

Inlämningsuppgift 4. Moment: Analys och algebra.

Lösningarna skall vara presenterade på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa.
Inlämnas senast måndag den 22 maj 2023. Lösningarna inskannas (eller fotograferas) och mejlas till
ulf.backlund@danderyd.se

Uppgift 1. Bestäm gränsvärdet ifall det existerar.

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (2p)

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ (2p)

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x - y}{x^2 - y^2}$ (2p)

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(2x^3y)}{x^4 + 16y^4}$ (2p)

Uppgift 2. Bestäm definitions mängd och värdemängd för funktionen

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x - y}.$$

Rita definitions mängden i xy -planet. (2p)

Uppgift 3. a) Bestäm fyra stycken nivåkurvor till funktionen $f(x, y) = y - x^2$ och rita dem i xy -planet.

b) Bestäm fyra stycken nivåkurvor till funktionen $f(x, y) = \ln(x + y)$ och rita dem i xy -planet. (3p)

Uppgift 4. Bestäm ekvationen (på normalform) för tangentplanet till ytan funktionen $z = x^3y^5$ i den punkt där $x = 2$ och $y = 1$. (2p)

Uppgift 5. Beräkna absolut maximum och absolut minimum av funktionen

$$f(x, y) = y^2 + x^2y + x^2 - 2y$$

på det slutna, begränsade området R i xy -planet som ligger innanför och på triangeln med hörn i punkterna $(1,0)$, $(1,-6)$ och $(4,0)$. (5p)

Dictum factum (Sagt och gjort)

Terentius ca 185 f.kr. - 159 f.kr. Romersk komediförfattare.

Matematik specialisering 2 inlämning 4

Adam Amanbaev

UPPGIFT 1. —

- a) Vi undersöker först gränsvärdet längs y-axeln, det vill säga när $x=0$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow \lim_{(x=0)} \frac{3y * 0}{\sqrt{y^2 + 0^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

Om gränsvärdet existerar ska det alltså vara lika med 0 och detta stämmer redan då $x = 0$.

Vidare gäller följande för $(x, y) \neq (0, 0)$ och $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq |f(x, y) - L| = \left| \frac{3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| = \left| \frac{3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \underset{(y^2 \geq 0)}{\leq} \\ &\leq \left| \frac{3xy}{\sqrt{x^2}} \right| = \left| \frac{3xy}{x} \right| = |3y| \end{aligned}$$

Eftersom $|3y|$ rör sig mot 0 då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ger instängningssatsen följande:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

- b) Vi undersöker gränsvärdet längs x-axeln då $y=0$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \Rightarrow \lim_{y=0} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

Sedan undersöker vi gränsvärdet längs y-axeln då $x=0$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \Rightarrow \lim_{x=0} \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} -1 = -1$$

Eftersom vi har fått två olika värden, 1 och -1, längs två olika kurvor in mot $(0, 0)$ existerar gränsvärdet ej.

- c) Vi undersöker gränsvärdet längs linjen $y=x$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x - y}{x^2 - y^2} \Rightarrow \lim_{y=x} \frac{x - x}{x^2 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2}$$

Om gränsvärdet existerar är den alltså lika med $\frac{1}{2}$.

d) hello

UPPGIFT 2. —

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x - y}$$

$$\therefore x - y \neq 0 \wedge \sqrt{x^2 + y^2 - 9} \geq 0$$

$$\Rightarrow y \neq x \wedge x^2 + y^2 - 9 \geq 0$$

$$\Rightarrow y \neq x \wedge x^2 + y^2 \geq 9$$

Definitionsmängden är alltså komplementet till mängden av punkter (x, y) sådana att $y = x$ eller $x^2 + y^2 \leq 9$. Det innebär att definitionsmängden för f är alla punkter som inte ligger på linjen $y = x$ och som inte ligger innanför cirkeln $x^2 + y^2 = 9$.

$$\therefore D_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 9 \wedge y \neq x\}$$

Därefter kan vi låta $x = y \pm 1$ vilket ger oss följande:

$$f(x, y) = f(y \pm 1, y) = \frac{\sqrt{(y \pm 1)^2 + y^2 - 9}}{\pm 1} = \pm \sqrt{2y^2 \pm 2y - 8}$$

Eftersom $g(y) = 2y^2 \pm 2y - 8$ antar alla reella värden större och lika med 0 antar $\sqrt{g(y)}$ också alla reella värden större och lika med noll. Alltså kan f anta både alla negativa och positiva reella samt 0.

$$\therefore V_f = \mathbf{R}$$

UPPGIFT 3. —

- a) Vi låter $f(x, y)$ vara fyra olika konstanter för att få fyra olika nivåkurvor. Låt dessa vara 0, 1, 2, och 3 för enkelhetens skull:

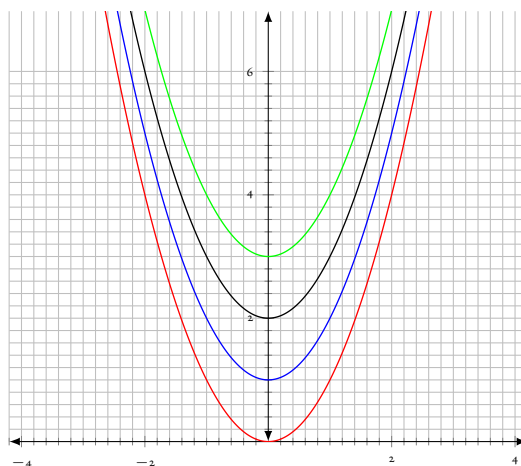
$$f(x, y) = 0 = y - x^2 \Rightarrow y = x^2 \text{ (Röd)}$$

$$f(x, y) = 1 = y - x^2 \Rightarrow y = 1 + x^2 \text{ (Blå)}$$

$$f(x, y) = 2 = y - x^2 \Rightarrow y = 2 + x^2 \text{ (Svart)}$$

$$f(x, y) = 3 = y - x^2 \Rightarrow y = 3 + x^2 \text{ (Grön)}$$

Nedan följer skissering av varje nivåkurva i xy-planet i respektive färg:



- b) För följande nivåkurvor sätter jag $f(x, y)$ till 0, $\ln(1)$, $\ln(2)$ och $\ln(3)$:

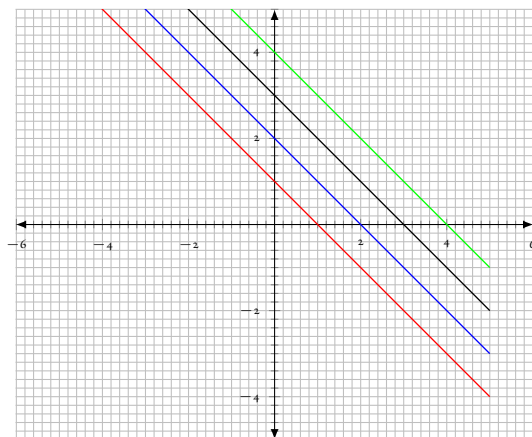
$$f(x, y) = 0 = \ln(x + y) \Rightarrow e^0 = e^{\ln(x+y)} \Rightarrow y = e^0 - x \text{ (Röd)}$$

$$f(x, y) = \ln(1) = \ln(x + y) \Rightarrow e^{\ln(1)} = e^{\ln(x+y)} \Rightarrow y = 1 - x \text{ (Blå)}$$

$$f(x, y) = \ln(2) = \ln(x + y) \Rightarrow e^{\ln(2)} = e^{\ln(x+y)} \Rightarrow y = 2 - x \text{ (Svart)}$$

$$f(x, y) = \ln(3) = \ln(x + y) \Rightarrow e^{\ln(3)} = e^{\ln(x+y)} \Rightarrow y = 3 - x \text{ (Grön)}$$

Nedan följer skissering av varje nivåkurva i xy-planet i respektive färg:



UPPGIFT 4. —

Vi ska bestämma tangentplanet till $z = x^3y^5$ i punkten $(2, 1, 2^3 * 1^5)$:

$$z = f(x, y) = x^3y^5$$

$$\therefore f_x = 3x^2y^5 \wedge f_y = 5y^4x^3$$

$$\Rightarrow f_x(2, 1) = 3 * 2^2 * 1^5 = 12 \wedge f_y(2, 1) = 5 * 1^4 * 2^3 = 40$$

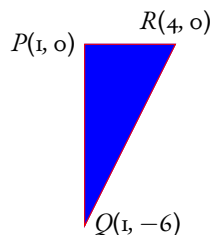
Tangentplanets ekvation vid punkten $(2, 1, 8)$ på normalform blir därmed:

$$\mathbf{E} : f_x(2, 1)(x - 2) + f_y(2, 1)(y - 1) - (z - f(2, 1)) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} : 12(x - 2) + 40(y - 1) - (z - 8) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} : 12x + 40y - z = 56$$

UPPGIFT 5. —



Låt det blåa området betecknas av D där den röda randen inte inkluderas. Vi börjar med att söka alla punkter inom D som eventuellt kan ge ett absolut minimum eller maximum genom att lösa ekvationssystemet där partialderivatorna till $f(x, y) = y^2 + x^2y + x^2 - 2y$ är noll ty horisontellt tangentplan:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy + 2x = 0 \\ 2y + x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(y + 1) = 0 \\ 2y + x^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Ekvationen $2x(y + 1) = 0$ ger två fall; $x = 0$ och $y = -1$. Insättning av dess i andra ekvationen ger:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2y + 0^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ -2 + x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Den enda av dessa lösningar som ligger inom D är $(2, -1)$. Vidare ska vi studera randen, det röda i bilden ovan, som kan delas in i tre delar; linjen som går mellan P och Q , linjen som går mellan P och R och linjen som går mellan Q och R :

På linjen mellan P och Q gäller $x = 1$ vilket ger:

$$f(1, y) = g(y) = y^2 + y - 2y + 1, \quad -6 \leq y \leq 0$$

$g(y)$ är strikt minskande då $-6 \leq y \leq 0$ vilket ger oss två punkter; ett potentiellt minimum vid $(1, 0)$ och ett potentiell maximum vid $(1, -6)$.

På linjen mellan P och R gäller $y = 0$ vilket ger:

$$f(x, 0) = g(x) = x^2, \quad 1 \leq x \leq 4$$

$g(x)$ är strikt ökande då $1 \leq x \leq 4$ vilket ger oss två punkter; ett potentiellt minimum vid $(1, 0)$ och ett potentiellt maximum vid $(4, 0)$.

På linjen mellan Q och R gäller $y = 2x - 8$ vilket ger:

$$\begin{aligned} f(x, 2x - 8) &= h(x) = (2x - 8)^2 + x^2(2x - 8) + x^2 - 2(2x - 8) \\ &= 2x^3 - 3x^2 - 36x + 80, \quad 1 \leq x \leq 4 \end{aligned}$$

$$\therefore h'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \wedge x_2 = 3 \xRightarrow{1 \leq x \leq 4} x = 3$$

$h(x)$ har alltså en extrempunkt vid $(3, -2)$ och vi behöver även pröva ändpunkterna vid $(1, -6)$ och $(4, 0)$. Detta ger oss alltså tre punkter.

Sammantaget behöver vi pröva punkterna $(2, -1)$, $(1, 0)$, $(1, -6)$, $(4, 0)$ och $(3, -2)$:

$$f(2, -1) = (-1)^2 + 2^2 * (-1) + 2^2 - 2 * (-1) = 3$$

$$f(1, 0) = 0^2 + 1^2 * 0 + 1^2 - 2 * 0 = 1$$

$$f(1, -6) = (-6)^2 + 1^2 * (-6) + 1^2 - 2 * (-6) = 43$$

$$f(4, 0) = 0^2 + 4^2 * 0 + 4^2 - 2 * 0 = 16$$

$$f(3, -2) = (-2)^2 + 3^2 * (-2) + 3^2 - 2 * (-2) = -1$$

Funktionen f har alltså det absoluta minimumet -1 som antas vid $(3, -2)$ och det absoluta maximumet 43 som antas vid $(1, -6)$.