9.8.3 Pegelrechnung in Breitband-Kommunikationsanlagen

/ird ein Breitbandverstärker mit mehr als zwei ernsehkanälen angesteuert, so reduziert sich der aximal zulässige Bemessungs-Ausgangsspan-ungspegel, ebenso wenn mehrere Breitband-erstärker kaskadiert (hintereinander geschaltet) erden. Zusätzlich vermindert sich der maximal ulässige Bemessungs-Ausgangsspannungspe-el der Hausanschlussverstärker noch um 6 dB, a durch das vorgeschaltete Breitband-Kommu-ikationsnetz (BK-Netz) bereits Breitbandverstär-er kaskadiert sind.

ei Kaskadierung von Verstärkern muss der einste erforderliche Ausgangsspannungspegel edes Verstärkers erhöht werden, damit am Aus-ang des letzten Verstärkers das geforderte HF-auschabstandsmaß erhalten bleibt.

$$A_F = 8 \cdot \lg(n_F - 1)\ \text{dB}$$

$$A_k = 10 \cdot \lg n_k\ \text{dB}$$

$$L_{umax} = L_{umax0} - A_F - A_k - A_{BK}$$

$$G_{kr} = 10 \cdot \lg n_k\ \text{dB}$$

$$L_{umin} = A_n + 3\ \text{dB}\mu\text{V} + G_u + A_\sigma + G_{kr}$$

A_F	Pegelabsenkung in dB, wenn mehr als zwei Fernsehkanäle belegt sind
n_F	Anzahl der belegten Fernsehkanäle
A_k	Pegelabsenkung in dB bei Kaskadierung von Breitbandverstärkern
n_k	Anzahl der kaskadierten Verstärker
L_{umax}	maximal zulässiger Ausgangsspannungspegel in dBµV
L_{umax0}	maximal zulässiger Bemessungs-Ausgangsspannungspegel in dBµV nach Herstellerangabe
A_{BK}	Pegelabsenkung in dB bei vorgeschaltetem BK-Netz (A_{BK} = 6 dB)
G_{kr}	Pegelanhebung in dB zur Einhaltung des geforderten HF-Rauschabstandsmaßes bei Kaskadierung von Verstärkern
L_{umin}	kleinster erforderlicher Ausgangsspannungspegel in dBµV
A_n	Rauschmaß des Verstärkers in dB
G_u	Spannungsverstärkungsmaß in dB
A_σ	gefordertes HF-Rauschabstandsmaß in dB

ufgaben zu 19.8.3

Berechnen Sie für die ungünstigst gelegene Steckdose A der BK-Hausverteilanlage **Bild 1** a) das gesamte Dämpfungsmaß, b) den Spannungspegel ohne 2. Hausanschlussverstärker, c) das Spannungsverstärkungsmaß des 2. Hausanschlussverstärkers, wenn an der Dose A der Spannungspegel L_u = 70 dBµV betragen soll.

. Berechnen Sie für die günstigst gelegene Steckdose B der BK-Anlage **Bild 1** a) das Dämpfungsmaß, b) den Spannungspegel, wenn der 2. Hausanschlussverstärker 20 dB Verstärkung hat.

. a) Berechnen Sie für den 2. Hausanschlussverstärker **(Bild 1)** den maximal zulässigen Ausgangsspannungspegel, wenn 18 Fernsehkanäle belegt sind und L_{umax0} = 114 dBµV angegeben ist. b) Prüfen Sie nach, ob dieser Pegel überschritten wird, wenn G_{u2} = 20 dB beträgt.

. a) Ermitteln Sie für den 2. Hausanschlussverstärker **(Bild 1)** L_{umax}, wenn der Spannungspegel am Hausübergabepunkt (HÜP) 70 dBµV beträgt. b) Mit wie vielen Fernsehkanälen kann dieser Verstärker angesteuert werden, wenn L_{umax0} = 120 dBµV und G_{u2} = 25 dB sind?

. a) Berechnen Sie für den 2. Hausanschlussverstärker **(Bild 1)** L_{umin}, wenn A_σ = 49 dB gefordert ist und G_{u2} = 20 dB beträgt. b) Wie groß ist A_σ am Ausgang des 2. Hausanschlussverstärkers in **Bild 1?**

. Wie groß ist das A_σ am Ausgang des 2. Hausanschlussverstärkers **(Bild 1)**, wenn am HÜP L_u = 70 dBµV und G_{u2} = 25 dB sind?

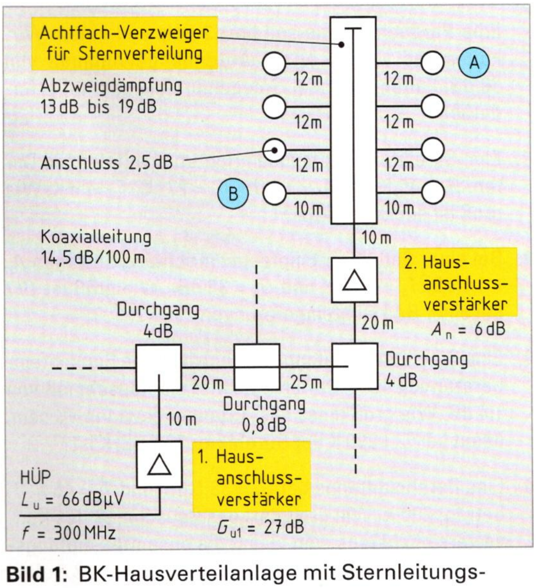


Bild 1: BK-Hausverteilanlage mit Sternleitungssystem

19.8.4 Trägerrauschabstand in Satelliten-Empfangsanlagen

Der Trägerrauschabstand *C/N* (von Carrier to Noise = Träger zu Rauschen) ist umso größer, je größer der Gütefaktor der Empfangseinrichtung *G/T* (von Gain over Temperature = Verstärkung über der Temperatur) und je größer der äquivalente Strahlungsleistungspegel *EIRP* (von Equivalent Isotropically Radiated Power = äquivalente, einem Kugelstrahler zugeführte Leistung) des Satelliten ist. Der Strahlungsleistungspegel *EIRP* in dBW ist der Strahlungsleistungspegel eines Kugelstrahlers, der erforderlich wäre, um die gleiche Empfangsenergie wie die wirkliche Sendeantenne des Satelliten zu erzielen. Den Strahlungsleistungspegel *EIRP* an einem Standort kann man dem Footprint (Fußabdruck) des Satelliten **Bild 1** entnehmen.

Die Rauschzahl F_n des Empfangssystems LNB (von Low Noise Block converter = rauscharme Umsetzer-Baugruppe) gibt an, um welchen Faktor sich der Rauschabstand verschlechtert. Die Rauschtemperatur der Antenne ist ein Maß für die von der Antenne aufgenommene thermische Rauschleistung.

$$\lambda = \frac{c_0}{f}$$

$$G_A = 10 \cdot \lg\left[\pi^2 \cdot \eta \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2\right] \text{ dB}$$

$$F_n = 10^{A_n/10\text{ db}}$$

$$C/N \approx G/T + EIRP - 54\text{ dB}$$

Zahlenwertgleichung:

$$G/T = G_A - 10 \cdot \lg\left[(F_n - 1) \cdot T_u + T_A\right]\text{ dB}$$

λ	Wellenlänge
c_0	Lichtgeschwindigkeit ($c_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s)
f	Frequenz
F_n	Rauschzahl des LNB
A_n	Rauschmaß des LNB in dB
G_A	Antennengewinnmaß der Parabolantenne in dBi (im Vergleich zum isotropen Strahler, d. h. Kugelstrahler)
η	Antennenwirkungsgrad
d	Durchmesser des Parabolspiegels
C/N	Trägerrauschabstand in dB
G/T	Gütekoeffizient (Gütefaktor) der Empfangseinrichtung in dB/K
$EIRP$	äquivalenter Strahlungsleistungspegel in dBW
T_u	Betriebstemperatur des LNB in K
T_A	Rauschtemperatur der Empfangsantenne in K

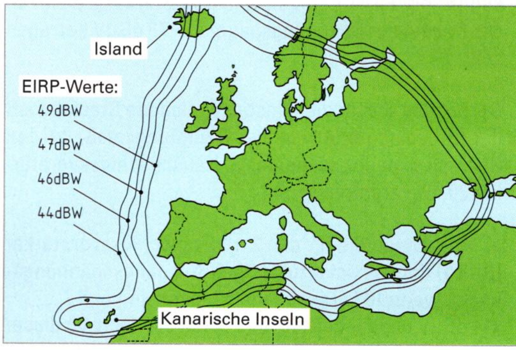


Bild 1: Footprint des Satelliten Astra 1N

Aufgaben zu 19.8.4

1. Eine Parabolantenne mit einem Spiegeldurchmesser von 1,8 m hat einen Wirkungsgrad von 60 %. Wie groß ist bei einer Empfangsfrequenz von 12,5 GHz das Antennengewinnmaß?

2. Eine Parabolantenne soll bei 12 GHz und einem Wirkungsgrad von 55 % ein Antennengewinnmaß von 38 dBi haben. Welcher Spiegeldurchmesser ist erforderlich?

3. Eine Satelliten-Empfangseinrichtung hat folgende Daten: $G_A = 45{,}6$ dBi, $A_n = 1{,}2$ dB, $\vartheta_u = 27$ °C, $T_A = 45$ K. Wie groß ist der Gütefaktor?

4. Bei einer Satelliten-Empfangseinrichtung betragen $A_n = 1{,}1$ dB, $T_A = 35{,}4$ K und $G_A = 36$ dBi. Wie groß ist G/T bei einer Betriebstemperatur von 290 K?

5. Eine Satelliten-Empfangsantenne hat eine Rauschtemperatur von 43 K. Der LNB besitzt ein Rauschmaß von 1,4 dB. Wie groß muss das Antennengewinnmaß sein, damit bei $T_u = 290$ K der Gütefaktor 12,5 dB/K ist?

6. Eine Parabolantenne hat $G_A = 38{,}5$ dBi und $T_A = 45$ K. T_u beträgt 290 K. Wie groß darf das Rauschmaß des Konverters höchstens sein, damit die gesamte Empfangseinrichtung einen Gütefaktor von mindestens 13,3 dB/K besitzt?

7. Bei einer Satelliten-Empfangsanlage für die Signal des Astra-Satelliten 1N ist der Gütefaktor bei einer geforderten Trägerrauschabstand von 14 dB zu be rechnen. Der äquivalente Strahlungsleistungspege für den Standort Kanarische Inseln ist aus **Bild 1** zu er mitteln.

8. Welcher Trägerrauschabstand lässt sich bei einer Sa telliten-Empfangsanlage für die Signale des Satellite Astra 1N nur erreichen, wenn die Empfangsanlag in Westisland einen Gütefaktor von 18 dB/K besitzt An dem Standort Westisland beträgt nach **Bild 1** de Strahlungsleistungspegel $EIRP = 44$ dBW.

9.8.5 Pegelrechnung in Satelliten-Empfangsanlagen

er Ausgangsleistungspegel des Empfangs-ystems LNB (von Low Noise Block converter = auscharme Umsetzer-Baugruppe) hängt ab vom eistungspegel, der an der Empfangsantenne ein-rifft, vom Antennengewinnmaß der Empfangs-ntenne und vom Leistungsverstärkungsmaß des NB.

$$[L_P] = \text{dBW} \qquad \boxed{L_p = EIRP - A + G_A + G_p}$$

$$L_p = 10 \cdot \lg \frac{P}{1\,\text{W}}\,\text{dBW} = 10 \cdot \lg \frac{U^2/75\,\Omega}{(10^6\,\mu\text{V})^2/1\,\Omega}\,\text{dBW}$$

$$[L_U] = \text{dB}\mu\text{V} \qquad \boxed{L_U = L_P + 138{,}75\,\text{dB}}$$

L_P Ausgangsleistungspegel des LNB in dBW
$EIRP$ äquivalenter Strahlungsleistungspegel in dBW
A Funkfelddämpfung (für alle Satelliten in Mitteleuropa etwa 205,6 dB)
G_A Antennengewinnmaß der Empfangsantenne in dBi
G_P Leistungsverstärkungsmaß des LNB in dB
P Leistung $\quad U$ Spannung
L_U Spannungspegel in dBµV

ufgaben zu 19.8.5

. Eine Satelliten-Empfangsanlage hat folgende Daten: Antennengewinnmaß der Empfangsantenne G_A = 38 dBi und Leistungsverstärkungsmaß des LNB G_P = 50 dB. Wie groß ist der Ausgangsleistungspegel des LNB bei $EIRP$ = 52 dBW?

. Bei einer Satelliten-Empfangsanlage betragen der Ausgangsleistungspegel des Konverters −63,6 dBW, das Leistungsverstärkungsmaß 55 dB. Wie groß ist das Antennengewinnmaß der Empfangsantenne bei $EIRP$ = 52 dBW?

. Wie groß ist der Ausgangsspannungspegel in dBµV, wenn der Leistungspegel am Ausgang des LNB −66 dBW beträgt?

. Bei welchem Leistungspegel in dBW hat der Spannungspegel an den Antennensteckdosen in einer Satelliten-Empfangsanlage den Mindestwert von 47 dBµV?

. Ermitteln Sie den Nutzspannungspegel an allen Antennensteckdosen der Satelliten-Empfangsanlage **Bild 1,** wenn der äquivalente Strahlungsleistungspegel 52 dBW, das Antennengewinnmaß der Empfangsantenne 38 dBi und das Leistungsverstärkungsmaß des Empfangssystems 55 dB betragen.

. Die Satelliten-Empfangsanlage **Bild 2** dient zur Verteilung der analogen Signale des unteren Frequenzbandes der Astra-Satelliten und der digitalen Signale des oberen Frequenzbandes der Astra-Satelliten. a) Wie groß muss das Antennengewinnmaß der Parabolantenne mindestens sein, damit an keiner Antennensteckdose der Spannungspegel von 63 dBµV unterschritten wird? Der äquivalente Strahlungsleistungspegel $EIRP$ beträgt 52 dBW, das Leistungsverstärkungsmaß des Empfangssystems 50 dB. b) Welchen Durchmesser muss der Parabolspiegel mindestens haben, wenn mit einem Antennenwirkungsgrad η = 0,6 und f = 11,7 GHz gerechnet wird?

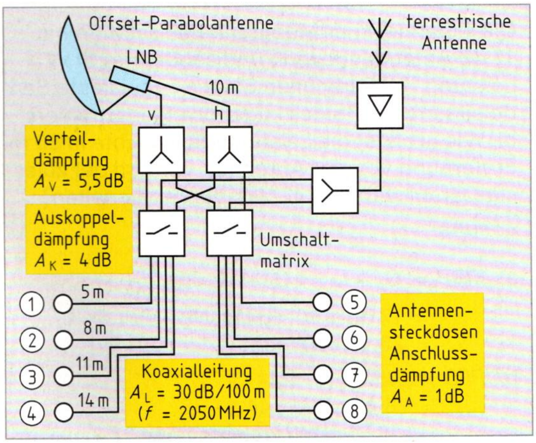


Bild 1: Satelliten-Empfangsanlage

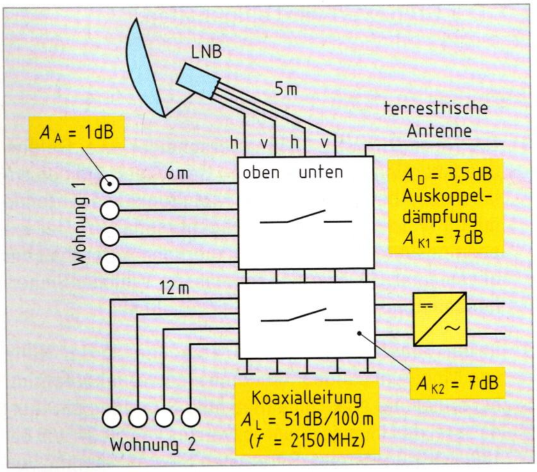


Bild 2: Satelliten-Empfangsanlage für digitale Signale

19.8.6 Grenzwerte bei Mobilfunkanlagen

Die Sendeantenne von Mobilfunkstationen bündelt die abgestrahlte Leistung in eine Richtung. Die äquivalente, einem Kugelstrahler zugeführte Sendeleistung *EIRP* ist eine Rechengröße, um den entfernungsabhängigen Feldstärkeverlauf der Mobilfunk-Richtantenne zu berechnen. Die tatsächliche Sendeleistung ist immer geringer als der EIRP-Wert.

Die wirksame Leistung einer Strahlungsquelle am Ort des Betrachters heißt Leistungsflussdichte. Grenzwerte und Vorsorgewerte der Strahlungsbelastung werden als maximal zulässige Leistungsflussdichte oder als maximal zulässige elektrische Feldstärke angegeben.

Beispiel 1: Grenzwerte berechnen

Die Antenne einer Mobilfunk-Basisstation hat 17 dB Antennengewinn und sendet mit 14 W Leistung. a) Berechnen Sie die äquivalente Sendeleistung *EIRP* eines kugelförmigen Strahlers. b) Wie groß ist die Leistungsflussdichte in 50 m Entfernung von der Antenne? c) Wird der zulässige Grenzwert von 42 V/m dort eingehalten?

Lösung:

a) $EIRP = G_A + L_P = G_A + 10 \cdot \lg \frac{P}{1\,W}$

$= 17\,dB + 10 \cdot \lg\,(14\,W/1\,W)$

$= \mathbf{28{,}46\,dBW}$ (entspricht 701 W)

b) $PFD = EIRP - 10 \cdot \lg(4 \cdot \pi \cdot D^2)$

$= 28{,}46\,dBW - 44{,}97\,dB$

$= \mathbf{-16{,}51\,dBW/m^2}$ (entspricht 22,3 mW/m²)

c) $E = \sqrt{Z_0 \cdot 10^{PFD/10}} = \mathbf{2{,}9\,V/m}$

Der Grenzwert wird eingehalten.

Aufgaben zu 19.8.6

1. Die Norm DIN VDE 0848 unterscheidet zwei Gefährdungsbereiche **(Tabelle 1)**. a) Berechnen Sie den zulässigen Abstand von einer Mobilfunksendeantenne mit 50 W Sendeleistung für Fachpersonal. b) Der Expositionsbereich II ist für andauernden Aufenthalt der allgemeinen Bevölkerung zugelassen. Welcher Sicherheitsabstand zur Antenne ist einzuhalten?

2. In der Schweiz sind nur die Anwohner in der Nähe von Mobilfunksendeantennen beschwerdeberechtigt, bei denen die elektromagnetische Strahlung ein Hundertstel des Immissionsgrenzwertes von 58,34 V/m bei 1800 MHz übersteigt. Berechnen Sie den Abstand von der Antenne bei einer Sendeleistung von 50 W, bei dem Anwohner sich noch beschweren können.

$[EIRP] = dBW$ $\qquad$ $[L_P] = dBW$

$$EIRP = G_A + L_P \qquad L_P = 10 \cdot \lg \frac{P}{1\,W}\,dBW$$

$[PFD] = \frac{dBW}{m^2}$

$$PFD = EIRP - 10 \cdot \lg(4 \cdot \pi \cdot D^2)\,dB \qquad PFD = 10 \cdot \lg \frac{E^2/Z_0}{W/m^2}\,dB\,\frac{W}{m^2}$$

D Entfernung zur Antenne in m
E Elektrische Feldstärke in V/m
$EIRP$ Equivalent Isotropically Radiated Power = äquivalenter Strahlungsleistungspegel in dBW
G_A Antennengewinnmaß in dB (17 dB bei Dipol)
L_P Leistungspegel in dBW
P Sendeleistung in W
PFD Power Flux Density = Leistungsflussdichte in dBW/m²
Z_0 Feldwellenwiderstand des freien Raumes (377 Ω)

Tabelle 1: Gefährdungsbereiche DIN VDE 0848

Expositionsbereich	Daueraufenthalt	zulässige Leistungsflussdichte
I	nur Fachpersonal	13,5 dBW/m²
II	allg. Bevölkerung	6,5 dBW/m²

Tabelle 2: Grenzwerte für Mobilfunk-Basisstationen

Netz	Frequenz in MHz	Leistungsflussdichte in dBW/m²	
		Grenzwert (BImSchV)	Vorsorgewert
D-Netz	890 – 960	4,5	0,045
E-Netz, DECT	1800 – 1900	9	0,09
LTE	1900 – 2200	9,5	0,095

BImSchV = Verordnung zur Durchführung des Bundesimmissionsschutzgesetzes

3. An eine Mobilfunkantenne mit 17 dB Antennengewin[n] sind 3 Sender mit jeweils 17 W Sendeleistung ange[-]schlossen. a) Berechnen Sie die elektrische Feldstär[ke] in 200 m Entfernung. b) Überprüfen Sie, ob die Vor[-]sorgewerte von **Tabelle 2** eingehalten werden.

4. Die Regulierungsbehörde errechnete einen Herz[-]schrittmacher-Schutzabstand von 3 m bei Sendeanla[-]gen mit 700 W Sendeleistung bei 1240 MHz. Wie hoc[h] ist hierbei die gefährdende Leistungsflussdichte un[d] die elektrische Feldstärke?

9.8.7 Mechanische Sicherheit der Antennenstandrohre und Ausrichtung der Satellitenantennen

ie Antenne ruft infolge der *Windlast* auf das tandrohr ein Einspannmoment (Kraftmoment) ervor **(Bild 1).** Wenn der Standort einer Antenne nehr als 20 m über der Geländeoberfläche ist, so ind die angegebenen Windlasten der Antennen nit dem Faktor 1,37 zu multiplizieren.

eim Ausrichten einer Satellitenantenne sind die atellitenposition und der geografische Standort er Antenne wichtig **(Bild 2).**

s sind der Azimutwinkel und der Elevationswinel einzustellen **(Bild 3).**

$$M = M_{A1} + M_{A2} + \ldots$$

$$M = F_{A1} \cdot l_1 + F_{A2} \cdot l_2 + \ldots$$

M	Gesamteinspannmoment aller Antennen
$M_{A1}, M_{A2}, \ldots$	Einspannmomente der Antennen
$F_{A1}, F_{A2}, \ldots$	Windlasten der Antennen
$l_1, l_2 \ldots$	Abstände der Antennen zur obersten Einspannstelle

ufgaben zu 19.8.7

. Welches Mindestnutzmoment muss das Antennenstandrohr in **Bild 1** besitzen?

. Das Antennenstandrohr in **Bild 1** befindet sich 24 m über der Geländeoberfläche und hat ein Nutzmoment von 1040 Nm. Überprüfen Sie, ob das Standrohr überlastet wird.

. Ermitteln Sie mit **Bild 2** den Azimutwinkel und den Elevationswinkel für eine Astra-Satellitenantenne im Bereich Magdeburg (geografische Länge 11,3° und geografische Breite 51,5°).

. Wie groß ist nach **Bild 2** der Azimutwinkel und der Elevationswinkel für eine Astra-Satellitenantenne im Bereich Bonn (geografische Länge 7,5°, geografische Breite 51,0°)?

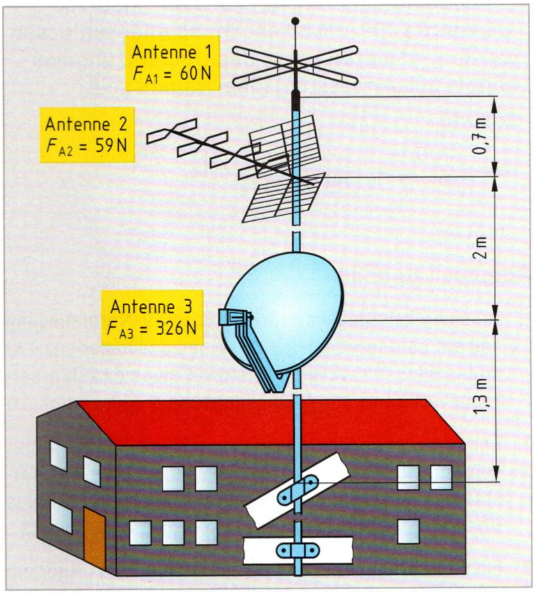


Bild 1: Antennenstandrohr mit Antennen

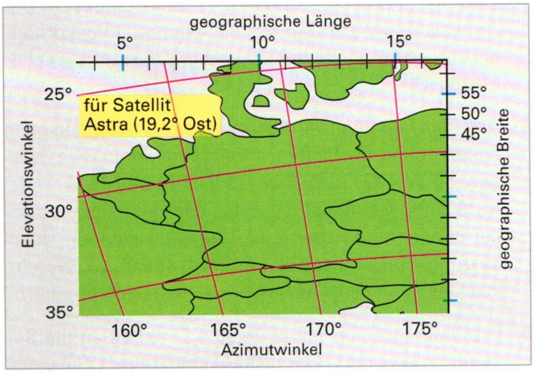
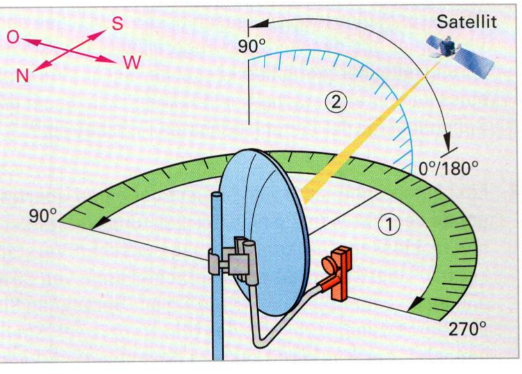


Bild 2: Bestimmung des Azimutwinkels und des Elevationswinkels



ild 3: Winkeleinstellung an der Parabolantenne

19.8.8 100-V-Normausgang

Leistungsverstärker mit 100-V-Normausgang haben bei der Abgabe ihrer Nennleistung eine Ausgangswechselspannung von 100 V. Diese Verstärker haben einen sehr kleinen Wechselstrom-Ausgangswiderstand. An diese Leistungsverstärker werden die Lautsprecher zur Spannungsanpassung mit Übertragern angeschlossen **(Bild 1)**. Bei den Berechnungen wird hierbei die Scheinleistung S_L mit der Wirkleistung P_L gleichgesetzt ($\cos \varphi \approx 1$).

Beispiel 1: Übersetzungsverhältnis berechnen

Ein Lautsprecher mit 15 W soll an einen Verstärker mit 100-V-Normausgang angeschlossen werden. Wie groß muss das Übersetzungsverhältnis des Anpassungsübertragers sein?

Lösung:

$$ü = \frac{100}{\sqrt{P_L \cdot Z}} = \frac{100}{\sqrt{15\ \mathrm{W} \cdot 4\ \Omega}} = \mathbf{13}$$

Die Gesamtleistung aller Lautsprecher darf nicht größer sein als die Nennleistung des Verstärkers.

Beim 100-V-Normausgang:

$$ü = \frac{100\ \mathrm{V}}{\sqrt{P_L \cdot Z}} \qquad ü = \frac{100\ \mathrm{V}}{U_L}$$

$ü$ Übersetzungsverhältnis des Anpassungsübertragers ($ü = N_1/N_2$)
P_L Leistung am Lautsprecher
Z Lautsprecherimpedanz (näherungsweise Wirkwiderstand)
U_L Wechselspannung am Lautsprecher

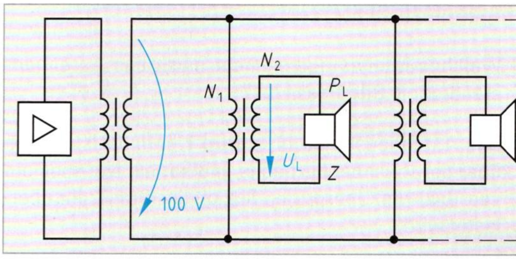


Bild 1: Leistungsverstärker mit 100-V-Normausgan

Aufgaben zu 19.8.8

1. An einen Leistungsverstärker mit 100-V-Normausgang soll ein Lautsprecher mit 25 W und der Impedanz 4 Ω angeschlossen werden. Wie groß muss das Übersetzungsverhältnis des Anpassungsübertragers sein?

2. Ein Lautsprecher mit dem Widerstand 12 Ω und der Leistung 15 W soll an den 100-V-Ausgang eines Verstärkers angeschlossen werden. Berechnen Sie das Übersetzungsverhältnis des Anpassungsübertragers.

3. Ein Lautsprecher mit 8 Ω ist über einen Übertrager mit dem Übersetzungsverhältnis $ü = 5$ an den 100-V-Normausgang eines Leistungsverstärkers angeschlossen. Welche Leistung darf der Lautsprecher haben?

4. An einen Verstärker mit 100-V-Ausgang ist ein Lautsprecher mit der Leistung 25 W angeschlossen. Der Anpassungsübertrager hat ein Übersetzungsverhältnis von 7,07. Welche Impedanz muss der Lautsprecher besitzen?

5. An einen Leistungsverstärker mit 100-V-Normausgang sollen folgende Lautsprecher angeschlossen werden: 50 W 4 Ω, 10 W 8 Ω, 25 W 4 Ω und 15 W 12 Ω. a) Welche Nennleistung muss der Leistungsverstärker mindestens haben? b) Wie groß sind die Übersetzungsverhältnisse aller Übertrager? c) Welche Wechselspannung liegt jeweils an den Lautsprechern?

6. Drei Lautsprecher mit je 25 W 4 Ω sollen an die Sekundärseite eines Anpassungsübertragers für einen Leistungsverstärker mit 100-V-Normausgang angeschlossen werden. a) Welche Nennleistung benötigt der Verstärker? b) Wie müssen die drei Lautspreche zusammengeschaltet werden, wenn $ü = 3{,}33$ beträgt c) Wie groß ist die Wechselspannung an jedem Lau sprecher?

7. An einen Leistungsverstärker mit 100-V-Normaus gang werden vier Lautsprecher mit je 20 W 4 Ω übe Anpassungsübertrager angeschlossen. Zwischen de Verstärker und den vier Übertragern liegt eine Kupfe leitung mit einer einfachen Länge von 100 m. Wie gro muss der Leiterquerschnitt mindestens sein, damit de Spannungsfall der Leitung höchstens 1 % beträgt?

8. Ein Lautsprecher mit 75 W 8 Ω ist über einen Übertra ger an den 100-V-Ausgang eines Leistungsverstärker angeschlossen. Die Kupferleitung zwischen Verstär ker und Übertrager hat eine einfache Länge von 50 r und einen Leiterquerschnitt von 1 mm². Berechnen Si a) Übersetzungsverhältnis des Übertragers, b) Span nungsfall der Kupferleitung, c) Spannung am Laut sprecher.

9.9 Analoge Signalübertragung

9.9.1 Modulation, Mischung und Demodulation

9.9.1.1 Analoge Modulation

Modulation (von lat. modulatio = Melodie, Rhythmus). Ein Informationsträger (Nutzsignal) verändert ein Trägersignal. Dadurch wird eine Übertragung des Nutzsignals über das Trägersignal möglich.

$$m = \frac{\hat{u}_s}{\hat{u}_T} \qquad m = \frac{\hat{u}_{max} - \hat{u}_{min}}{\hat{u}_{max} + \hat{u}_{min}}$$

Beim Zweiseitenbandverfahren:

$$P = P_T \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) \qquad P = P_T + 2 \cdot P_{SB}$$

Beim Zweiseitenbandverfahren:

$$B = 2 \cdot f_{smax}$$

Beim Einseitenbandverfahren mit unterdrücktem Träger:

$$B = f_{smax} - f_{smin}$$

m	Modulationsgrad
$\hat{u}_s$	Signalspannung (Amplitude)
$\hat{u}_T$	Trägerspannung (Amplitude)
$\hat{u}_{max}$	größte Schwingungsbreite
$\hat{u}_{min}$	kleinste Schwingungsbreite
P	Gesamtleistung
P_T	Leistung der Trägerschwingung
PSB	Leistung eines Seitenbandes
B	Bandbreite
f_{smax}	größte Signalfrequenz
f_{smin}	kleinste Signalfrequenz

Man unterscheidet die Amplitudenmodulation und die Winkelmodulation. Zur Winkelmodulation gehören die Frequenzmodulation und die Phasenmodulation.

Amplitudenmodulation

Bei der Amplitudenmodulation wird die Amplitude der hochfrequenten Trägerschwingung (Trägersignal) durch die niederfrequente Signalschwingung (Nutzsignal) geändert **(Bild 1)**.

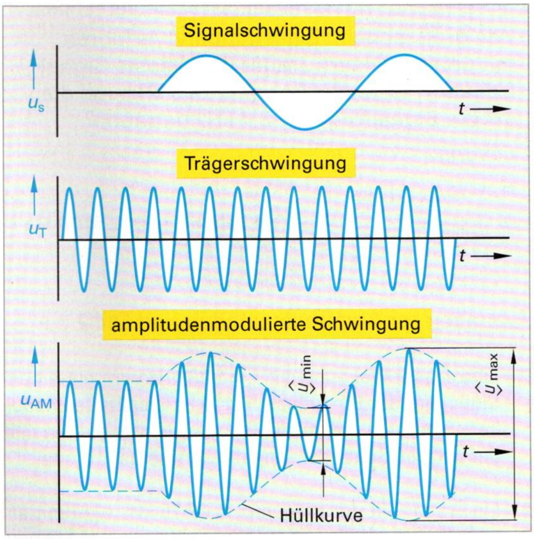


Bild 1: Spannungen bei der Amplitudenmodulation

Beispiel 1: Trägerspannung berechnen

Bei einer amplitudenmodulierten Schwingung mit dem Modulationsgrad $m = 0{,}3$ beträgt die Amplitude der Signalspannung 0,96 V. Wie groß ist dann die Amplitude der Trägerspannung?

Lösung:

$$m = \frac{\hat{u}_s}{\hat{u}_T} \Rightarrow \hat{u}_T = \frac{\hat{u}_s}{m} = \frac{0{,}96\ \text{V}}{0{,}3} = \mathbf{3{,}2\ V}$$

Aufgaben zur Amplitudenmodulation Teil 1

1. Eine Trägerspannung $\hat{u}_T = 24$ V wird mit der Signalspannung $\hat{u}_s = 5$ V amplitudenmoduliert. Berechnen Sie den Modulationsgrad.
2. Bei einer amplitudenmodulierten Schwingung betragen $\hat{u}_T = 11$ V und $m = 0{,}65$. Ermitteln Sie die Amplitude der Signalspannung.
3. Bei einer amplitudenmodulierten Schwingung werden mit einem Oszilloskop $\hat{u}_{max} = 8$ V und $\hat{u}_{min} = 2$ V gemessen. Ermitteln Sie den Modulationsgrad.
4. Bei einer amplitudenmodulierten Schwingung betragen $\hat{u}_{max} = 64$ V und $\hat{u}_{min} = 20$ V. Berechnen Sie a) $\hat{u}_s$, b) $\hat{u}_T$, c) m.
5. Eine amplitudenmodulierte Spannung hat einen Modulationsgrad von 30 % und die größte Schwingungsbreite von 6,3 V. Berechnen Sie die kleinste Schwingungsbreite.
6. Eine amplitudenmodulierte Schwingung hat $m = 40$ % und $\hat{u}_{min} = 1{,}2$ V. Ermitteln Sie die größte Schwingungsbreite.

Besteht ein Signal, z. B. ein Klang, aus Sinusschwingungen, so entstehen bei der Amplitudenmodulation neben der Trägerschwingung zu jeder Sinusschwingung zwei Seitenschwingungen **(Bild 1)**. Außerdem entstehen andere Frequenzen, die aber ausgesiebt werden.

Die Frequenz einer unteren Seitenschwingung ist gleich der *Differenz* aus Trägerfrequenz und Frequenz der zugehörigen Sinusschwingung, die Frequenz einer oberen Seitenschwingung ist gleich der *Summe* beider Frequenzen.

Zu beiden Seiten des Trägers entstehen mehrere Seitenschwingungen, die das *Seitenband* bilden **(Bild 1)**.

Die Amplituden der Spannungen der Seitenbänder betragen das $\frac{m}{2}$-fache der Amplitude der Trägerschwingung.

Beim Einseitenbandverfahren mit unterdrücktem Träger ist es möglich, einem Seitenband die gesamte Leistung zu geben. Dabei benötigt man nur etwa die halbe Bandbreite.

Beispiel 1: Kleinste Signalfreqenz berechnen

Wie groß ist beim Einseitenbandverfahren mit unterdrücktem Träger die kleinste Signalfrequenz, wenn die Bandbreite 3 kHz und die größte Signalfrequenz 3,4 kHz betragen?

Lösung:

$B = f_{\text{smax}} - f_{\text{smin}}$

$\Rightarrow f_{\text{smin}} = f_{\text{smax}} - B = 3{,}4\ \text{kHz} - 3\ \text{kHz} = \mathbf{400\ Hz}$

Aufgaben zur Amplitudenmodulation Teil 2

7. Eine Trägerspannung mit $f_T = 800$ kHz wird mit einem Signal mit der Frequenz $f_s = 11$ kHz amplitudenmoduliert. Ermitteln Sie a) die Frequenzen der oberen und der unteren Seitenschwingung, b) die Bandbreite.

8. Ein Träger mit der Frequenz $f_T = 575$ kHz wird mit einem Signal amplitudenmoduliert. Das Signal besteht aus drei Sinusschwingungen mit den Frequenzen $f_{s1} = 80$ Hz, $f_{s2} = 720$ Hz und $f_{s3} = 6{,}3$ kHz. Ermitteln Sie a) die Seitenfrequenzen, b) die Bandbreite.

9. Die Trägerspannung mit der Amplitude von 16 V ist mit einer Sinusschwingung amplitudenmoduliert. Der Modulationsgrad beträgt 0,4. Ermitteln Sie die Amplitude der Seitenschwingungen.

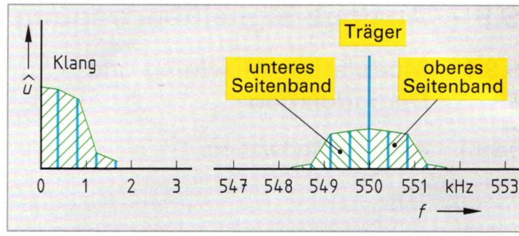


Bild 1: Frequenzspektrum eines Klanges und der zugehörigen amplitudenmodulierten Schwingung

10. Ein Träger ist mit einem Signal amplitudenmodulier Das Signal besteht aus mehreren Sinusschwingunge die alle die gleiche Amplitude von 8 V haben. Der Mo dulationsgrad beträgt 60 %. Berechnen Sie die Ampl tude des Trägers und die Amplitude der Seitenbänder

11. Ein amplitudenmodulierter 100-kW-Sender hat eine Modulationsgrad von 70 %. Berechnen Sie die Leistun a) des Trägers, b) der beiden Seitenbänder, c) eine Seitenbandes.

12. Bei einem amplitudenmodulierten Sender darf der Mo dulationsgrad maximal 80 % betragen. Wie viel Prozer der Gesamtleistung entfallen a) mindestens auf di Trägerschwingung, b) höchstens auf die beiden Se tenbänder?

13. Berechnen Sie die Bandbreite für das Einseitenband verfahren, wenn die niedrigste Signalfrequenz 300 H und die höchste Signalfrequenz 15 kHz betragen.

14. Ermitteln Sie die erforderliche Bandbreite für Ein seitenbandbetrieb, wenn das Signal aus zwei Sinus schwingungen mit den Frequenzen $f_{s1} = 1$ kHz und f_{s2} 8,4 kHz besteht.

15. Berechnen Sie die Bandbreite für das Zweiseitenband verfahren mit unterdrücktem Träger beim Hilfssigna der Rundfunk-Stereofonie, wenn die Trägerfrequen 38 kHz, die niedrigste Signalfrequenz 30 Hz und di höchste Signalfrequenz 15 kHz betragen.

16. Wie groß ist die höchste Farbdifferenzsignalfrequen beim Zweiseitenbandverfahren mit unterdrückter Träger zur Bildung der amplitudenmodulierten Farb differenzsignalspannung, wenn die Trägerfrequen 4,43 MHz, die niedrigste Signalfrequenz 0 Hz und di Bandbreite 2,6 MHz betragen?

requenzmodulation

ei der Frequenzmodulation (FM) wird die Fre-
uenz der hochfrequenten Trägerschwingung
urch die niederfrequente Signalschwingung
eändert **(Bild 1)**. Der Frequenzhub ist verhältnis-
leich der Lautstärke des Signals.

esteht ein Signal aus Sinusschwingungen, so
ntstehen bei der Frequenzmodulation neben
er Trägerschwingung zu jeder Sinusschwingung
iele obere und untere Seitenschwingungen. Die
on der Frequenz der Trägerschwingung weit
ntfernten Seitenschwingungen haben aber nur
ine kleine Amplitude und müssen bei der Über-
ragung nicht berücksichtigt werden.

er Frequenzabstand der Seitenschwingungen
st so groß wie die jeweils zugehörige Signalfre-
uenz.

Die Anzahl der zu berücksichtigenden Seitenschwingungen ist umso größer, je größer der Modulationsindex ist.

$$B = 2 \cdot z \cdot f_s \approx 2\,(\delta + 1) \cdot f_s$$

$$\delta = \frac{\widehat{\Delta f}}{f_s} \qquad B \approx 2\,(\widehat{\Delta f} + f_s)$$

δ Modulationsindex (δ griech. Kleinbuchstabe Delta)
$\widehat{\Delta f}$ Frequenzhub
f_s Signalfrequenz
B Bandbreite
z Anzahl der zu berücksichtigenden Seitenschwingungen

Beispiel 1: Frequenzhub berechnen

Wie groß ist der Frequenzhub, wenn bei $\delta = 3$ die Signalfrequenz 12 kHz beträgt?

Lösung:

$$\delta = \frac{\widehat{\Delta f}}{f_s} \Rightarrow \widehat{\Delta f} = \delta \cdot f_s = 3 \cdot 12\ \text{kHz} = 36\ \text{kHz}$$

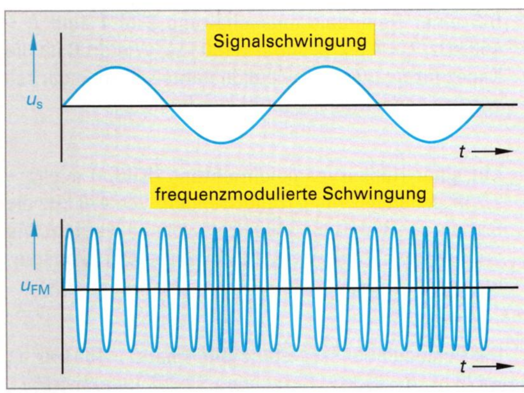


Bild 1: Frequenzmodulierte Schwingung

ufgaben zur Frequenzmodulation

1. Bei einem Videorekorder betragen der größte Frequenzhub $\widehat{\Delta f} = 50$ kHz und der Modulationsindex $\delta = 5$. Berechnen Sie a) höchste Signalfrequenz, b) Bandbreite.

2. Bei einem UKW-Sprechfunksendegerät betragen der größte Frequenzhub 1,8 kHz und die höchste Signalfrequenz 10 kHz. Berechnen Sie a) Modulationsindex, b) Bandbreite.

3. Bei einer frequenzmodulierten Nachrichtenübertragung mit der höchsten Signalfrequenz von 5 kHz sollen die Dynamik 500 : 1 und der kleinste Frequenzhub 30 Hz betragen. Berechnen Sie a) größten Frequenzhub, b) Modulationsindex für f_{smax} und $\widehat{\Delta f}_{max}$, c) maximale Bandbreite. (Hinweis: Dynamik ist das Verhältnis von größter zu kleinster Lautstärke.)

4. Ein Sender mit FM arbeitet mit einem Frequenzhub von höchstens 75 kHz. Berechnen Sie Modulationsindex und erforderliche Bandbreite für a) größte Signalfrequenz $f_s = 15$ kHz, b) größte Signalfrequenz $f_s = 7{,}5$ kHz. c) Welche Folgerung kann daraus gezogen werden?

5. Bei einer frequenzmodulierten Nachrichtenübertragung steht eine Bandbreite von 10,4 kHz zur Verfügung. Berechnen Sie den größten Frequenzhub und Modulationsindex für die größte Signalfrequenz von 3,4 kHz.

6. UKW-Rundfunksender arbeiten mit einem maximalen Frequenzhub von 75 kHz. Berechnen Sie a) größte nutzbare Bandbreite, b) größte Signalfrequenz, c) Modulationsindex, wenn im UKW-Bereich (87,5 MHz bis 104 MHz) nebeneinander 55 Sender untergebracht werden sollen. Der für jeden Sender zur Verfügung stehende Frequenzbereich wird um 120 kHz (Sicherheitszone) eingeengt.

19.9.1.2 Demodulation

Bei der Demodulation gewinnt man das Signal aus der modulierten Schwingung. Die einfachste Demodulationsschaltung für amplitudenmodulierte Schwingungen ist die *Hüllkurvengleichrichtung* **(Bild 1).** Der Schwingkreis wird durch die Demodulationsschaltung so stark bedämpft wie durch einen parallel liegenden Widerstand R_d.

Auch der Produktdemodulator (Multiplizierer, **Bild 2**) demoduliert amplitudenmodulierte Schwingungen. Am Ausgang des Multiplizierers entstehen die Summenfrequenzen und die Differenzfrequenzen aller Eingangsspannungsanteile.

$$\tau = R \cdot C_L \qquad T_s = \frac{1}{f_s} \qquad T_T = \frac{1}{f_T}$$

$$T_s > \tau > T_T \qquad R_d = \frac{R}{2}$$

τ Zeitkonstante
R Entladewiderstand
C_L Kapazität des Ladekondensators
T_s Periodendauer der Signalschwingung
T_T Periodendauer der Trägerschwingung
f_s Signalfrequenz
f_T Trägerfrequenz
R_d Dämpfungswiderstand

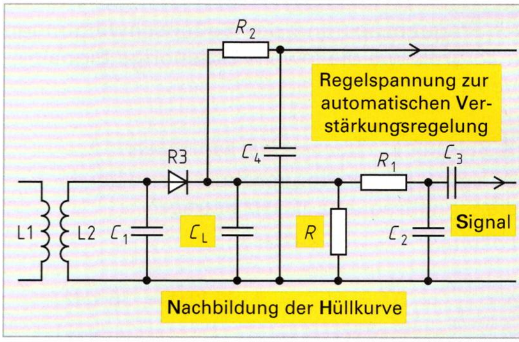


Bild 1: Schaltung zur Hüllkurvengleichrichtung

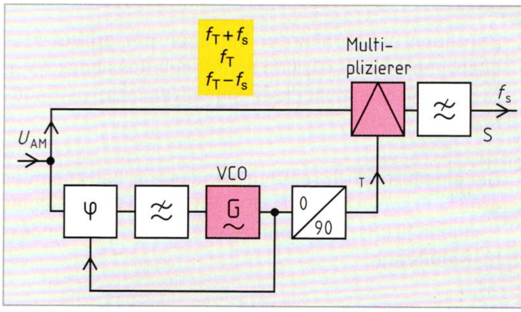


Bild 2: AM-Demodulation mit Produktdemodulator und PLL-Schaltung

Aufgaben zu 19.9.1.2

1. Bei einer Demodulationsschaltung **Bild 1** sind f_T = 460 kHz, f_s = 4,5 kHz und R = 180 kΩ. Wie groß ist die Kapazität C_L, wenn die Zeitkonstante so groß sein soll wie das geometrische Mittel aus T_T und T_s?

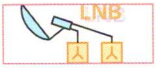
2. Mit einer Hüllkurvengleichrichtung **(Bild 1)** mit C_L = 2,2 nF sollen bei einer Trägerfrequenz von 470 kHz die Signale von 300 Hz bis 3400 Hz gewonnen werden. Wie groß ist der Entladewiderstand, wenn die Zeitkonstante $\tau = \sqrt{T_T \cdot T_s}$ ist?

3. Die Demodulationsschaltung **Bild 1** hat f_T = 460 kHz, C_1 = 470 pF, R = 82 kΩ. Berechnen Sie a) Induktivität L_2, b) Dämpfungswiderstand R_d, c) Bandbreite des bedämpften Schwingkreises, wenn die Bandbreite ohne Bedämpfung 3 kHz beträgt.

4. Der Schwingkreis aus Schaltung **Bild 1** hat C_1 = 390 pF und ist bei 460 kHz in Resonanz. Der Verlustwiderstand der Spule L_2 beträgt 4 Ω. Die Bandbreite des Schwingkreises in dieser Schaltung hat 12 kHz. Ermitteln Sie a) L_2, b) R_d, c) R, d) B des Schwingkreises ohne nachfolgende Demodulationsschaltung.

5. Eine mit einer Sinusschwingung amplitudenmodulierte Schwingung hat als Trägerfrequenz 460 kHz. Berechnen Sie a) die Signalfrequenz, wenn die Bandbreite 4 kHz beträgt, b) die Frequenzbestandteile der amplitudenmodulierten Schwingung, c) die Ausgangsfrequenzen des Multiplizierers **(Bild 2).**

6. Eine amplitudenmodulierte Schwingung mit den Frequenzbestandteilen 467 kHz, 470 kHz und 473 kHz wird mit einem Produktdemodulator **Bild 2** demoduliert. a) Welche Frequenzen entstehen dabei am Ausgang des Multiplizierers? b) Welche Frequenzen soll das Ausgangsfilter davon nur durchlassen?



19.9.2 Mischung und Frequenzumsetzung

Die Mischung ist eine Amplitudenmodulation. Beim Überlagerungsempfänger entsteht die Zwischenfrequenz durch Mischung der Empfangsfrequenz mit der Oszillatorfrequenz **(Bild 1).**

Wegen der Spiegelfrequenz können beim Überlagerungsempfänger bestimmte Sender innerhalb des Empfangsbereiches zweimal empfangen werden, einmal an der richtigen Stelle und einmal als Spiegelfrequenzsender (Bild 1).

Frequenzumsetzer werden beim Satellitenfernsehen verwendet **(Bild 2).**

$$f_z = f_o - f_e \qquad f_{sp} = f_e + 2f_z$$

f_z Zwischenfrequenz
f_o Oszillatorfrequenz
f_e Empfangsfrequenz
f_{sp} Spiegelfrequenz

Beispiel 1: Empfangsfrequenz berechnen

Der Oszillator eines Überlagerungsempfängers schwingt mit 6,56 MHz. Die Zwischenfrequenz beträgt 460 kHz. Auf welche Frequenz ist der Empfänger abgestimmt?

Lösung:

$f_z = f_o - f_e \Rightarrow f_e = f_o - f_z = 6{,}56\text{ MHz} - 460\text{ kHz}$
$= \mathbf{6{,}1\text{ MHz}}$

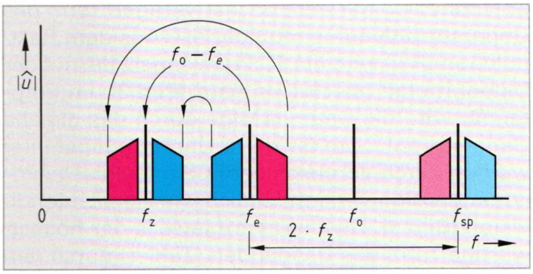


Bild 1: Mischung im Überlagerungsempfänger

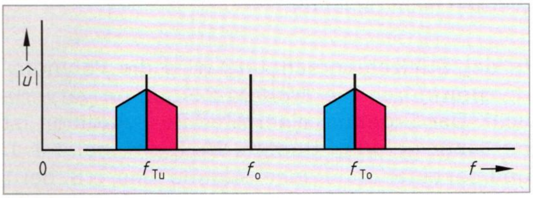


Bild 2: Beim Frequenzumsetzer

Aufgaben zu 19.9.2

1. Wenn ein Empfänger im Eingang auf eine Empfangsfrequenz von 815 kHz abgestimmt ist, dann schwingt der Oszillator mit 1275 kHz. Mit welcher Zwischenfrequenz arbeitet dieser Empfänger?

2. Der Eingangskreis eines Rundfunkgerätes ist auf 575 kHz abgestimmt. Wie groß muss dabei die Oszillatorfrequenz sein, wenn die Zwischenfrequenz 460 kHz beträgt?

3. Der MW-Bereich, in dem mit der Zwischenfrequenz von 460 kHz gearbeitet wird, geht von 525 kHz bis 1600 kHz. Berechnen Sie a) kleinste Oszillatorfrequenz, b) größte Oszillatorfrequenz, c) Frequenzverhältnis im Eingangskreis, d) Kapazitätsverhältnis im Eingangskreis, e) Frequenzverhältnis im Oszillatorkreis, f) Kapazitätsverhältnis im Oszillatorkreis.

4. Bei einem UKW-Empfänger mit einem Empfangsbereich von 87,5 MHz bis 104 MHz beträgt das Frequenzverhältnis im Oszillatorkreis 1,168 : 1. Berechnen Sie a) Frequenzverhältnis im Eingangskreis, b) Zwischenfrequenz, c) größte Oszillatorfrequenz, d) kleinste Oszillatorfrequenz.

5. Wie groß ist die Oszillatorfrequenz im Frequenzumsetzer des Empfangssystems LNB einer Satellitenantenne, wenn das Frequenzband der Satelliten Astra 1A – 1D von 10,7 GHz bis 11,7 GHz reicht und die niedrigste Sat-ZF bei 950 MHz liegen soll?

6. Wie groß ist die höchste Sat-ZF, wenn die Oszillatorfrequenz im Frequenzumsetzer des LNB 10,6 GHz beträgt und das Frequenzband der Satelliten Astra 1E – 1G von 11,7 GHz bis 12,75 GHz reicht?

7. Ein Empfänger, der auf einen KW-Sender mit 6,1 MHz abgestimmt ist, empfängt dabei gleichzeitig einen Spiegelfrequenzsender. Welche Frequenz hat dieser Sender, wenn die Zwischenfrequenz 460 kHz beträgt?

8. Ein kommerzieller Sender strahlt mit 115 MHz. Auf welche Empfangsfrequenz muss ein UKW-Empfänger abgestimmt werden, damit dieser Sender als Spiegelfrequenzsender empfangen werden kann? Die Zwischenfrequenz beträgt 10,7 MHz.

19.10 Fehlererkennung

Die Berechnung der Blockprüfzahl FCS (von Frame Check Sequence = Rahmenprüffolge) beruht auf der *Polynomdivision*. Die zu übertragende Datenbitfolge wird entsprechend **Bild 1** als Polynom dargestellt und im Sender durch ein z. B. nach **Bild 2** festgelegtes Generatorpolynom dividiert. Vor der Division wird das Datenpolynom $D(x)$ mit dem höchstwertigen Term des Generatorpolynoms multipliziert. Aus dem Restpolynom $R(x)$ wird die FCS gewonnen, die mit der Datenbitfolge übertragen wird **(Bild 3)**. Im Empfänger wird die Datenbitfolge durch das gleiche Generatorpolynom dividiert. Übertragungsfehler werden durch Vergleich der FCS erkannt. Die Polynomdivision verläuft ähnlich wie eine Zahlendivision **(Bild 3)**. Dividiert wird jeweils der höchstwertige Term des Dividenden (Zähler) durch den höchstwertigen Term des Generatorpolynoms. Bei der Subtraktion auftretende Minuszeichen werden nicht beachtet.

In der Dualzahlenrechnung wird die Polynomdivision durch die *Modulo-2-Addition* verwirklicht. Das Ergebnis einer Modulo-2-Addition ist bei einer geraden Summe Null, z. B. bei 1 + 1, und bei einer ungeraden Summe Eins, z. B. bei 1 + 0 **(Bild 4)**. Vor der Addition wird die Datenbitfolge um Nullbits erweitert, deren Zahl gleich der FCS ist. Die Länge der FCS ist gleich der größten Hochzahl im Generatorpolynom.

Beispiel 1: Blockprüfzahl berechnen

Berechnen Sie mithilfe der Polynomdivision die FCS-Zahl für die Datenbitfolge 1100011 mit dem Generatorpolynom $G(x) = x^4 + x^2 + 1$.

Lösung:

$D(x) = x^6 + x^5 + x + 1 \qquad G(x) = x^4 + x^2 + 1$

$D(x) \cdot x_4 = (x_6 + x_5 + x + 1) \cdot x^4 = (x^{10} + x^9 + x^5 + x^4)$

$(x^{10} + x^9 + x^5 + x^4) : (x^4 + x^2 + 1) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x$

$\underline{x^{10} + x^8 + x^6}$

$x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4$

$\underline{x^9 + x^7 + x^5}$

$x^8 + x^7 + x^6 + x^4$

$\underline{x^8 + x^6 + x^4}$

x^7

$\underline{x^7 + x^5 + x^3}$

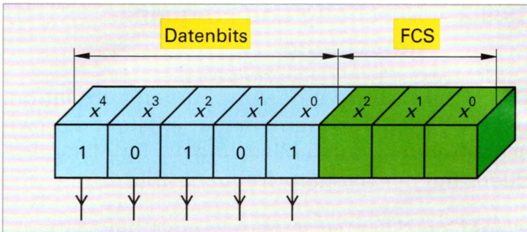
$x^5 + x^3$

$\underline{x^5 + x^3 + x}$

x

$R(x) = x$

$\Rightarrow$ Die Blockprüfzahl FCS beträgt **0010**



$D(x) = 1 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0 = x^4 + x^2 + 1$

Bild 1: Polynom-Darstellung einer Bitfolge

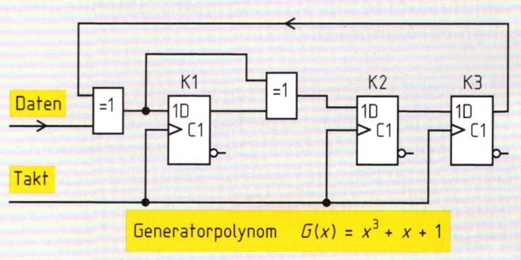


Bild 2: Register eines Generatorpolynoms zur Erzeugung einer Blockprüfzahl

$D(x) = x^4 + x^2 + 1$

$G(x) = x^3 + x + 1 \qquad \Rightarrow \qquad D(x) \cdot x^3 = x^7 + x^5 + x^3$

$(x^7 + x^5 + x^3) : (x^3 + x + 1) \qquad \boxed{x^7 : x^3} = x^4$

$\ominus\, \underline{(x^7 + x^5 + x^4)} \qquad \boxed{(x^3 + x + 1) \cdot x^4}$

$x^4 + x^3 \qquad \boxed{x^4 : x^3} = x$

$\ominus\, \underline{(x^4 + x^2 + x)} \qquad \boxed{(x^3 + x + 1) \cdot x}$

$x^3 + x^2 + x \qquad \boxed{x^3 : x^3} = 1$

$\ominus\, \underline{(x^3 + x + 1)} \qquad \boxed{(x^3 + x + 1) \cdot 1}$

$x^2 + 1$

$R(x) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 \quad \Rightarrow \quad$ FCS $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}$

Bild 3: Ablauf der Polynomdivision

	10101000	Datenbitfolge:	10101
⊕	1011	Generatorpolynom:	$G(x) = x^3 + x + 1$
	00011000	Generatorbits:	1011
⊕	1011	Länge der FCS:	3 bit
	01110	anzuhängende Nullbits:	3
⊕	1011		
Rest	0101	erweiterte Datenbitfolge:	10101000
⇒ FCS	$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}$		

Bild 4: Ablauf der Modulo-2-Addition

Aufgaben zu 19.10

1. Berechnen Sie die Blockprüfzahl FCS für die Datenbitfolge 1100111 0011 und für das Generatorpolynom $G(x) = x^4 + x^3 + x^1 + 1$ a) mithilfe der Polynomdivision, b) mithilfe der Modulo-2-Addition.

2. Berechnen Sie die Prüfzahl FCS für das Datenpolynom $D(x) = x^{11} + x^9 + x^8 + x^5 + x^2 + x$ und das Generatorpolynom $G(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ a) mithilfe der Polynomdivision, b) mithilfe der Modulo-2-Addition.

3. Die Datenbitfolge 11 0100 1110 durchläuft im Sender die Registerschaltung für das Generatorpolynom $G(x) = x^4 + x^2 + 1$ **(Bild 1).** Die im Register zurückbleibende Zahl wird als Prüfzahl FCS an die Datenbitfolge angehängt und zum Empfänger übertragen, wo die Datenbitfolge mit FCS-Zahl die gleiche Registerschaltung durchläuft. Berechnen Sie mithilfe der Modulo-2-Addition a) die Prüfzahl FCS, b) den Registerinhalt im Empfänger nach einer fehlerlosen Übertragung. Hinweis: Um den Inhalt des Empfangsregisters zu berechnen, wird die Datenbitfolge mit der FCS-Zahl erweitert, die an die Stelle der angehängten Nullbits tritt.

4. Gegeben ist $D(x) = x^9 + x^8 + x^6 + x^3 + x^2 + x$ und das Generatorpolynom $G(x) = x^4 + x^2 + 1$. Berechnen Sie a) das Restpolynom $R_s(x)$ im Sender, b) das Restpolynom $R_e(x)$ im Empfänger. Hinweis: Die um die FCS erweiterte Datenbitfolge wird durch das Polynom $E(x) = D(x) \cdot x^4 + R(x)$ dargestellt. Durch Division von $E(x)$ mit $G(x)$ erhält man $R_e(x)$.

5. Der Datenblock **Bild 2** durchläuft im Sender die Registerschaltung **Bild 3.** Die Flags werden in die Fehlerprüfung nicht mit einbezogen. a) Berechnen Sie die FCS mithilfe der Modulo-2-Addition. b) Die Datenbitfolge einschließlich der FCS durchläuft im Empfänger ebenfalls das Register **Bild 3,** wobei das höchstwertige Bit zuerst gesendet wird. Berechnen Sie mithilfe der Modulo-2-Addition den Inhalt des Empfangsregisters bei einer fehlerfreien Übertragung. c) Auf der Übertragungsstrecke werden das höchstwertige Bit im Adressfeld (Nullbit) und das niedrigstwertige Bit im Informationsfeld verfälscht. Berechnen Sie den Inhalt des Empfangsregisters nach dem Empfang des fehlerhaften Blockes.

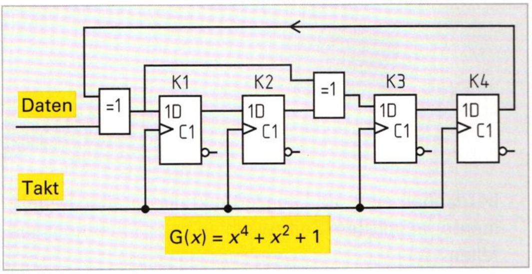


Bild 1: Register eines Generatorpolynoms zur Erzeugung einer Blockprüfzahl

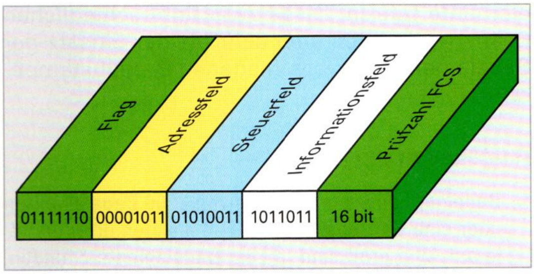


Bild 2: Datenblock mit Blockprüfzahl FCS

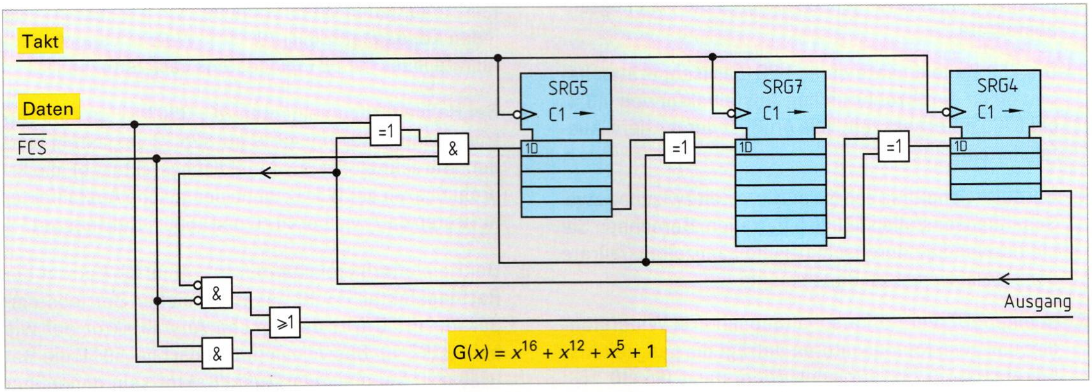


Bild 3: Registerschaltung für ein Generatorpolynom

19.11 Zuverlässigkeit von Bauelementen und Schaltungen

Unter der Zuverlässigkeit von Bauelementen versteht man die Fähigkeit der Bauelemente, während einer bestimmten Zeitdauer die festgelegten Anforderungen zu erfüllen.

Die *Ausfallrate* wird in h^{-1} oder in fit (von failure in time = Ausfall je Zeit) angegeben, dabei ist 1 fit = $10^{-9} \cdot h^{-1}$. Das Produkt der Anzahl n der erprobten Bauelemente mit der Betriebszeit t_b bezeichnet man als *Bauelemente-Stunden*.

Der *mittlere Ausfallabstand MTBF* (von Mean Time Between Failures = mittlere Ausfallzeit) ist die mittlere Zeit zwischen zwei Schaltungsausfällen bzw. Geräteausfällen. Bei einer Schaltung oder einem Gerät, das bereits beim Ausfall irgendeines Bauelementes funktionsunfähig ist, errechnet man den mittleren Ausfallabstand in der Nutzungsphase als den Kehrwert der Summe der Langzeitausfallraten der verwendeten Bauelemente.

Der *Raffungsfaktor F* ist der Quotient der Einwirkungsdauern zweier unterschiedlicher Beanspruchungen, die zum gleichen Ausfallfaktor der Bauelemente führen. Diese zwei unterschiedlichen Beanspruchungen sind sehr oft der Einsatz der Bauelemente bei verschiedenen Betriebstemperaturen.

1 fit bedeutet 1 Ausfall in 10^9 Bauelemente-Stunden

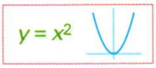
$$a = \frac{n_A}{n} \qquad \lambda = \frac{a}{t_b} \qquad \lambda = \frac{n_A}{n \cdot t_b}$$

$$MTBF = \frac{1}{\Sigma\lambda} \qquad F = e^{b\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)}$$

a	Ausfallfaktor
n_A	Anzahl der ausgefallenen Bauelemente
n	Anzahl der erprobten Bauelemente
λ	Langzeitausfallrate
t_b	Betriebszeit
$MTBF$	mittlerer Ausfallabstand
$\Sigma\lambda$	Langzeitausfallrate aller Bauelemente
F	Raffungsfaktor
b	bauelementeabhängiger Koeffizient
T_1	niedrigere absolute Temperatur
T_2	höhere absolute Temperatur (absolute Temperatur in K = Celsiustemperatur in °C + 273 K)

Aufgaben zu 19.11

1. Bei einer Langzeiterprobung von 3200 Bauelementen über eine Betriebszeit von 7500 h treten drei Ausfälle auf. Wie groß sind a) die Bauelemente-Stunden, b) der Ausfallfaktor, c) die Langzeitausfallrate?
2. Innerhalb eines Jahres (Betriebszeit t_b = 8760 h) entsprechen 3 ‰ der Kondensatoren nicht mehr den festgelegten Anforderungen. Berechnen Sie die Langzeitausfallrate.
3. Die 750 Bauelemente eines LED-Fernsehgerätes haben einen durchschnittlichen Ausfallfaktor von 0,3 ‰ bei 8760 h Betriebszeit. Wie groß ist der mittlere Ausfallabstand?
4. Bei einer Schaltung soll die mittlere Zeit zwischen zwei Schaltungsausfällen 53000 h betragen. Berechnen Sie die notwendige durchschnittliche Langzeitausfallrate der 350 verwendeten Bauelemente.
5. In einer FET-Verstärkerschaltung mit drei Widerständen und zwei Kondensatoren beträgt die Langzeitausfallrate $0{,}4 \cdot 10^{-6}\ h^{-1}$ für jeden Widerstand, $0{,}5 \cdot 10^{-5}\ h^{-1}$ für jeden Kondensator und $0{,}4 \cdot 10^{-5}\ h^{-1}$ für den FET. Zu berechnen sind a) Langzeitausfallrate aller Bauelemente, b) mittlere Zeit zwischen zwei Schaltungsausfällen.
6. In einer Verstärkerschaltung mit einem FET, drei Widerständen und drei Kondensatoren soll der mittlere Ausfallabstand 50 000 h betragen. Die Langzeitausfallrate für jeden Widerstand beträgt $0{,}5 \cdot 10^{-6}\ h^{-1}$, für jeden Kondensator $0{,}3 \cdot 10^{-5}\ h^{-1}$. Welche Langzeitausfallrate muss der FET mindestens besitzen?
7. Bei Halbleiterbauelementen (b = 3500 K) soll die Betriebstemperatur von 40 °C auf 125 °C umgestellt werden. Berechnen Sie a) den Raffungsfaktor, b) die Erprobungszeit bei 125 °C, wenn der gleiche Ausfallfaktor auftreten darf wie bei 40 °C und 1500 h Betriebszeit.
8. Bei Halbleiterbauelementen (b = 4600 K) beträgt der Raffungsfaktor F = 10. a) Bei welcher Betriebstemperatur in °C tritt der gleiche Ausfallfaktor auf wie bei 50 °C? b) Das Wievielfache darf bei 50 °C die Betriebszeit bei gleichem Ausfallfaktor sein gegenüber dem Betrieb bei der höheren Temperatur?



20 Ergänzendes Fachwissen Mathematik

20.1 Gleichungen

20.1.1 Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten

Die Unbekannte tritt nur als erste Potenz auf, z. B. $x^1 = x$. Zur Lösung der Gleichung muss die Unbekannte auf der linken Seite alleine gestellt werden und Zählergröße sein.

Liegt eine Aufgabe als Text vor (Textaufgabe), so muss diese erst vor der Berechnung in eine Gleichung umgesetzt werden.

Zum zeichnerischen Lösen einer Bestimmungsgleichung wird diese in eine Funktionsgleichung umgewandelt. Dazu bringt man alle Summanden der Gleichung auf die rechte Seite und setzt auf der linken Seite anstelle der Null die Variable y ein.

In die Funktionsgleichung setzt man Zahlen für x ein und erhält für y die zugehörigen Werte. Mit den so erhaltenen Wertepaaren lässt sich der Graph zeichnen **(Bild 1)**.

Der Schnittpunkt des Graphen der Funktionsgleichung mit der x-Achse ist die Lösung der zugehörigen Bestimmungsgleichung.

Beispiel 1: Gleichung grafisch lösen

Lösen Sie zeichnerisch die Gleichung $-1{,}5\,x = -6{,}75$.

Lösung:

Bestimmungsgleichung: $-1{,}5\,x = -6{,}75$

$\Rightarrow \quad 0 = 1{,}5\,x - 6{,}75$

$\Rightarrow$ Funktionsgleichung: $y = 1{,}5\,x - 6{,}75$

Der Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse **(Bild 1)** ergibt $x = \mathbf{4{,}5}$.

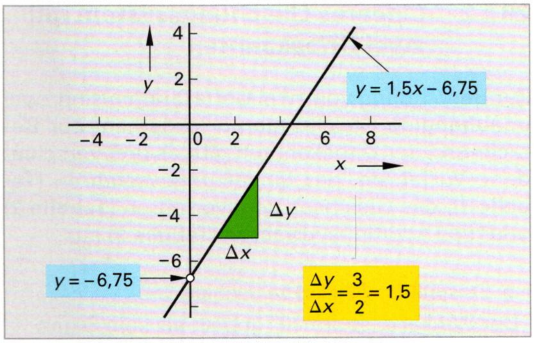


Bild 1: Zeichnerisches Lösen einer linearen Gleichung

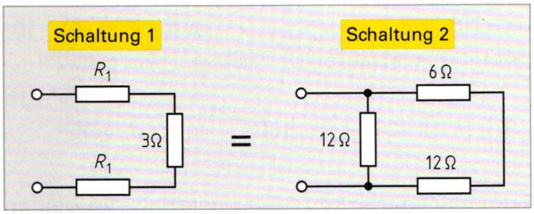


Bild 2: Widerstandsschaltungen

Aufgaben zu 20.1.1

Lösen Sie zeichnerisch und prüfen Sie rechnerisch nach.

1. a) $x + 4 = 7$ b) $x - 2{,}5 = 7{,}3$
c) $1{,}5\,x + 8 = 3{,}5\,x$ d) $9 - 3\,x = 3\,x$

2. a) $3 = 8 - x$ b) $-0{,}2 + 1{,}5\,x = 2{,}8$
c) $13\,x = x + 2$ d) $-\frac{x}{2} - 10 = 0$

Berechnen Sie x bzw. y.

3. a) $\frac{x}{2} = 6$ b) $\frac{-3}{y} = -1{,}5$

4. a) $\frac{3\,x}{4} = 6$ b) $52 = \frac{13}{-y}$

5. a) $\frac{x}{5} + \frac{x}{4} = 18$ b) $\frac{5\,y}{2} + 4 = \frac{3\,y}{4}$
c) $\frac{9 - 2\,x}{4} + 6 = \frac{3\,x + 4}{6} + 2$

6. a) $\frac{3\,x - 2}{5} - \frac{x}{4} = 7$ b) $\frac{3}{2} = \frac{9 - x}{4\,x}$
c) $\frac{8\,y + 5\,a}{y + 2} - \frac{12\,y}{3} = 3 - 4\,y$

7. Bei Erwärmung erhöht sich ein Widerstand um 5 % auf 1183,5 Ω. Wie groß war der Widerstand vor der Erwärmung?

8. Welcher Strom ist um 1,4 A größer als die Summe zweier Ströme mit 0,6 A und 0,7 A?

9. Welche Spannung ist um 12,5 V kleiner als der Spannungsunterschied zwischen 64,33 V und 27,84 V?

10. Welche Zahl ergibt um die Hälfte vermehrt 37,5?

11. Die beiden Widerstandsschaltungen in **Bild 2** haben an den Klemmen denselben Gesamtwiderstand. Bestimmen Sie R_1.

20.1.2 Lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten

Zur Berechnung von zwei Unbekannten sind zwei unabhängige Gleichungen erforderlich. Zur Berechnung der Unbekannten gibt es drei verschiedene Verfahren, das Einsetzungsverfahren **(Tabelle 1)**, das Gleichsetzungsverfahren **(Tabelle 2)** oder das Additionsverfahren **(Tabelle 3)** aus.

Beispiel 1: Winkel bestimmen

Der Winkel α ist um 70° größer als sein Ergänzungswinkel β auf 180°. Wie groß sind α und β?

Lösung:

$\beta = 180° - \alpha \quad \Rightarrow \alpha + \beta = 180° \quad \text{(I)}$

$\alpha - 70° = \beta \quad \Rightarrow \alpha - \beta = 70° \quad \text{(II)}$

Additionsverfahren (I) + (II): $\Rightarrow \quad 2\alpha = 250°$

$\Rightarrow \quad \alpha = \mathbf{125°} \text{ (III)}$

(III) in (I): $125° + \beta = 180° \quad \Rightarrow \quad \beta = \mathbf{55°}$

Zum zeichnerischen Lösen werden die beiden Bestimmungsgleichungen erst nach y aufgelöst. Dann werden die Graphen dieser Funktionsgleichungen in ein Achsenkreuz eingezeichnet. Die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden **(Bild 1)** sind die Unbekannten x und y.

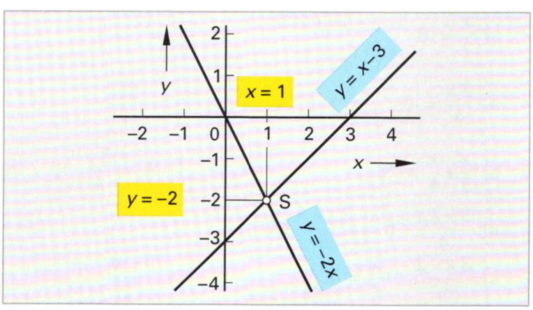


Bild 1: Zeichnerisches Lösen linearer Gleichungen mit 2 Unbekannten

Beispiel 2: Unbekannte grafisch ermitteln

Bestimmen Sie zeichnerisch die Unbekannten der Gleichungen $x - y = 3$ und $2x = -y$.

Lösung:

1. Bestimmungsgleichung: $x - y = 3$
1. Funktionsgleichung: $\Rightarrow \quad y = x - 3$
2. Bestimmungsgleichung: $2x = -y$
2. Funktionsgleichung: $\Rightarrow \quad y = -2x$

Der Schnittpunkt S beider Graphen **(Bild 1)** ergibt $x = \mathbf{1}$ und $y = \mathbf{-2}$.

Tabelle 1: Einsetzungsverfahren

Regel	Eine Gleichung nach einer Unbekannten auflösen und diese in die zweite Gleichung einsetzen.
Beispiel	$2x - 3y = 12$ (I) $5x = 20y$ (II) aus (II) $\Rightarrow$ $x = 4y$ (III) (III) in (I) $2 \cdot 4y - 3y = 12$ $5y = 12$ $y = \mathbf{2{,}4}$ (IV) (IV) in (III) $\Rightarrow$ $x = 4 \cdot 2{,}4$ $x = \mathbf{9{,}6}$ (V)
Probe	(IV) und (V) in (I): $2 \cdot 9{,}6 - 3 \cdot 2{,}4 = 12$ $12 = 12$ ✓

Tabelle 2: Gleichsetzungsverfahren

Regel	Beide Gleichungen nach der gleichen Unbekannten auflösen und die erhaltenen Terme gleichsetzen.
Beispiel	$2x = 22 - 3y$ (I) $x = 5y - 2$ (II) aus (I): $\Rightarrow$ $x = 11 - 1{,}5y$ (III) (II) = (III): $5y - 2 = 11 - 1{,}5y$ $\Rightarrow$ $6{,}5y = 13$ $\Rightarrow$ $y = \mathbf{2}$ (IV) (IV) in (II): $x = 5 \cdot 2 - 2$ $\Rightarrow$ $x = \mathbf{8}$ (V)
Probe	(IV) und (V) in (I): $2 \cdot 8 + 3 \cdot 2 = 22$ $22 = 22$ ✓

Tabelle 3: Additionsverfahren

Regel	In beiden Gleichungen muss die gleiche Unbekannte den gleichen Faktor, aber entgegengesetztes Vorzeichen erhalten. Dann addiert man beide Gleichungen.
Beispiel	$4x + 2y = 8$ (I) $x + y = 3$ (II) (I) bleibt: $4x + 2y = 8$ (I) (II) · (−2) $-2x - 2y = -6$ (III) (I) + (III) $2x = 2$ $x = 1$ (IV) (IV) in (I) $4 + 2y = 8$ $y = 2$ (V)
Probe	(IV) und (V) in (II): $4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 8$ ✓

Aufgaben zu 20.1.2

Lösen Sie zeichnerisch und prüfen Sie rechnerisch nach.

1. a) $y = 2x - 1;$ $\quad y - 2 = x$
   b) $x - y = 6;$ $\quad 2x = 5y$

2. a) $x = 5 - y;$ $\quad 3 + y = x$
   b) $x = y + 5;$ $\quad 3 - 2y = x$

Berechnen Sie die Unbekannten.

3. a) $\frac{x}{4} + 7y = 94;$ $\quad \frac{x}{2} - 318 = -24y$
   b) $4x + 2 - 3a = 6y;$ $\quad x - y = 4a + 5$

4. a) $\frac{4x - 2y}{4x - y} = \frac{4}{7};$ $\quad x - y = 10$
   b) $4x + 4y = 4(a + b);$ $\quad x - y = a - b$

5. $\frac{-4x + 5y}{5} - \frac{6x - 10y}{3} = 2y + 7$
   $\frac{3y - 9x}{2} - \frac{7x - 8y}{3} = 2{,}5 - x$

6. $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{xy};$ $\quad \frac{1}{2x} - \frac{3}{2y} = \frac{12 - x}{2xy}$

7. Die Summe zweier Zahlen ergibt 27, ihre Differenz 12. Wie lauten die Zahlen?

8. Der Quotient von zwei Zahlen beträgt 2,5 und die Summe 49. Wie lauten die Zahlen?

9. Klaus ist 3 Jahre älter als Peter. Vor 12 Jahren war Klaus doppelt so alt wie Peter. Wie alt sind beide?

10. Eine Rolle mit Kupferdraht kostet 11 €. Der Draht kostet 10 € mehr als die Rolle. Wie viel kosten jeweils Rolle und Draht?

11. Für ein Gerät werden 180 Bauelemente (Dioden und Transistoren) benötigt. Die Hälfte der Dioden und 4 weniger als $\frac{1}{5}$ der Transistoren sind am Lager, 124 Bauelemente müssen noch bestellt werden. Wie viele Dioden und wie viele Transistoren werden für das Gerät benötigt?

12. Wechselt man einen Draht mit d_1 gegen einen Draht mit 0,3 mm größerem Durchmesser d_2 aus, so ist der Querschnitt um 0,4 mm² größer. Berechnen Sie d_1 und d_2.

13. Die Summe zweier Ströme beträgt 48 mA. Nach Verdreifachung des Stromes I_1 und Halbierung des Stromes I_2 beträgt der Gesamtstrom 64 mA. Berechnen Sie I_1 und I_2.

14. Durch einen Verbraucher fließen bei Bemessungsspannung 0,357 A. Nach Verringerung der Bemessungsspannung um 15 % nimmt der Verbraucher nur noch 51,6 W auf. Berechnen Sie den Widerstand des Verbrauchers und die Bemessungsspannung.

20.1.3 Quadratische Gleichungen

In der gemischt quadratischen Gleichung tritt die Unbekannte x in der ersten Potenz x und in der zweiten Potenz x^2 oder nur in der zweiten Potenz x^2 auf.

Fehlt das lineare Glied bx, so kann die Gleichung einfach durch Wurzelziehen gelöst werden. Sonst wird eine quadratische Gleichung z. B. mit einer Lösungsformel gelöst.

Man erhält zwei Lösungen x_1 und x_2, wenn der Ausdruck unter der Wurzel größer gleich null ist.

Quadratische Gleichungen ergeben bis zu zwei Lösungen.

Der Ausdruck unter der Wurzel wird auch Diskriminante D genannt. Ist dieser Ausdruck null, entfällt die Wurzel und man erhält für x_1 und x_2 dieselbe Lösung:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$D = b^2 - 4ac$$

a, b, c Konstanten der allgemeinen Form
x unbekannte Größe
$x_{1,2}$ Kurzschreibweise für x_1 und x_2
D Diskriminante

Beispiel 1: Quadratische Gleichungen lösen

Berechnen Sie zu $2{,}5x^2 = 17{,}5x - 25$ a) a, b und c der allgemeinen Form, b) und lösen Sie die Gleichung.

Lösung:

a) $2{,}5x^2 = 17{,}5x - 25 \Rightarrow 2{,}5x^2 - 17{,}5x + 25 = 0$
$\Rightarrow a = \mathbf{2{,}5};\ b = \mathbf{-17{,}5};\ c = \mathbf{25}$

b) $x_{1,2} = \frac{+17{,}5 \pm \sqrt{17{,}5^2 - 4 \cdot 2{,}5 \cdot 25}}{2 \cdot 2{,}5}$

$= \frac{17{,}5 \pm \sqrt{56{,}25}}{5} = \frac{17{,}5 \pm 7{,}5}{5}$

$x_1 = \frac{25}{5} = \mathbf{5}$ oder $x_2 = \frac{10}{5} = \mathbf{2}$

Teilt man die quadratische Gleichung durch a, so erhält man die normierte Form $x^2 + px + q = 0$, wobei $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ ist.

normierte Form:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1,2} = -p \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Bei der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, d. h. $x^2 = -px - q$, kann auch die Funktionsgleichung $y = x^2 + px + q$ aufgeteilt werden in eine Gleichung für die Normalparabel $y = x^2$ und eine Gleichung für die Gerade $y = -px - q$. Nach dem Zeichnen der Parabel und der Geraden ergeben deren Schnittpunkte die Lösungen der x-Werte.

Es ergeben sich zwei reelle Lösungen, wenn die Normalparabel die Gerade schneidet. Bei Berührung ergibt sich nur eine reelle Lösung, bei keiner Berührung und keinem Schneiden ergeben sich nur komplexe Lösungen.

Beispiel 1: Gleichung grafisch lösen

Lösen Sie zeichnerisch die Gleichung

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} = 1{,}5.$$

Lösung:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} = 1{,}5 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = -\frac{x}{4} + 1{,}5 \Rightarrow x^2 = \frac{-x}{2} + 3$$

Die Graphen von $y = x^2$ und von $y = -x^2 + 3$ werden in dasselbe Achsenkreuz eingezeichnet **(Bild 1)**.

Ihre Schnittpunkte S_1 und S_2 ergeben die gesuchten x-Werte $x_1 = \mathbf{-2}$ und $x_2 = \mathbf{1{,}5}$.

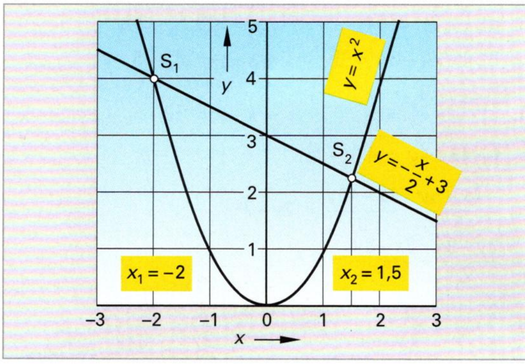


Bild 1: Zeichnerisches Lösen einer quadratischen Gleichung

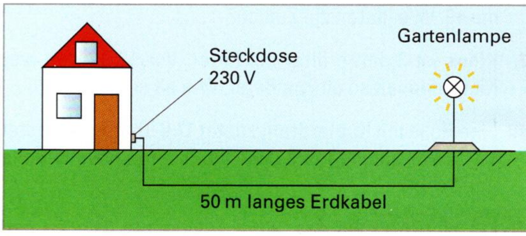


Bild 2: Gartenbeleuchtung

Aufgaben zu 20.1.3

1. Lösen Sie zeichnerisch und prüfen Sie rechnerisch nach.

a) $x^2 - 5 = -3$ b) $x^2 - 7x = -6$

Lösen Sie folgende Gleichungen.

2. a) $80x^2 + 20x = 100$ b) $0{,}5x^2 = 3x + 8$

3. a) $x^2 = 11x - 30$ b) $3x + 1 = 9 + \frac{3}{x}$

4 Eine Seite eines Rechteckes mit 90 cm Diagonale ist dreimal so lang wie die andere. Berechnen Sie die Seiten.

5. Eine Lautsprecherbox soll einen Rauminhalt von 20000 cm^3 haben, 20 cm tief sein und eine rechteckförmige Abstrahlfläche mit 140 cm Umfang haben. Berechnen Sie Höhe und Breite der Box.

6. Ein rechteckiges Gehäuseblech mit 1350 cm^2 ist um 15 cm länger als breit. Berechnen Sie Länge und Breite

7. Zwei Widerstände unterscheiden sich um 60 Ω. Bei Parallelschaltung ergibt sich ein Ersatzwiderstand von 72 Ω. Berechnen Sie die beiden Widerstände.

8. Zum Widerstand R_1 mit 1,8 kΩ soll ein Widerstand R_2 in Reihe geschaltet werden, sodass der Ersatzwiderstand achtmal so groß ist wie der Ersatzwiderstand der Parallelschaltung aus R_1 und R_2. Berechnen Sie R_2.

9. Das Erdkabel in **Bild 2** hat einen Widerstand von 0,1 Ω pro Meter je Leiter und hat die Verlustleistung $R \cdot I^2$. Berechnen Sie die Stromstärke I ($I < 1$ A), wenn die Lampe 90,4 W aufnimmt.

20.1.4 Sinussatz und Kosinussatz

Beliebige Dreiecke **(Bild 1)** können mit dem Sinussatz und dem Kosinussatz berechnet werden.

Der Taschenrechner kann beim Sinussatz nur Winkel kleiner gleich 90° berechnen.

Für Winkel > 90° gilt $\sin \alpha_{>} = \sin(180° - \alpha_{<})$

Sinussatz:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

α Winkel gegenüber der Seite a	a Gegenkathete zu α
β Winkel gegenüber der Seite b	b Ankathete zu α
γ Winkel gegenüber der Seite c	c Hypotenuse

Aufgaben zu 20.1.4

Berechnen Sie zu **Bild 1** die fehlenden Seiten und Winkel, wenn gegeben sind

1. $a = 15$ $\quad b = 8{,}7$ $\quad \gamma = 66{,}4°$
2. $b = 9{,}4$ $\quad c = 6{,}8$ $\quad \alpha = 34{,}6°$
3. $a = 132$ $\quad b = 187$ $\quad c = 89$
4. $c = 77$ $\quad \alpha = 17{,}5°$ $\quad \beta = 98{,}6°$
5. Zu einer Spannung u_1 mit $\hat{u}_1 = 28{,}3$ V wird eine gegenüber u_1 um 38° voreilende Spannung u_2 mit $\hat{u}_2 = 19{,}4$ V addiert **(Bild 2).** Wie groß sind a) $\hat{u}$ b) der Phasenverschiebungswinkel φ von u gegenüber u_1?
6. Die Gesamtspannung $\hat{u}$ zweier Spannungen $\hat{u}_1 = 4{,}85$ V und $\hat{u}_2$ **(Bild 2)** soll 2,79 V betragen und gegenüber $\hat{u}_1$ um 155° nacheilen. Wie groß müssen a) $\hat{u}_2$ b) der Phasenverschiebungswinkel φ_1 zwischen u_1 und u_2 sein?
7. In **Bild 3** eilt der Strom $i_1 = 15{,}3$ mA dem Gesamtstrom $i = 7{,}1$ mA um 132° vor. Berechnen Sie a) i_2, b) den Phasenverschiebungswinkel φ_1 zwischen i_1 und i_2.
8. Berechnen Sie für die trigonometrische Weitenmessung in einem Stadion **(Bild 4)** die Wurfweite l.
9. Welcher Winkel wird bei der Weitenmessung **(Bild 4)** gemessen, wenn die Wurfweite $l = 72{,}38$ m, $l_1 = 133{,}47$ m und $l_2 = 151$ m betragen?

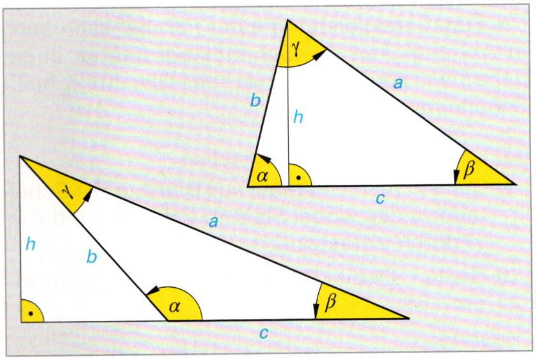


Bild 1: Schiefwinklige Dreiecke

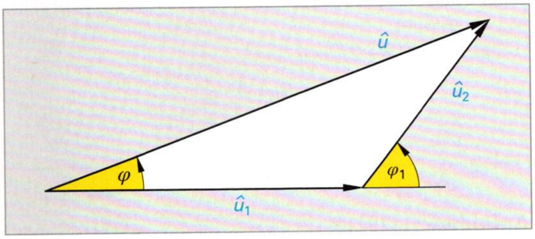


Bild 2: Spannungsdreieck

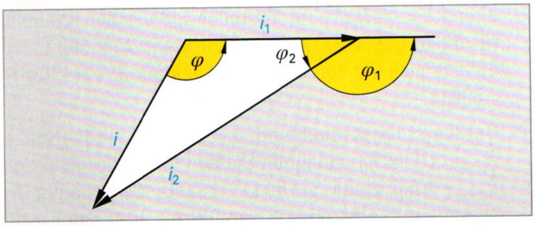


Bild 3: Stromdreieck

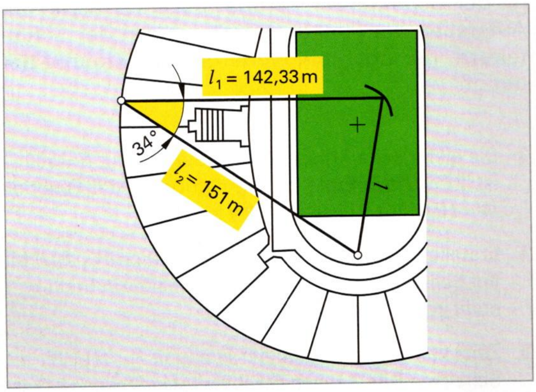


Bild 4: Trigonometrische Weitenmessung

20.2 Funktionen

20.2.1 Quadratische Funktionen

Die quadratische Funktion hat die Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$. Ihr Schaubild heißt Parabel.

Fehlen die Glieder $bx + c$, so liegt der Scheitel im Ursprung. Bei negativem a ist die Parabel nach unten geöffnet, bei positivem a nach oben.

Normalform:	Scheitelform:
$y = ax^2 + bx + c$	$y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$

Beispiel 1: Gleichung aufstellen

Ermitteln Sie mithilfe der Schaltung aus **Bild 1** die Gleichung für die abgegebene Leistung P_{ab} an R_L in Abhängigkeit von der Klemmenspannung U.

Lösung:

$$P_{ab} = U \cdot I = U \cdot \frac{U_0 - U}{R_i} = \frac{U \cdot U_0 - U \cdot U}{R_i}$$

$$= -\frac{1}{R_i} \cdot U^2 + \frac{U_0}{R_i} \cdot U = -\frac{1}{1\,\Omega} \cdot U^2 + 4\,\text{A} \cdot U$$

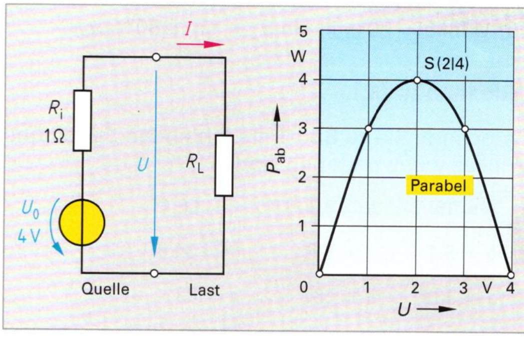


Bild 1: Leistungsabgabe an R_L

Die Funktionsgleichung einer Parabel kann auch in Abhängigkeit der Scheitelkoordinaten angegeben werden. Diese Form der Gleichung heißt Scheitelform.

Beispiel 2: Parabel darstellen

a) Stellen Sie die Parabel aus **Bild 1** in der Scheitelform dar, wobei Sie U in V durch x und P in W durch y ersetzen.

b) Stellen Sie die Gleichung in die Normalform um.

Lösung:

a) $y = a \cdot (x - 2)^2 + 4$ (Scheitel (2|4) eingesetzt)
$0 = a \cdot (-2)^2 + 4$ (Punkt (0|0) eingesetzt)
$\Rightarrow a = -1$
$\Rightarrow y = -(x - 2)^2 + 4$

b) $y = -(x^2 - 4x + 4) + 4$
$y = -x^2 + 4x - 4 + 4$
$y = -x^2 + 4x$

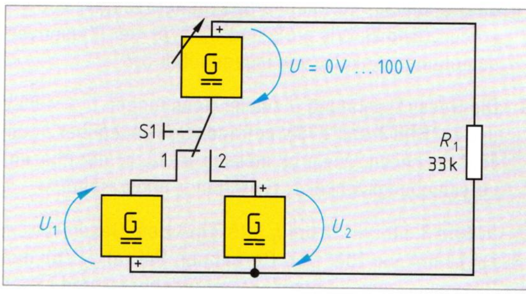


Bild 2: Versuchsschaltung

Ist der Scheitel der Parabel bekannt, wird zum Aufstellen der Funktionsgleichung in der Scheitelform nur noch ein weiterer Parabelpunkt benötigt.

Aufgaben zu 20.2.1

1. Für ein Übersetzungsverhältnis gilt die Funktionsgleichung $ü = \sqrt{4R_1/R_2}$. a) Erstellen Sie die Wertetabelle für $ü$ = 0, 1, 2, 4, 8, 12, 16 und 20, wenn $R_2 = 500\,\Omega$ ist. b) Zeichnen Sie den Graph der Funktion $R_1 = f(ü)$ für $R_2 = 500\,\Omega$.

2. Bei Leistungsanpassung ist die Leistungsabgabe $P_{max} = U_0^2/(4\,R_i)$. Zeichnen Sie den Graph der Funktion $P_{max} = f(U_0)$, wenn $R_i = 60\,\Omega$ = konstant ist und die Urspannung des Erzeugers von 0 V bis 10 V eingestellt werden kann.

3. Die elektrische Arbeit W eines Gerätes mit $R = 500\,\Omega$ ist $W = U^2t/R$. Erstellen Sie den Graph der Funktion $W = f(U)$ für $t = 1$ h und $U = 0$ V bis 230 V.

4. Erstellen Sie das Schaubild der Funktion $P = f(U)$ für die Schaltung **Bild 2**, wenn der Schalter in Stellung 1 steht und $U_1 = 60$ V ist.

5. Zeichnen Sie den Graph der Funktion $P = f(U)$ für die Schaltung **Bild 2**, wenn der Schalter in Stellung 2 steht und $U_2 = 20$ V ist.

20.2.2 Exponentialfunktionen

Bei einer Exponentialfunktion $y = a^x$ sind y der Potenzwert, a die Basis und die Variable x der Exponent (Hochzahl).

Bei Exponentialfunktionen steht im Exponenten die Variable x.

Beispiel 1: Funktionswert berechnen

Berechnen Sie für $x = 0{,}8$ die Exponentialfunktion $y = 2{,}3^x$ mit dem Taschenrechner.

Lösung:

Eingabe: $\boxed{2}\,\boxed{.}\,\boxed{3}\,\boxed{y^x}\,\boxed{.}\,\boxed{8}\,\boxed{=}$

Anzeige: *1.9470732* $\Rightarrow 2{,}3^{0{,}8} = \mathbf{1{,}947}$

Ist der Exponent x der Funktion $y = a^x$ gesucht, so wird x mithilfe von Logarithmen berechnet. Steht der Zehnerlogarithmus nicht zur Verfügung, so kann der Exponent mit dem natürlichen Logarithmus berechnet werden.

Beispiel 2: Variable berechnen

Berechnen Sie x mit dem Taschenrechner, wenn $2{,}5^x = 0{,}0213134$ ist.

Lösung:

$x = \lg 0{,}0213134 / \lg 2{,}5$

Eingabe: $\boxed{.}\,\boxed{0}\,\boxed{2}\,\boxed{1}\,\boxed{3}\,\boxed{1}\,\boxed{3}\,\boxed{4}\,\boxed{\log}\,\boxed{/}\,\boxed{2}$
$\boxed{.}\,\boxed{5}\,\boxed{\log}\,\boxed{=}$

Anzeige: *–4.2* $\Rightarrow x = \mathbf{-4{,}2}$, da $2{,}5^{-4{,}2} = 0{,}0213134$

Beispiel 3: Variable berechnen

Berechnen Sie x, wenn $6 = 2 \cdot e^{-x}$ ist.

Lösung:

$3 = e^{-x} \Leftrightarrow \ln 3 = -x \Leftrightarrow x = -\ln 3$

Eingabe: $\boxed{-}\,\boxed{\ln}\,\boxed{3}\,\boxed{=}$

Anzeige: *–1.0986* $\Rightarrow -\ln 3 = \mathbf{-1{,}0986}$

Viele Vorgänge, z. B. die Ladung eines Kondensators, verlaufen nach einer Exponentialfunktion $y = a \cdot e^{bx}$ mit der Zahl e = 2,718... als Basis.

Bei diesen Funktionen verwendet man zur Berechnung der Hochzahl den natürlichen Logarithmus. Die Funktionswerte bei e-Funktionen werden durch den Taschenrechner mit der Taste $\boxed{e^x}$ ermittelt. $\boxed{\text{exp}}$ bzw. $\boxed{\text{EE}}$ dient dagegen zur Eingabe der Zehnerpotenz.

Die Exponentialfunktion mit der Basis e heißt e-Funktion.

$$y = a^x$$

Zur Berechnung von x für $y = a^x$:

$$x = \frac{\ln y}{\ln a} \qquad x = \frac{\lg y}{\lg a} \qquad x = \log_a y$$

y Potenzwert
x Exponent, Hochzahl
a Basis

Beispiel 4: Variable berechnen

Geben Sie für die Berechnung von $y = e^{1{,}2}$ die Eingabe für den Taschenrechner mit Ergebnis an.

Lösung:

Eingabe: $\boxed{1}\,\boxed{.}\,\boxed{2}\,\boxed{e^x}\,\boxed{=}$

Anzeige: *3.3201169* $\Rightarrow e^{1{,}2} = \mathbf{3{,}32}$

Aufgaben zu 20.2.2

Berechnen Sie.

1. a) $y = 3{,}2^{1{,}8}$ b) $y = 0{,}93^{0{,}8}$

2. a) $y = 0{,}47^{1{,}3}$ b) $y = 5{,}3^{0{,}4}$

3. a) $y = e^3$ b) $y = e^{1{,}5}$ c) $y = e^{-2{,}3}$ d) $y = 1 - e^{-1{,}2}$

4. a) $y = e^{0{,}7}$ b) $y = e^{-2}$ c) $y = e^{-0{,}9}$ d) $y = e^{0{,}6}$ e) $y = 1 - e^{-0{,}25}$ f) $y = 1 - e^{-5{,}2}$

Berechnen Sie den Exponenten x.

5. a) $y = 1{,}6^x$ für $y = 0{,}4$
b) $y = e^x$ für $y = 100$
c) $y = e^{-x}$ für $y = 68{,}5$
d) $y = 1 - e^{-x}$ für $y = 0{,}7$

6. a) $y = 3{,}7x$ für $y = 2{,}1$
b) $y = e^x$ für $y = 20$
c) $y = e^{-x}$ für $y = 2{,}1$
d) $y = 1 - e^{-x}$ für $y = -18{,}5$

Berechnen und zeichnen Sie den Graph.

7. a) $y = 2^x$ für x von –4 bis +4
b) $y = 0{,}4^x$ für x von –3 bis +3

8. a) $y = 1{,}5^x$ für x von –4 bis +4
b) $y = 0{,}6^x$ für x von –3 bis +3

9. a) $y = e^x$ für x von –3 bis +3
b) $y = 1 - e^{-x}$ für x von –3 bis +3

10. a) $y = e^{-x}$ für x von –3 bis +3
b) $y = 1 - e^x$ für x von –3 bis +3

20.3 Differenzieren

Die Bestimmung der Steilheit (Steigung m) des Graphen einer Funktion an einem beliebigen Punkt nennt man Differenzieren. Man kann Funktionen nur dort differenzieren, wo sie definiert sind (z.B. von Unendlich abweichen), stetig sind (keine Sprünge machen) und keinen Knick haben.

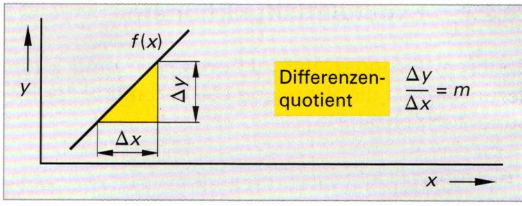


Bild 1: Differenzenquotient

20.3.1 Differenzenquotient und Differenzialquotient

Ist der Graph einer Funktion $f(x)$ eine Gerade, so findet man die Steilheit durch einen Differenzenquotienten $m = \Delta y / \Delta x$ bei x-y-Koordinaten **(Bild 1)**. Bei gekrümmten Graphen müsste man die Abschnitte Δy und Δx unendlich klein machen, d.h. gegen null gehen lassen **(Bild 2)**. Ihr Verhältnis bildet dann den Differenzialquotienten $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ (sprich: dy nach dx) bzw. die Ableitung y' (sprich: y Strich). y' ist die Funktion der Steigung von $f(x)$. y' ist ebenfalls von x abhängig. Man schreibt $y' = f'(x)$.

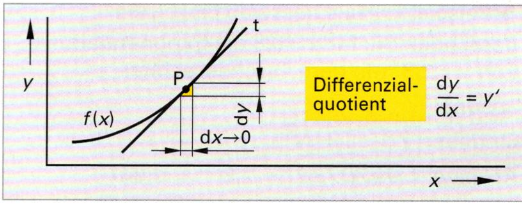


Bild 2: Differenzialquotient

Die Steilheit in einem Punkt P der Funktion $f(x)$ lässt sich durch den Differenzenquotienten an der Tangente t bestimmen **(Bild 2** und Abschnitt 6.1.1).

Verläuft der Graph einer Funktion waagerecht, so ist der Differenzialquotient gleich null. Verläuft der Graph geradlinig, so ist der Differenzialquotient in diesem geradlinigen Bereich konstant.

Aufgaben zu 20.3.1

1. Wie groß ist bei $I = 1$ mA in **Bild 3**a der Differenzialquotient $\mathrm{d}U/\mathrm{d}I$?
2. Ermitteln Sie bei $I = 2$ mA in **Bild 3**a den Differenzialquotienten $\mathrm{d}U/\mathrm{d}I$.
3. Ermitteln Sie den Differenzialquotienten $\mathrm{d}I/\mathrm{d}U$ von **Bild 3**b für $U = 2$ V.
4. Wie groß ist $\mathrm{d}I/\mathrm{d}U$ für $U = 3$ V in **Bild 3**b?
5. Zeichnen Sie den Graph der Ableitung I' von **Bild 3**b für den Bereich 0 V bis 3 V.
6. Ermitteln Sie den Verlauf der Ableitung u' von **Bild 3**c für den Bereich 0 ms bis 3 ms.
7. Zeichnen Sie den Graph von i' in **Bild 3**d für den Bereich 0 ms bis 2 ms.
8. Stellen Sie i' aus **Bild 3**d für den Bereich 2 ms bis 4 ms zeichnerisch dar.

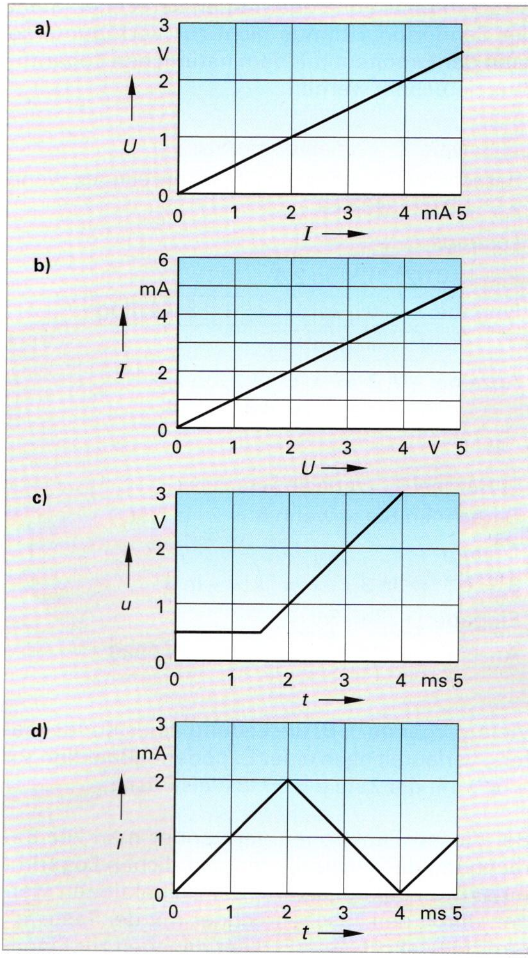


Bild 3: Spannungsfunktionen und Stromfunktionen

0.3.2 Ableitungen von Funktionen

on einer Funktion $y = f(x)$ wird durch Differen- ieren eine andere Funktion (Ableitung) $y' = f'(x)$ efunden **(Tabelle 1).** Man schreibt für y' auch y/dx. Die Ableitungsfunktion $f'(x)$ beschreibt die teigung der Funktion $f(x)$ in Abhängigkeit von x.

Beispiel 1: Ableitung berechnen

Gegeben ist $P = R_1 \cdot I^2 + R_2 \cdot I^2$.

Berechnen Sie die Ableitung von P nach I, also $\mathrm{d}P/\mathrm{d}I$ oder auch P'.

Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}I} = \frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}I} + \frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}I}$$
$$= 2\,R_1 \cdot I + 2\,R_2 \cdot I$$
$$= 2\,I \cdot (R_1 + R_2)$$

Tabelle 1: Ableitungen von Funktionen

abzuleitende Funktion $y = f(x)$	abgeleitete Funktion $y' = f'(x)$
$y = a$	$y' = 0$
$y = ax$	$y' = a$
$y = ax^n$	$y' = an \cdot x^{n-1}$
$y = \frac{a}{x^n} = ax^{-n}$	$y' = -an \cdot x^{-n-1}$
$y = a \cdot \sqrt[n]{x} = a \cdot x^{\frac{1}{n}}$	$y' = \frac{a}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{a}{n \cdot \sqrt[n]{x^{1-n}}}$
$y = \mathrm{e}^x$	$y' = \mathrm{e}^x$
$y = \mathrm{e}^{ax}$	$y' = a \cdot \mathrm{e}^{ax}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = a \cdot \sin bx$	$y' = ab \cdot \cos bx$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = a \cdot \cos bx$	$y' = -ab \cdot \sin bx$
$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
Summenregel: $y = u + v + w + \ldots$	$y' = u' + v' + w' + \ldots$
Produktregel: $y = u\,v$	$y' = u'v + v'u$
Quotientenregel: $y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'\,v - v'u}{v^2}$

y, x Veränderliche
a, n von x unabhängige Konstanten
$u, v, w, \ldots$ Funktionen von x

Aufgaben zu 20.3.2

Differenzieren Sie:

1. a) $y = 4$ b) $y = 4x$ c) $y = 4x^2$ d) $y = \mathrm{e}^x$ e) $y = \sin x$

2. a) $y = 3$ b) $y = 6x$ c) $y = 4x^3$ d) $y = 2\mathrm{e}^x$ e) $y = \cos x$

3. a) $U = 10\,\Omega \cdot I$ b) $P = I^2 \cdot 15\,\Omega$

4. a) $W = 10\,\mathrm{W} \cdot t$ b) $P = U^2/15\,\Omega$

5. a) $y = 4 - 16x$ b) $y = 2 + 16x^2$ c) $y = 12x^3 - 2x^2 + 7x - 3$

6. a) $y = 24 + 12x$ b) $y = 14x^2 - 3x$ c) $y = 4x^3 - 2x^2 + 16x - 3$

7. a) $U = 10\,\Omega \cdot I + 14\,\Omega \cdot I$ b) $I = 3\,\mathrm{S} \cdot U - 2\,\mathrm{S} \cdot \mathrm{U}$

8. $P = 10\,\Omega \cdot I^2 + 16\,\Omega \cdot I^2$

9. a) $y = \sqrt{x}$ b) $y = \sqrt[3]{x}$ c) $y = \frac{1}{x}$

10. a) $y = \frac{2}{x}$ b) $y = \sqrt[4]{x}$ c) $y = \frac{3}{\sqrt{x}}$

11. a) $y = 2\cos x$ b) $y = 5x \cdot \cos x$ c) $y = 6x^2 \cdot \sin x$ d) $y = 3x \cdot \mathrm{e}^x$

12. Ein Kondensator von 16 µF wird mit einem gleich bleibenden Ladestrom von 0,1 mA geladen. Wie groß ist die Anstiegsgeschwindigkeit der Spannung in V/s? (Lösungshinweis: Ladung $Q = C \cdot U = I \cdot t$).

13. Eine verlustfreie Spule von $L = 150$ mH wird an eine Gleichspannung von 20 V gelegt. Wie groß ist die Anstiegsgeschwindigkeit des Stromes in A/ms? (Lösungshinweis: Spannung $U = L \cdot \mathrm{d}i/\mathrm{d}t$).

20.4 Integrieren

Das Integrieren ist die Umkehrung des Differenzierens.

Beim Integrieren behandelt man den Differenzialquotienten dy/dx wie einen normalen Bruch.

$$y' = \frac{dy}{dx} \qquad | \cdot dx$$

$$\Rightarrow \quad dy = y'dx \qquad | \int \text{(beide Seiten integrieren)}$$

$$\Rightarrow \int dy = \int y'dx \qquad | \int dy = y$$

$$\Rightarrow \quad y = \int y'dx$$

Das Integral beginnt mit dem Integralzeichen $\int$ (sprich: Integral von) und endet mit der Integrationsvariablen, z. B. dx (sprich: nach dx).

20.4.1 Unbestimmtes Integral

Die Ableitungen der Parabeln $y = x^2 - 2$ und $y = x^2 - 1$ heißen beide $y' = 2\,x$. Eine Rückrechnung durch Integrieren von $2x$ mit $\int 2x\,dx$ ist somit nicht mehr eindeutig, da Konstanten beim Differenzieren wegfallen.

Bei der Lösung des Integrals muss eine Integrationskonstante C hinzugefügt werden.

Integriert man die Funktion $f(x) = 2x$, erhält man $\int 2x\,dx = x^2 + C$. $F(x) = x^2$ allein ist nur eine von unendlich vielen Stammfunktionen. Die Stammfunktion mit der Integrationskonstanten $C = 0$ heißt $F(x)$ **(Tabelle 1)**.

Beispiel 1: Integral berechnen

Berechnen Sie $\int 5x^3\,dx$.

Lösung:

$$\int 5x^3\,dx = 5\int x^3\,dx = 5\,\frac{x^4}{4} + C = \frac{5}{4}\,x^4 + C$$

Konstante Faktoren dürfen vor das Integralzeichen vorgezogen werden. Das Integral einer Summe von Funktionen ist gleich der Summe der Integrale der einzelnen Funktionen.

Unbestimmtes Integral:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$f(x)$ Integrand
$F(x) + C$ Menge aller Stammfunktionen
C Integrationskonstante

Konstanter Faktor a:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx = a \cdot F(x) + C$$

Summenregel:

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Tabelle 1: Integrale

Integrand $f(x)$	Stammfunktionen $F(x) + C$
$y = 0$	$\int 0\,dx = 0 + C = C$
$y = 1$	$\int 1\,dx = x + C$
$y = a$	$\int a\,dx = ax + C$
$y = ax^n$	$\int ax^n\,dx = a \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\ n \neq -1$
$y = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$y = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
$y = e^{ax}$	$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a} \cdot e^x + C$
$y = a^x$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$y = \sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$y = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$y = \sin ax$	$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos ax + C$
$y = \sin^2 ax$	$\int \sin^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \cdot \sin 2ax$

Beispiel 2: Integral berechnen

Berechnen Sie das Integral $\int 2x\,dx$.

Lösung:

$$\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = 2\,\frac{x^2}{2} = \boldsymbol{x^2}$$

Beispiel 1: Strom berechnen

Bei Induktivitäten gilt: $u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$

u_L und i_L sind zeitabhängig.

a) Stellen Sie die Gleichung nach i_L um.

b) Berechnen Sie $i_L(t)$ für $u_L = \hat{u} \cdot \sin \omega t$.

Lösung:

a)
$$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$
$$\Rightarrow u_L \cdot dt = L \cdot di_L$$
$$\Rightarrow di_L = \frac{1}{L} \cdot u_L \, dt$$
$$\Rightarrow \int di_L = \int \frac{1}{L} \cdot u_L \, dt$$
$$\Rightarrow i_L = \frac{1}{L} \int u_L \, dt$$

b)
$$i_L = \frac{1}{L} \cdot \int \hat{u} \cdot \sin \omega t \, dt$$
$$\Rightarrow i_L = \frac{\hat{u}}{L} \cdot \int \sin \omega t \, dt$$
$$\Rightarrow i_L = -\frac{\hat{u}}{\omega L} \cdot \cos \omega t + C$$
$$\Rightarrow i_L = -\frac{\hat{u}}{X_L} \cdot \cos \omega t + I_0$$

Aufgaben zu 20.4.1

Integrieren Sie die Ableitungen.

1. a) $y' = 2x$ b) $y' = x^2$
   c) $y' = 3x^2$ d) $y' = 5x^2$
   e) $y' = 4x^7$

2. a) $y' = 5x$ b) $y' = x^3$
   c) $y' = 6x^2$ d) $y' = 5x^4$
   e) $y' = 3x^8$

3. a) $y' = -\sin x$ b) $y' = \frac{2}{x}$
   c) $y' = 5e^x$ d) $y' = 6$

4. a) $y' = \cos x$ b) $y' = 8$
   c) $y' = -2 \sin x$ d) $y' = \frac{3}{x}$

Lösen Sie die Integrale und kontrollieren Sie das Ergebnis durch Differenzieren.

5. a) $\int 5x \, dx$ b) $\int x \, dx$
   c) $\int 5x^3 \, dx$ d) $\int 5x^7 \, dx$
   e) $\int \frac{1}{4} x^3 \, dx$

6. a) $\int 8x \, dx$ b) $\int \frac{x}{2} \, dx$
   c) $\int 7x^5 \, dx$ d) $\int 2 \cdot ex \, dx$
   e) $\int \frac{1}{3} x^2 \, dx$

7. a) $\int x^{-1} \, dx$ b) $\int x^{\frac{2}{3}} \, dx$
   c) $\int x^{-\frac{3}{2}} \, dx$ d) $\int \frac{1}{\sqrt{u}} \, du$

8. a) $\int 2x^{-\frac{1}{2}} \, dx$ b) $\int 3 \cos x \, dx$
   c) $8 \int e^x \, dx$ d) $2 \int \sqrt[3]{x^2} \, dx$

9. a) $\int \left(\frac{1}{2} \cdot \cos x - 2 \cdot \sin x\right) dx$
   b) $\int (2x^2 - 4x + 5x^3) \, dx$
   c) $\int (b^2 - x^2) \cdot \sqrt{x} \, dx$

10. a) $\int (\cos t - \sin t) \, dt$
    b) $\int (3x^2 + 4x - 7x^4) \, dx$
    c) $\int (a^2 - x^2) \cdot \sqrt{x} \, dx$

11. Ein auf die Spannung U_C geladener Kondensator mit der Kapazität C hat die Energie $W_C = \int Q \, dU_C$ gespeichert. Die aufgenommene Ladung ist $Q = C \cdot U_C$. Berechnen Sie die Arbeit zum Aufbau des elektrischen Feldes W_C als Funktion der Spannung U_C.

12. Eine Spule mit der Induktivität L hat die Energie $W_L = \int S \, dI_L$, wenn durch die Spule der Strom I_L fließt. $S = L \cdot I_L$ ist die Spannungs-Zeit-Fläche. Berechnen Sie die Ladearbeit W_L als Funktion des Spulenstromes I_L.

13. Wird eine Feder mit der Richtgröße D von ihrer Ruhelage aus um die Strecke s gespannt, dann ist die Spannkraft $F = D \cdot s$. Die Spannenergie der Feder ist $W_S = \int F \cdot ds$. Berechnen Sie W_S als Funktion von D und s.

14. Ein Motor mit dem Trägheitsmoment J und der Winkelgeschwindigkeit ω hat die Rotationsenergie $W_{rot} = \int J \cdot \omega \, d\omega$. Berechnen Sie W_{rot} als Funktion des konstanten Trägheitsmomentes J und der Winkelgeschwindigkeit ω.

20.4.2 Bestimmtes Integral

Mit bestimmten Integralen kann man Flächen berechnen. Bestimmte Integrale schreibt man in der Form

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

(sprich: Integral f von x dx von a bis b). Dieses bestimmte Integral ist der Flächeninhalt A zwischen dem Graph und der x-Achse vom x-Wert a bis zum x-Wert b **(Bild 1).** Zur Berechnung integriert man die Funktion und setzt dann in die Integralfunktion $F(x)$ für x die Zahlenwerte a und b ein. Danach bildet man die Differenz der Funktionswerte $F(b) - F(a)$. Die Integrationskonstante entfällt durch die Differenzbildung.

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

A	Fläche unter der Funktion f (x)
$f(x)$	Ausgangsfunktion
$F(x)$	integrierte Ausgangsfunktion, Integralfunktion
a, b	untere und obere Grenze des Integrierbereiches

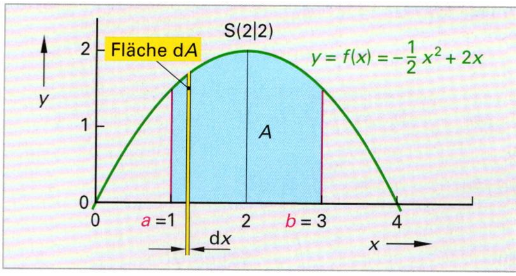


Bild 1: Flächenberechnung mit Integral

Beispiel 1: Fläche berechnen

Berechnen Sie $A = \int_1^3 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right) dx$ **(Bild 1).**

Lösung:

$$A = \int_1^3 (2x - \frac{1}{2}x^2)\,dx$$

$$= 2\int_1^3 x\,dx - \frac{1}{2}\int_1^3 x^2\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3$$

$$= 9 - 1 - \frac{27}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{11}{3} = \mathbf{3{,}67\ FE}$$

Die Fläche wird bei der Rechnung mit x und y in FE (Flächeneinheiten) angegeben.

Flächen oberhalb der x-Achse sind positiv, Flächen unterhalb der x-Achse sind negativ.

Enthält $f(x)$ im Integrationsbereich Nullstellen ($y = 0$), so muss abschnittsweise integriert werden. Die Gesamtfläche ist die Summe der Beträge der Teilflächen, z. B. bei

$$A_{ges} = -\int_{-2}^{0} x\,dx + \int_0^4 x\,dx = \int_0^{-2} x\,dx + \int_0^4 x\,dx.$$

Durch Vertauschen der Integrationsgrenzen ändert sich das Vorzeichen des Integrals.

Aufgaben zu 20.4.2

Berechnen Sie die Integralwerte.

1. a) $\int_0^1 \frac{1}{5}x^4\,dx$ b) $\int_{-1}^2 x\,dx$ c) $\int_{-1}^3 x^2\,dx$

d) $\int_{-2}^4 5\,dx$ e) $\int_0^2 e^x\,dx$

2. a) $\int_0^2 \frac{1}{3}x^2\,dx$ b) $\int_{-1}^3 7\,dx$ c) $\int_1^2 x^3\,dx$

d) $\int_{-1}^4 6x\,dx$ e) $\int_{0°}^{90°} \cos x\,dx$

3. Berechnen Sie von $y = 1 + \frac{1}{4}x$ die Fläche zwische x-Achse und Graph zwischen $x = -4$ und $x = +4$.

4. Berechnen Sie von $y = 4 - \frac{1}{2}x$ zwischen $x = +1$ un $x = 5$ den Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse.

5. Welchen Wert hat das bestimmte Integral der Funktio $y = \frac{1}{2}\cos x$ zwischen $x = 0$ und $x = \pi$?

6. Ermitteln Sie das bestimmte Integral der Funktio $y = \frac{1}{3}\sin x$ zwischen $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$.

7. Berechnen Sie die im Kondensator eines Blitzgerätes mit $C = 500\ \mu F$ gespeicherte Energie W_C für $U_C = 450$ V.

(Lösungshinweis: $W_C = \int_0^{Uc} Q\,dU_C$ mit $Q = C \cdot U_C$)

8. Eine Spule hat die Energie $W_L = \int_0^{I_L} S\,dI_L$ gespeicher ($S = L \cdot I_L$). Berechnen Sie W_L für $L = 2$ H und $I_L = 500$ mA

0.4.3 Mittelwerte

er *arithmetische Mittelwert* einer periodischen röße ist gleich der Höhe des flächengleichen echtecks, in das man die Fläche zwischen Kurve nd Zeitachse verwandeln kann. Man verwendet ls Zeit mindestens eine oder aber mehrere Peodendauern.

er *Effektivwert* einer Wechselgröße ist die Wurel aus dem Mittelwert des Quadrates der Größe ährend einer oder mehrerer Perioden.

Mittelwert:	Effektivwert:
$Y_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$	$Y = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt}$

Y_m arithmetischer Mittelwert
Y Effektivwert
T Periodendauer
t Zeit

Beispiel 1: Effektivwert berechnen

Berechnen Sie den Effektivwert der idealisierten Sägezahnspannung von **Bild 1**

Lösung:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt}$$

$$\Rightarrow U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{\hat{u}}{T}\cdot t\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\frac{\hat{u}^2}{T^2}\int_0^T t^2\,dt}$$

$$= \frac{\hat{u}}{T}\sqrt{\frac{1}{T}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^T} = \frac{\hat{u}}{T}\sqrt{\frac{1}{T}\,\frac{T^3}{3}} = \frac{\hat{u}}{T}\sqrt{\frac{T^2}{3}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{10\text{ V}}{\sqrt{3}} = \mathbf{5{,}77\ V}$$

ufgaben zu 20.4.3

1. Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert der Rechteckspannung von **Bild 2.**
2. Berechnen Sie den Effektivwert der Spannung von **Bild 2.**
3. Wie groß ist von der gleichgerichteten Spannung der Brückenschaltung B2 nach **Bild 3**
   a) der arithmetische Mittelwert,
   b) der Effektivwert?
4. Berechnen Sie wie **Bild 3,** aber für Einweggleichrichtung der Schaltung E1
   a) U_m,
   b) den Effektivwert.
5. Berechnen Sie U_m für einen Steuerwinkel von $\alpha_2 = 45°$ für die Spannung nach **Bild 4** für eine halbe Periode.
6. Auf einer Leitung werden periodisch Rechteckimpulse mit der Impulsdauer T_i übertragen. Berechnen Sie in Abhängigkeit von T_i/T
   a) U_m und
   b) den Effektivwert U.

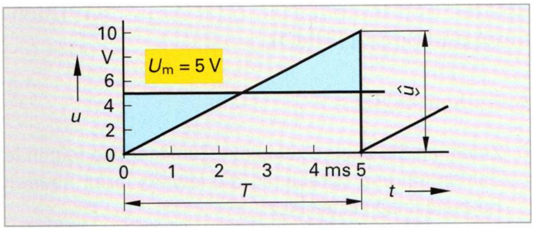


Bild 1: Arithmetischer Mittelwert

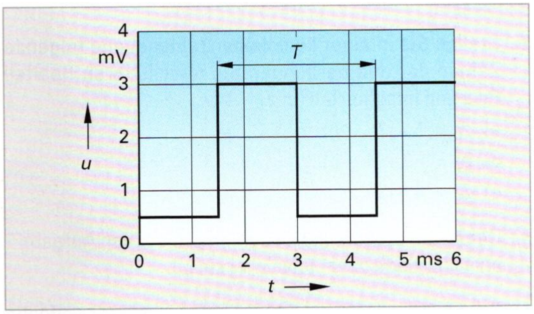


Bild 2: Rechteckmischspannung

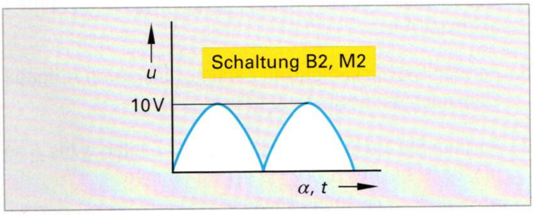


Bild 3: Gleichrichtung

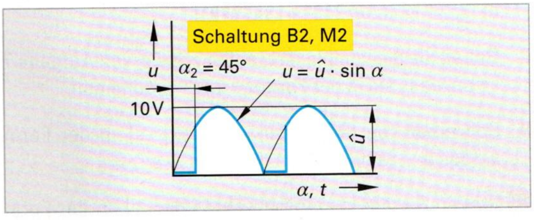


Bild 4: Thyristorbetrieb

20.5 Funktionen mit komplexen Größen

20.5.1 Zahlen in der komplexen Zahlenebene

Die komplexe Zahlenebene enthält ein rechtwinkliges Achsenkreuz mit der reellen Achse und der imaginären Achse. Die Einheit auf der imaginären Achse ist in der Elektrotechnik $j = \sqrt{-1}$. Die Zusammensetzung der Zahl $\underline{z}$ erfolgt entweder aus Realteil und Imaginärteil oder Argument (Richtung) und Betrag **(Bild 1)**.

Aufgaben zu 20.5.1

1. Zeichnen Sie in eine komplexe Zahlenebene folgende Zahlen ein und berechnen Sie jeweils ihren Realteil Re $\underline{z}$ und Imaginärteil Im $\underline{z}$.

a) $\underline{z}_1 = 4 + j3$ b) $\underline{z}_2 = 2 + j4$
c) $\underline{z}_3 = 2 + j3$ d) $\underline{z}_4 = -4 - j2$
e) $\underline{z}_5 = 3 - j4$

2. Stellen Sie in einer komplexen Zahlenebene folgende Zahlen dar und berechnen Sie jeweils ihren Realteil Re $\underline{z}$ und Imaginärteil Im $\underline{z}$.

a) $\underline{z}_1 = 5 + j2$ b) $\underline{z}_2 = 3 + j4$
c) $\underline{z}_3 = -3 + j4$ d) $\underline{z}_4 = -5 - j3$
e) $\underline{z}_5 = 4 - j3$

3. Geben Sie die komplexen Zahlen $\underline{z}_1$ bis $\underline{z}_5$ von Aufgabe 1 an in der Form $\underline{z} = z \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi)$.

4. Bringen Sie die komplexen Zahlen $\underline{z}_1$ bis $\underline{z}_5$ von Aufgabe 2 in die Form $\underline{z} = z \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi)$.

5. Geben Sie die komplexen Zahlen $\underline{z}_1$ bis $\underline{z}_5$ von Aufgabe 1 an in der Art $\underline{z} = z \cdot e^{j\varphi}$.

6. Formen Sie die komplexen Zahlen $\underline{z}_1$ bis $\underline{z}_5$ von Aufgabe 2 um nach der Form $\underline{z} = z \cdot e^{j\varphi}$.

7. Formen Sie die folgenden komplexen Zahlen $\underline{z}_1$ bis $\underline{z}_4$ so um, dass sie die Form $\underline{z} = a + jb$ annehmen.

a) $\underline{z}_1 = 5 \cdot (\cos 30° + j \sin 30°)$
b) $\underline{z}_2 = 8 \cdot (\cos 60° + j \sin 60°)$
c) $\underline{z}_3 = 3 \cdot (\cos 120° + j \sin 120°)$
d) $\underline{z}_4 = 12 \cdot (\cos 240° + j \sin 240°)$

8. Geben Sie die komplexen Zahlen $\underline{z}_1$ bis $\underline{z}_4$ von Aufgabe 7 so an, dass sie in der Form $\underline{z} = z \cdot e^{j\varphi}$ erscheinen.

9. Schreiben Sie die imaginäre Zahl j a) in der Form $z \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi)$, b) in der Form $z \cdot e^{j\varphi}$.

10. Stellen Sie die imaginäre Zahl –j dar a) in der Form $z \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi)$, b) in der Form $z \cdot e^{j\varphi}$.

Worterklärungen:

komplex = zusammengefasst
real, reell = wirklich
imaginär = scheinbar
konjugiert = zusammengehörend

$$\underline{z} = a + jb$$

$$\underline{z} = z\,(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$a = z \cdot \cos \varphi$$

$$\underline{z} = z \cdot e^{j\varphi}$$

$$b = z \cdot \sin \varphi$$

$$z = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a}$$

$$\underline{z}^* = a - jb$$

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi$$

j imaginäre Einheit
$\underline{z}$ komplexe Zahl
a Realteil von $\underline{z}$ (Re $\underline{z}$)
b Imaginärteil von z (Im $\underline{z}$)
z Betrag von $\underline{z}$
φ Argument von $\underline{z}$ (Winkel von der positiven reellen Achse nach $\underline{z}$)
$e^{j\varphi}$ Richtungsvektor von $\underline{z}$, Richtung des Vektors
$\underline{z}^*$ konjugierte Zahl zu $\underline{z} = a + jb$
(z*, sprich: z konjugiert)

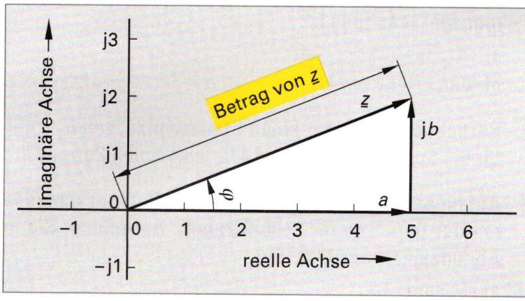


Bild 1: Komplexe Zahlenebene

0.5.2 Grundrechenarten mit komplexen Zahlen

wei komplexe Zahlen sind gleich, wenn sowohl hre Realteile als auch ihre Imaginärteile übereintimmen.

ie zu einer komplexen Zahl konjugierte Zahl unerscheidet sich von dieser nur durch das Vorzeihen des Imaginärteils bei der Normalform oder urch das Vorzeichen des Arguments (Winkel φ) ei der Exponentialform. Bei Addition und Subraktion von komplexen Zahlen geht man von der lormalform $\underline{z} = a + \mathrm{j}b$ aus. Bei Multiplikation und ivision ist die Exponentialform $\underline{z} = z \cdot e^{\mathrm{j}\varphi}$ geeiget **(Tabelle 1)**. Addition und Subtraktion bei komlexen Zahlen erfolgen geometrisch mit Zeigern **Bild 1)**. Deshalb können komplexe Berechnungen uf elektrische Gößen angewandt werden.

Beispiel 1: Komplexe Zahlen multiplizieren

Bilden Sie das Produkt der Zahlen

$\underline{z}_1 = 4 \cdot e^{\mathrm{j}30°}$ und $\underline{z}_2 = 5 \cdot e^{\mathrm{j}50°}$.

Lösung:

$\underline{z} = \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = z_1 \cdot z_2 \cdot e^{\mathrm{j}(\varphi_1 + \varphi_2)}$

$= 4 \cdot 5 \cdot e^{\mathrm{j}(30° + 50°)} = 20 \cdot e^{\mathrm{j}80°}$

Tabelle 1: Grundrechenarten komplexer Zahlen

Addition	$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (\mathrm{Re}\,\underline{z}_1 + \mathrm{Re}\,\underline{z}_2) + \mathrm{j}\,(\mathrm{Im}\,\underline{z}_1 + \mathrm{Im}\,\underline{z}_2)$ $\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (a_1 + a_2) + \mathrm{j}\,(b_1 + b_2)$
Subtraktion	$\underline{z}_1 - \underline{z}_2 = (\mathrm{Re}\,z_1 - \mathrm{Re}\,z_2) + \mathrm{j}\,(\mathrm{Im}\,\underline{z}_1 - \mathrm{Im}\,\underline{z}_2)$ $\underline{z}_1 - \underline{z}_2 = (a_1 - a_2) + \mathrm{j}\,(b_1 - b_2)$
Multiplikation	$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = z_1 \cdot e^{\mathrm{j}\varphi 1} \cdot z_2 \cdot e^{\mathrm{j}\varphi 2}$ $\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = z_1 \cdot z_2 \cdot e^{\mathrm{j}(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Division	$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{z_1 \cdot e^{\mathrm{j}\varphi 1}}{z_2 \cdot e^{\mathrm{j}\varphi 2}}$ $\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot e^{\mathrm{j}(\varphi_1 - \varphi_2)}$

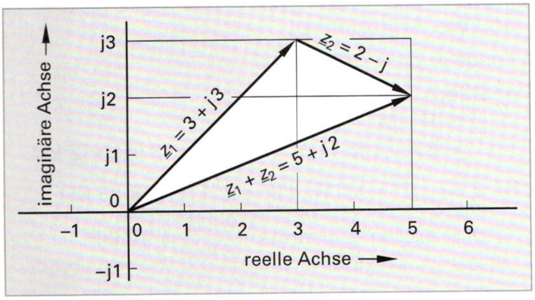


Bild 1: Zeigeraddition

	$\underline{z}_1$	$\underline{z}_2$
a)	5+j8	4–j3
b)	6–j5	3+j7
c)	$3 \cdot e^{\mathrm{j}90°}$	$8 \cdot e^{\mathrm{j}270°}$
d)	$20 \cdot e^{\mathrm{j}60°}$	$20 \cdot e^{\mathrm{j}300°}$

Bild 2: Komplexe Zahlen

	$\underline{z}_1$	$\underline{z}_2$
a)	$10 \cdot e^{\mathrm{j}120°}$	$5 \cdot e^{\mathrm{j}150°}$
b)	$8 \cdot e^{\mathrm{j}45°}$	$7 \cdot e^{\mathrm{j}60°}$
c)	6+j8	3–j4
d)	–10+j6	–5–j3

Bild 3: Komplexe Zahlen

Aufgaben zu 20.5.2

1. Bilden Sie die konjugierten Zahlen zu
   a) $\underline{z}_1 = 15 + \mathrm{j}3$ b) $\underline{z}_2 = -10 + \mathrm{j}8$
   c) $\underline{z}_3 = 5 - \mathrm{j}8$ d) $\underline{z}_4 = -6 - \mathrm{j}7$

2. Wie lauten die konjugierten Zahlen zu
   a) $\underline{z}_1 = 8 + \mathrm{j}4$ b) $\underline{z}_2 = 12 - \mathrm{j}5$
   c) $\underline{z}_3 = -10 + \mathrm{j}6$ d) $\underline{z}_4 = -5 - \mathrm{j}15$

3. Bilden Sie die Summe $\underline{z}_1 + \underline{z}_2$ der Zahlen **Bild 2**.

4. Bilden Sie die Differenz $\underline{z}_1 - \underline{z}_2$ der Zahlen **Bild 2**.

5. Stellen Sie die Zahlen j und j^2 in der Form $z \cdot e^{\mathrm{j}\varphi}$ dar.

6. Formen Sie den Ausdruck 1/j so um, dass j nicht mehr im Nenner vorkommt. Erweitern Sie 1/j mit j.

7. Berechnen Sie das Produkt $\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2$ der Zahlen **Bild 3**.

8. Berechnen Sie den Quotienten $\underline{z}_1/\underline{z}_2$ der Zahlen **Bild 3**.

9. Addieren Sie zur komplexen Zahl $\underline{z} = a + \mathrm{j}b$ ihre konjugierte Zahl und geben Sie von der Summe Betrag und Argument an.

10. Subtrahieren Sie von der komplexen Zahl $\underline{z} = a + \mathrm{j}b$ ihre konjugierte Zahl und geben Sie von der Differenz. Betrag und Argument an.

11. Bestimmen Sie Realteil Re $\underline{z}$ und Imaginärteil Im $\underline{z}$ der Zahl $\underline{z} = 1/(a + \mathrm{j}b)$. Lösungshinweis: Erweitern Sie dazu den Bruch mit der konjugierten Zahl des Nenners.

12. Geben Sie von der Zahl $\underline{z} = 1/(a - \mathrm{j}b)$ Realteil Re $\underline{z}$ und Imaginärteil Im $\underline{z}$ an.

20.5.3 Widerstand und Leitwert in der komplexen Ebene

Die Gesetze der Reihenschaltung und der Parallelschaltung gelten auch für komplexe lineare Netzwerke, wenn für die Widerstände die Bezeichnungen R, $\mathrm{j}X_L$ und $-\mathrm{j}X_C$ und für die Leitwerte die Bezeichnungen G, $-\mathrm{j}B_L$ und $\mathrm{j}B_C$ der **Tabelle 1** benützt werden. Das Argument φ ist der Phasenverschiebungswinkel von I zu U.

Beispiel 1: Reihenschaltung berechnen

Die Reihenschaltung aus $R = 8\ \mathrm{k\Omega}$, $\mathrm{j}X_L = \mathrm{j}5\ \mathrm{k\Omega}$ und $-\mathrm{j}X_C = -\mathrm{j}3\ \mathrm{k\Omega}$ liegt an einer Sinusspannung **(Bild 1).** a) Stellen Sie den Scheinwiderstand $\underline{Z}$ grafisch dar. b) Berechnen Sie den Betrag Z und das Argument φ.

Lösung:

a) **Bild 2**

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}X_L - \mathrm{j}X_C = 8\ \mathrm{k\Omega} + \mathrm{j}5\ \mathrm{k\Omega} + (-\mathrm{j}3\ \mathrm{k\Omega}) = \mathbf{8\ k\Omega + j2\ k\Omega}$$

b) $$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{(8^2 + 2^2)}\ \mathrm{k\Omega} = \mathbf{8{,}25\ k\Omega}$$

$$\varphi = \arctan \frac{X}{R} = \arctan \frac{2\ \mathrm{k\Omega}}{8\ \mathrm{k\Omega}} = \mathbf{14{,}04°}$$

Beispiel 2: Parallelschaltung berechnen

An einer Sinusspannung liegt die Parallelschaltung aus einem Wirkleitwert $G = 16\ \mathrm{mS}$, einem Kondensator mit $\mathrm{j}B_C = \mathrm{j}10\ \mathrm{mS}$ und einer Spule mit $-\mathrm{j}\ B_L = -\mathrm{j}4\ \mathrm{mS}$. a) Stellen Sie den Leitwert $\underline{Y}$ in der komplexen Leitwertsebene dar. b) Welchen Betrag hat der Scheinleitwert?

Lösung:

a) **Bild 3**

b) $$\underline{Y} = G + \mathrm{j}B_C - \mathrm{j}B_L = 16\ \mathrm{mS} + \mathrm{j}10\ \mathrm{mS} + (-\mathrm{j}4\ \mathrm{mS}) = 16\ \mathrm{mS} + \mathrm{j}6\ \mathrm{mS}$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{(16\ \mathrm{mS})^2 + (6\ \mathrm{mS})^2} = \mathbf{17{,}09\ mS}$$

Aufgaben zu 20.5.3

1. Ein RC-Hochpass mit $C = 22\ \mathrm{nF}$ und $R = 10\ \mathrm{k\Omega}$ liegt an einer Sinusspannung der Frequenz $f = 1\ \mathrm{kHz}$. Berechnen Sie von der Reihenschaltung a) Betrag Z, b) Winkel φ zwischen Strom und Gesamtspannung.

2. Ein RL-Tiefpass mit $L = 10\ \mathrm{mH}$ und $R = 2{,}2\ \mathrm{k\Omega}$ liegt an einer Sinusspannung mit $f = 30\ \mathrm{kHz}$. Wie groß sind von der Reihenschaltung a) Betrag Z, b) Argument φ?

Tabelle 1: Widerstand und Leitwert von *R, L, C* in der komplexen Rechnung

Größe	Widerstand $\underline{Z}$	Leitwert $\underline{Y}$
Wirkwiderstand R	$\underline{Z} = R$	$\underline{Y} = \frac{1}{R} = G$
Induktivität L	$\underline{Z} = \mathrm{j}\omega_L = \mathrm{j}X_L$	$\underline{Y} = \frac{1}{\mathrm{j}X_L} = -\mathrm{j}B_L$
Kapazität C	$\underline{Z} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega_C} = -\mathrm{j}X_C$	$\underline{Y} = \frac{1}{-\mathrm{j}X_C} = \mathrm{j}B_C$

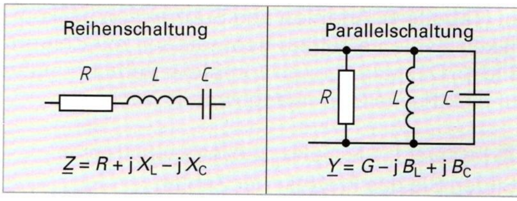


Bild 1: Komplexe Grundschaltungen

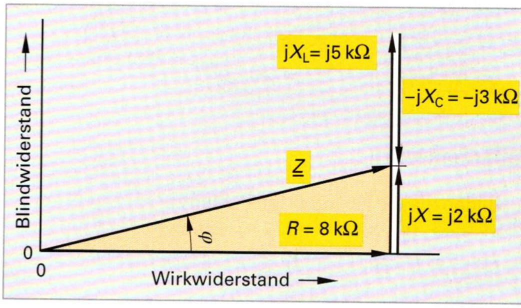


Bild 2: Komplexe Widerstandsebene

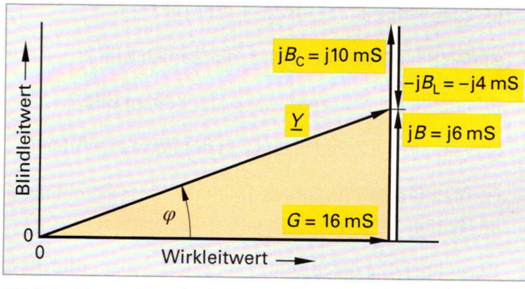


Bild 3: Komplexe Leitwertebene

3. Eine Reihenschaltung mit $L = 150\ \mathrm{mH}$ und $C = 470\ \mathrm{nF}$ liegt an einer Sinusspannung der Frequenz von 550 Hz. Der Reihenverlustwiderstand beträgt 100 Ω. a) Wie groß ist der Blindanteil X des Scheinwiderstandes? b) Welche Phasenlage hat die Gesamtspannung zum Strom? c) Eilt die Spannung vor oder nach?

20.6 Reihen

Eine Reihe ist die Summe der Terme einer Folge.

20.6.1 Arithmetische Reihe

Bei der arithmetischen Reihe ist die Differenz r zweier aufeinander folgender Terme stets gleich.

$$r = a_n - a_{n-1}$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot r]$$

$$n = \sqrt{2 \cdot \frac{s_n}{r} + \left(\frac{a_1}{r} - \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{a_1}{r} - \frac{1}{2}$$

r	Differenz	a_1	Anfangsterm
a_n	n-ter Term	n	Zahl der Terme
a_{n-1}	(n – 1)-ter Term	s_n	Summe der Reihe

Aufgaben zu 20.6.1

1. Ein Wickelkondensator hat 40 Lagen. Die innerste Lage ist 8 mm lang, die äußerste 38 mm. a) Welche Länge hat der Wickel? b) Um welche Länge nimmt der Umfang je Lage zu?

2. Eine Rundspule wird mit 76 Lagen lackisoliertem Kupferdraht bewickelt. Jede Lage enthält 370 Windungen. Die unterste Lage hat einen Durchmesser von d_u = 40 mm. Je Lage nimmt der Durchmesser um Δd = 0,54 mm zu. a) Welchen Durchmesser da hat die äußerste Lage? b) Wie lauten die ersten drei Terme der Reihe für die Drahtlänge l der Lagen? c) Wie viel Meter Draht enthält die ganze Wicklung?

3. Auf eine Rundspule werden 1524 m CuL-Draht gewickelt. Die Drahtlänge der untersten Lage ist 20,0 m. Je Lage nimmt die Drahtlänge um 0,50 m zu. a) Aus wie vielen Lagen besteht die Wicklung? b) Welche Drahtlänge hat die oberste Lage?

20.6.2 Geometrische Reihe

Bei der geometrischen Reihe ist der Quotient q zweier aufeinander folgender Terme stets gleich.

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

Für $q > 1$:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Für $q < 1$:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

q	Quotient
a_n	n-ter Term
a_{n-1}	(n – 1)-ter Term
s_n	Summe der ersten n Terme
n	Zahl der Terme

Aufgaben zu 20.6.2

1. Dünne Kupferdrähte werden hergestellt, indem man den Draht durch immer engere Düsen zieht. Von einem Draht mit 1,0 mm Durchmesser wird durch Ziehen der Durchmesser jeweils auf das 0,8-Fache verkleinert. a) Stellen Sie die ersten drei Terme der Reihe auf, die den Durchmesser nach dem jeweiligen Ziehen angibt. b) Welchen Durchmesser hat der Draht nach dem 10. Ziehen?

2. Bei der temperierten Stimmung der Töne ist der Quotient der Frequenzen zweier aufeinander folgender Halbtöne $q = \sqrt[12]{2}$. Die Frequenz f_1 = 440,00 Hz des Kammertons a' sei der erste Term der Reihe. Berechnen Sie die Frequenz der zugehörigen Quinte e" als 8. Term der Reihe für die temperierte Stimmung.

3. Beim radioaktiven Jodisotop $^{131}_{53}$J geht im Laufe eines Tages die Aktivität auf das 0,9174-Fache ihres Anfangswertes zurück. Welche Aktivität hat eine $^{131}_{53}$J-Probe, die jetzt mit 10000 Bq strahlt, noch nach a) 7 Tagen, b) 30 Tagen, c) 100 Tagen?

4. Bei der Normreihe E12 entsteht der nächste Wert aus dem vorangehenden durch Multiplikation mit dem Faktor $q = \sqrt[12]{10}$. a) Berechnen Sie den 11. Widerstandswert der Reihe, die mit 10 Ω beginnt. b) Runden Sie das Ergebnis auf zwei gültige Stellen.

5. Die Normreihe E24 wird mit dem Multiplikationsfaktor $q = \sqrt[24]{10}$ gebildet. a) Berechnen Sie für 10 Ω als Anfangswert der Reihe den 20. Widerstand dieser Reihe. b) Runden Sie das Ergebnis auf zwei gültige Stellen.

Kurzlösungen zu den Aufgaben im Buch

Ausführliche Lösungswege finden Sie im Buch „Methodische Lösungswege zu Mathematik fü Elektroniker/in für Geräte und Systeme".

Auf den Lösungsseiten finden Sie die Endergebnisse der Rechenaufgaben, ohne Schaltpläne, KV-Tafeln und Diagramme. Im Kurzlöser wird auf das Buch „Mathematik für Geräte- und Systemtechni Automatisierungstechnik Lösungen" verwiesen, wenn Teilaufgaben Schaltpläne, KV-Tafeln und Diagramme enthalten.

1 Rechnen mit Zahlen

1.1 Grundgesetze

1.1.1 Vertauschungsgesetz, Verbindungsgesetz, Verteilungsgesetz

Seite 10

1. a) 5 b) 5 c) –6 d) 6
2. a) 10 b) 5 c) 14 d) 20
3. a) –12 b) 30 c) –42 d) –54
4. a) –64 b) 45 c) –20 d) –6
5. a) 12 b) –6 c) 6 d) 6
6. a) 12 b) 3 c) 0 d) 6
7. a) 60 b) –30
8. a) 48 b) –24
9. a) 21 b) 15
10. a) 44 b) 9
11. a) –24 b) 6 c) –30 d) 40
12. a) –14 b) 0 c) –16 d) 36

1.1.2 Bruchrechnen

Seite 11

1. a) 5 b) 9 c) –24 d) –16
   e) 3 f) –13 g) 12 h) –3
2. a) – 8 b) 8 c) –4 d) –13
   e) 9 f) –9 g) 29 h) 6
3. a) $1\frac{29}{60}$ b) $\frac{7}{10}$ c) $-\frac{7}{30}$ d) $-\frac{43}{84}$
4. a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{25}{48}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{11}{16}$
5. a) $\frac{16}{53}$ b) $\frac{20}{21}$ c) $\frac{8}{15}$
   d) $\frac{65}{62}$ e) $2\frac{53}{126}$ f) $\frac{2}{3}$
6. a) $\frac{35}{37}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{34}{105}$
   d) $\frac{7}{120}$ e) $\frac{13}{216}$ f) $\frac{27}{55}$
7. a) 0,6 b) $0{,}2\overline{6} \approx 0{,}267$
   c) 0,096 d) $0{,}\overline{63} \approx 0{,}636$
   e) 0,6875
8. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $1\frac{23}{100}$ d) $2\frac{1}{20}$ e) $\frac{3}{40}$
9. a) $\frac{23}{72}$ b) $6\frac{151}{600}$
10. a) $\frac{999}{2264}$ b) $\frac{165}{289}$

1.2 Potenzen

1.2.1 Zehnerpotenzen

1.2.1.1 Werte der Zehnerpotenzen

Seite 12

1. a) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ b) $\frac{1}{10}$
   c) $10 \cdot 10 \cdot 10$ d) $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$
2. a) $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$
   b) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$
   c) $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$
   d) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$
3. a) 1000000 b) 0,001 c) 0,01 d) 0,000000001
4. a) 0,1; b) 1 c) 0,000 001 d) 100000000
5. a) 10^6; b) 10^{-7} c) 10^{-9} d) 10^{12}
6. a) 10^3; b) 10^0 c) 10^{-3} d) 10^{-1}
7. a) 1 b) 0,1 c) 1000 d) 0,0001
8. a) 1 000 000 b) 10 000 c) 0,01 d) 100 000
9. a) $24 \cdot 10^3$ b) $2{,}3 \cdot 10^{-3}$ c) $0{,}7 \cdot 10^6$
10. a) $12 \cdot 10^3$ b) $1{,}2 \cdot 10^{-4}$ c) $0{,}34 \cdot 10^6$