Ulf Backlund
Danderyds gymnasium
Matematik Specialisering 2
N20a, vt 2023

Inlämningsuppgift 3. **Moment: Analys och algebra.**

Lösningarna skall vara presenterade på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Inlämnas senast torsdag den 11 maj 2023. Lösningarna inskannas (eller fotograferas) och mejlas till ulf.backlund@danderyd.se

---

Uppgift 1. Bestäm arean av det område som ligger innanför *cardioiden* $r = 1 + \sin\theta$. (3p)

Uppgift 2. a) Visa att de två polära kurvorna $r = 3\sin\theta$ och $r = 3\cos\theta$ beskriver två cirklar. Rita upp dem i xy-planet.

b) Bestäm arean av det område som ligger innanför båda cirklarna. (3p)

Uppgift 3. Bestäm båglängden av kurvan

a) $r = e^{\theta}$ $\quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$

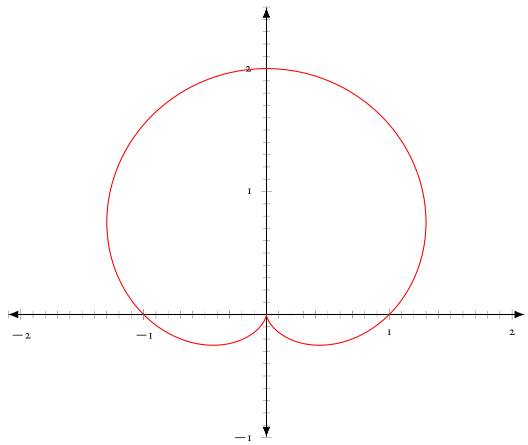
b) $r = 2 - 2\cos\theta$ $\quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ (3p)

Uppgift 1. — Bestäm arean av det område som ligger innanför cardioiden $r = 1 + \sin\theta$

Låt $f(\theta) = r = 1 + \sin\theta$. Då kan arean, A, av det område som ligger innanför cardioiden $f(\theta)$ skrivas som följande:

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\theta)^2}{2}\, d\theta$$

Nedan följer en skissering av f:



Observerar man figuren för f ovan ser man att $\alpha = 0$ och $\beta = 2\pi$ ska gälla för att exakt hela området innanför cadioiden ska svepas med formeln för arean. Vi får då följande area:

$$\therefore\ A = \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)^2}{2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(1 + \sin\theta)^2}{2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \sin^2\theta + 2\sin\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 + \sin^2\theta + 2\sin\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 + \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + 2\sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} 6 - 2\cos 2\theta + 8\sin\theta\, d\theta = \frac{1}{8}[6\theta - \sin 2\theta - 8\cos\theta]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{8}((12\pi - 0 - 8) - (0 - 0 - 8)) = \frac{3\pi}{2} \text{ a.e}$$

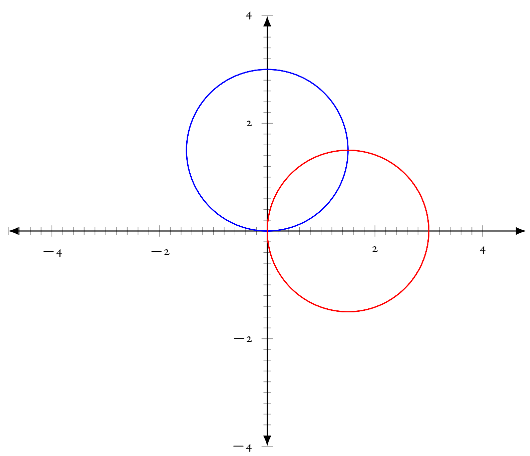
Uppgift 2. —

a) Vi kan skriva om uttrycken genom att multiplicera dem med r:

$$r_1 = 3\sin\theta \Leftrightarrow r_1^2 = 3r_1\sin\theta \Leftrightarrow_{\text{def. av polära koordinater}} x^2 + y^2 = 3y$$
$$\Leftrightarrow x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = (\frac{3}{2})^2$$

$$r_2 = 3\cos\theta \Leftrightarrow r_2^2 = 3r_2\cos\theta \Leftrightarrow_{\text{def. av polära koordinater}} x^2 + y^2 = 3x$$
$$\Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = (\frac{3}{2})^2$$

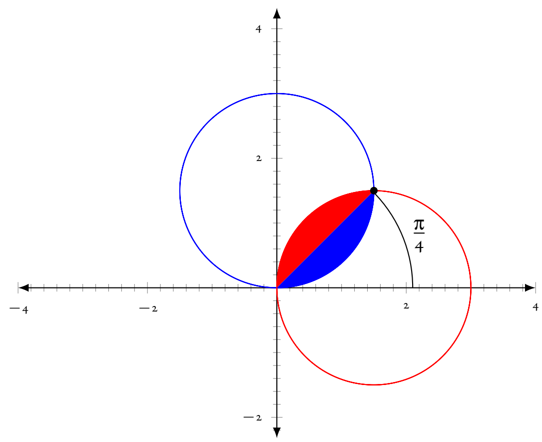
Alltså är polära kurvan $r_1 = 3\sin\theta$ ekvivalent med cirkeln $x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = (\frac{3}{2})^2$ och polära kurvan $r_2 = 3\cos\theta$ är ekvivalent med cirkeln $(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = (\frac{3}{2})^2$. r_1 och r_2 skisseras i följande figure i blått respektive rött:



b) Vi observerar först vinkeln i första kvadranten där de två polära kurvorna korsar varandra:

$$r_1 = r_2 \Leftrightarrow 3\sin\theta = 3\cos\theta \Leftrightarrow \sin\theta = \cos\theta \Rightarrow_{\text{kvadr. I}} \theta = \frac{\pi}{4}$$

För att beräkna arean av området som täcks av båda cirklarna beräknar vi ut arean av området som sveps av r_2 då $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ samt arean av området som sveps av r_1 då $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Dessa skisseras i följande figur i rött respektive blått:



Låt arean av det röda området vara A_{r_2} och arean av det blåa området vara A_{r_1}. Då gäller följande:

$$
\begin{aligned}
A_{r_2} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(r_2)^2}{2}\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(3\cos\theta)^2}{2}\, d\theta = \frac{9}{8}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2\theta\, d\theta \\
&= \frac{9}{8}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2 + 2\cos 2\theta\, d\theta = \frac{9}{8}[2\theta + \sin 2\theta\,]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{9}{8}((\pi + 0) - (\frac{\pi}{2} + 1)) = \frac{9\pi - 18}{16} \text{ a.e}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{r_1} &= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(r_1)^2}{2}\, d\theta = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(3\sin\theta)^2}{2}\, d\theta = \frac{9}{8}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 4\sin^2\theta\, d\theta \\
&= \frac{9}{8}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2 - 2\cos 2\theta\, d\theta = \frac{9}{8}[2\theta - \sin 2\theta\,]_{0}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{9}{8}((\frac{\pi}{2} - 1) - (0 - 0)) = \frac{9\pi - 18}{16} \text{ a.e}
\end{aligned}
$$

Arean av området som täcks av båda cirklarna r_1 och r_2 blir då $A = A_{r_1} + A_{r_2}$.

$$\therefore\ A = A_{r_1} + A_{r_2} = \frac{9\pi - 18}{16} + \frac{9\pi - 18}{16} = \frac{9\pi - 18}{8} \text{ a.e}$$

Uppgift 3. —

Båglängden s av en polär kurva, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, kan bestämmas med följande uttryck:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\frac{dr}{d\theta})^2 + r^2}\, d\theta$$

a)

$$\therefore\ s = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{(\frac{d(e^\theta)}{d\theta})^2 + (e^\theta)^2}\, d\theta = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{e^{2\theta} + e^{2\theta}}\, d\theta = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{2}e^\theta\, d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_{0}^{2\pi} e^\theta\, d\theta = \sqrt{2}\Big[e^\theta\Big]_{0}^{2\pi} = \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1) = \sqrt{2}e^{2\pi} - \sqrt{2}\text{ l.e}$$

$$\therefore\ \text{Båglängden av } r = e^\theta,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ är alltså } \sqrt{2}e^{2\pi} - \sqrt{2}\text{ l.e}$$

b)

$$\therefore\ s = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{(\frac{d(2 - 2\cos\theta)}{d\theta})^2 + (2 - 2\cos\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta - 8\cos\theta + 4}\, d\theta = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{8 - 8\cos\theta}\, d\theta \quad (\textit{trig. ettan})$$

$$= 4\int_{0}^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}\, d\theta = 4\int_{0}^{2\pi} \sqrt{\sin^2(\frac{\theta}{2})}\, d\theta = 4\int_{0}^{2\pi} \sin(\frac{\theta}{2})\, d\theta$$

$$= 4\Big[-2\cos(\frac{\theta}{2})\Big]_{0}^{2\pi} = 4(2 - (-2)) = 16\text{ l.e}$$

$$\therefore\ \text{Båglängden av } r = 2 - 2\cos\theta,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ är alltså } 16\text{ l.e}$$