

大問 1

(1)

$$\begin{aligned} & (2\sqrt{3} - 5)^2 - 4\sqrt{3}(\sqrt{27} - 4) \\ &= 37 - 20\sqrt{3} - 36 + 16\sqrt{3} \\ &= 1 - 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

正答

ア:1, イ:4

(2)

$$\begin{cases} x + 1 = \frac{1}{2}y + 3 & (1) \\ 6 - y = x + 1 & (2) \end{cases}$$

$6 - y = x + 1$ を (1) に代入

$$\begin{aligned} 6 - y &= \frac{1}{2}y + 3 \\ 12 - 2y &= y + 6 \\ -3y &= -6 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

$y = 2$ を (2) に代入

$$\begin{aligned} 6 - 2 &= x + 1 \\ 4 &= x + 1 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

正答

ウ:3, エ:2

(3) 問題: 関数 $y = ax^2$ について、 x の変域が $-1 \leq x \leq 2$ のとき、 y の変域は $b \leq y \leq 12$ である。

解説:2 乗に比例する関数で、 y の変域に正の数が含まれているため、 a は正の数であり、 y の変域は $0 \leq y \leq 12$ である。

また $x = 2$ のとき、 $y = 12$ であるため、

$$\begin{aligned} y &= ax^2 \\ 12 &= a(2^2) \\ 12 &= 4a \\ a &= 3 \end{aligned}$$

正答オ:3, カ:0

(4) 問題:3 直線 $y = 2x, y = \frac{1}{2}x + 9, y = -\frac{1}{3}x + k$ が一点で交わる時の k の値

解説:

連立方程式

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{2}x + 9 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

を解く

$y = 2x$ を (2) に代入

$$2x = \frac{1}{2}x + 9$$

$$4x = x + 18$$

$$3x = 18$$

$$x = 6$$

$x = 6$ を (1) に代入する

$$y = 2x$$

$$y = 2 \times 6$$

$$y = 12$$

$x = 6$ と $y = 12$ を $y = -\frac{1}{3}x + k$ に代入する

$$y = -\frac{1}{2}x + k$$

$$12 = -\frac{1}{3} \times 6 + k$$

$$12 = -2 + k$$

$$k = 14$$

正答キ:1, ク:4

(5) 問題:2 個のサイコロを同時に投げるとき、出る目の和が 10 以下になる確率を求めよ。

ただし、2 個のサイコロはそれぞれ 1 から 6 までの目が出るとし、どの目が出ることも同様に確からしいものとする。

解説:2 個のサイコロを同時に投げるとき、出る目の和が 10 以下になる確率は、出る目の和が 11 以上にならない確率に等しい。

出る目の和が 11 以上にならない確率は、1 から出る目の和が 11 以上になる確率を引けばいいので、

出る目の和が 11 以上になる場合: 出た目が (5, 6), (6, 5), (6, 6) の 3 通りで、 $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

したがって $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ で出る目の数が 10 以下になる確率は $\frac{11}{12}$

正答ケコ:11, サシ:12

(6) 問題: 下の表は、ある競技における出場者の得点である。

出場者	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
得点	8	3	7	7	3	3	7	10	3	3

得点のデータの最頻値 (モード) と中央値 (メジアン) を求めなさい

解説: 最頻値・・・最も多く現れるデータのこと。得点のデータは3が最も多く現れるので最頻値は3

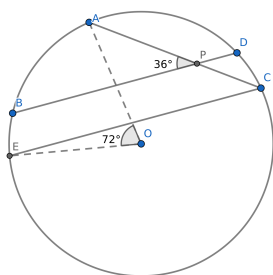
中央値・・・データのちょうど真ん中に現れるデータのこと。データが偶数個のときは、真ん中の2つを平均したものである。

5番目のデータは、3、6番目のデータは7であるため、 $\frac{3+7}{2} = 5$ で、中央値は5

(7) 問題:

下の図のように、半径が10cmの円Oの周上に4点A,B,C,Dがある。弦ACと弦BDの交点をPとすると、 $\angle APB = 36^\circ$ である。この時、弧ABと弧CDの長さの和を求めなさい。ただし、弧ABは2点A,Bを弧CDは2点C,Dをそれぞれ両端とする弧のうち短いほうを表すものとする。

解説:



Cを通り、BDに平行な直線CEを図のように作図する。 $BD \parallel EC$ であるため、 $\widehat{DC} = \widehat{BE}$ である。したがって、

$$\begin{aligned}
 & \widehat{AB} + \widehat{CD} \\
 &= \widehat{AB} + \widehat{BE} \\
 &= \widehat{ABE}
 \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned}\widehat{ABE} &= \pi r^2 \times \frac{\angle AOE}{360^\circ} \\ &= 2\pi r \times \frac{\angle ACE \times 2}{360^\circ} \\ &= 2\pi r \times \frac{\angle APB \times 2}{360^\circ} \\ &= 20\pi \times \frac{72^\circ}{360^\circ} \\ &= 4\pi\end{aligned}$$

正答

ソ:4

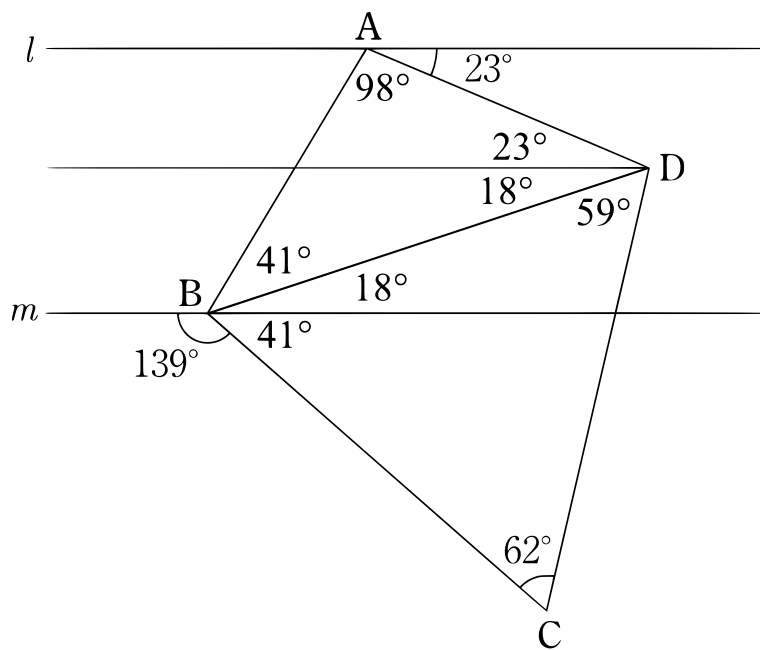
(8) 問題:

下の図で、2 直線 l, m は平行で、点 A は直線 l 上に、点 B は直線 m 上にあり、 $AB = AD$ 、 $CB = CD$ である。

このときの $\angle BAD$ の大きさを求めよ。

解説:

条件より、以下の図の通り。



正答

タチ:98

大問 2

(1)

$y = mx$ が点 A を通っているので、 $y = mx^2$ に $(x, y) = (2, 1)$ を代入する

$$1 = m \times 2^2$$

$$1 = 4m$$

$$m = \frac{1}{4}$$

正答

アイ:14

(2)

2 点 A, B を通る直線の傾きが $\frac{1}{2}$ であることと、点 A が $(2, 1)$ であることより

$$AB : y = \frac{1}{2}x + b$$

$$1 = \frac{1}{2} \times 2 + b$$

$$1 = 1 + b$$

$$b = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{a}{x} \cdot \frac{3}{2} = \frac{a}{4}a = 6$$

正答

ウ:3, エ:2, オ:6

(3)

$AD \parallel BC$ より、 D の x 座標は、2、 C の x 座標は 4

D は、 $y = \frac{6}{x}$ を通るため、 $x = 2$ を代入して

$$y = \frac{6}{2}$$

$$y = 3$$

より、 D は $(2, 3)$ である。

C は、 $y = \frac{1}{4}x^2$ を通るため $x = 4$ を代入して、

$$y = \frac{1}{4} \times 4^2$$
$$y = 3$$

より、 C は $(4, 4)$ である。

四角形 $ABCD$ は $AD \parallel BC$ の台形なので、

$(AD + BC) \times \text{高さ} \times \frac{1}{2}$ で求められる

高さは $B(C \text{ でも可})$ の x 座標から $A(D \text{ でも可})$ の x 座標を引いたものであるため、

$$4 - 2 = 2$$

で高さは 2 である。

$A(2, 1), D(2, 3)$ より、 $AD = 2$

$B(4, \frac{3}{2}), C(4, 4)$ より、 $BC = \frac{5}{2}$ であるので、

$$(2 + \frac{5}{2}) \times 2 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

よって四角形 $ABCD$ の面積は $\frac{9}{2}$ である

正答

カ:9, キ:2

(4) 問題:

図 2 のように、原点 O を通る直線 $y = bx$ が四角形 $ABCD$ の面積を二等分するときの b を求めよ。

$y = bx$ と AD, BC との交点を E, F とすると、 $E(2, 2b), F(4, 4b)$ となる。

四角形 $AEFB = \frac{1}{2}$ 四角形 $ABCD$ が成り立てばよいので、

$$\begin{aligned}
 (AE + BP) \times 2 \times \frac{1}{2} &= \frac{9}{4} \\
 \left((2b - 1) + \left(4b - \frac{3}{2} \right) \right) &= \frac{9}{4} \\
 2b - 1 + 4b - \frac{3}{2} &= \frac{9}{4} \\
 6b - \frac{5}{2} &= \frac{9}{4} \\
 6b &= \frac{19}{4} \\
 b &= \frac{19}{24}
 \end{aligned}$$

正答

クケ:19, コサ:24

大問 3

図 1 は円錐の展開図であり、側面は扇形 OAB 、底面は点 D を中心とする円である。直線 OC は扇形 OAB と円 D に、それぞれ点 C と点 E で接している。線分 OD の長さは 11 で、四角形 $ODEC$ の面積は $22\sqrt{6}$ である。

(1)

円 O と円 D の接する点を点 P とする。

OC は OP と等しく、 DE は DP と等しいため、(半径より)

$$\begin{aligned} OC + DE &= OP + DP \\ &= OD \\ &= 11 \end{aligned}$$

正答

アイ:11

(2)

四角形 $ODCE$ は $\angle ECO = 90^\circ, \angle DEC = 90^\circ$ であるため、

$CO \parallel ED$ で、 CE は四角形 $ODCE$ の高さである。

四角形 $ODCE$ の面積は $22\sqrt{6}$ なので、

$$\begin{aligned} (OC + DE) \times \frac{1}{2} &= 22\sqrt{6} \\ 11 \times CE \times \frac{1}{2} &= 22\sqrt{6} \\ CE &= 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

正答

ウ:4, エ:6

(3)

D から CO に向かって垂線をおろし、 CO との交点を Q とする。

三平方の定理より、

$$\begin{aligned}
DO^2 &= QO^2 + QD^2 \\
DO^2 &= QO^2 + CE^2 \\
121 &= (CO - ED)^2 + 96 \\
121 - 96 &= (CO - ED)^2 \\
25 &= (CO - ED)^2 \\
\pm 5 &= CO - ED
\end{aligned}$$

$CO > ED$ より

$$CO - ED = 5$$

(1) より、 $CO + ED = 11$ なので、連立方程式

$$\begin{cases} CO - ED = 5 \\ CO + ED = 11 \end{cases}$$

(1)

(2)

を解く。

(1)+(2)

$$\begin{aligned}
2CO &= 16 \\
CO &= 8
\end{aligned}$$

$CO=8$ を (1) に代入する

$$\begin{aligned}
8 - ED &= 5 \\
-ED &= 3 \\
ED &= 3
\end{aligned}$$

正答

オ:3

(4)

図 1 は円錐の展開図であるため \widehat{AB} , と円 D の演習は等しいので、

$$\begin{aligned}
16 \times \pi \times \frac{\angle AOB}{360} &= 6\pi \\
\frac{2\angle AOB}{45} \pi &= 6\pi \\
2\angle AOB \pi &= 270\pi \\
\angle AOB &= 135^\circ
\end{aligned}$$

正答

カキク:135

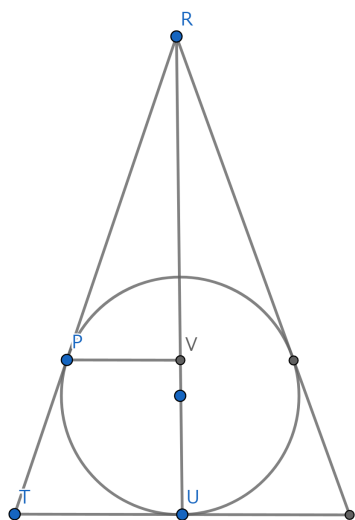
(5) 問題:

図2は図1の展開図を組み立てて円錐にし、その円錐に球がぴったり入っている様子を表したものである。点Pは円錐の側面と球の表面が共有している点の1つである。点Pを通り、円錐の底面に平行な平面で球を切断したときにできる切り口の面積を求めよ。

(5) 解説:

点Pを通り、円錐の底面に平行な平面で球を切断したときにできる切り口の点Pを通る直径と、それに平行な底面の直径を含む面を考える。

図のようにR,T,U,Vを置く。



$PT = UT = 3$ なので、

$$\begin{aligned} RP &= RT - PT \\ &= 8 - 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$\triangle RPV \sim \triangle RTU$ なので、

$$\begin{aligned} RP : RT &= PV : TU \\ 5 : 8 &= PV : 3 \\ 8PV &= 15 \\ PV &= \frac{15}{8} \end{aligned}$$

PV は点 P を通り、円錐の底面に平行な平面で球を切断したときにできる切り口の半径なので、その面積は、

$$\begin{aligned} & PV^2\pi \\ &= \left(\frac{15}{8}\right)^2 \pi \\ &= \frac{225}{64}\pi \end{aligned}$$

より、 $\frac{225}{64}\pi$ である。正答

ケコサ:225, シス:64

大問 4

(1) $2 \leq l \leq 11$ のとき、 (k, l) 成分は、 $12(k-1) + l$ で表されるため

$(5, 7)$ 成分は、

$$12 \times 4 + 7 = 55$$

で 55 である。正答

アイ:55

(2) $2 \leq l \leq 11$ のとき、 S は、

(k, l) 成分 -1

(k, l) 成分 $+1$

(k, l) 成分 -12

(k, l) 成分 $+12$

の和で表されるため、

$$\begin{aligned} & 4(12(k-1) + l) \\ &= 48(k-1) + 4l \end{aligned}$$

より、 S は $48(k-1) + 4l$ である。

S の式に $(k, l) = (5, 7)$ を代入する。

$$\begin{aligned} & 48(5-1) + 4 \times 7 \\ &= 220 \end{aligned}$$

正答

ウエオ:220

(3) (2) の通り、 $S = 48(k-1) + 4l$ であるため、3 である。

正答

カ:3

(4) $2 \leq l \leq 11$ のとき

$$S = 48(k - 1) + 4l$$

$$300 = 48k - 48 + 4l$$

$$75 = 12k - 12 + l$$

$$75 = 12(k - 1) + l$$

$2 \leq l \leq 11$ より、

$$(k, l) = (7, 3)$$

正答

キ:7, ク:3

(5) $2 \leq l \leq 11$ のとき

$$S = 48(k - 1) + 4l$$

$$468 = 48k - 48 + 4l$$

$$117 = 12k - 12 + l$$

$$117 = 12(k - 1) + l$$

$2 \leq l \leq 11$ より、

$$(k, l) = (10, 9)$$

$l = 1$ のとき、 S は、

(k, l) 成分 +11

(k, l) 成分 +1

(k, l) 成分 -12

(k, l) 成分 +12

の和で表されるため、

4(成分) + 12 より、

$$S = 48k - 36 + 4l$$

$S = 468$ を代入する。

$$468 = 48k - 36 + 4l$$

$$117 = 12k - 9 + l$$

$$126 = 12k + l$$

$l = 1$ より、 $126 = 12k + l$ となる自然数 k は存在しない。

$l = 12$ のとき、 S は、

(k, l) 成分 -11

(k, l) 成分 -1

(k, l) 成分 -12

(k, l) 成分 $+12$

の和で表されるため、

$4(\text{成分}) - 12$ より、 $S = 48k - 60 + 4l$

$S = 468$ を代入する。

$$468 = 48k - 60 + 4l$$

$$117 = 12k - 15 + l$$

$$132 = 12k + l$$

$l = 12$ より、 $132 = 12k + l$ を満たす (k, l) は $(10, 12)$ である。

したがって、 $(k, l) = (10, 9), (10, 12)$

正答

シ:1, ス:0, セ:1, ソ:2