Ulf Backlund
Danderyds gymnasium
Matematik Specialisering 2
N20a, vt 2023

Inlämningsuppgift 4. **Moment: Analys och algebra.**

Lösningarna skall vara presenterade på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa.
Inlämnas senast måndag den 22 maj 2023. Lösningarna inskannas (eller fotograferas) och mejlas till
ulf.backlund@danderyd.se

Uppgift 1. Bestäm gränsvärdet ifall det existerar.

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ (2p)

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$ (2p)

c) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$$ (2p)

d) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x^3y)}{x^4+16y^4}$$ (2p)

Uppgift 2. Bestäm definitionsmängd och värdemängd för funktionen

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x-y}.$$

Rita definitionsmängden i xy-planet. (2p)

Uppgift 3. a) Bestäm fyra stycken nivåkurvor till funktionen $f(x,y) = y - x^2$ och rita dem i xy-planet.

b) Bestäm fyra stycken nivåkurvor till funktionen $f(x,y) = \ln(x+y)$ och rita dem i xy-planet. (3p)

Uppgift 4. Bestäm ekvationen (på normalform) för tangentplanet till ytan funktionen $z = x^3y^5$ i den punkt där $x = 2$ och $y = 1$. (2p)

Uppgift 5. Beräkna absolut maximum och absolut minimum av funktionen

$$f(x,y) = y^2 + x^2y + x^2 - 2y$$

på det slutna, begränsade området R i xy-planet som ligger innanför och på triangeln med hörn i punkterna (1,0), (1,-6) och (4,0). (5p)

Dictum factum (Sagt och gjort)

Terentius ca 185 f.kr. - 159 f.kr. Romersk komediförfattare.

Matematik specialisering 2 inlämning 4

Adam Amanbaev

Uppgift 1. —

a) Vi undersöker först gränsvärdet längs y-axeln, det vill säga när x=0:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{(x=0)}{\Rightarrow} \lim_{y\to 0} \frac{3y * 0}{\sqrt{y^2+0^2}} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Om gränsvärdet exister ska det alltså vara lika med 0 och detta stämmer redan då $x = 0$. Vidare gäller följande för $(x, y) \neq (0, 0)$ och $x \neq 0$:

$$0 \leq |f(x,y) - L| = \left| \frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \left| \frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \underset{(y^2\geq 0)}{\leq}$$

$$\leq \left| \frac{3xy}{\sqrt{x^2}} \right| = \left| \frac{3xy}{x} \right| = |3y|$$

Eftersom |3y| rör sig mot 0 då $(x, y) \to (0, 0)$ ger instängningssatsen följande:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

b) Vi undersöker gränsvärdet längs x-axeln då y=0:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \underset{y=0}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{x^2-0}{x^2+0} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Sedan undersöker vi gränsvärdet längs y-axeln då x=0:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \underset{x=0}{\Rightarrow} \lim_{y\to 0} \frac{0-y^2}{0+y^2} = \lim_{x\to 0} -1 = -1$$

Eftersom vi har fått två olika värden, 1 och -1, längs två olika kurvor in mot (0, 0) existerar gränsvärdet ej.

c) Vi undersöker gränsvärdet längs linjen y=1:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2} \underset{y=1}{\Rightarrow} \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Om gränsvärdet existerar är den alltså lika med $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{(x-y)(x+y)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Gränsvärdet existerar alltså och är lika med $\frac{1}{2}$.

d) Vi undersöker först gränsvärdet längs x-axeln då y=0:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x^3y)}{x^4+16y^4} \underset{y=0}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(0)}{x^4} = 0$$

Alltså ska gränsvärdet bli lika med 0 om det existerar. Vi undersöker sedan gränsvärdet längs linjen $y = x$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x^3y)}{x^4+16y^4} \underset{y=x}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x^4)}{17x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{D(\sin(2x^4))}{D(17x^4)} \quad \text{(L'Hôpitals regel)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{8x^3\cos(2x^4)}{68x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{D(8x^3\cos(2x^4))}{D(68x^3)} \quad \text{(L'Hôpitals regel)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{24x^2\cos(2x^4) - 64x^6\sin(2x^4)}{204x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{D(24x^2\cos(2x^4) - 64x^6\sin(2x^4))}{D(204x^2)} \quad \text{(L'Hôpitals regel)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-16x((-3+32x^8)\cos(2x^4) + 36x^4\sin(2x^4))}{408x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{D(-16x((-3+32x^8)\cos(2x^4) + 36x^4\sin(2x^4)))}{D(408x)} \quad \text{(L'Hôpitals regel)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{16((3-576x^8)\cos(2x^4) + 4x^4(-51+64x^8)\sin(2x^4))}{408}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{16((3-576*0^8)\cos(2*0^4) + 4*0^4(-51+64*0^8)\sin(2*0^4))}{408} = \frac{48}{408}$$

Eftersom vi har fått två olika värden, 0 och $\frac{48}{408}$, längs två olika kurvor in mot (0, 0) existerar gränsvärdet ej.

Uppgift 2. —

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x-y}$$

$$\therefore\ x-y \neq 0 \ \wedge\ \sqrt{x^2+y^2-9} \geq 0$$

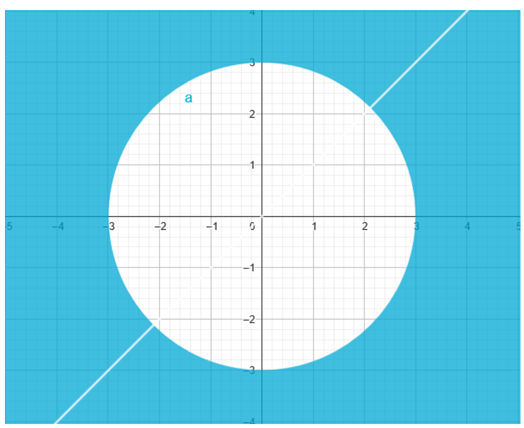
$$\Rightarrow\ y \neq x \ \wedge\ x^2+y^2-9 \geq 0$$

$$\Rightarrow\ y \neq x \ \wedge\ x^2+y^2 \geq 9$$

Definitionsmängden är alltså komplementet till mängden av punkter (x, y) sådana att $y = x$ eller $x^2 + y^2 < 9$. Det innebär att definitionsmängden för f är alla punkter som inte ligger på linjen $y = x$ och som inte ligger innanför cirkeln $x^2 + y^2 = 9$.

$$\therefore D_f = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 \geq 9 \ \wedge\ y \neq x\}$$

Nedan följer en skissering av f:s definitionsmängd som är i blått. Det vita är utanför definitionsmängden.



Därefter kan vi låta $x = y \pm 1$ vilket ger oss följande:

$$f(x,y) = f(y \pm 1, y) = \frac{\sqrt{(y\pm 1)^2 + y^2 - 9}}{\pm 1} = \pm\sqrt{2y^2 \pm 2y - 8}$$

Eftersom $g(y) = 2y^2 \pm 2y - 8$ oavsett tecknet framför $2y$ antar alla reella värden större och lika med 0 antar $\sqrt{g(y)}$ också alla reella värden större och lika med noll. Alltså kan f anta både alla negativa och positiva reella tal samt 0. Värdemängden blir helt enkelt de reella talen.

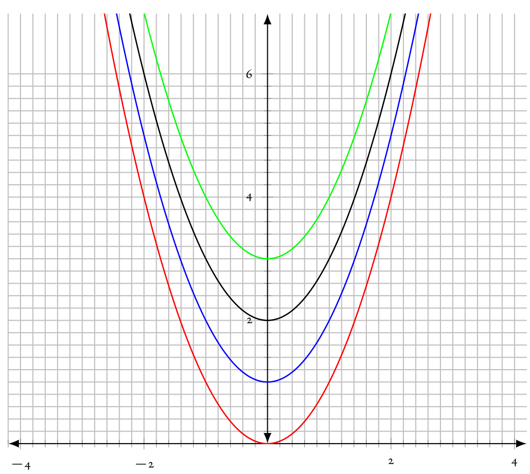
$$\therefore\ V_f = \{z \in \mathbf{R}\}$$

Uppgift 3. —

a) Vi låter $f(x,y)$ vara fyra olika konstanter för att få fyra olika nivåkurvor. Låt dessa vara 0, 1, 2, och 3 för enkelhetens skull:

$$f(x,y) = 0 = y - x^2 \;\Rightarrow\; y = x^2 \quad \text{(Röd)}$$
$$f(x,y) = 1 = y - x^2 \;\Rightarrow\; y = 1 + x^2 \quad \text{(Blå)}$$
$$f(x,y) = 2 = y - x^2 \;\Rightarrow\; y = 2 + x^2 \quad \text{(Svart)}$$
$$f(x,y) = 3 = y - x^2 \;\Rightarrow\; y = 3 + x^2 \quad \text{(Grön)}$$

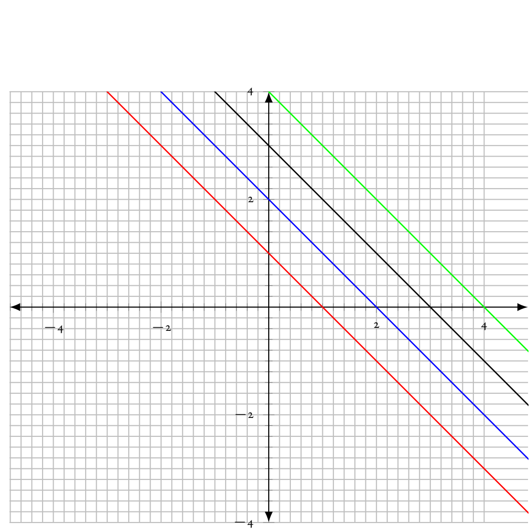
Nedan följer skissering av varje nivåkurva i xy-planet i respektive färg:



b) För följande nivåkurvor sätter jag $f(x,y)$ till $ln(1)$, $ln(2)$, $ln(3)$ och $ln(4)$:

$$f(x,y) = ln(1) = ln(x+y) \;\Rightarrow\; e^{ln(1)} = e^{ln(x+y)} \;\Rightarrow\; y = 1 - x \quad \text{(Röd)}$$
$$f(x,y) = ln(2) = ln(x+y) \;\Rightarrow\; e^{ln(2)} = e^{ln(x+y)} \;\Rightarrow\; y = 2 - x \quad \text{(Blå)}$$
$$f(x,y) = ln(3) = ln(x+y) \;\Rightarrow\; e^{ln(3)} = e^{ln(x+y)} \;\Rightarrow\; y = 3 - x \quad \text{(Svart)}$$
$$f(x,y) = ln(4) = ln(x+y) \;\Rightarrow\; e^{ln(4)} = e^{ln(x+y)} \;\Rightarrow\; y = 4 - x \quad \text{(Grön)}$$

Nedan följer skissering av varje nivåkurva i xy-planet i respektive färg:


4
2
−2
−4
−4
−2
2
4

Uppgift 4. —

Vi ska bestämma tangentplanet till $z = x^3y^5$ i punkten $(2, 1, 2^3 * 1^5)$:

$$z = f(x, y) = x^3y^5$$

$$\therefore\ f_x = 3x^2y^5 \ \wedge f_y = 5y^4x^3$$

$$\Rightarrow\ f_x(2, 1) = 3 * 2^2 * 1^5 = 12 \ \wedge f_y(2, 1) = 5 * 1^4 * 2^3 = 40$$

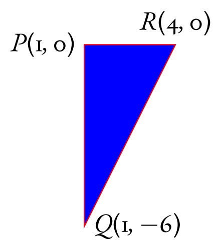
Tangentplanets ekvation vid punkten $(2, 1, 8)$ på normalform blir därmed:

$$\mathbf{E}:\ f_x(2, 1)(x - 2) + f_y(2, 1)(y - 1) - (z - f(2, 1)) = 0$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{E}:\ 12(x - 2) + 40(y - 1) - (z - 8) = 0$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{E}:\ 12x + 40y - z = 56$$

Uppgift 5. —



Låt det blåa området betecknas av D där den röda randen inte inkluderas. Vi börjar med att söka alla punkter inom D som eventuellt kan ge ett absolut minimum eller maximum genom att lösa ekvationssystemet där partialderivatorna till $f(x, y) = y^2 + x^2y + x^2 - 2y$ är noll ty horisontellt tangentplan:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy + 2x = 0 \\ 2y + x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(y+1) = 0 \\ 2y + x^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Ekvationen $2x(y+1) = 0$ ger två fall; $x = 0$ och $y = -1$. Insättning av dess i andra ekvationen ger:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2y + 0^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ -2 + x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Den enda av dessa lösningar som ligger inom D är $(2, -1)$. Vidare ska vi studera randen, det röda i bilden ovan, som kan delas in i tre delar; linjen som går mellan P och Q, linjen som går mellan P och R och linjen som går mellan Q och R:

På linjen mellan P och Q gäller $x = 1$ vilket ger:

$$f(1, y) = g(y) = y^2 + y - 2y + 1, \ \ -6 \leq y \leq 0$$

$g(y)$ är strikt minskande då $-6 \leq y \leq 0$ ty $g'(y) = 2y - 1$ vilket ger oss två punkter; ett potentiellt minimum vid $(1, 0)$ och ett potentiell maximum vid $(1, -6)$.

På linjen mellan P och R gäller $y = 0$ vilket ger:

$$f(x, 0) = g(x) = x^2, \ \ 1 \leq x \leq 4$$

$g(x)$ är strikt ökande då $1 \leq x \leq 4$ ty $g^{'}(x) = 2x$ vilket ger oss två punkter; ett potentiellt minimum vid $(1, 0)$ och ett potentiellt maximum vid $(4, 0)$.

På linjen mellan Q och R gäller $y = 2x - 8$ vilket ger:

$$\begin{aligned} f(x, 2x-8) = h(x) &= (2x-8)^2 + x^2(2x-8) + x^2 - 2(2x-8) \\ &= 2x^3 - 3x^2 - 36x + 80, \;\; 1 \leq x \leq 4 \end{aligned}$$

$$\therefore \; h^{'}(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -2 \;\wedge\; x_2 = 3 \underset{1 \leq x \leq 4}{\Rightarrow} x = 3$$

$h(x)$ har alltså en extrempunkt då $x = 3$ som ger punkten $(3, -2)$ att pröva och vi behöver även pröva ändpunkterna vid $(1, -6)$ och $(4, 0)$. Detta ger oss alltså tre punkter.

Sammantaget behöver vi pröva punkterna $(2, -1)$, $(1, 0)$, $(1, -6)$, $(4, 0)$ och $(3, -2)$:

$$\begin{gathered} f(2, -1) = (-1)^2 + 2^2 * (-1) + 2^2 - 2 * (-1) = 3 \\ f(1, 0) = 0^2 + 1^2 * 0 + 1^2 - 2 * 0 = 1 \\ f(1, -6) = (-6)^2 + 1^2 * (-6) + 1^2 - 2 * (-6) = 43 \\ f(4, 0) = 0^2 + 4^2 * 0 + 4^2 - 2 * 0 = 16 \\ f(3, -2) = (-2)^2 + 3^2 * (-2) + 3^2 - 2 * (-2) = -1 \end{gathered}$$

Funktionen f har alltså det absoluta minimumet -1 som antas vid $(3, -2)$ och det absoluta maximumet 43 som antas vid $(1, -6)$ inom det givna området.