Ulf Backlund
Danderyds gymnasium
Matematik Specialisering 2
N20a, vt 2023

Inlämningsuppgift 2. **Moment: Analys och algebra.**

Lösningarna skall vara presenterade på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Inlämnas senast torsdag den 27 april 2023. Lösningarna inskannas (eller fotograferas) och mejlas till ulf.backlund@danderyd.se

---

Uppgift 1. a) Sök egenvärden och egenvektorer till matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

och

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) Är matrisen A diagonaliserbar?

c) Är matrisen B diagonaliserbar? *(4p)*

Uppgift 2. Låt

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Beräkna B^{2023}. *(3p)*

Uppgift 3. Klassificera (d.v.s. ange den geometriska betydelsen) följande andragradsuttryck och skissera det i xy-planet.

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4 = 0$$

(6p)

Uppgift 4. Klassificera (d.v.s. ange den geometriska betydelsen) följande andragradsuttryck och skissera det i xy-planet.

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 - 2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y - 4 = 0$$

(2p)

Matematik specialisering 2 inlämning 2

Adam Amanbaev

Uppgift 1. —

a) Karakteristiska ekvationen ger följande:

$$det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 0 - \lambda & -1 - 0 \\ 0 - 0 & 0 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Det enda egenvärdet för matrisen A är alltså $\lambda = 0$.

$$\therefore\ (A - \lambda E)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = t,\ t \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Vi får egenvektorerna $X = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbf{R}$ för matrisen A.

På samma vis får vi egenvärdena och egenvektorerna för matris B:

$$det(B - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 9 - \lambda & 5 - 0 \\ 1 - 0 & 5 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (9 - \lambda)(5 - \lambda) - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 14\lambda + 40 = 0 \Rightarrow \lambda = 7 \pm 3$$

$$\therefore\ (A - \lambda E)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 - (7 \pm 3) & 5 \\ 1 & 5 - (7 \pm 3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9x_1 - (7 \pm 3)x_1 + 5x_2 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - (7 \pm 3)x_2 = 0 \end{cases}$$

Fall 1 (-):

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \end{cases} t \in \mathbf{R} \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$$

Fall 2 (+):

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 = 0 \\ x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5x_2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5t \\ x_2 = t \end{cases} t \in \mathbf{R} \Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} 5t \\ t \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Matris A har egenvärdet $\lambda = 0$ och egenvektorerna $X = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbf{R}$

medan matris B har egenvärdena $\lambda_1 = 4 \ \wedge \ \lambda_2 = 10$ och egenvektorerna

$$X_1 = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \wedge \ X_2 = \begin{pmatrix} 5t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbf{R}$$

b) För att 2x2 matrisen A ska vara diagonaliserbar behöver den ha åtminstone två linjärt oberoende egenvektorer. Vi såg dock att den endast har en linjärt oberoende egenvektor vilket gör att A inte är diagonaliserbar.

c) Precis som matris A behöver matris B ha åtminstone två linjärt oberoende egenvektorer för att vara diagonaliserbar. B har till exempel egenvektorerna $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ som är linjärt oberoende och därför är B diagonaliserbar.

Uppgift 2. — Beräkna B^{2023}

Från uppgift 1 vet vi att matrisen $B = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ har egenvärdena $\lambda_1 = 4 \ \wedge \ \lambda_2 = 10$ och egenvektorerna $X_1 = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \wedge \ X_2 = \begin{pmatrix} 5t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \ t \in \mathbf{R}$. Vi vet därmed att matrisen A är diagonaliserbar ty den har två linjärt oberoende egenvektorer $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Insättning av dessa egenvektorer och egenvärdena ovan ger följande:

$$\therefore \ D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \ \wedge \ T = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ \wedge \ T^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \ D = T^{-1}BT$$

$$\Leftrightarrow \ TD = TT^{-1}BT \ \Leftrightarrow \ TDT^{-1} = BTT^{-1} \ \Leftrightarrow \ B = TDT^{-1}$$

$$\therefore \ B^{2023} = (TDT^{-1})^{2023} = (TDT^{-1})(TDT^{-1})(TDT^{-1})...(TDT^{-1})$$

$$=_{Associativitet} \ TD(T^{-1}T)D(T^{-1}T)D(T^{-1}T)...(T^{-1}T)DT^{-1}$$

$$= TD^{2023}T^{-1}$$

$$\therefore \ B^{2023} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^{2023} & 0 \\ 0 & 10^{2023} \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4^{2023} & 5 \times 10^{2023} \\ 4^{2023} & 10^{2023} \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4^{2023} + 5 \times 10^{2023} & -5 \times 4^{2023} + 5 \times 10^{2023} \\ -4^{2023} + 10^{2023} & 5 \times 4^{2023} + 10^{2023} \end{pmatrix}$$

Uppgift 3. — Klassificera (d.v.s. ange den geometriska betydelsen) andragradsuttrycket $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4 = 0$ och skissera det i xy-planet.

Vi vill få bort $-2xy$ termen för att enklare kunna klassificera uttrycket vilket vi gör genom att diagonalisera matrisen $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ som även kan ses som en rotation i koordinatsystemet. Vi börjar med att hitta A:s egenvärden och egenvektorer med hjälp av karakteristiska ekvationen:

$$det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -1-0 \\ -1-0 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 5 \pm 1$$

$$\therefore\ (A - \lambda E)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5-(5\pm 1) & -1 \\ -1 & 5-(5\pm 1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x_1 - (5\pm 1)x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 - (5\pm 1)x_2 = 0 \end{cases}$$

Fall 1 (-):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R} \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

Fall 2 (+):

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R} \Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Matrisen A har egenvärdena $\lambda_1 = 4 \wedge \lambda_2 = 6$ och egenvektorerna $X_1 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge$ $X_2 = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbf{R}$.

Vi skriver om första delen av andragradsuttryket på följande vis:

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 = K^t AK, \text{ där } K = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \wedge A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Sedan normerar vi egenvektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ har längd } \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ har längd } \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Två linjärt oberoende egenvektorer med längd 1 blir

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Detta ger den ortogonala basbytesmatrisen $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Vi ser även att $det(T) = 1$ vilket motsvarar en rotation. Genom att diagonalisera matrisen A med hjälp av ortogonalmatrisen T får vi följande diagonalmatris D:

$$D = T^{-1}AT = T^t AT$$

$$\Leftrightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow D = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Vi låter $K = TK^{'}$ vilket även ger $K^t = (K^{'})^t T^t$, där $K = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ är koordinaterna innan basbytet med basbytesmatrisen T och $K^{'} = \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix}$ är koordinaterna efter basbytet.

$$\therefore\ 5x^2 - 2xy + 5y^2 = K^t AK = (K^{'})^t T^t ATK^{'} = (K^{'})^t (T^t AT) K^{'}$$

$$= (K^{'})^t DK^{'} = 4(x^{'})^2 + 6(y^{'})^2$$

Eftersom basbytet är en rotation vet vi följande:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow\ \theta = 45^\circ$$

Sammantaget vet vi alltså följande om vårt andragradsuttryck:

$$\therefore\ 5x^2 - 2xy + 5y^2 = 4 \Leftrightarrow 4(x^{'})^2 + 6(y^{'})^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{(x^{'})^2}{1^2} + \frac{(y^{'})^2}{(\frac{2}{\sqrt{6}})^2} = 1$$

Det givna andragradsuttrycket $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4 = 0$ är alltså ellipsen som beskrivs av $\frac{(x^{'})^2}{1^2} + \frac{(y^{'})^2}{(\frac{2}{\sqrt{6}})^2} = 1$ fast roterad 45° moturs enligt följande figur:

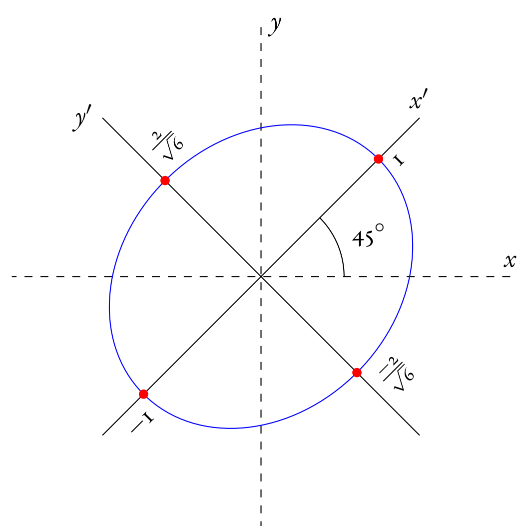

Figure 1: Ellipsen som beskrivs $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4 = 0$

Uppgift 4. — Klassificera (d.v.s. ange den geometriska betydelsen) andragradsuttrycket $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y - 4 = 0$ och skissera det i xy-planet.

Enligt uppgift 4 kan vi beskriva första delen av uttrycket $5x^2 - 2xy + 5y^2$ som $4(x^{'})^2 + 6(y^{'})^2$ där vi har följande basbyte och basbytesmatris T:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix}$$

Vi kan även skriva andra delen av uttrycket, förutom konstanten 4, med basbytet på följande vis:

$$-2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ -2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2+3 & 2+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix} = x^{'} + 5y^{'}$$

$$\therefore\ 5x^2 - 2xy + 5y^2 - 2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y - 4 = 0 \Leftrightarrow 4(x^{'})^2 + 6(y^{'})^2 + x^{'} + 5y^{'} = 4$$

$$\Leftrightarrow_{\textit{Kvadratkomplettering}}\ 4(x^{'} + \frac{1}{8})^2 - \frac{1}{16} + 6(y^{'} + \frac{5}{12})^2 - \frac{25}{24} = 4$$

$$\Leftrightarrow 4(x^{'} + \frac{1}{8})^2 + 6(y^{'} + \frac{5}{12})^2 = \frac{245}{48} \Leftrightarrow \frac{(x^{'} + \frac{1}{8})^2}{(\sqrt{\frac{245}{192}})^2} + \frac{(y^{'} + \frac{5}{12})^2}{(\sqrt{\frac{245}{288}})^2} = 1$$

$\therefore$ Andragradsuttrycket $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y - 4 = 0$ är ekvivalent med ellipsen som beskrivs av uttrycket $\frac{(x^{'} + \frac{1}{8})^2}{(\sqrt{\frac{245}{192}})^2} + \frac{(y^{'} + \frac{5}{12})^2}{(\sqrt{\frac{245}{288}})^2} = 1$ där basbytet motsvarar en medurs rotation med 45° vilket visades i uppgift 3. Detta skisseras i figuren på nästa sida:

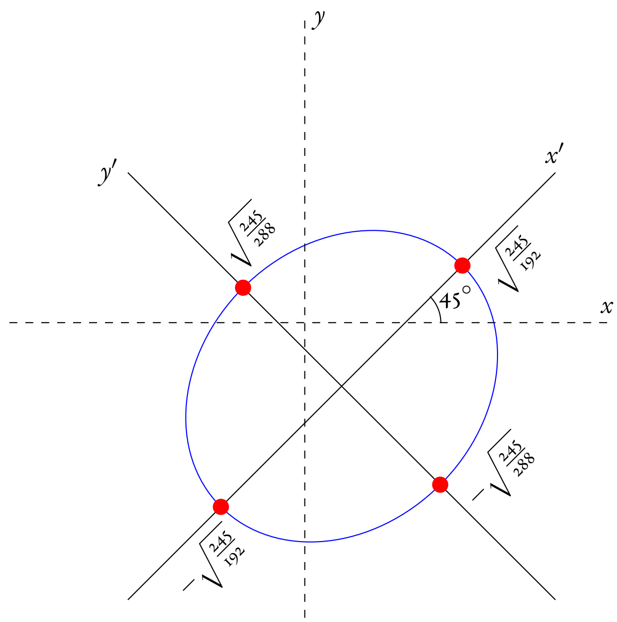

FIGURE 2: Ellipsen som beskrivs av $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y - 4 = 0$