = 1 kΩ, R_2 = 250 Ω und ein von 0 Ω bis auf 250 Ω einstellbarer Widerstand R_3. Auf welchen Widerstand ist R_3 einzustellen?

2. Mit welchen drei Widerständen aus dem Sortiment 100 Ω, 150 Ω, 220 Ω, 330 Ω, 470 Ω und 680 Ω (Reihe E6) lässt sich der Ersatzwiderstand von 1 kΩ verwirklichen?

3. Die Widerstände R_1 = 100 Ω, R_2 = 150 Ω und R_3 = 680 Ω liegen in Reihe an 230 V. Berechnen Sie a) Ersatzwiderstand R, b) Teilspannung am Widerstand R_1.

4. Die Reihenschaltung R_1 = 150 Ω, R_2 = 125 Ω und R_3 = 400 Ω liegt an 150 V. Berechnen Sie a) Ersatzwiderstand R, b) größte Teilspannung.

5. Berechnen Sie von Schaltung **Bild 1** a) Stromstärke, b) Teilspannungen.

6. Wie hoch sind die sechs verschiedenen Spannungen, die in der Schaltung **Bild 2** gemessen werden können?

7. Eine Relaisspule 600 Ω 48 V soll von einem Gleichrichter mit 100 V Ausgangsspannung gespeist werden. Berechnen Sie a) Widerstand R_v, b) Leistung P_v des Vorwiderstandes.

8. Eine Glühlampe 12 V 0,5 A soll über einen Vorwiderstand an 48 V angeschlossen werden. Berechnen Sie den Vorwiderstand und seine Bemessungsleistung.

9. Die Reihenschaltung R_1 = 1 kΩ, R_2 = 1,6 kΩ, R_3 = 10 kΩ und R_4 = 4 kΩ besteht aus 0,25-W-Widerständen. Welche Stromstärke I ist höchstens zulässig?

10. Eine Magnetspule hat einen Widerstand von 120 mΩ und soll während 10 s einen Strom von 80 A führen. Der Anschluss erfolgt über zwei 12 m lange Kupferleiter von 4 mm² Querschnitt. Welche Spannung muss der Spannungserzeuger haben?

11. Ein Heizelement 230 V 50 W soll vorübergehend nur 35 W leisten. Berechnen Sie den Vorwiderstand zum Anschluss an 230 V.

12. Ein Widerstand R_1 mit dem Temperaturkoeffizienten α_1 = 0,0044 K^{-1} und ein Widerstand R_2 mit einem Temperaturkoeffizienten α_2 = −0,0025 K^{-1} sollen in Reihenschaltung einen temperaturunabhängigen Widerstand R von 16 kΩ ergeben. Berechnen Sie die Widerstände von R_1 und R_2.