Ulf Backlund
Danderyds gymnasium
Matematik Specialisering 2
N20a, vt 2023

Inlämningsuppgift 5. **Moment: Analys och algebra.**

Lösningarna skall vara presenterade på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Inlämnas senast fredag den 26 maj 2023. Lösningarna inskannas (eller fotograferas) och mejlas till ulf.backlund@danderyd.se

---

Uppgift 1. Bestäm

$$\int\int_R (x+2y)\,dx\,dy$$

där R är rektangeln $\{(x,y) \mid 1 \le x \le 2 \text{ och } 3 \le y \le 5\}$. (2$p$)

Uppgift 2. Bestäm volymen av kroppen som ligger under ytan

$$z = 2xy + y^3$$

och ovanför området $R = \{(x,y) \mid 1 \le x \le 2 \text{ och } 0 \le y \le \sqrt{x}\}$. (2$p$)

Uppgift 3. Bestäm volymen av kroppen som begränsas av xy-planet och paraboloiden $z = 8 - 2(x^2 + y^2)$. (3p)

Summa summarum (Summan av det hela)
Plautus ca 255 f.kr. - 184 f.kr. Romersk komediförfattare.

Matematik specialisering 2 inlämning 5

Adam Amanbaev

Uppgift 1. —

$$\therefore \; R = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2 \;\wedge\; 3 \leq y \leq 5\}$$

$$\iint_R (x + 2y)\,dx\,dy = \int_3^5 \int_1^2 ((x + 2y)\,dx)\,dy \quad \text{(Fubini's sats)}$$

$$= \int_3^5 \left[\frac{x^2}{2} + 2yx\right]_1^2 dy = \int_3^5 2 + 4y - \frac{1}{2} - 2y\,dy = \int_3^5 \frac{3}{2} + 2y\,dy$$

$$= \left[y^2 + \frac{3}{2}y\right]_3^5 = 5^2 + 5 * \frac{3}{2} - 3^2 - 3 * \frac{3}{2} = 19$$

Uppgift 2. —

$$\therefore\ R = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2 \ \land\ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\} \ \land\ z = 2xy + y^3$$

Området R är y-enkelt vilket gör att volymen, V, av kroppen under ytan z kan beskrivas av följande dubbelintegral:

$$V = \int_1^2 \int_0^{\sqrt{x}} ((2xy + y^3)\ dy)\ dx = \int_1^2 \left[xy^2 + \frac{y^4}{4}\right]_0^{\sqrt{x}} dx \quad \text{(Fubini's sats)}$$

$$= \int_1^2 x^2 + \frac{x^2}{4} - 0\ dx = \frac{5}{4}\int_1^2 x^2\ dx = \frac{5}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{5}{4}(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3})$$

$$= \frac{5}{4}(\frac{7}{3}) = \frac{35}{12} \text{ v.e}$$

$\therefore$ Volymen av kroppen över R och under ytan z är lika med $V = \frac{35}{12}$ v.e.

Uppgift 3. —

Vi studerar först området, R, på xy-planet som volymen är över. Det är området då $z = 0$:

$$z = 0 \Rightarrow 8 - 2(x^2 + y^2) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2^2$$

$$\Rightarrow R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 2^2\}$$

Området R är alltså en cirkel med radie 2 och centrum i $(0, 0)$. Volymen, V, av kroppen som begränsas av området R i xy-planet och paraboloiden $z = 8 - 2(x^2 + y^2)$ kan beskrivas av följande dubbelintegral:

$$V = \iint_R z\, dA = \iint_R 8 - 2(x^2 + y^2)\, dA =_{\text{polära koordinater}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 ((8 - 2r^2)r\, dr)\, d\theta \quad \text{(jacobianen } r\text{)}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (8r - 2r^3\, dr)\, d\theta \quad = \int_0^{2\pi} \left[4r^2 - \frac{r^4}{2}\right]_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 4 * 2^2 - \frac{2^4}{2} - 4 * 0^2 + \frac{0^4}{2}\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} 8\, d\theta = [8\theta]_0^{2\pi} = 8 * 2\pi - 8 * 0 = 16\pi \text{ v.e}$$

$\therefore$ Volymen av kroppen som begränsas av xy-planet och z är lika med $V = 16\pi$ v.e.