

# 23

## POTENCIAL ELÉCTRICO

### METAS DE APRENDIZAJE

*Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:*

- A calcular la energía potencial eléctrica de un conjunto de cargas.
- El significado e importancia del potencial eléctrico.
- A determinar el potencial eléctrico que un conjunto de cargas produce en un punto en el espacio.
- El uso de las superficies equipotenciales para visualizar la forma en que varía el potencial eléctrico en el espacio.
- A emplear el potencial eléctrico para calcular el campo eléctrico.

**?** En cierto tipo de soldadura eléctrica, entre la herramienta que suelda y las piezas metálicas por unir, fluye carga eléctrica. Esto produce un arco muy brillante cuya alta temperatura funde los elementos. ¿Por qué debe mantenerse la herramienta cerca de las piezas que se sueldan?



**E**ste capítulo trata de la energía que se asocia con las interacciones eléctricas. Cada vez que se enciende una luz, un reproductor de CD o un aparato eléctrico, se utiliza energía eléctrica, un elemento indispensable de nuestra sociedad tecnológica. En los capítulos 6 y 7 se introdujeron los conceptos de *trabajo* y *energía* en el contexto de la mecánica; ahora se combinarán estos conceptos con lo que se ha aprendido sobre la carga eléctrica, las fuerzas eléctricas y los campos eléctricos. Así como el concepto de energía hizo posible resolver con facilidad algunos tipos de problemas de mecánica, el empleo de las ideas de energía hace más fácil la solución de una variedad de problemas de electricidad.

Cuando una partícula con carga se mueve en un campo eléctrico, el campo ejerce una fuerza que efectúa *trabajo* sobre la partícula. Este trabajo siempre se puede expresar en términos de la energía potencial eléctrica. Así como la energía potencial gravitatoria depende de la altura de una masa sobre la superficie terrestre, la energía potencial eléctrica depende de la posición que ocupa la partícula con carga en el campo eléctrico. Describiremos la energía potencial eléctrica utilizando un concepto nuevo, llamado *potencial eléctrico* o simplemente *potencial*. Es frecuente que en el estudio de los circuitos, una diferencia de potencial entre un punto y otro reciba el nombre de *voltaje*. Los conceptos de potencial y voltaje son cruciales para entender la manera en que funcionan los circuitos eléctricos, y tienen aplicaciones de gran importancia en los haces de electrones que se utilizan en la radioterapia contra el cáncer, los aceleradores de partículas de alta energía y muchos otros aparatos.

### 23.1 Energía potencial eléctrica

Se demostró que los conceptos de trabajo, energía potencial y conservación de la energía son sumamente útiles para el estudio de la mecánica. En esta sección se verá que estos conceptos son útiles para comprender y analizar las interacciones eléctricas.

Comencemos por revisar tres puntos esenciales de los capítulos 6 y 7. En primer lugar, cuando una fuerza  $\vec{F}$  actúa sobre una partícula que se mueve de un punto  $a$  a un punto  $b$ , el trabajo  $W_{a \rightarrow b}$  efectuado por la fuerza está dado por la siguiente *integral de línea*:

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b F \cos \phi \, dl \quad (\text{trabajo realizado por una fuerza}) \quad (23.1)$$

dónde  $d\vec{l}$  es un desplazamiento infinitesimal a lo largo de la trayectoria de la partícula, y  $\phi$  es el ángulo entre  $\vec{F}$  y  $d\vec{l}$  en cada punto de la trayectoria.

En segundo lugar, si la fuerza  $\vec{F}$  es *conservativa*, según se definió el término en la sección 7.3, el trabajo realizado por  $\vec{F}$  siempre se puede expresar en términos de una **energía potencial  $U$** . Cuando la partícula se mueve de un punto donde la energía potencial es  $U_a$  a otro donde es  $U_b$ , el cambio en la energía potencial es  $\Delta U = U_b - U_a$ , y el trabajo  $W_{a \rightarrow b}$  que realiza la fuerza es

$$W_{a \rightarrow b} = U_a - U_b = -(U_b - U_a) = -\Delta U \quad (\text{trabajo efectuado por una fuerza conservativa}) \quad (23.2)$$

Cuando  $W_{a \rightarrow b}$  es positivo,  $U_a$  es mayor que  $U_b$ ,  $\Delta U$  es negativo y la energía potencial *disminuye*. Eso es lo que ocurre cuando una pelota cae de un punto elevado ( $a$ ) a otro más bajo ( $b$ ) en presencia de la gravedad terrestre; la fuerza de la gravedad efectúa un trabajo positivo, y la energía potencial gravitacional disminuye (figura 23.1). Cuando se lanza una pelota hacia arriba, la fuerza gravitatoria hace un trabajo negativo durante el ascenso, y la energía potencial aumenta.

En tercer lugar, el teorema del trabajo y la energía establece que el cambio en la energía cinética  $\Delta K = K_b - K_a$  durante cualquier desplazamiento es igual al trabajo *total* realizado sobre la partícula. Si el único trabajo efectuado sobre la partícula lo realizan fuerzas conservativas, entonces la ecuación (23.2) da el trabajo total, y  $K_b - K_a = -(U_b - U_a)$ . Por lo general esto se escribe así:

$$K_a + U_a = K_b + U_b \quad (23.3)$$

Es decir, en estas circunstancias, la energía mecánica total (cinética más potencial) se *conserva*.

## Energía potencial eléctrica en un campo uniforme

A continuación se verá un ejemplo eléctrico de estos conceptos básicos. En la figura 23.2 un par de placas metálicas paralelas con carga generan un campo eléctrico uniforme descendente y con magnitud  $E$ . El campo ejerce una fuerza hacia abajo con magnitud  $F = q_0E$  sobre una carga de prueba positiva  $q_0$ . A medida que la carga se mueve hacia abajo una distancia  $d$  del punto  $a$  al punto  $b$ , la fuerza sobre la carga de prueba es constante e independiente de su localización. Por lo tanto, el trabajo realizado por el campo eléctrico es el producto de la magnitud de la fuerza por la componente de desplazamiento en la dirección (descendente) de la fuerza.

$$W_{a \rightarrow b} = Fd = q_0Ed \quad (23.4)$$

Este trabajo es positivo, toda vez que la fuerza está en la misma dirección que el desplazamiento neto de la carga de prueba.

La componente  $y$  de la fuerza eléctrica,  $F_y = -q_0E$ , es constante, y no hay componente  $x$  o  $z$ . Esto es exactamente análogo a la fuerza gravitatoria sobre una masa  $m$  cerca de la superficie de la Tierra; para esta fuerza, existe una componente  $y$  constante  $F_y = -mg$ , y las componentes  $x$  y  $z$  son iguales a cero. A partir de esta analogía se puede concluir que la fuerza ejercida sobre  $q_0$  por el campo eléctrico uniforme en la figura 23.2 es *conservativa*, igual que la fuerza gravitatoria. Esto significa que el trabajo  $W_{a \rightarrow b}$  efectuado por el campo es independiente de la trayectoria que sigue la partícula de  $a$  a  $b$ . Este trabajo puede representarse con una función de *energía potencial  $U$* , como se hizo para la energía potencial gravitacional en la sección 7.1. La energía potencial para la fuerza gravitatoria  $F_y = -mg$  fue  $U = mgy$ ; por consiguiente, la energía potencial para la fuerza eléctrica  $F_y = -q_0E$  es

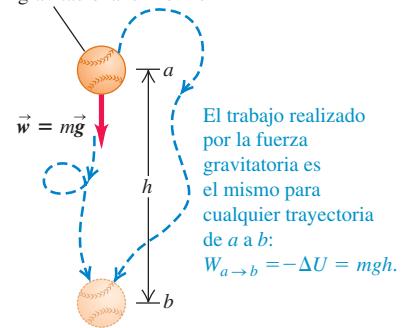
$$U = q_0Ey \quad (23.5)$$

Cuando la carga de prueba se mueve de la altura  $y_a$  a la altura  $y_b$ , el trabajo realizado sobre la carga por el campo está dado por

$$W_{a \rightarrow b} = -\Delta U = -(U_b - U_a) = -(q_0Ey_b - q_0Ey_a) = q_0E(y_a - y_b) \quad (23.6)$$

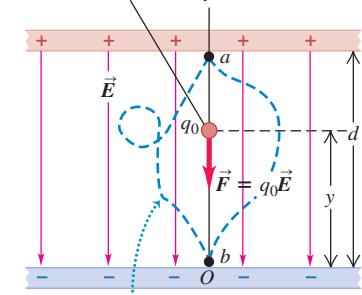
**23.1** Trabajo realizado sobre una pelota de béisbol en movimiento en un campo gravitacional uniforme.

Objeto en movimiento en un campo gravitacional uniforme



**23.2** Trabajo realizado sobre una carga puntual que se mueve en un campo eléctrico uniforme. Compare esta ilustración con la figura 23.1.

Carga puntual que se mueve en un campo eléctrico uniforme

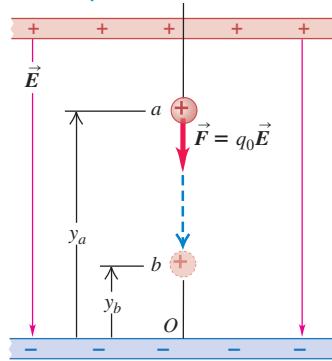


$$W_{a \rightarrow b} = -\Delta U = q_0Ed.$$

**23.3** Carga positiva que se desplaza a) en la dirección del campo eléctrico  $\vec{E}$  y b) en la dirección opuesta a  $\vec{E}$ .

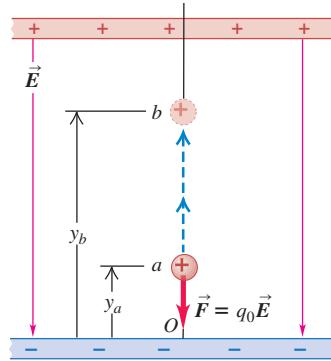
- a) La carga positiva se desplaza en dirección de  $\vec{E}$ :  
 • El campo realiza un trabajo *positivo* sobre la carga.

•  $U$  disminuye.



- b) La carga positiva se desplaza en dirección opuesta a  $\vec{E}$ :  
 • El campo realiza un trabajo *negativo* sobre la carga.

•  $U$  aumenta.



Cuando  $y_a$  es mayor que  $y_b$  (figura 23.3a), la carga de prueba positiva  $q_0$  se mueve hacia abajo, en la misma dirección que  $\vec{E}$ ; el desplazamiento tiene lugar en la misma dirección que la fuerza  $\vec{F} = q_0\vec{E}$ , por lo que el campo realiza trabajo positivo y  $U$  disminuye. [En particular, si  $y_a - y_b = d$  como en la figura 23.2, la ecuación (23.6) da  $W_{a \rightarrow b} = q_0Ed$  en concordancia con la ecuación (23.4).] Cuando  $y_a$  es menor que  $y_b$  (figura 23.3b), la carga de prueba positiva  $q_0$  se mueve hacia arriba, en dirección opuesta a  $\vec{E}$ ; el desplazamiento se opone a la fuerza, el campo hace un trabajo negativo y  $U$  aumenta.

Si la carga de prueba  $q_0$  es *negativa*, la energía potencial aumenta cuando se mueve a favor del campo y disminuye cuando se mueve en contra del campo (figura 23.4).

Sea positiva o negativa la carga de prueba, se aplica la siguiente regla general:  $U$  aumenta si la carga de prueba  $q_0$  se mueve en la dirección *opuesta* a la fuerza eléctrica  $\vec{F} = q_0\vec{E}$  (figuras 23.3b y 23.4a);  $U$  disminuye si  $q_0$  se mueve en la *misma dirección* que  $\vec{F} = q_0\vec{E}$  (figuras 23.3a y 23.4b). Éste es el mismo comportamiento que para la energía potencial gravitacional, la cual aumenta si una masa  $m$  se mueve hacia arriba (en dirección opuesta a la dirección de la fuerza gravitatoria) y disminuye si  $m$  se mueve hacia abajo (en la misma dirección que la fuerza gravitatoria).

**CUIDADO Energía potencial eléctrica** La relación que hay entre el cambio en la energía potencial eléctrica y el movimiento en un campo eléctrico es muy importante, y se utilizará con frecuencia. También es una relación que requiere cierto esfuerzo para comprenderse del todo. Tómese el tiempo necesario para revisar el párrafo anterior y estudie con cuidado las figuras 23.3 y 23.4. ¡Hacerlo le será de gran utilidad más adelante!

### Energía potencial eléctrica de dos cargas puntuales

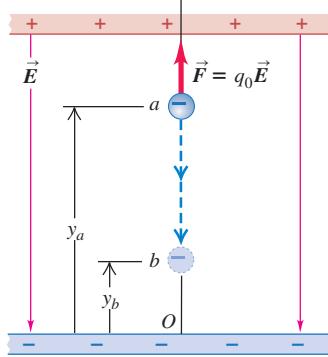
La idea de la energía potencial eléctrica no se restringe al caso especial de un campo eléctrico uniforme. En realidad, este concepto se puede aplicar a una carga puntual en *cualquier* campo eléctrico generado por una distribución de carga estática. Recuerde,

**23.4** Una carga negativa que se desplaza a) en dirección del campo eléctrico  $\vec{E}$  y b) en dirección opuesta a  $\vec{E}$ . Compare con la figura 23.3.

- a) La carga negativa se desplaza en la dirección de  $\vec{E}$ :

• El campo realiza trabajo *negativo* sobre la carga.

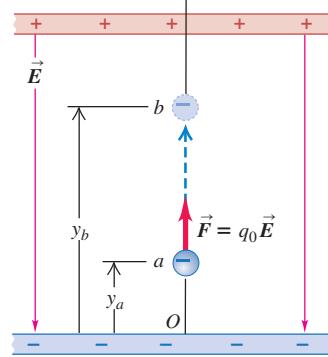
•  $U$  aumenta.



- b) La carga negativa se desplaza en dirección opuesta a  $\vec{E}$ :

• El campo realiza trabajo *positivo* sobre la carga.

•  $U$  disminuye.



del capítulo 21, que cualquier distribución de carga se representa como un conjunto de cargas puntuales. Por consiguiente, es útil calcular el trabajo realizado sobre una carga de prueba  $q_0$  que se mueve en el campo eléctrico ocasionado por una sola carga puntual estacionaria  $q$ .

En primer lugar se considerará un desplazamiento a lo largo de una línea *radial*, como se ilustra en la figura 23.5, del punto  $a$  al punto  $b$ . La fuerza sobre  $q_0$  está dada por la ley de Coulomb, y su componente radial es

$$F_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \quad (23.7)$$

Si  $q$  y  $q_0$  tienen el mismo signo (+ o -), la fuerza es de repulsión y  $F_r$  es positiva; si las dos cargas tienen signos opuestos, la fuerza es de atracción y  $F_r$  es negativa. La fuerza *no* es constante durante el desplazamiento, y se tiene que integrar para obtener el trabajo  $W_{a \rightarrow b}$  que realiza esta fuerza sobre  $q_0$  a medida que  $q_0$  se mueve de  $a$  a  $b$ . Resulta lo siguiente:

$$W_{a \rightarrow b} = \int_{r_a}^{r_b} F_r dr = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (23.8)$$

El trabajo efectuado por la fuerza eléctrica para esta trayectoria particular depende sólo de los puntos extremos.

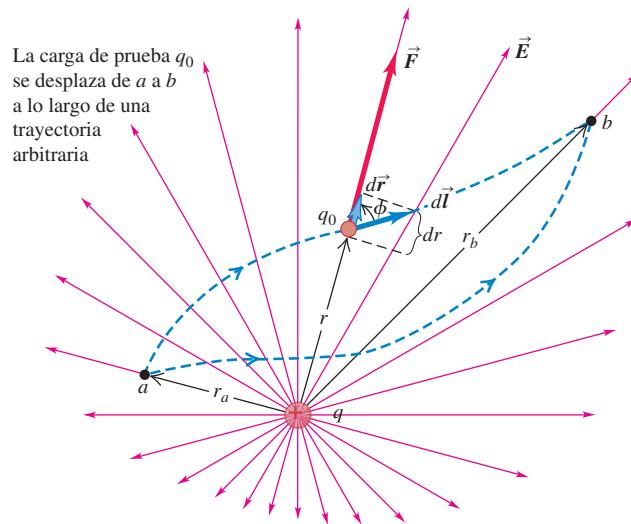
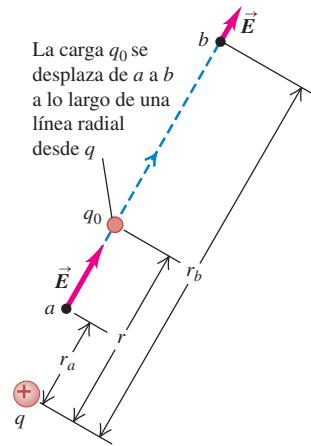
En realidad, el trabajo es el mismo para *todas las trayectorias posibles* entre  $a$  y  $b$ . Para demostrar esto, se considera un desplazamiento más general (figura 23.6) en el que  $a$  y  $b$  no están en la misma línea radial. De la ecuación (23.1), el trabajo efectuado sobre  $q_0$  durante este desplazamiento está dado por

$$W_{a \rightarrow b} = \int_{r_a}^{r_b} F \cos \phi dl = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \cos \phi dl$$

Pero la figura muestra que  $\cos \phi dl = dr$ . Es decir, el trabajo realizado durante un desplazamiento pequeño  $d\vec{l}$  depende sólo del cambio  $dr$  en la distancia  $r$  entre las cargas, el cual es la *componente radial* del desplazamiento. Así, la ecuación (23.8) es válida incluso con respecto a este desplazamiento más general; el trabajo que efectúa sobre  $q_0$  el campo eléctrico  $\vec{E}$  producido por  $q$  sólo depende de  $r_a$  y  $r_b$ , y no de los detalles de la trayectoria. Asimismo, si  $q_0$  regresa a su punto inicial  $a$  por una trayectoria diferente, el trabajo total que se realiza en el desplazamiento de ida y vuelta es igual a cero [la integral en la ecuación (23.8) es de  $r_a$  de regreso a  $r_a$ ]. Éstas son las características necesarias para una fuerza conservativa, según se definió en la sección 7.3. Así, la fuerza sobre  $q_0$  es *conservativa*.

Se ve que las ecuaciones (23.2) y (23.8) son consistentes si se define  $qq_0/4\pi\epsilon_0 r_a$  como la energía potencial  $U_a$  cuando  $q_0$  está en el punto  $a$ , a una distancia  $r_a$  de  $q$ , y se define  $qq_0/4\pi\epsilon_0 r_b$  como la energía potencial  $U_b$  cuando  $q_0$  está en el punto  $b$ , a una

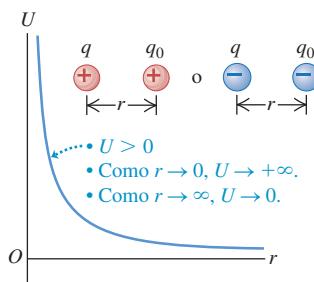
**23.5** La carga de prueba  $q_0$  se desplaza a lo largo de una línea recta que se extiende en forma radial desde la carga  $q$ . Conforme se desplaza de  $a$  a  $b$ , la distancia varía de  $r_a$  a  $r_b$ .



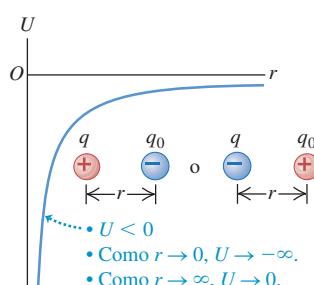
**23.6** El trabajo efectuado sobre la carga  $q_0$  por el campo eléctrico de carga  $q$  no depende de la trayectoria seguida, sino sólo de las distancias  $r_a$  y  $r_b$ .

**23.7** Gráficas de la energía potencial  $U$  de dos cargas puntuales  $q$  y  $q_0$  contra su separación  $r$ .

a)  $q$  y  $q_0$  tienen el mismo signo



b)  $q$  y  $q_0$  tienen signos opuestos



distancia  $r_b$  de  $q$ . De esta forma, la energía potencial  $U$  cuando la carga de prueba  $q_0$  está a *cualquier* distancia  $r$  de la carga  $q$  es

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r} \quad (\text{energía potencial eléctrica de dos cargas puntuales } q \text{ y } q_0) \quad (23.9)$$

Observe que *no* hemos supuesto nada acerca de los signos de  $q$  y  $q_0$ ; la ecuación (23.9) es válida para cualquier combinación de signos. La energía potencial es positiva si las cargas  $q$  y  $q_0$  tienen el mismo signo (figura 23.7a), y negativa si tienen signos opuestos (figura 23.7b).

**CUIDADO** **La energía potencial eléctrica contra la fuerza eléctrica** Hay que tener cuidado de no confundir la ecuación (23.9) para la energía potencial de dos cargas puntuales con la expresión similar en la ecuación (23.7) para la componente radial de la fuerza eléctrica que ejerce una carga sobre la otra. La energía potencial  $U$  es proporcional a  $1/r$ , mientras que la componente de la fuerza  $F_r$  es proporcional a  $1/r^2$ .

La energía potencial siempre se define en relación con algún punto de referencia donde  $U = 0$ . En la ecuación (23.9),  $U$  es igual a cero cuando  $q$  y  $q_0$  están infinitamente alejadas y  $r = \infty$ . Por lo tanto,  $U$  representa el trabajo que realizaría el campo de  $q$  sobre la carga de prueba  $q_0$  si esta última se desplazara de una distancia inicial  $r$  al infinito. Si  $q$  y  $q_0$  tienen el mismo signo, la interacción será de repulsión, este trabajo será positivo y  $U$  será positiva en cualquier separación finita (figura 23.7a). Si las cargas tienen signos opuestos, la interacción es de atracción, el trabajo efectuado será negativo y  $U$  será negativa (figura 23.7b).

Conviene subrayar que la energía potencial  $U$  dada por la ecuación (23.9) es una propiedad *compartida* de las dos cargas  $q$  y  $q_0$ ; es una consecuencia de la *interacción* entre estos dos cuerpos. Si la distancia entre las dos cargas cambia de  $r_a$  a  $r_b$ , el cambio en energía potencial es el mismo si  $q$  permanece fija y  $q_0$  se mueve, o si  $q_0$  se mantiene fija y es  $q$  la que se mueve. Por esta razón, nunca se usa la frase “la energía potencial eléctrica *de* una carga puntual”. (De igual manera, si una masa  $m$  se encuentra a una altura  $h$  sobre la superficie de la Tierra, la energía potencial gravitacional es una propiedad compartida de la masa  $m$  y la Tierra. En las secciones 7.1 y 12.3 se hizo hincapié en este hecho.)

La ley de Gauss dice que el campo eléctrico fuera de cualquier distribución de carga esféricamente simétrica es la misma que habría si toda la carga estuviera en el centro. Por lo tanto, la ecuación (23.9) también se cumple si la carga de prueba  $q_0$  está fuera de cualquier distribución de carga esféricamente simétrica con carga total  $q$  a una distancia  $r$  del centro.

### Ejemplo 23.1 Conservación de energía con fuerzas eléctricas

Un positrón (antipartícula del electrón) tiene una masa de  $9.11 \times 10^{-31}$  kg y una carga  $+e = 1.60 \times 10^{-19}$  C. Suponga que un positrón se mueve en la vecindad de una partícula alfa cuya carga es  $+2e = 3.20 \times 10^{-19}$  C. La partícula alfa tiene una masa más de 7000 veces mayor que la del positrón, por lo que se supondrá que está en reposo en algún marco de referencia inercial. Cuando el positrón está a  $1.00 \times 10^{-10}$  m de la partícula alfa, se aleja de ésta con una rapidez de  $3.00 \times 10^6$  m/s. a) ¿Cuál es la rapidez del positrón cuando las dos partículas están separadas por una distancia de  $2.00 \times 10^{-10}$  m? b) ¿Cuál es la rapidez del positrón cuando está muy alejado de la partícula alfa? c) ¿Cómo cambiaría la situación si la partícula en movimiento fuera un electrón (igual masa que la del positrón pero con carga opuesta)?

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** La fuerza eléctrica entre el positrón y la partícula alfa es conservativa, por lo que la energía mecánica (cinética más potencial) se conserva.

**PLANTEAR:** Las energías cinética y potencial en dos puntos cualesquiera  $a$  y  $b$  están relacionadas por la ecuación (23.3),  $K_a - U_a = K_b - U_b$ , y la energía potencial a cualquier distancia  $r$  está dada por la ecuación (23.9). Se da información completa sobre el sistema en un punto  $a$  en el que las dos cargas están a una distancia de  $1.00 \times 10^{-10}$  m. Se usan las ecuaciones (23.3) y (23.9) para encontrar la rapidez con dos valores diferentes de  $r$  en los incisos a) y b), y para el caso en que la carga  $+e$  se sustituye por  $-e$  en el inciso c).

**EJECUTAR:** a) En esta parte,  $r_b = 2.00 \times 10^{-10}$  m y se desea obtener la rapidez final  $v_b$  del positrón. Esto aparece en la expresión de la energía cinética final,  $K_b = \frac{1}{2}mv_b^2$ ; y al resolver la ecuación de conservación de la energía para  $K_b$  se tiene:

$$K_b = K_a + U_a - U_b$$

Los valores de las energías en el lado derecho de esta expresión son

$$\begin{aligned} K_a &= \frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(3.00 \times 10^6 \text{ m/s})^2 \\ &= 4.10 \times 10^{-18} \text{ J} \\ U_a &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r_a} \\ &= (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{(3.20 \times 10^{-19} \text{ C})(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})}{1.00 \times 10^{-10} \text{ m}} \\ &= 4.61 \times 10^{-18} \text{ J} \\ U_b &= (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{(3.20 \times 10^{-19} \text{ C})(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})}{2.00 \times 10^{-10} \text{ m}} \\ &= 2.30 \times 10^{-18} \text{ J} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la energía cinética final es

$$\begin{aligned} K_b &= K_a + U_a - U_b \\ &= 4.10 \times 10^{-18} \text{ J} + 4.61 \times 10^{-18} \text{ J} - 2.30 \times 10^{-18} \text{ J} \\ &= 6.41 \times 10^{-18} \text{ J} \end{aligned}$$

y la rapidez final del positrón es

$$v_b = \sqrt{\frac{2K_b}{m}} = \sqrt{\frac{2(6.41 \times 10^{-18} \text{ J})}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = 3.8 \times 10^6 \text{ m/s}$$

La fuerza es de repulsión, por lo que el positrón acelera conforme se aleja de la partícula alfa estacionaria.

b) Cuando las posiciones finales del positrón y la partícula alfa están muy lejos una de otra, la separación  $r_b$  tiende al infinito y la energía potencial final  $U_b$  tiende a cero. Así, la energía cinética final del positrón es

$$\begin{aligned} K_b &= K_a + U_a - U_b = 4.10 \times 10^{-18} \text{ J} + 4.61 \times 10^{-18} \text{ J} - 0 \\ &= 8.71 \times 10^{-18} \text{ J} \end{aligned}$$

y su rapidez final es

$$v_b = \sqrt{\frac{2K_b}{m}} = \sqrt{\frac{2(8.71 \times 10^{-18} \text{ J})}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = 4.4 \times 10^6 \text{ m/s}$$

## Energía potencial eléctrica con varias cargas puntuales

Suponga que el campo eléctrico  $\vec{E}$  en el que se desplaza la carga  $q_0$  se debe a *varias* cargas puntuales  $q_1, q_2, q_3, \dots$  a distancias  $r_1, r_2, r_3, \dots$  de  $q_0$ , como se ilustra en la figura 23.8. Por ejemplo,  $q_0$  podría ser un ion positivo que se mueve en presencia de otros iones (figura 23.9). El campo eléctrico total en cada punto es la *suma vectorial* de los campos debidos a las cargas individuales, y el trabajo total realizado sobre  $q_0$  durante cualquier desplazamiento es la suma de las contribuciones de las cargas individuales. De la ecuación (23.9) se concluye que la energía potencial asociada con la carga de prueba  $q_0$  en el punto  $a$  en la figura 23.8 es la suma *algebraica* (*no* la suma vectorial):

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \dots \right) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (\text{carga puntual } q_0 \text{ y conjunto de cargas } q_i) \quad (23.10)$$

Cuando  $q_0$  está en un punto  $b$  diferente, la energía potencial está dada por la misma expresión, pero  $r_1, r_2, \dots$  son las distancias desde  $q_1, q_2, \dots$  al punto  $b$ . El trabajo efectuado sobre la carga  $q_0$  cuando se desplaza de  $a$  a  $b$  a lo largo de cualquier

Al comparar este resultado con el del inciso a) se observa que conforme el positrón se mueve de  $r = 2.00 \times 10^{-10} \text{ m}$  al infinito, el trabajo adicional realizado sobre él por el campo eléctrico de la partícula alfa incrementa la rapidez aproximadamente en un 16%. Esto se debe a que la fuerza eléctrica disminuye rápidamente con la distancia.

c) Si la carga en movimiento es negativa, la fuerza sobre su ella es de atracción en vez de repulsión, y se espera que disminuya en vez de acelerar. La única diferencia en los cálculos anteriores es que las dos cantidades de energía potencial son negativas. Del inciso a), a una distancia  $r_b = 2.00 \times 10^{-10} \text{ m}$  se tiene

$$\begin{aligned} K_b &= K_a + U_a - U_b \\ &= 4.10 \times 10^{-18} \text{ J} + (-4.61 \times 10^{-18} \text{ J}) - (-2.30 \times 10^{-18} \text{ J}) \\ &= 1.79 \times 10^{-18} \text{ J} \\ v_b &= \sqrt{\frac{2K_b}{m}} = 2.0 \times 10^6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

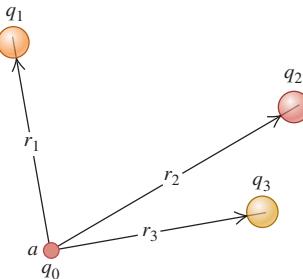
Del inciso b), con  $r_b = \infty$ , la energía cinética del electrón parecería ser

$$\begin{aligned} K_b &= K_a + U_a - U_b \\ &= 4.10 \times 10^{-18} \text{ J} + (-4.61 \times 10^{-18} \text{ J}) - 0 \\ &= -5.1 \times 10^{-19} \text{ J} \end{aligned}$$

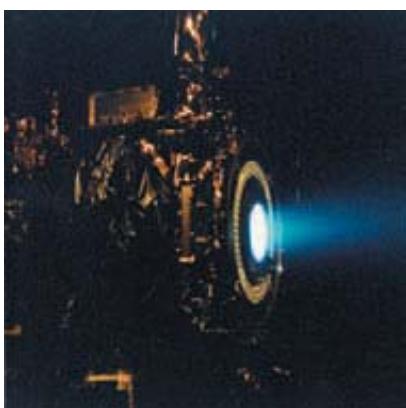
¡Pero las energías cinéticas *nunca* son negativas! Este resultado significa que el electrón nunca puede alcanzar  $r_b = \infty$ ; la fuerza de atracción lleva al electrón a detenerse a una distancia finita de la partícula alfa, y luego comenzará a moverse hacia la partícula alfa. Si se iguala  $K_b$  a cero en la ecuación de la conservación de la energía mecánica, se puede resolver para determinar la distancia  $r_b$  en la que el electrón se encuentra en reposo momentáneo.

**EVALUAR:** Es útil comparar nuestros cálculos con la figura 23.7. En los incisos a) y b), las cargas tienen el mismo signo; como  $r_b > r_a$ , la energía potencial  $U_b$  es menor que  $U_a$ . En el inciso c), las cargas tienen signos opuestos; como  $r_b > r_a$ , la energía potencial  $U_b$  es mayor (es decir, menos negativa) que  $U_a$ .

**23.8** La energía potencial asociada con la carga  $q_0$  en el punto  $a$  depende de las otras cargas  $q_1, q_2$  y  $q_3$  y de sus distancias  $r_1, r_2$  y  $r_3$  desde el punto  $a$ .



**23.9** Esta máquina de iones para naves espaciales utiliza fuerzas eléctricas para expulsar un chorro de iones positivos de xenón ( $\text{Xe}^+$ ) con una rapidez superior a 30 km/s. La propulsión que ocasiona es muy baja (alrededor de 0.09 newtons), pero es posible mantenerla continuamente durante varios días, en contraste con los cohetes de combustible químico, que generan una enorme propulsión durante un breve lapso (figura 8.33). Los motores de iones se han utilizado para maniobrar las naves interplanetarias.



trayectoria es igual a la diferencia  $U_a - U_b$  entre las energías potenciales cuando  $q_0$  está en  $a$  y en  $b$ .

Se puede representar *cualquier* distribución de carga como un conjunto de cargas puntuales, por lo que la ecuación (23.10) muestra que siempre es posible encontrar una función de la energía potencial para *cualquier* campo eléctrico estático. Se infiere que **para todo campo eléctrico debido a una distribución de carga estática, la fuerza ejercida por ese campo es conservativa**.

Las ecuaciones (23.9) y (23.10) definen que  $U$  es igual a cero cuando todas las distancias  $r_1, r_2, \dots$  son infinitas, es decir, cuando la carga de prueba  $q_0$  está muy lejos de todas las cargas que producen el campo. Igual que para cualquier función de la energía potencial, el punto en que  $U = 0$ , es arbitrario; siempre se puede sumar una constante que haga a  $U$  igual a cero en cualquier punto que se elija. En los problemas de electrostática, por lo general lo más sencillo es elegir que este punto se encuentre en el infinito. Cuando se analicen circuitos eléctricos en los capítulos 25 y 26, habrá otras elecciones que resulten más convenientes.

La ecuación (23.10) da la energía potencial asociada con la presencia de la carga de prueba  $q_0$  en el campo  $\vec{E}$  producido por  $q_1, q_2, q_3, \dots$ . Pero también hay energía potencial implicada en el arreglo de estas cargas. Si se comienza con las cargas  $q_1, q_2, q_3, \dots$  todas separadas entre sí por distancias infinitas, y luego se las acerca de manera que la distancia entre  $q_i$  y  $q_j$  sea  $r_{ij}$ , la energía potencial *total*  $U$  es la suma de las energías potenciales de interacción para cada par de cargas. Esto se escribe como

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (23.11)$$

Esta suma se extiende a todas los *pares* de cargas; no se permite que  $i = j$  (porque eso sería la interacción de una carga consigo misma), y sólo se incluyen términos con  $i < j$  para garantizar que cada par se tome en cuenta sólo una vez. Así, para explicar la interacción entre  $q_3$  y  $q_4$ , se incluye un término con  $i = 3$  y  $j = 4$ , pero no un término con  $i = 4$  y  $j = 3$ .

### Interpretación de la energía potencial eléctrica

Como comentario final, a continuación se exponen dos puntos de vista sobre la energía potencial eléctrica. Definimos la energía potencial eléctrica en términos del trabajo realizado *por el campo eléctrico* sobre una partícula con carga que se mueve en el campo, en forma similar a como en el capítulo 7 se definió la energía potencial en términos del trabajo efectuado por la gravedad o por un resorte. Cuando una partícula se desplaza del punto  $a$  al punto  $b$ , el trabajo que realiza sobre ella el campo eléctrico es  $W_{a \rightarrow b} = U_a - U_b$ . Por lo tanto, la diferencia de energía potencial  $U_a - U_b$  es igual al *trabajo que efectúa la fuerza eléctrica cuando la partícula se desplaza de a a b*. Cuando  $U_a$  es mayor que  $U_b$ , el campo realiza trabajo positivo sobre la partícula conforme “cae” de un punto de mayor energía potencial ( $a$ ) a otro con menor energía potencial ( $b$ ).

Un punto de vista alternativo pero equivalente es considerar cuánto trabajo se hubiera tenido que hacer para “subir” la partícula desde un punto  $b$ , en el que la energía potencial es  $U_b$ , hasta un punto  $a$  en el que la energía potencial tiene un valor mayor  $U_a$  (por ejemplo, al empujar dos cargas positivas para acercarlas). Para mover la partícula lentamente (de manera que no se le imparta ninguna energía cinética), es necesario ejercer una fuerza externa adicional  $\vec{F}_{\text{ext}}$  que es igual y opuesta a la fuerza del campo eléctrico y realiza un trabajo positivo. La diferencia de energía potencial  $U_a - U_b$  se define entonces como *el trabajo que debe efectuar una fuerza externa para desplazar la partícula lentamente desde b hasta a en contra de la fuerza eléctrica*. Como  $\vec{F}_{\text{ext}}$  es el negativo de la fuerza del campo eléctrico y el desplazamiento ocurre en dirección opuesta, esta definición de la diferencia de potencial  $U_a - U_b$  es equivalente a la que se dio antes. Este punto de vista alternativo también funciona si  $U_a$  es menor que  $U_b$ , lo que corresponde a “bajar” la partícula; un ejemplo de esto es alejar dos cargas positivas una de otra. En este caso,  $U_a - U_b$  de nuevo es igual al trabajo realizado por la fuerza externa, pero ahora este trabajo es negativo.

En la siguiente sección se usarán estos dos puntos de vista para interpretar lo que se conoce como *potencial eléctrico*, o energía potencial por unidad de carga.

### Ejemplo 23.2 Sistema de cargas puntuales

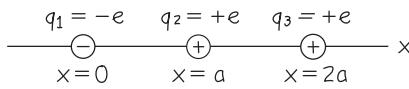
Dos cargas puntuales se localizan en el eje  $x$ ,  $q_1 = -e$  en  $x = 0$  y  $q_2 = +e$  en  $x = a$ . a) Determine el trabajo que debe realizar una fuerza externa para llevar una tercera carga puntual  $q_3 = +e$  del infinito a  $x = 2a$ . b) Determine la energía potencial total del sistema de tres cargas.

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Este problema implica la relación entre el trabajo efectuado para mover una carga puntual y el cambio en la energía potencial. También implica la expresión para la energía potencial de un conjunto de cargas puntuales.

**PLANTEAR:** La figura 23.10 presenta el arreglo final de las tres cargas. Para determinar el trabajo que se requiere para traer a  $q_3$  del infinito, se usa la ecuación (23.10) para encontrar la energía potencial asociada con  $q_3$  en la presencia de  $q_1$  y  $q_2$ . Después se emplea la ecuación (23.11) para determinar la energía potencial total del sistema.

**23.10** Dibujo de la situación después de que se ha traído la tercera carga del infinito.



**EJECUTAR:** a) El trabajo que debe hacer una fuerza externa  $\vec{F}_{\text{ext}}$  sobre  $q_3$  es igual a la diferencia entre dos cantidades: la energía potencial  $U$  asociada con  $q_3$  cuando está en  $x = 2a$  y la energía potencial que tiene cuando está infinitamente lejos. La segunda de éstas es igual a cero, por lo que el trabajo que debe realizarse es igual a  $U$ . Las distancias entre las cargas son  $r_{13} = 2a$  y  $r_{23} = a$ , por lo que a partir de la ecuación (23.10),

$$W = U = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right) = \frac{+e}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-e}{2a} + \frac{+e}{a} \right) = \frac{+e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

Si  $q_3$  se lleva del infinito a lo largo del eje  $+x$ , es atraída por  $q_1$  pero repelida con más fuerza por  $q_2$ ; por ello, debe hacerse un trabajo positivo para llevar  $q_3$  a la posición  $x = 2a$ .

b) La energía potencial total del conjunto de tres cargas está dado por la ecuación (23.11):

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{(-e)(e)}{a} + \frac{(-e)(e)}{2a} + \frac{(e)(e)}{a} \right) = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 a} \end{aligned}$$

**EVALUAR:** Como el resultado en el inciso b) es negativo, el sistema tiene menos energía potencial que si las tres cargas estuvieran infinitamente alejadas. Una fuerza externa tendría que hacer trabajo *negativo* para traerlas del infinito y acomodarlas en su arreglo, y trabajo *positivo* para llevarlas de regreso al infinito.

**Evalué su comprensión de la sección 23.1** Considere el sistema de tres cargas puntuales del ejemplo 21.4 (sección 21.3) y que se ilustra en la figura 21.14.

- a) ¿Cuál es el signo de la energía potencial total de este sistema? i) positivo; ii) negativo; iii) cero. b) ¿Cuál es el signo de la cantidad total de trabajo que tendría que hacerse para llevar las cargas infinitamente lejos una de otra? i) positivo; ii) negativo; iii) cero.



## 23.2 Potencial eléctrico

En la sección 23.1 se estudió la energía potencial  $U$  asociada con una carga de prueba  $q_0$  en un campo eléctrico. Ahora interesa describir esta energía potencial sobre una base “por unidad de carga”, al igual que el campo eléctrico describe la fuerza por unidad de carga sobre una partícula con carga en el campo. Esto lleva al concepto de *potencial eléctrico*, al que es frecuente llamar simplemente *potencial*. Este concepto es muy útil en los cálculos que implican energías de partículas con carga. También facilita hacer muchos cálculos de campo eléctrico porque el potencial eléctrico se relaciona estrechamente con el campo eléctrico  $\vec{E}$ . Cuando se necesita determinar un campo eléctrico, a menudo es más fácil determinar primero el potencial y después, a partir de éste, el campo.

El **potencial** es la *energía potencial por unidad de carga*. Se define el potencial  $V$  en cualquier punto en el campo eléctrico como la energía potencial  $U$  por *unidad de carga* asociada con una carga de prueba  $q_0$  en ese punto:

$$V = \frac{U}{q_0} \quad \text{o bien,} \quad U = q_0 V \quad (23.12)$$

Tanto la energía potencial como la carga son escalares, por lo que el potencial es una cantidad escalar. Sus unidades se encuentran a partir de la ecuación (23.12), dividiendo las unidades de energía entre las de carga. La unidad del SI para el potencial se



llama **volt** (1 V) en honor del científico italiano y experimentador eléctrico Alejandro Volta (1745-1827), y es igual a 1 joule por coulomb:

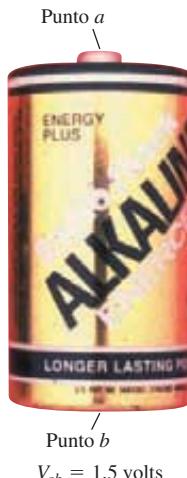
$$1 \text{ V} = 1 \text{ volt} = 1 \text{ J/C} = 1 \text{ joule/coulomb}$$

Expresemos la ecuación (23.2), que iguala el trabajo realizado por la fuerza eléctrica durante un desplazamiento de  $a$  a  $b$  con la cantidad  $-\Delta U = -(U_b - U_a)$ , sobre una base de “trabajo por unidad de carga”. Al dividir esta ecuación entre  $q_0$  se obtiene:

$$\frac{W_{a \rightarrow b}}{q_0} = -\frac{\Delta U}{q_0} = -\left(\frac{U_b}{q_0} - \frac{U_a}{q_0}\right) = -(V_b - V_a) = V_a - V_b \quad (23.13)$$

donde  $V_a = U_a/q_0$  es la energía potencial por unidad de carga en el punto  $a$  y se aplica de manera análoga para  $V_b$ .  $V_a$  y  $V_b$  se denominan el *potencial en el punto a* y *potencial en el punto b*, respectivamente. De este modo, el trabajo realizado por unidad de carga por la fuerza eléctrica cuando un cuerpo con carga se desplaza de  $a$  a  $b$  es igual al potencial en  $a$  menos el potencial en  $b$ .

**23.11** El voltaje de esta batería es igual a la diferencia de potencial  $V_{ab} = V_a - V_b$  entre su terminal positiva (punto  $a$ ) y su terminal negativa (punto  $b$ ).



La diferencia  $V_a - V_b$  se llama *potencial de a con respecto a b*; en ocasiones esa diferencia se abrevia como  $V_{ab} = V_a - V_b$  (observe el orden de los subíndices). No es raro que se llame a esta expresión *diferencia de potencial* entre  $a$  y  $b$ ; pero esto es una ambigüedad, a menos que se especifique cuál es el punto de referencia. En los circuitos eléctricos, que se analizarán en capítulos posteriores, la diferencia de potencial entre dos puntos con frecuencia se denomina **voltaje** (figura 23.11). Así, la ecuación (23.13) establece:  **$V_{ab}$ , el potencial de a con respecto a b, es igual al trabajo realizado por la fuerza eléctrica cuando una UNIDAD de carga se desplaza de a a b.**

Otra manera de interpretar la diferencia de potencial  $V_{ab}$  en la ecuación (23.13) es recurrir al punto de vista alternativo que se mencionó al final de la sección 23.1. Desde ese punto de vista,  $U_a - U_b$  es la cantidad de trabajo que debe realizar una fuerza externa para desplazar con lentitud una partícula de carga  $q_0$  de  $b$  a  $a$  contra la fuerza eléctrica. El trabajo que debe hacer *por unidad de carga* la fuerza externa es, por lo tanto,  $(U_a - U_b)/q_0 = V_a - V_b = V_{ab}$ . En otras palabras,  **$V_{ab}$ , el potencial de a con respecto a b, es igual al trabajo que debe efectuarse para desplazar con lentitud una UNIDAD de carga de b a a contra la fuerza eléctrica.**

El instrumento que mide la diferencia de potencial entre dos puntos se llama **voltímetro**. En el capítulo 26 se estudiará el principio del tipo más común de voltímetro, el de bobina móvil. También hay instrumentos mucho más sensibles para medir el potencial, los cuales utilizan amplificación electrónica. Son comunes los instrumentos capaces de medir diferencias de potencial de  $1 \mu\text{V}$ , y es posible obtener sensibilidades menores de  $10^{-12} \text{ V}$ .

## Cálculo del potencial eléctrico

Para encontrar el potencial  $V$  debido a una sola carga puntual  $q$ , se divide la ecuación (23.9) entre  $q_0$ :

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (\text{potencial debido a una carga puntual}) \quad (23.14)$$

donde  $r$  es la distancia de la carga puntual  $q$  al punto en que se evalúa el potencial. Si  $q$  es positiva, el potencial que produce es positivo en todos los puntos; si  $q$  es negativa, produce un potencial negativo en cualquier lugar. En cualquier caso,  $V$  es igual a cero en  $r = \infty$ , a una distancia infinita de la carga puntual. Observe que el potencial, como el campo eléctrico, es independiente de la carga de prueba  $q_0$  que se utiliza para definirlo.

De manera similar, para encontrar el potencial debido a un conjunto de cargas puntuales, se divide la ecuación (23.10) entre  $q_0$ :

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (\text{potencial debido a un conjunto de cargas puntuales}) \quad (23.15)$$

En esta expresión,  $r_i$  es la distancia de la  $i$ -ésima carga,  $q_i$ , al punto en que se evalúa  $V$ . Así como el campo eléctrico debido a una colección de cargas puntuales es la suma *vectorial* de los campos producidos por cada carga, el potencial eléctrico debido a una colección de cargas puntuales es la suma *escalar* de los potenciales debidos a cada carga. Cuando se tiene una distribución continua de carga a lo largo de una línea, sobre una superficie o a través de un volumen, se divide la carga en elementos  $dq$  y la suma en la ecuación (23.15) se convierte en integral:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad (\text{potencial debido a una distribución continua de carga}) \quad (23.16)$$

donde  $r$  es la distancia que hay entre el elemento con carga  $dq$  y el punto del campo donde se desea obtener  $V$ . Se verán varios ejemplos de tales casos. El potencial definido por las ecuaciones (23.15) y (23.16) es igual a cero en puntos que están infinitamente lejos de *todas* las cargas. Más adelante se verán casos en los que la distribución de carga en sí se extiende al infinito. En tales casos se verá que en el infinito no se puede establecer  $V = 0$ , y se necesitará tener cuidado en el uso e interpretación de las ecuaciones (23.15) y (23.16).

**CUIDADO** **¿Qué es el potencial eléctrico?** Antes de entrar en los detalles del cálculo del potencial eléctrico, debemos detenernos y recordar lo que es el potencial. El *potencial* eléctrico en cierto punto es la energía potencial que estaría asociada a una carga *unitaria* colocada en ese punto. Ésa es la razón por la que el potencial se mide en joules por coulomb, o volts. Asimismo, hay que recordar que no tiene que haber una carga en un punto dado para que ahí exista un potencial  $V$ . (De igual forma, un campo eléctrico puede existir en un punto dado aun si no hay carga que responda a él.) ■

## Obtención del potencial eléctrico a partir del campo eléctrico

Cuando se tiene un conjunto de cargas puntuales, la ecuación (23.15) es por lo general la forma más fácil de calcular el potencial  $V$ . Pero en ciertos problemas en los que se conoce el campo eléctrico o se puede calcular con facilidad, es más fácil determinar  $V$  a partir de  $\vec{E}$ . La fuerza  $\vec{F}$  sobre una carga de prueba  $q_0$  se escribe como  $\vec{F} = q_0\vec{E}$ , por lo que, según la ecuación (23.1), el trabajo realizado por la fuerza eléctrica conforme la carga de prueba se desplaza de  $a$  a  $b$  está dado por:

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si se divide entre  $q_0$  y se compara el resultado con la ecuación (23.13), se encuentra que

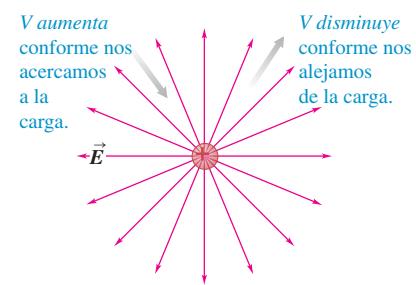
$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E \cos\phi \, dl \quad (\text{diferencia de potencial como integral de } \vec{E}) \quad (23.17)$$

El valor de  $V_a - V_b$  es independiente de la trayectoria tomada de  $a$  a  $b$ , del mismo modo en que el valor de  $W_{a \rightarrow b}$  es independiente de la trayectoria. Para interpretar la ecuación (23.17) hay que recordar que  $\vec{E}$  es la fuerza eléctrica por unidad de carga sobre una carga de prueba. Si la integral de línea  $\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$  es positiva, el campo eléctrico efectúa un trabajo positivo sobre una carga de prueba positiva conforme ésta se desplaza de  $a$  a  $b$ . En este caso, la energía potencial eléctrica por unidad de carga disminuye a medida que la carga de prueba se desplaza, por lo que la energía potencial por unidad de carga también decrece; por consiguiente,  $V_b$  es menor que  $V_a$  y  $V_a - V_b$  es positiva.

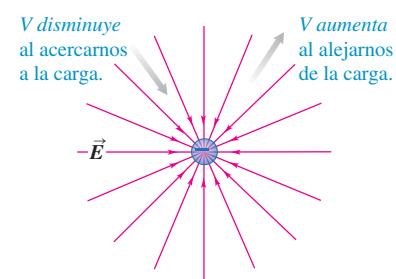
Como ilustración, considere una carga puntual positiva (figura 23.12a). El campo eléctrico se aleja de la carga, y  $V = q/4\pi\epsilon_0 r$  es positivo a cualquier distancia finita de la carga. Si nos alejamos de la carga, en dirección de  $\vec{E}$ , nos movemos hacia valores más bajos de  $V$ ; si nos acercamos a la carga, en dirección opuesta a  $\vec{E}$ , nos desplazamos hacia valores mayores de  $V$ . Para la carga puntual negativa en la figura 23.12b,  $\vec{E}$  está dirigido hacia la carga y  $V = q/4\pi\epsilon_0 r$  es negativo a cualquier distancia finita de la carga. En este caso, si nos desplazamos hacia la carga, nos moveremos en la dirección de  $\vec{E}$

**23.12** Si nos movemos en la dirección de  $\vec{E}$ , el potencial eléctrico  $V$  disminuye; si nos movemos en dirección opuesta a  $\vec{E}$ ,  $V$  se incrementa.

a) Una carga puntual positiva



b) Una carga puntual negativa



y en la dirección de  $V$  decreciente (más negativo). Al alejarnos de la carga, en dirección opuesta a la de  $\vec{E}$ , nos desplazamos hacia valores crecientes de  $V$  (menos negativos). La regla general, válida para *cualquier* campo eléctrico, es la siguiente: desplazarse *en* la dirección de  $\vec{E}$  significa hacerlo en la dirección de  $V$  *decreciente*, y desplazarse *contra* la dirección de  $\vec{E}$  significa moverse en la dirección de  $V$  *creciente*.

Asimismo, una carga de prueba positiva  $q_0$  experimenta una fuerza eléctrica en la dirección de  $\vec{E}$ , hacia valores más pequeños de  $V$ ; una carga de prueba negativa experimenta una fuerza opuesta a  $\vec{E}$ , hacia valores más grandes de  $V$ . Así, una carga positiva tiende a “caer” de una región de potencial elevado a otra de menor potencial. Lo contrario también se cumple para una carga negativa.

Observe que la ecuación (23.17) se puede escribir como

$$V_a - V_b = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (23.18)$$

En comparación con la integral de la ecuación (23.17), ésta tiene signo negativo y los límites están invertidos; de ahí que las ecuaciones (23.17) y (23.18) sean equivalentes. Pero la ecuación (23.18) tiene una interpretación un poco diferente. Para mover una unidad de carga lentamente en contra de la fuerza eléctrica, se debe aplicar una fuerza *externa* por unidad de carga igual a  $-\vec{E}$ , igual y opuesta a la fuerza eléctrica por unidad de carga  $\vec{E}$ . La ecuación 23.18 dice que  $V_a - V_b = V_{ab}$ , el potencial de  $a$  con respecto a  $b$ , es igual al trabajo realizado por unidad de carga por esta fuerza externa para desplazar una unidad de carga de  $b$  a  $a$ . Ésta es la misma interpretación alternativa que se estudió para la ecuación (23.13).

Las ecuaciones (23.17) y (23.18) demuestran que la unidad de la diferencia de potencial (1 V) es igual a la unidad del campo eléctrico (1 N/C) multiplicada por la unidad de distancia (1 m). Así, la unidad de campo eléctrico se expresa como 1 volt por metro (1 V/m), o como 1 N/C:

$$1 \text{ V/m} = 1 \text{ volt/metro} = 1 \text{ N/C} = 1 \text{ newton/coulomb}$$

En la práctica, la unidad habitual para la magnitud del campo eléctrico es el volt por metro.

### Electrón volts

La magnitud  $e$  de la carga del electrón se usa para definir una unidad de energía que es útil en muchos cálculos con los sistemas atómico y nuclear. Cuando una partícula con carga  $q$  se desplaza de un punto en el que el potencial es  $V_b$  a otro en que es  $V_a$ , el cambio en la energía potencial  $U$  es

$$U_a - U_b = q(V_a - V_b) = qV_{ab}$$

Si la carga  $q$  es igual a la magnitud  $e$  de la carga del electrón,  $1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ , y la diferencia de potencial es  $V_{ab}$ , el cambio en la energía es

$$U_a - U_b = (1.602 \times 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ V}) = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Esta cantidad de energía se define como 1 **electrón volt** (1 eV):

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

A menudo se utilizan los múltiplos meV, keV, MeV, GeV y TeV.

**CUIDADO** **Electrón volts contra volts** Recuerde que el electrón volt es una unidad de energía, ¡no una unidad de potencial ni de diferencia de potencial! ■

Cuando una partícula con carga  $e$  se mueve a través de una diferencia de potencial de 1 volt, el cambio en la *energía* potencial es 1 eV. Si la carga es algún múltiplo de  $e$  —digamos  $Ne$ —, el cambio en la energía potencial en electrón volts es  $N$  veces la diferencia de potencial expresada en volts. Por ejemplo, cuando una partícula alfa, que tiene una carga de  $2e$ , se desplaza entre dos puntos con diferencia de potencial de 1000 V, el cambio en la energía potencial es  $2(1000 \text{ eV}) = 2000 \text{ eV}$ . Para confirmar esto, se escribe

$$\begin{aligned} U_a - U_b &= qV_{ab} = (2e)(1000 \text{ V}) = (2)(1.602 \times 10^{-19} \text{ C})(1000 \text{ V}) \\ &= 3.204 \times 10^{-16} \text{ J} = 2000 \text{ eV} \end{aligned}$$

Si bien se ha definido el electrón volt en términos de energía *potencial*, se usa para *cualquier* forma de energía, como la energía cinética de una partícula en movimiento. Cuando se habla de “un millón de electrón volts protón,” significa que hay un protón cuya energía cinética es de un millón de electrón volts (1 MeV), lo que es igual a  $(10^6)(1.602 \times 10^{-19} \text{ J}) = 1.602 \times 10^{-13} \text{ J}$  (figura 23.13).



**23.13** Este acelerador en el Fermi National Accelerator Laboratory, en Illinois, da a los protones una energía cinética de 400 MeV ( $4 \times 10^8 \text{ eV}$ ). Las etapas adicionales de aceleración incrementan su energía cinética a 980 GeV, o 0.98 TeV ( $9.8 \times 10^{11} \text{ eV}$ ).

### Ejemplo 23.3 Fuerza eléctrica y potencial eléctrico

En el interior de un acelerador lineal, un protón (carga  $+e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ ) se desplaza en línea recta de un punto  $a$  a otro punto  $b$  una distancia total  $d = 0.50 \text{ m}$ . A lo largo de esta línea, el campo eléctrico es uniforme con magnitud  $E = 1.5 \times 10^7 \text{ V/m} = 1.5 \times 10^7 \text{ N/C}$  en la dirección de  $a$  a  $b$ . Determine *a)* la fuerza sobre el protón; *b)* el trabajo realizado sobre este por el campo; *c)* la diferencia de potencial  $V_a - V_b$ .

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Este problema usa la relación entre el campo eléctrico (que es un dato conocido) y la fuerza eléctrica (que es una de las variables buscadas). También utiliza la relación entre fuerza, trabajo y diferencia de energía potencial.

**PLANTEAR:** Se da el campo eléctrico, por lo que es fácil encontrar la fuerza eléctrica que se ejerce sobre el protón. El cálculo del trabajo que realiza esta fuerza sobre el protón también es fácil porque  $\vec{E}$  es uniforme, lo que significa que la fuerza es constante. Una vez que se conoce el trabajo, se determina la diferencia de potencial empleando la ecuación (23.13).

**EJECUTAR:** *a)* La fuerza sobre el protón está en la misma dirección que el campo eléctrico, y su magnitud es

$$\begin{aligned} F &= qE = (1.602 \times 10^{-19} \text{ C})(1.5 \times 10^7 \text{ N/C}) \\ &= 2.4 \times 10^{-12} \text{ N} \end{aligned}$$

*b)* La fuerza es constante y está en la misma dirección que el campo eléctrico, de manera que el trabajo efectuado sobre el protón es

$$\begin{aligned} W_{a \rightarrow b} &= Fd = (2.4 \times 10^{-12} \text{ N})(0.50 \text{ m}) = 1.2 \times 10^{-12} \text{ J} \\ &= (1.2 \times 10^{-12} \text{ J}) \frac{1 \text{ eV}}{1.602 \times 10^{-19} \text{ J}} \\ &= 7.5 \times 10^6 \text{ eV} = 7.5 \text{ MeV} \end{aligned}$$

*c)* De la ecuación (23.13), la diferencia de potencial es el trabajo por unidad de carga, que es

$$\begin{aligned} V_a - V_b &= \frac{W_{a \rightarrow b}}{q} = \frac{1.2 \times 10^{-12} \text{ J}}{1.602 \times 10^{-19} \text{ C}} = 7.5 \times 10^6 \text{ J/C} \\ &= 7.5 \times 10^6 \text{ V} = 7.5 \text{ MV} \end{aligned}$$

Se obtiene el mismo resultado con más facilidad si se recuerda que 1 electrón volt es igual a 1 volt multiplicado por la carga  $e$ . Como el trabajo realizado es  $7.5 \times 10^6 \text{ eV}$  y la carga es  $e$ , la diferencia de potencial es  $(7.5 \times 10^6 \text{ eV})/e = 7.5 \times 10^6 \text{ V}$ .

**EVALUAR:** El resultado del inciso *c*) puede comprobarse con las ecuaciones (23.17) o (23.18) para calcular la integral del campo eléctrico. El ángulo  $\phi$  entre el campo constante  $\vec{E}$  y el desplazamiento es igual a cero, por lo que la ecuación (23.17) se convierte en

$$V_a - V_b = \int_a^b E \cos \phi \, dl = \int_a^b E \, dl = E \int_a^b \, dl$$

La integral de  $dt$  de  $a$  a  $b$  tan sólo es la distancia  $d$ , por lo que una vez más se obtiene

$$V_a - V_b = Ed = (1.5 \times 10^7 \text{ V/m})(0.50 \text{ m}) = 7.5 \times 10^6 \text{ V}$$

**Ejemplo 23.4** **Potencial debido a dos cargas puntuales**

Un dipolo eléctrico consiste en dos cargas puntuales,  $q_1 = +12 \text{ nC}$  y  $q_2 = -12 \text{ nC}$ , colocadas a una distancia de 10 cm una de la otra (figura 23.14). Calcule los potenciales en los puntos  $a$ ,  $b$  y  $c$  sumando los potenciales debidos a cada carga, como en la ecuación (23.15).

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** Éste es el mismo ordenamiento de cargas que el del ejemplo 21.9 (sección 21.5). En ese ejemplo se calculó el campo eléctrico en cada punto por medio de una suma vectorial. La variable buscada en este problema es el potencial eléctrico  $V$  en tres puntos.

**PLANTEAR:** Para encontrar  $V$  en cada punto, en la ecuación (23.15) se hace la suma algebraica:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

**EJECUTAR:** En el punto  $a$  el potencial debido a la carga positiva  $q_1$  es

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} &= (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{12 \times 10^{-9} \text{ C}}{0.060 \text{ m}} \\ &= 1800 \text{ N} \cdot \text{m/C} \\ &= 1800 \text{ J/C} = 1800 \text{ V} \end{aligned}$$

y el potencial debido a la carga  $q_2$  es

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} &= (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{(-12 \times 10^{-9} \text{ C})}{0.040 \text{ m}} \\ &= -2700 \text{ N} \cdot \text{m/C} \\ &= -2700 \text{ J/C} = -2700 \text{ V} \end{aligned}$$

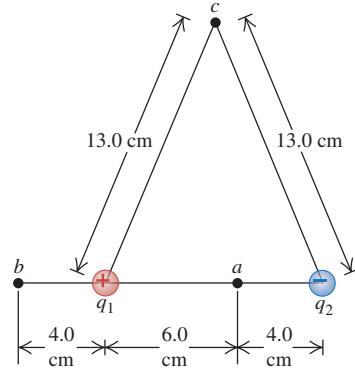
El potencial  $V_a$  en el punto  $a$  es la suma de éstos:

$$V_a = 1800 \text{ V} + (-2700 \text{ V}) = -900 \text{ V}$$

Con cálculos similares se demuestra que en el punto  $b$  el potencial debido a la carga positiva es  $+2700 \text{ V}$ , el potencial debido a la carga negativa es  $-770 \text{ V}$ , y

$$V_b = 2700 \text{ V} + (-770 \text{ V}) = 1930 \text{ V}$$

**23.14** ¿Cuáles son los potenciales en los puntos  $a$ ,  $b$  y  $c$  debidos a este dipolo eléctrico?



En el punto  $c$ , el potencial debido a la carga positiva es

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} = (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{12 \times 10^{-9} \text{ C}}{0.13 \text{ m}} = 830 \text{ V}$$

El potencial debido a la carga negativa es  $-830 \text{ V}$ , y el potencial total es igual a cero:

$$V_c = 830 \text{ V} + (-830 \text{ V}) = 0$$

El potencial también es igual a cero en el infinito (infinitamente lejos de ambas cargas).

**EVALUAR:** Al comparar este ejemplo con el 21.9 se aprecia que es mucho más fácil calcular el potencial eléctrico (un escalar) que el campo eléctrico (un vector). Hay que aprovechar esta simplificación siempre que sea posible.

**Ejemplo 23.5** **Potencial y energía potencial**

Calcule la energía potencial asociada con una carga puntual de  $+4.0 \text{ nC}$  si se coloca en los puntos  $a$ ,  $b$  y  $c$  de la figura 23.14.

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** Se conoce el valor del potencial eléctrico en cada uno de esos puntos, y se necesita encontrar la energía potencial para una carga puntual situada en cada punto.

**PLANTEAR:** Para cualquier carga puntual  $q$ , la energía potencial asociada es  $U = qV$ . Se utilizan los valores de  $V$  del ejemplo 23.4.

**EJECUTAR:** En el punto  $a$ ,

$$U_a = qV_a = (4.0 \times 10^{-9} \text{ C})(-900 \text{ J/C}) = -3.6 \times 10^{-6} \text{ J}$$

En el punto  $b$ ,

$$U_b = qV_b = (4.0 \times 10^{-9} \text{ C})(1930 \text{ J/C}) = 7.7 \times 10^{-6} \text{ J}$$

En el punto  $c$ ,

$$U_c = qV_c = 0$$

Todos estos valores corresponden a  $U$  y  $V$  con valor de cero en el infinito.

**EVALUAR:** Observe que no se efectúa ningún trabajo neto sobre la carga de  $4.0 \text{ nC}$  si se desplaza del punto  $c$  al infinito por cualquier trayectoria. En particular, considere la trayectoria a lo largo de la bisectriz perpendicular de la línea que une las otras dos cargas  $q_1$  y  $q_2$  en la figura 23.14. Como se vio en el ejemplo 21.9 (sección 21.5), en los puntos situados sobre la bisectriz, la dirección de  $\vec{E}$  es perpendicular a la bisectriz. Por lo tanto, la fuerza sobre la carga de  $4.0 \text{ nC}$  es perpendicular a la trayectoria, y no se realiza ningún trabajo en cualquier desplazamiento a lo largo de ella.

### Ejemplo 23.6 Cálculo del potencial por integración

Calcule el potencial a una distancia  $r$  de una carga puntual  $q$ , por medio de la integración del campo eléctrico, como en la ecuación (23.17).

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Este problema pide encontrar el potencial eléctrico a partir del campo eléctrico.

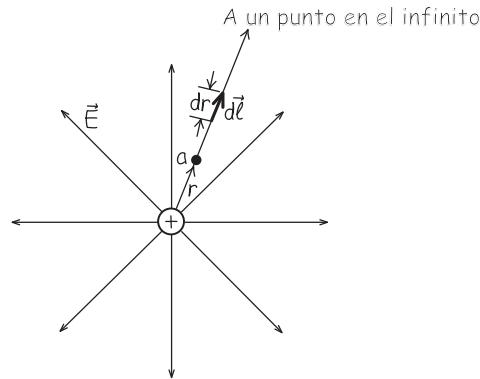
**PLANTEAR:** Para obtener el potencial  $V$  a una distancia  $r$  de la carga puntual, se establece que el punto  $a$  en la ecuación (23.17) sea la distancia  $r$ , y que el punto  $b$  esté en el infinito (figura 23.15). Como de costumbre, elegimos que el potencial sea cero a una distancia infinita a partir de la carga.

**EJECUTAR:** Para resolver la integral, podemos elegir cualquier camino entre los puntos  $a$  y  $b$ . El más conveniente es una línea recta radial como se muestra en la figura 23.15, de manera que  $d\vec{l}$  esté en la dirección radial y tenga magnitud  $dr$ . Si  $q$  es positiva,  $\vec{E}$  y  $d\vec{l}$  siempre son paralelos, por lo que  $\phi = 0$  y la ecuación (23.17) se convierte en

$$\begin{aligned} V - 0 &= \int_r^{\infty} E dr = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_r^{\infty} = 0 - \left( -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \\ V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

Esto concuerda con la ecuación (23.14). Si  $q$  es negativa,  $\vec{E}$  se dirige radialmente hacia la carga, en tanto que  $d\vec{l}$  sigue yendo en forma radial, por lo que  $\phi = 180^\circ$ . Como  $\cos 180^\circ = -1$ , se agrega un signo menos al resultado anterior. Sin embargo, la magnitud del campo  $E$  siempre es positiva, y como  $q$  es negativa, se debe escribir  $E = |q|/4\pi\epsilon_0 r = -q/4\pi\epsilon_0 r$ , lo que da otro signo menos. Los dos signos menos se cancelan y el resultado anterior de  $V$  es válido para cargas puntuales de cualquier signo.

**23.15** Cálculo de la energía potencial por integración de  $\vec{E}$  para una sola carga puntual.



**EVALUAR:** Se obtiene el mismo resultado para el campo eléctrico mediante la ecuación (21.7), que es válida para cualquier signo de  $q$ , y escribiendo  $d\vec{l} = \hat{r}dr$ :

$$\begin{aligned} V - 0 &= V = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_r^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} dr = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

### Ejemplo 23.7 Desplazamiento a través de una diferencia de potencial

En la figura 23.16, una partícula de polvo, cuya masa es  $m = 5.0 \times 10^{-9}$  kg = 5.0  $\mu$ g y con carga  $q_0 = 2.0$  nC, parte del reposo en un punto  $a$  y se mueve en línea recta hasta un punto  $b$ . ¿Cuál es su velocidad  $v$  en el punto  $b$ ?

#### SOLUCIÓN

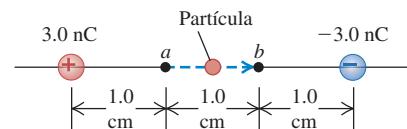
**IDENTIFICAR:** Este problema implica un cambio de rapidez y, por lo tanto, de la energía cinética de la partícula, por lo que se puede usar el enfoque de la energía. Este problema sería difícil de resolver sin el empleo de técnicas de energía, puesto que la fuerza que actúa sobre la partícula varía en magnitud conforme la partícula se desplaza de  $a$  a  $b$ .

**PLANTEAR:** Sobre la partícula actúa solo la fuerza eléctrica conservativa, por lo que la energía mecánica se conserva:

$$K_a + U_a = K_b + U_b$$

**EJECUTAR:** Para esta situación,  $K_a = 0$  y  $K_b = \frac{1}{2}mv^2$ . Las energías potenciales ( $U$ ) se obtienen de los potenciales ( $V$ ) por medio de la ecua-

**23.16** La partícula se mueve del punto  $a$  al punto  $b$ ; su aceleración no es constante.



ción (23.12):  $U_a = q_0 V_a$  y  $U_b = q_0 V_b$ . Al sustituir esto en la ecuación de conservación de la energía y despejar  $v$ , se encuentra que

$$\begin{aligned} 0 + q_0 V_a &= \frac{1}{2} m v^2 + q_0 V_b \\ v &= \sqrt{\frac{2q_0(V_a - V_b)}{m}} \end{aligned}$$

continúa

Con la ecuación (23.15) se calculan los potenciales, como se hizo en el ejemplo 23.4:

$$V_a = (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \times \left( \frac{3.0 \times 10^{-9} \text{ C}}{0.010 \text{ m}} + \frac{(-3.0 \times 10^{-9} \text{ C})}{0.020 \text{ m}} \right) = 1350 \text{ V}$$

$$V_b = (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \times \left( \frac{3.0 \times 10^{-9} \text{ C}}{0.020 \text{ m}} + \frac{(-3.0 \times 10^{-9} \text{ C})}{0.010 \text{ m}} \right) = -1350 \text{ V}$$

$$V_a - V_b = (1350 \text{ V}) - (-1350 \text{ V}) = 2700 \text{ V}$$

Por último,

$$v = \sqrt{\frac{2(2.0 \times 10^{-9} \text{ C})(2700 \text{ V})}{5.0 \times 10^{-9} \text{ kg}}} = 46 \text{ m/s}$$

**EVALUAR:** El resultado es razonable: la carga de prueba positiva gana rapidez conforme se aleja de la carga positiva y se acerca a la carga negativa. Para comprobar la consistencia de las unidades en el último renglón del cálculo, se observa que  $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$ , por lo que el numerador bajo el radical tiene unidades de  $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$ .

Se utiliza exactamente el mismo método para encontrar la rapidez de un electrón acelerado a través de una diferencia de potencial de 500 V en un tubo de osciloscopio, o de 20 kV en un cinescopio de televisión. Los problemas de final de capítulo incluyen varios ejemplos de tales cálculos.

**Evalúe su comprensión de la sección 23.2** Si el potencial eléctrico en cierto punto es igual a cero, el campo eléctrico en ese punto, ¿tiene que valer cero? (Sugerencia: Considere el punto *c* en los ejemplos 23.4 y 21.9.)

## 23.3 Cálculo del potencial eléctrico

Cuando se calcula el potencial debido a una distribución de carga, por lo general se sigue una de dos rutas posibles. Si se conoce la distribución de carga se emplea la ecuación (23.15) o la (23.16). O si se conoce el modo en que el campo eléctrico depende de la posición, se usa la ecuación (23.17) estableciendo que el potencial es igual a cero en algún lugar conveniente. Algunos problemas requieren una combinación de estos enfoques.

Conforme analice estos ejemplos, compárelos con aquellos relacionados con el cálculo del campo eléctrico en la sección 21.5. Verá que es mucho más fácil calcular potenciales eléctricos escalares que campos eléctricos vectoriales. El mensaje es claro: siempre que sea posible, resuelva los problemas utilizando el enfoque de energía (potencial eléctrico y energía potencial eléctrica) en vez del enfoque de dinámica (campos eléctricos y fuerzas eléctricas).

### Estrategia para resolver problemas 23.1

### Cálculo del potencial eléctrico



**IDENTIFICAR** los conceptos relevantes: Recuerde que potencial es *energía potencial por unidad de carga*. La comprensión de este enunciado lo llevará lejos.

**PLANTEAR** el problema de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Elabore un dibujo que muestre con claridad las ubicaciones de las cargas (que pueden ser puntuales o una distribución continua de carga) y su elección de los ejes coordinados.
2. Indique en el dibujo la posición del punto en que se desea calcular el potencial eléctrico *V*. En ocasiones esta posición será arbitraria (por ejemplo, un punto a una distancia *r* del centro de una esfera con carga).

**EJECUTAR** la solución como sigue:

1. Para encontrar el potencial debido a un conjunto de cargas puntuales utilice la ecuación (23.15). Si se da una distribución continua de carga, hay que ver la manera de dividirla en elementos infinitesimales para luego emplear la ecuación (23.16). Realice la integración utilizando los límites apropiados que incluyan toda la distribución de carga. En la integral tenga cuidado con las cantidades geométricas que varían y las que permanecen constantes.
2. Si se da el campo eléctrico, o si se puede encontrar con alguno de los métodos presentados en los capítulos 21 o 22, tal vez sea más fácil usar la ecuación (23.17) o (23.18) para calcular la diferencia

de potencial entre los puntos *a* y *b*. Cuando sea apropiado, hay que ejercer la libertad de definir que *V* es igual a cero en algún lugar conveniente, y elegir éste como punto *b*. (Para cargas puntuales, por lo general será el infinito. Para otras distribuciones de carga —en especial aquellas que se extienden al infinito—, quizás sea más conveniente o necesario que *V<sub>b</sub>* sea igual a cero a cierta distancia finita de la distribución de carga. Esto es como definir que al nivel del suelo *U* es igual a cero en problemas relacionados con la gravedad.) En esas condiciones, el potencial en cualquier otro punto (por ejemplo, *a*) se obtiene con las ecuaciones (23.17) o (23.18) con *V<sub>b</sub>* = 0.

3. Hay que recordar que el potencial es una cantidad *escalar*, no un *vector*, por lo que ¡no tiene componentes! Sin embargo, tal vez se tengan que usar componentes de los vectores  $\vec{E}$  y  $d\vec{l}$  cuando se use la ecuación (23.17) o la (23.18).

**EVALUAR** la respuesta: Compruebe que la respuesta concuerde con la intuición. Si el resultado da *V* como función de la posición, elabore una gráfica de esta función para ver si es razonable. Si se conoce el campo eléctrico es posible hacer una comprobación aproximada del resultado para *V* verificando que *V* disminuye si nos movemos en la dirección de  $\vec{E}$ .

### Ejemplo 23.8 Esfera conductora con carga

Una esfera sólida conductora de radio  $R$  tiene una carga total  $q$ . Encuentre el potencial en todos los lugares, tanto fuera como dentro de la esfera.

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Se usa la ley de Gauss como en el ejemplo 22.5 (sección 22.4) para encontrar el campo eléctrico en todos los puntos para esta distribución de carga. El resultado se emplea para determinar el potencial en todos los puntos.

**PLANTEAR:** Se elige como origen el centro de la esfera. Como se conoce  $E$  en todos los valores de la distancia  $r$  desde el centro de la esfera, se determina  $V$  como función de  $r$ .

**EJECUTAR:** Del ejemplo 22.5, en todos los puntos *frente* de la esfera el campo es el mismo que si la esfera se eliminara y se sustituyera por una carga puntual  $q$ . Se considera  $V = 0$  en el infinito, como se hizo para una carga puntual. Por lo tanto, el potencial en un punto en el exterior de la esfera a una distancia  $r$  de su centro es el mismo que el potencial debido a una carga puntual  $q$  en el centro:

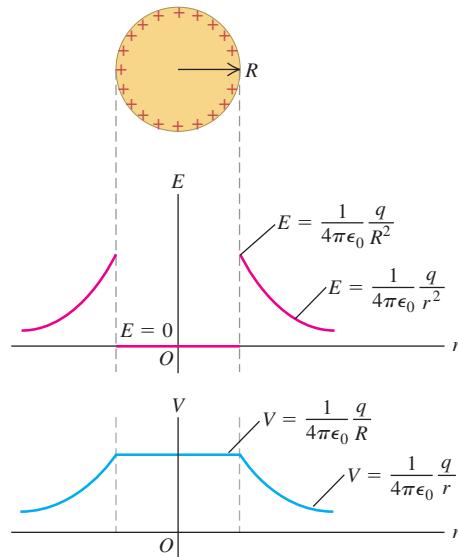
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

El potencial en la superficie de la esfera es  $V_{\text{superficie}} = q/4\pi\epsilon_0 R$ .

En el *interior* de la esfera,  $\vec{E}$  es igual a cero en todas partes; de otra manera, la carga se movería dentro de la esfera. De esta forma, si una carga de prueba se desplaza de un punto a otro en el interior de la esfera, no se efectúa ningún trabajo sobre la carga. Esto significa que el potencial es el mismo en todos los puntos del interior de la esfera y es igual a su valor  $q/4\pi\epsilon_0 R$  en la superficie.

**EVALUAR:** La figura 23.17 ilustra el campo y el potencial como función de  $r$  para una carga positiva  $q$ . En este caso, el campo eléctrico apunta radialmente alejándose de la esfera. Conforme nos alejamos de la esfera, en la dirección de  $\vec{E}$ ,  $V$  disminuye (como debe ser). El campo eléctrico en la superficie tiene magnitud  $E_{\text{superficie}} = |q|/4\pi\epsilon_0 R^2$ .

**23.17** Magnitud del campo eléctrico  $E$  y el potencial  $V$  en puntos dentro y fuera de una esfera conductora con carga positiva.



### Ionización y descarga en corona

Los resultados del ejemplo 23.8 tienen numerosas consecuencias prácticas; una de ellas se relaciona con el potencial máximo que puede aplicarse en un conductor en el aire. Este potencial está limitado porque las moléculas de aire se *ionizan* y el aire se convierte en un conductor, a una magnitud de campo eléctrico de cerca de  $3 \times 10^6$  V/m. De momento, suponga que  $q$  es positiva. Cuando se comparan las expresiones en el ejemplo 23.8 para el potencial  $V_{\text{superficie}}$  y la magnitud de campo  $E_{\text{superficie}}$  en la superficie de una esfera conductora con carga, se observa que  $V_{\text{superficie}} = E_{\text{superficie}}R$ . Así, si  $E_m$  representa la magnitud de campo eléctrico a la que el aire se vuelve conductor (lo que se conoce como *resistencia dieléctrica* del aire), entonces el potencial máximo  $V_m$  que se puede aplicar a un conductor esférico es

$$V_m = RE_m$$

Para una esfera conductora de 1 cm de radio en el aire,  $V_m = (10^{-2} \text{ m}) (3 \times 10^6 \text{ V/m}) = 30,000 \text{ V}$ . Ninguna cantidad de “carga” puede sobrepasar el potencial de una esfera conductora de este tamaño en el aire en más de 30,000 V, aproximadamente; si se intenta aumentar el potencial más allá de esto agregando carga adicional, se provocaría que el aire circundante se ionizara y se convirtiera en conductor, y la carga adicional escaparía al aire.

Para lograr potenciales aún mayores, las máquinas de alto voltaje como los generadores Van de Graaff usan terminales esféricas con radios muy grandes (véase la figura 22.27 y la fotografía que abre el capítulo 22). Por ejemplo, una terminal de radio  $R = 2 \text{ m}$  tiene un potencial máximo  $V_m = (2 \text{ m}) (3 \times 10^6 \text{ V/m}) = 6 \times 10^6 \text{ V} = 6 \text{ MV}$ . Estas máquinas se colocan a veces en tanques presurizados llenos de un gas como el hexafluoruro de azufre ( $\text{SF}_6$ ), que tiene un valor mayor de  $E_m$  que el del aire y, por consiguiente, es capaz de soportar campos aún más grandes sin volverse conductor.

**23.18** El mástil metálico en la parte superior del edificio Empire State actúa como pararrayos. Es azotado por relámpagos hasta 500 veces al año.



El resultado del ejemplo 23.8 también explica lo que sucede con un conductor con carga y cuyo radio de curvatura es muy *pequeño*, como un objeto afilado o un alambre fino. Como el potencial máximo es proporcional al radio, incluso potenciales relativamente pequeños aplicados a puntas agudas en el aire producen campos suficientemente elevados inmediatamente afuera de las puntas para ionizar el aire que las rodea y convertirlo en un buen conductor. La corriente resultante y el resplandor asociado a ella (visible en un cuarto oscuro) se llama *corona*. Las impresoras láser y las máquinas de fotocopiado utilizan una corona de alambres muy finos para distribuir cargas sobre el tambor que forma las imágenes (figura 21.2).

En situaciones en que es importante *evitar* que exista una corona, se usan conductores de radio grande. Ejemplo de esto es la esfera metálica en el extremo de las antenas de radio para automóviles, lo que evita que se presente la corona, la cual provocaría estática. Otro ejemplo es el extremo romo de los pararrayos metálicos (figura 23.18). Si hay un exceso de carga en la atmósfera, como ocurre durante las tormentas, en el extremo romo se acumula una cantidad sustancial de carga del signo contrario. Como resultado, cuando la carga atmosférica se descarga a través de relámpagos, tiende a ser atraída hacia el pararrayos y no hacia otras estructuras cercanas que podrían resultar dañadas. (Un cable conductor que conecta el pararrayos con la tierra permite que la carga adquirida se disipe en forma inofensiva.) Un pararrayos con extremo agudo permitiría que se acumulara menos carga y por ello sería menos eficaz.

### Ejemplo 23.9 Placas paralelas con cargas opuestas

Encuentre el potencial a cualquier altura  $y$  entre las dos placas paralelas con cargas opuestas que se estudiaron en la sección 23.1 (figura 23.19).

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** De la sección 23.1 se conoce la *energía potencial eléctrica*  $U$ , para una carga de prueba  $q_0$  como función de  $y$ . La meta aquí es obtener el *potencial eléctrico*  $V$  debido a las cargas en las placas como función de  $y$ .

**PLANTEAR:** De la ecuación (23.5),  $U = q_0 E y$  en un punto a la distancia  $y$  sobre la placa inferior. Esta expresión se utiliza para determinar el potencial  $V$  en ese punto.

**EJECUTAR:** El potencial  $V(y)$  en la coordenada  $y$  es la energía potencial por unidad de carga:

$$V(y) = \frac{U(y)}{q_0} = \frac{q_0 E y}{q_0} = E y$$

Se ha elegido que  $U(y)$  y, por lo tanto,  $V(y)$  sean igual a cero en el punto  $b$ , donde  $y = 0$ . Incluso si elegimos que el potencial sea diferente de cero en  $b$ , se cumpliría que

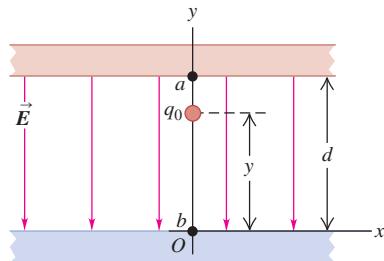
$$V(y) - V_b = E y$$

El potencial disminuye conforme se mueve en la dirección de  $\vec{E}$  de la placa superior a la inferior. En el punto  $a$ , donde  $y = d$  y  $V(y) = V_a$ ,

$$V_a - V_b = Ed \quad y \quad E = \frac{V_a - V_b}{d} = \frac{V_{ab}}{d}$$

donde  $V_{ab}$  es el potencial de la placa positiva con respecto a la placa negativa. Es decir, el campo eléctrico es igual a la diferencia de potencial entre las placas dividida entre la distancia que las separa. Para una diferencia de potencial dada  $V_{ab}$ , cuanto más pequeña sea la distancia entre las dos placas, mayor será la magnitud de  $E$  del campo eléctrico. (Esta relación entre  $E$  y  $V_{ab}$  se cumple *sólo* para la geometría plana descrita. *No* se aplica para situaciones tales como cilindros o esferas concéntricos en los que el campo eléctrico no es uniforme.)

**23.19** Las placas paralelas con carga de la figura 23.2.



**EVALUAR:** El resultado nos dice cómo medir la densidad de carga sobre las cargas en las dos placas de la figura 23.19. En el ejemplo 22.8 (sección 22.4) se obtuvo la expresión  $E = \sigma/\epsilon_0$  para el campo eléctrico  $E$  entre dos placas conductoras con densidades de carga superficiales  $+\sigma$  y  $-\sigma$ . Al igualar esta expresión con  $E = V_{ab}/d$  se obtiene lo siguiente:

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 V_{ab}}{d}$$

La densidad superficial de carga en la placa positiva es directamente proporcional a la diferencia de potencial entre las placas, y su valor  $\sigma$  se determina midiendo  $V_{ab}$ . Esta técnica es útil porque no hay instrumentos disponibles que lean directamente densidades superficiales de carga. En la placa negativa la densidad superficial de carga es  $-\sigma$ .

**CUIDADO** El “potencial cero” es arbitrario Quizá piense que si un cuerpo conductor tiene un potencial igual a cero, necesariamente debe tener también una carga neta de cero. ¡Pero no es así! Como ejemplo, la placa en  $y = 0$  en la figura 23.19 tiene un potencial de cero ( $V = 0$ ), pero tiene una carga por unidad de área,  $-\sigma$ , distinta de cero. Recuerde que no hay nada especial en la placa en que el potencial es igual a cero; este lugar se puede *definir* donde se desee. ■

### Ejemplo 23.10 Una línea de carga infinita o un cilindro conductor con carga

Encuentre el potencial a la distancia  $r$  de una línea muy larga de carga con densidad lineal de carga  $\lambda$  (carga por unidad de longitud).

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Un enfoque para este problema consiste en dividir la línea de carga en elementos infinitesimales, como se hizo en el ejemplo 21.11 (sección 21.5), para determinar el campo eléctrico que produce esa línea. Después se puede integrar como en la ecuación (23.16) para determinar el potencial neto  $V$ . Sin embargo, en este caso el objetivo se simplifica mucho porque ya se conoce el campo eléctrico.

**PLANTEAR:** Tanto en el ejemplo 21.11 como en el 22.6 (sección 22.4), se encontró que el campo eléctrico a una distancia  $r$  de una línea recta y larga de carga (figura 23.20a) sólo tiene una componente radial, dada por

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

Esta expresión se utiliza para obtener el potencial por integración de  $\vec{E}$ , como en la ecuación (23.17).

**EJECUTAR:** Como el campo sólo tiene una componente radial, el producto escalar  $\vec{E} \cdot d\vec{l}$  es igual a  $E_r dr$ . Así, el potencial de cualquier punto  $a$  con respecto a cualquier otro punto  $b$ , a distancias radiales  $r_a$  y  $r_b$  de la línea de carga, es

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E_r dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}$$

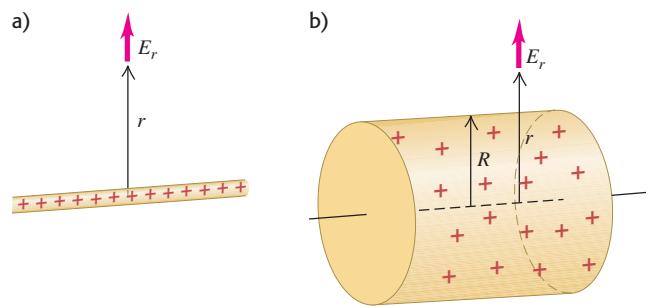
Si se toma el punto  $b$  en el infinito y se establece que  $V_b = 0$ , se encuentra que  $V_a$  es *infinito*:

$$V_a = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\infty}{r_a} = \infty$$

Esto demuestra que si se trata de definir  $V$  como cero en el infinito, entonces  $V$  debe ser infinito a *cualquier* distancia infinita de la línea de carga. Ésta *no* es una manera útil de definir  $V$  para este problema. La dificultad estriba en que la distribución de carga en sí se extiende al infinito.

Para sortear la dificultad se debe recordar que  $V$  puede definirse como cero en cualquier punto que se desee. Se establece que  $V_b = 0$

**23.20** Campo eléctrico afuera de a) un alambre largo con carga positiva, y b) un cilindro largo con carga positiva.



en el punto  $b$  a una distancia radial arbitraria  $r_0$ . Así, el potencial  $V = V_a$  en el punto  $a$  a una distancia radial  $r$  está dado por  $V - 0 = (\lambda/2\pi\epsilon_0) \ln (r_0/r)$ , o bien,

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

**EVALUAR:** De acuerdo con el resultado, si  $\lambda$  es positiva, entonces  $V$  disminuye conforme  $r$  aumenta. Es así como debería ser:  $V$  decrece conforme nos movemos en la dirección de  $\vec{E}$ .

Del ejemplo 22.6, la expresión para  $E_r$  con la que se comenzó también se aplica fuera de un cilindro conductor largo con carga por unidad de longitud  $\lambda$  (figura 23.20b). De esta forma, nuestro resultado también da el potencial para ese cilindro, pero sólo para valores de  $r$  (la distancia desde el eje del cilindro) mayores o iguales que el radio  $R$  del cilindro. Si se elige que  $r_0$  sea el radio del cilindro  $R$ , de manera que  $V = 0$  cuando  $r = R$ , entonces en cualquier punto para el que  $r > R$ ,

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}$$

En el interior del cilindro,  $\vec{E} = \mathbf{0}$ , y  $V$  tiene el mismo valor (cero) que en la superficie del cilindro.

### Ejemplo 23.11 Anillo de carga

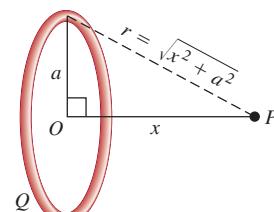
Una carga eléctrica está distribuida de manera uniforme alrededor de un anillo delgado de radio  $a$  con carga total  $Q$  (figura 23.21). Determine el potencial en un punto  $P$  sobre el eje del anillo a una distancia  $x$  del centro del anillo.

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Del ejemplo 21.10 (sección 21.5), ya se conoce el campo eléctrico en todos los puntos a lo largo del eje  $x$ , por lo que el problema se resuelve por integración de  $\vec{E}$ , como en la ecuación (23.17), para obtener  $V$  a lo largo de este eje. En forma alternativa, se podría dividir el anillo en segmentos infinitesimales y usar la ecuación (23.16) para encontrar  $V$ .

**PLANTEAR:** La figura 23.21 muestra que es mucho más fácil encontrar  $V$  en el eje empleando el enfoque de segmentos infinitesimales.

**23.21** Toda la carga en un anillo con carga  $Q$  está a la misma distancia  $r$  de un punto  $P$  situado sobre el eje del anillo.



continúa

Eso se debe a que todas las partes del anillo (es decir, todos los elementos de la distribución de carga) están a la misma distancia  $r$  del punto  $P$ .

**EJECUTAR:** La figura 23.21 muestra que la distancia entre cada elemento de carga  $dq$  sobre el anillo y el punto  $P$  es  $r = \sqrt{x^2 + a^2}$ . Por lo tanto, se saca de la integral el factor  $1/r$  en la ecuación (23.16), y

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

El potencial es una cantidad *escalar*, por lo que en este cálculo no es necesario considerar componentes de vectores, como se tuvo que hacer

al obtener el campo eléctrico en  $P$ . Por ello, los cálculos del potencial son mucho más sencillos que los del campo.

**EVALUAR:** Cuando  $x$  es mucho más grande que  $a$ , la expresión anterior para  $V$  se vuelve aproximadamente igual a  $V = Q/4\pi\epsilon_0 x$ . Esto corresponde al potencial de una carga puntual  $Q$  a una distancia  $x$ . Así que cuando se está muy lejos de un anillo con carga, éste se asemeja a una carga puntual. (En el ejemplo 21.10 se llegó a una conclusión similar con respecto al campo eléctrico de un anillo.)

Estos resultados para  $V$  también se obtienen por integración de la expresión para  $E_x$ , como en el ejemplo 21.10 (véase el problema 23.69).

### Ejemplo 23.12 Línea de carga

Una carga eléctrica  $Q$  se encuentra distribuida de manera uniforme a lo largo de una línea o varilla delgada de longitud  $2a$ . Determine el potencial en el punto  $P$  a lo largo de la bisectriz perpendicular de la varilla a una distancia  $x$  de su centro.

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Ésta es la misma situación que la del ejemplo 21.11 (sección 21.5), donde se obtuvo una expresión para el campo eléctrico  $\vec{E}$  en un punto arbitrario del eje  $x$ . Se pudo integrar  $\vec{E}$  con la ecuación (23.17) para encontrar  $V$ . En vez de ello, se integrará sobre la distribución de carga utilizando la ecuación (23.16) para obtener un poco más de experiencia con este enfoque.

**PLANTEAR:** La situación se ilustra en la figura 23.22. A diferencia de la situación en el ejemplo 23.11, cada elemento de carga  $dQ$  está a una distancia diferente del punto  $P$ .

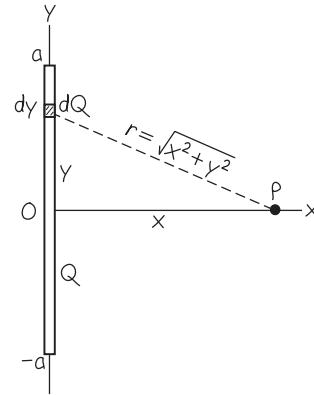
**EJECUTAR:** Igual que en el ejemplo 21.11, el elemento de carga  $dQ$  que corresponde a un elemento de longitud  $dy$  sobre la varilla, está dado por  $dQ = (Q/2a)dy$ . La distancia de  $dQ$  a  $P$  es  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , y la contribución  $dV$  que hace al potencial en  $P$  es

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2a} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Para obtener el potencial en  $P$  debido a toda la varilla, se integra  $dV$  sobre la longitud de la varilla, de  $y = -a$  a  $y = a$ :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2a} \int_{-a}^a \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

### 23.22 Diagrama para este problema.



La integral se puede consultar en una tabla. El resultado final es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2a} \ln\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2} + a}{\sqrt{a^2 + x^2} - a}\right)$$

**EVALUAR:** El resultado se comprueba si se permite que  $x$  tienda al infinito. En este límite, el punto  $P$  está infinitamente lejos de toda la carga, por lo que es de esperar que  $V$  tienda a cero; se invita al lector a que verifique esto.

Como en el ejemplo 23.11, este problema es más sencillo que la obtención de  $\vec{E}$  en el punto  $P$ , ya que el potencial es una cantidad escalar y no hay cálculos que impliquen vectores.

**Evalué su comprensión de la sección 23.3** Si el campo eléctrico en cierto punto es igual a cero, ¿el potencial eléctrico en ese punto tiene que ser igual a cero? (Sugerencia: Considere el centro del anillo en los ejemplos 23.11 y 21.10.)

## 23.4 Superficies equipotenciales

Las líneas de campo (véase la sección 21.6) nos ayudan a visualizar los campos eléctricos. En forma similar, el potencial en varios puntos de un campo eléctrico puede representarse gráficamente por medio de *superficies equipotenciales*. Éstas utilizan la misma idea fundamental que los mapas topográficos que emplean los excursionistas y alpinistas (figura 23.23). En un mapa topográfico las curvas de nivel unen puntos que se encuentran a la misma elevación. Se puede dibujar cualquier número de ellas, pero lo común es tener sólo algunas curvas de nivel a intervalos iguales de elevación. Si una masa  $m$  se moviera sobre el terreno a lo largo de una curva de nivel, la energía potencial gravitacional  $mgy$  no cambiaría porque la elevación  $y$  sería constante. Así,

las curvas de nivel en un mapa topográfico en realidad son curvas de energía potencial gravitacional constante. Las curvas de nivel están muy cerca unas de otras en las regiones en las que el terreno está muy inclinado y hay grandes cambios en la elevación en una distancia horizontal pequeña; en cambio, las curvas de nivel están muy separadas en los sitios en que el terreno tiene poca pendiente. Una pelota que se suelta cuesta abajo experimentaría la mayor fuerza gravitatoria ahí donde las curvas de nivel están muy cercanas entre sí.

Por analogía con las curvas de nivel en un mapa topográfico, una **superficie equipotencial** es una superficie tridimensional sobre la que el *potencial eléctrico*  $V$  es el mismo en todos los puntos. Si una carga de prueba  $q_0$  se desplaza de un punto a otro sobre tal superficie, la energía potencial *eléctrica*  $q_0V$  permanece constante. En una región en la que existe un campo eléctrico, es posible construir una superficie equipotencial a través de cualquier punto. Los diagramas por lo general muestran sólo algunas superficies equipotenciales representativas, a menudo con iguales diferencias de potencial entre superficies adyacentes. Ningún punto puede estar en dos potenciales diferentes, por lo que las superficies equipotenciales para distintos potenciales nunca se tocan o intersecan.

**23.23** Las curvas de nivel en un mapa topográfico son curvas de elevación constante, es decir, de energía potencial gravitacional constante.



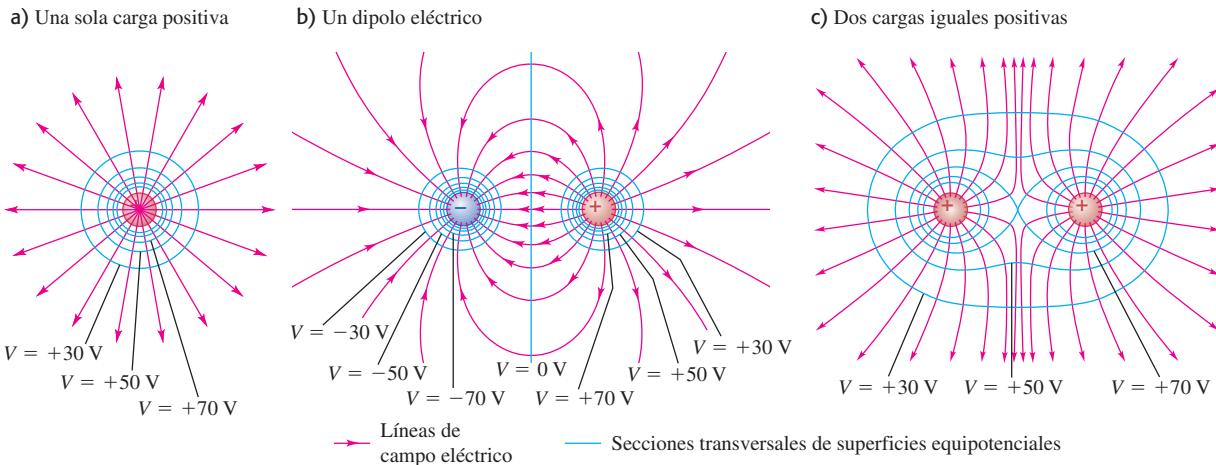
### Superficies equipotenciales y líneas de campo

Como la energía potencial no cambia a medida que una carga de prueba se traslada sobre una superficie equipotencial, el campo eléctrico no realiza trabajo sobre esa carga. De ello se deriva que  $\vec{E}$  debe ser perpendicular a la superficie en cada punto, de manera que la fuerza eléctrica  $q_0\vec{E}$  siempre es perpendicular al desplazamiento de una carga que se mueve sobre la superficie. **Las líneas de campo y las superficies equipotenciales siempre son perpendiculares entre sí.** En general, las líneas de campo son curvas, y las equipotenciales son superficies curvas. Para el caso especial de un campo *uniforme*, en el que las líneas de campo son rectas, paralelas y están igualmente espaciadas, las superficies equipotenciales son *planos* paralelos perpendiculares a las líneas de campo.

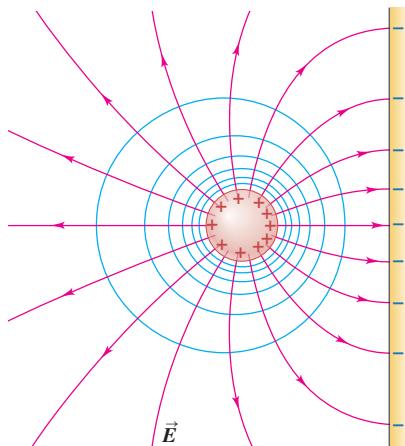
La figura 23.24 muestra tres configuraciones de cargas. Las líneas de campo en el plano de las cargas están representadas por líneas rojas, y las intersecciones de las superficies equipotenciales con este plano (es decir, las secciones transversales de estas superficies) se indican con líneas azules. Las superficies equipotenciales reales son tridimensionales. En cada cruce de una línea equipotencial y una línea de campo, las dos son perpendiculares.

En la figura 23.24 aparecen dibujadas superficies equipotenciales de manera que las diferencias de potencial entre superficies adyacentes sean iguales. En las regiones en que la magnitud de  $\vec{E}$  es grande, las superficies equipotenciales están cerca entre sí

**23.24** Secciones transversales de superficies equipotenciales (líneas azules) y líneas de campo eléctricas (líneas rojas) para arreglos de cargas puntuales. Hay diferencias de potencial iguales entre superficies adyacentes. Compare estos diagramas con los de la figura 21.29, que sólo muestran líneas de campo eléctricas.



**23.25** Cuando las cargas están en reposo, una superficie conductora siempre es una superficie equipotencial. Las líneas de campo son perpendiculares a una superficie conductora.

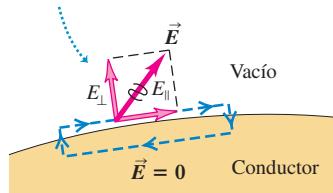


Secciones transversales de las superficies equipotenciales

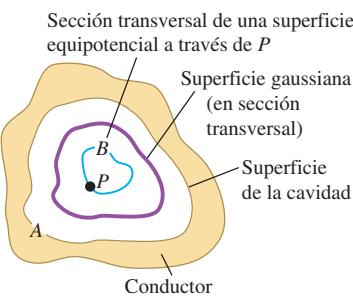
**23.26** En todos los puntos de la superficie de un conductor, el campo eléctrico debe ser perpendicular a la superficie. Si  $\vec{E}$  tuviera una componente tangencial, se realizaría una cantidad neta de trabajo sobre una carga de prueba al moverla en una espira como la que se ilustra, lo que es imposible porque la fuerza eléctrica es conservativa.

#### Un campo eléctrico imposible

Si el campo eléctrico inmediatamente afuera de un conductor tuviera una componente tangencial  $E_{||}$ , una carga podría moverse en una espira con trabajo neto realizado.



**23.27** Cavidad en un conductor. Si la cavidad no contiene carga, todos los puntos de tal cavidad están al mismo potencial, el campo eléctrico es igual a cero en cualquier lugar de ella, y no hay carga en ningún lugar sobre su superficie.



porque el campo efectúa una cantidad relativamente grande de trabajo sobre una carga de prueba en un desplazamiento más bien pequeño. Éste es el caso cerca de la carga puntual en la figura 23.24a o entre las dos cargas puntuales en la figura 23.24b; observe que en estas regiones las líneas de campo también están más próximas. Ésta es una analogía directa con la fuerza de la gravedad cuesta abajo, que es mayor en las regiones de un mapa topográfico donde las curvas de nivel están más cerca una de otra. A la inversa, en las zonas en que el campo es más débil, las superficies equipotenciales están más separadas; en la figura 23.24a esto ocurre en radios mayores, a la izquierda de la carga negativa o a la derecha de la positiva en la figura 23.24b, y a distancias mayores de ambas cargas en la figura 23.24c. (Tal vez parezca que dos superficies equipotenciales se intersecan en el centro de la figura 23.24c, violando la regla de que esto nunca puede suceder. De hecho, se trata de una sola superficie equipotencial en forma de "8").

**CUIDADO** *E no necesita ser constante sobre una superficie equipotencial* En una superficie equipotencial dada, el potencial  $V$  tiene el mismo valor en todos los puntos. Sin embargo, en general la magnitud del campo eléctrico  $E$  no es la misma en todos los puntos sobre una superficie equipotencial. Por ejemplo, sobre la superficie equipotencial con la leyenda " $V = -30 \text{ V}$ " en la figura 23.24b, la magnitud  $E$  es menor a la izquierda de la carga negativa de lo que es entre las dos cargas. En la superficie equipotencial con forma de "8" en la figura 23.24c,  $E = 0$  en el punto medio entre las dos cargas; en todos los demás puntos de esta superficie,  $E$  es distinto de cero.

## Equipotenciales y conductores

El siguiente es un enunciado importante acerca de las superficies equipotenciales: **Cuando todas las cargas están en reposo, la superficie de un conductor siempre es una superficie equipotencial.** Como el campo eléctrico  $\vec{E}$  siempre es perpendicular a una superficie equipotencial, el enunciado se puede demostrar si se prueba que **cuando todas las cargas están en reposo, el campo eléctrico justo afuera de un conductor debe ser perpendicular a la superficie en cada punto** (figura 23.25). Se sabe que  $\vec{E} = 0$  en todos los lugares del interior del conductor; de otro modo, las cargas se moverían. En particular, en cualquier punto apenas dentro de la superficie, la componente de  $\vec{E}$  tangente a la superficie es cero. Se deduce que la componente tangencial de  $\vec{E}$  también es igual a cero inmediatamente *afuera* de la superficie. Si no fuera así, una carga podría recorrer una trayectoria rectangular parcialmente dentro y parcialmente fuera (figura 23.26) y volvería a su punto de partida con una cantidad neta de trabajo realizado sobre ella. Esto violaría la naturaleza conservativa de los campos electrostáticos, por lo que la componente tangencial de  $\vec{E}$  justo fuera de la superficie debe ser igual a cero en todos los puntos de la superficie. Así,  $\vec{E}$  es perpendicular a la superficie en cada punto, lo que prueba nuestra aseveración.

Por último, ahora es posible demostrar un teorema que se citó sin la prueba correspondiente en la sección 22.5. Es el siguiente: en una situación electrostática, si un conductor contiene una cavidad en cuyo interior no hay carga, entonces no puede haber carga neta *en ningún lugar* de la superficie de la cavidad. Esto significa que si se está dentro de una caja conductora con carga, se puede tocar con seguridad cualquier punto de las paredes interiores de la caja sin sufrir una descarga. Para probar este teorema, primero se demuestra que *todos los puntos en la cavidad están al mismo potencial*. En la figura 23.27, la superficie conductora  $A$  de la cavidad es una superficie equipotencial, como se acaba de demostrar. Suponga que el punto  $P$  en la cavidad estuviera a un potencial diferente; entonces se podría construir una superficie equipotencial  $B$  diferente que incluyera al punto  $P$ .

Ahora considere una superficie gaussiana, como se ilustra en la figura 23.27, entre las dos superficies equipotenciales. En virtud de la relación entre  $\vec{E}$  y las equipotenciales, se sabe que el campo en cada punto entre las equipotenciales se dirige de  $A$  hacia  $B$ , o bien, en todos los puntos se dirige de  $B$  hacia  $A$ , lo que depende de cuál superficie equipotencial esté a un potencial mayor. En cualquier caso, es evidente que el flujo a través de esta superficie gaussiana es diferente de cero. Pero la ley de Gauss afirma que la carga encerrada por la superficie gaussiana no puede ser cero. Esto contradice nuestra suposición inicial de que en la cavidad *no hay* carga. Por lo tanto, el potencial en  $P$  *no puede* ser diferente del que hay en la pared de la cavidad.

Entonces, toda la región de la cavidad debe estar al mismo potencial. Pero para que esto sea verdadero, *el campo eléctrico dentro de la cavidad debe ser igual a cero*

*en cualquier sitio.* Por último, la ley de Gauss demuestra que el campo eléctrico en cualquier punto sobre la superficie de un conductor es proporcional a la densidad superficial de carga  $\sigma$  en ese punto. Se concluye que *la densidad superficial de carga sobre la pared de la cavidad es igual a cero en todos los puntos*. Esta cadena de razonamientos parece tortuosa, pero su estudio cuidadoso resultará de gran utilidad.

**CUIDADO** **Superficies equipotenciales contra superficies gaussianas** No hay que confundir las superficies equipotenciales con las superficies gaussianas que se estudiaron en el capítulo 22, pues estas últimas son relevantes sólo cuando se utiliza la ley de Gauss y se elige *cualquier* superficie gaussiana que sea conveniente. *No* tenemos libertad de elegir la forma de las superficies equipotenciales; la forma está determinada por la distribución de la carga. ■

**Evalué su comprensión de la sección 23.4** Las formas de las superficies equipotenciales en la figura 23.24, ¿cambiarían si se invirtiera el signo de cada carga?

## 23.5 Gradiente de potencial

El campo eléctrico y el potencial se relacionan estrechamente. La ecuación (23.17), que se replantea a continuación, expresa un aspecto de esa relación:

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



11.12.3 Potencial, campo y fuerza eléctricos

Si se conoce  $\vec{E}$  en varios puntos, esta ecuación se puede utilizar para calcular las diferencias de potencial. En esta sección se demuestra cómo hacer lo contrario: si se conoce el potencial  $V$  en varios puntos se puede determinar  $\vec{E}$ . Considerando que  $V$  es función de las coordenadas  $(x, y, z)$  de un punto en el espacio, se demostrará que las componentes de  $\vec{E}$  se relacionan directamente con las *derivadas parciales* de  $V$  con respecto a  $x, y$  y  $z$ .

En la ecuación (23.17),  $V_a - V_b$  es el potencial de  $a$  con respecto a  $b$ , es decir, el cambio de potencial encontrado en un desplazamiento de  $b$  a  $a$ . Esto se escribe como

$$V_a - V_b = \int_b^a dV = - \int_a^b dV$$

donde  $dV$  es el cambio infinitesimal del potencial que acompaña un elemento infinitesimal  $d\vec{l}$  de la trayectoria de  $b$  a  $a$ . Al compararla con la ecuación (23.17) se tiene

$$- \int_a^b dV = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Estas dos integrales deben ser iguales para *cualquier* par de límites  $a$  y  $b$ , y para que esto se cumpla los *integrandos* deben ser iguales. Por lo tanto, para *cualquier* desplazamiento infinitesimal  $d\vec{l}$ ,

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Para interpretar esta expresión, se escribe  $\vec{E}$  y  $d\vec{l}$  en términos de sus componentes:  $\vec{E} = \hat{i} E_x + \hat{j} E_y + \hat{k} E_z$  y  $d\vec{l} = \hat{i} dx + \hat{j} dy + \hat{k} dz$ . Así, se tiene que

$$-dV = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

Suponga que el desplazamiento es paralelo al eje  $x$ , por lo que  $dy = dz = 0$ . Entonces,  $-dV = E_x dx$  o  $E_x = -(dV/dx)_{y,z \text{ constantes}}$ , donde el subíndice nos recuerda que en la derivada solo varía  $x$ ; recuerde que  $V$  en general es una función de  $x, y$  y  $z$ . Pero esto es tan sólo lo que significa la derivada parcial  $\partial V/\partial x$ . Las componentes  $y$  y  $z$  de  $\vec{E}$  se relacionan con las derivadas correspondientes de  $V$  en la misma forma, por lo que se tiene

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (\text{componentes de } \vec{E} \text{ en términos de } V) \quad (23.19)$$

Esto es congruente con las unidades de campo eléctrico, V/m. En términos de vectores unitarios,  $\vec{E}$  se escribe como

$$\vec{E} = -\left(\hat{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad (\vec{E} \text{ en términos de } V) \quad (23.20)$$

En notación vectorial, la siguiente operación se llama **gradiente** de la función  $f$ :

$$\vec{\nabla}f = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)f \quad (23.21)$$

El operador denotado por el símbolo  $\vec{\nabla}$  se llama “grad” o “del”. Así, en notación vectorial,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (23.22)$$

Esto se lee: “ $\vec{E}$  es el negativo del gradiente de  $V$ ” o “ $\vec{E}$  es igual al gradiente negativo de  $V$ ”. La cantidad  $\vec{\nabla}V$  se llama *gradiente de potencial*.

En cada punto, el gradiente de potencial señala en la dirección en que  $V$  se *incrementa* con más rapidez con un cambio de posición. De esta forma, en cada punto la dirección de  $\vec{E}$  es la dirección en que  $V$  *disminuye* más rápido y siempre es perpendicular a la superficie equipotencial que pasa a través del punto. Esto concuerda con nuestra observación en la sección 23.2, acerca de que desplazarse en dirección del campo eléctrico significa desplazarse en dirección del potencial decreciente.

La ecuación (23.22) no depende de la elección particular del punto cero para  $V$ . Si se cambiara el punto cero, el efecto sería cambiar  $V$  en cada punto en la misma cantidad; las derivadas de  $V$  serían las mismas.

Si  $\vec{E}$  es radial con respecto a un punto o un eje, y  $r$  es la distancia del punto o eje, la relación correspondiente a las ecuaciones (23.19) es

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad (\text{campo eléctrico radial}) \quad (23.23)$$

Es frecuente que se pueda calcular el campo eléctrico causado por una distribución de carga en cualquiera de las dos formas: directamente, con la suma de los campos  $\vec{E}$  de cargas puntuales, o primero calculando el potencial y luego obteniendo su gradiente para encontrar el campo. Con frecuencia el segundo método resulta más fácil porque el potencial es una cantidad *escalar* que requiere cuando mucho la integración de una función escalar. El campo eléctrico es una cantidad *vectorial* y requiere el cálculo de componentes para cada elemento de carga y la integración separada de cada componente. Así, muy aparte de su significado fundamental, el potencial ofrece una técnica de cálculo muy útil en los cálculos del campo. A continuación se presentan dos ejemplos en los que se usa el conocimiento de  $V$  para encontrar el campo eléctrico.

Conviene recalcar una vez más que si se conoce  $\vec{E}$  como función de la posición, se puede calcular  $V$  utilizando la ecuación (23.17) o la (23.18), y si se conoce  $V$  como función de la posición, se calcula  $\vec{E}$  con las ecuaciones (23.19), (23.20) o (23.23). La obtención de  $V$  a partir de  $\vec{E}$  requiere integración, y la obtención de  $\vec{E}$  a partir de  $V$  requiere diferenciación.

### Ejemplo 23.13 Potencial y campo de una carga puntual

De la ecuación (23.14), el potencial a una distancia radial  $r$  de una carga puntual  $q$  es  $V = q/4\pi\epsilon_0 r$ . Encuentre el campo eléctrico vectorial a partir de esta expresión para  $V$ .

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Este problema utiliza la relación entre el potencial eléctrico como función de la posición y el vector de campo eléctrico vectorial.

**PLANTEAR:** Por simetría, el campo eléctrico sólo tiene una componente radial  $E_r$ , y para encontrarla se usa la ecuación (23.23).

**EJECUTAR:** De la ecuación (23.23):

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Por lo tanto, el campo eléctrico vectorial es

$$\vec{E} = \hat{r} E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

**EVALUAR:** El resultado concuerda con la ecuación (21.7), como debe ser.

Un enfoque alternativo es ignorar la simetría radial, escribir la distancia radial como  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , y tomar las derivadas de  $V$  con respecto a  $x$ ,  $y$  y  $z$ , como en la ecuación (23.20). Se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{aligned}$$

y de manera similar,

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

De la ecuación (23.20), el campo eléctrico es

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\left[ \hat{i} \left( -\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) + \hat{j} \left( -\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) + \hat{k} \left( -\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{q(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{q}{r} \hat{r} \end{aligned}$$

Este enfoque produce la misma respuesta, pero con un poco más de esfuerzo. Como resulta evidente, es mejor aprovechar la simetría de la distribución de carga siempre que sea posible.

### Ejemplo 23.14 Potencial y campo de un anillo de carga

En el ejemplo 23.11 (sección 23.3) se encontró que para un anillo de carga con radio  $a$  y carga total  $Q$ , el potencial en el punto  $P$  sobre el eje del anillo a una distancia  $x$  del centro es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Encuentre el campo eléctrico en  $P$ .

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Se da  $V$  como función de  $x$  a lo largo del eje  $x$ , y se desea obtener el campo eléctrico en un punto sobre este eje.

**PLANTEAR:** De la simetría de la distribución de carga que se muestra en la figura 23.21, el campo eléctrico a lo largo del eje de simetría del anillo sólo tiene una componente  $x$ , la cual se encuentra con la primera de las ecuaciones (23.19).

**EJECUTAR:** La componente  $x$  del campo eléctrico es

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

**EVALUAR:** Esto concuerda con el resultado que se obtuvo en el ejemplo 21.10 (sección 21.5).

**CUIDADO** No use expresiones donde no se aplican En este ejemplo,  $V$  no parece ser función de  $y$  o  $z$ , pero no sería correcto concluir que  $\partial V/\partial y = \partial V/\partial z = 0$  y que  $E_y = E_z = 0$  en todo lugar. La razón es que nuestra expresión para  $V$  es válida sólo para puntos sobre el eje  $x$ , donde  $y = z = 0$ . Así que nuestra expresión para  $E_x$  es válida sólo sobre el eje  $x$ . Si se tuviera la expresión completa para  $V$  válida en todos los puntos del espacio, entonces se podría usar para encontrar las componentes de  $\vec{E}$  en cualquier punto utilizando la ecuación (23.19). ■

**Evalúe su comprensión de la sección 23.5** En cierta región del espacio, el potencial está dado por  $V = A + Bx + Cy^3 + Dxy$ , donde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son constantes positivas. ¿Cuál de estos enunciados sobre el campo eléctrico  $\vec{E}$  en esta región del espacio es correcto? (Puede haber más de una respuesta correcta.) i) Aumentar el valor de  $A$  incrementará el valor de  $\vec{E}$  en todos los puntos; ii) aumentar el valor de  $A$  disminuirá el valor de  $\vec{E}$  en todos los puntos; iii)  $\vec{E}$  no tiene componente  $z$ ; iv) el campo eléctrico es igual a cero en el origen ( $x = 0, y = 0, z = 0$ ).



## CAPÍTULO 23 RESUMEN

**Energía potencial eléctrica:** La fuerza eléctrica causada por cualquier conjunto de cargas es una fuerza conservativa. El trabajo  $W$  realizado por la fuerza eléctrica sobre una partícula con carga que se mueve en un campo eléctrico se representa por el cambio en una función de energía potencial  $U$ .

La energía potencial eléctrica para dos cargas puntuales  $q$  y  $q_0$  depende de su separación  $r$ . La energía potencial eléctrica para una carga  $q_0$  en presencia de un conjunto de cargas  $q_1, q_2, q_3$  depende de la distancia de  $q_0$  a cada una de las demás cargas. (Véanse los ejemplos 23.1 y 23.2.)

$$W_{a \rightarrow b} = U_a - U_b \quad (23.2)$$

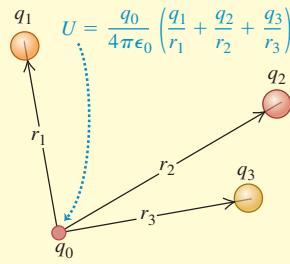
$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r} \quad (23.9)$$

(dos cargas puntuales)

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \dots \right) \quad (23.10)$$

$$= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (23.10)$$

( $q_0$  en presencia de otras cargas puntuales)



**Potencial eléctrico:** El potencial, denotado por  $V$ , es energía potencial por unidad de carga. La diferencia de potencial entre dos puntos es igual a la cantidad de trabajo que se requeriría para trasladar una unidad de carga de prueba positiva entre esos puntos. El potencial  $V$  debido a una cantidad de carga se calcula mediante una suma (si la carga es un conjunto de cargas puntuales) o mediante integración (si la carga es una distribución). (Véanse los ejemplos 23.3, 23.4, 23.5, 23.7, 23.11 y 23.12.)

La diferencia de potencial entre dos puntos  $a$  y  $b$ , también llamada *potencial de  $a$  con respecto a  $b$* , está dado por la integral de línea de  $\vec{E}$ . El potencial de un punto dado se encuentra obteniendo primero  $\vec{E}$  y después resolviendo la integral. (Véanse los ejemplos 23.6, 23.8, 23.9 y 23.10.)

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (23.14)$$

(debido a una carga puntual)

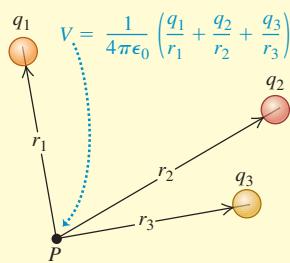
$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (23.15)$$

(debido a un conjunto de cargas puntuales)

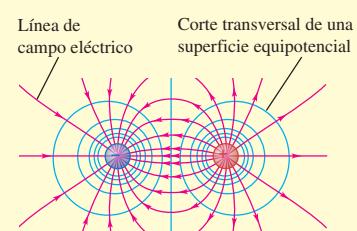
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad (23.16)$$

(debido a una distribución de carga)

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E \cos\phi \, dl \quad (23.17)$$



**Superficies equipotenciales:** Una superficie equipotencial es aquella en la que el potencial tiene el mismo valor en cada punto. En el punto en que una línea de campo cruza una superficie equipotencial, ambas son perpendiculares. Cuando todas las cargas están en reposo, la superficie de un conductor siempre es una superficie equipotencial y todos los puntos en el interior del conductor están al mismo potencial. Cuando una cavidad dentro de un conductor no contiene carga, toda la cavidad es una región equipotencial y no hay carga superficial en ninguna parte de la superficie de la cavidad.



### Cálculo del campo eléctrico a partir del potencial

**eléctrico:** Si se conoce el potencial  $V$  como función de las coordenadas  $x, y$  y  $z$ , las componentes del campo eléctrico  $\vec{E}$  en cualquier punto están dadas por las derivadas parciales de  $V$ . (Véanse los ejemplos 23.13 y 23.14.)

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (23.19)$$

$$\vec{E} = -\left( i \frac{\partial V}{\partial x} + j \frac{\partial V}{\partial y} + k \frac{\partial V}{\partial z} \right) \quad (23.20)$$

(forma vectorial)

## Términos clave

energía potencial (eléctrica), 781  
potencial (eléctrico), 787  
volt, 788

voltaje, 788  
electrón volt, 790

superficie equipotencial, 799  
gradiente, 802

## Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Una diferencia de potencial grande y constante  $V_{ab}$  se mantiene entre la herramienta de soldadura (*a*) y los elementos metálicos por soldar (*b*). Del ejemplo 23.9 (sección 23.3), el campo eléctrico entre dos conductores separados por una distancia  $d$  tiene magnitud  $E = V_{ab}/d$ . Entonces,  $d$  debe ser pequeña para que la magnitud del campo  $E$  sea suficientemente grande como para que ionice el gas entre los conductores *a* y *b* (véase la sección 23.3) y produzca un arco a través de este gas.

## Respuestas a las preguntas de Evalué su comprensión

**23.1 Respuestas: a) i), b) ii)** Las tres cargas  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  son positivas. De ahí que la energía potencial eléctrica total  $U$  sea positiva. Esto significa que se requeriría trabajo positivo para llevar las tres cargas del infinito a las posiciones que se indican en la figura 21.14, y trabajo *negativo* para llevarlas de regreso de esas posiciones al infinito.

**23.2 Respuesta: no** Si  $V = 0$  en cierto punto,  $\vec{E}$  no tiene que ser igual a cero en ese punto. Un ejemplo de esto es el punto *c* en las figuras 21.23 y 23.14, para el que hay un campo eléctrico en dirección  $+x$  (véase el ejemplo 21.9 en la sección 21.5) aun cuando  $V = 0$  (véase el ejemplo 23.4). Este resultado no es sorprendente, ya que  $V$  y  $\vec{E}$  son cantidades muy diferentes:  $V$  es la cantidad de trabajo que se requiere para llevar una carga unitaria del infinito al punto en cuestión, mientras que  $\vec{E}$  es la fuerza eléctrica que actúa sobre una unidad de carga cuando llega a ese punto.

**23.3 Respuesta: no** Si  $\vec{E} = \mathbf{0}$  en cierto punto,  $V$  no tiene que ser igual a cero en ese punto. Un ejemplo es el punto *O* en el centro del anillo con carga en las figuras 21.24 y 23.21. Del ejemplo 21.10 (sección 21.5), el campo eléctrico es igual a cero en *O* ya que las contribuciones de las diferentes partes del anillo se anulan por completo. Sin embargo, del ejemplo 23.11, el potencial en *O* no es igual a cero: este punto corresponde a  $x = 0$ , por lo que  $V = (1/4\pi\epsilon_0)(Q/a)$ . Este valor de  $V$  corresponde al trabajo que se tendría que efectuar para desplazar una unidad de carga de prueba positiva a lo largo de una trayectoria del infinito al punto *O*; no es igual a cero porque el anillo con carga repela la carga de prueba, de manera que debe hacerse trabajo positivo para llevar la carga de prueba en dirección del anillo.

**23.4 Respuesta: no** Si las cargas positivas en la figura 23.24 se sustituyeran por cargas negativas, y viceversa, las superficies equipotenciales serían iguales, pero el signo del potencial se invertiría. Por ejemplo, las superficies en la figura 23.24b con potencial  $V = +30$  V y  $V = -50$  V tendrían potenciales  $V = -30$  V y  $V = +50$  V, respectivamente.

**23.5 Respuesta: iii)** De las ecuaciones (23.19), las componentes del campo eléctrico son  $E_x = -\partial V/\partial x = B + Dy$ ,  $E_y = -\partial V/\partial y = 3Cy^2 + Dx$  y  $E_z = -\partial V/\partial z = 0$ . El valor de  $A$  no tiene efecto, lo que significa que se puede sumar una constante al potencial eléctrico en todos los puntos sin que cambien  $\vec{E}$  o la diferencia de potencial entre dos puntos. El potencial no depende de  $z$ , por lo que la componente  $z$  de  $\vec{E}$  es igual a cero. Observe que en el origen el campo eléctrico no es igual a cero porque tiene una componente  $x$  distinta de cero:  $E_x = B$ ,  $E_y = 0$ ,  $E_z = 0$ .

## PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite [www.masteringphysics.com](http://www.masteringphysics.com)



### Preguntas para análisis

**P23.1.** Un estudiante preguntó: “Como el potencial eléctrico siempre es proporcional a la energía potencial, ¿por qué molestarse con el concepto de potencial?” ¿Qué respondería usted?

**P23.2.** El potencial (en relación con un punto en el infinito) a media distancia entre dos cargas de igual magnitud y signo opuesto es igual a cero. ¿Es posible traer una carga de prueba del infinito a ese punto medio en forma tal que no se efectúe trabajo en ninguna parte del desplazamiento? Si es así, describa cómo se puede lograr. Si no es posible, explique por qué.

**P23.3.** ¿Es posible tener una configuración de dos cargas puntuales separadas por una distancia finita de manera que la energía potencial eléctrica del arreglo sea la misma que si las dos cargas estuvieran separadas por una distancia infinita? ¿Por qué? ¿Qué pasaría si hubiera tres cargas? Explique su razonamiento.

**P23.4.** Como el potencial puede tener cualquier valor que se deseé en función de la elección del nivel de referencia de potencial cero, ¿cómo “sabe” un voltímetro qué lectura hacer cuando se conecta entre dos puntos?

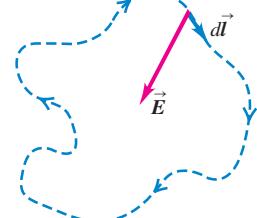
**P23.5.** Si  $\vec{E}$  es igual a cero en todo lugar a lo largo de cierta trayectoria que vaya del punto *A* al *B*, ¿cuál es la diferencia de potencial entre esos dos puntos? ¿Significa esto que  $\vec{E}$  es igual a cero en todos los puntos a lo largo de *cualquier* trayectoria de *A* a *B*? Explique su respuesta.

**P23.6.** Si  $\vec{E}$  es igual a cero a través de cierta región del espacio, ¿el potencial también es necesariamente igual a cero en esa región? ¿Por qué? Si no es así, ¿qué puede decirse acerca del potencial?

**P23.7.** Si se efectúa la integral del campo eléctrico  $\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$  para una trayectoria *cerrada* como la que se aprecia en la figura 23.28, la integral *siempre* será igual a cero, independientemente de la forma de la trayectoria y de dónde se localicen las cargas en relación con ésta. Explique por qué es así.

**P23.8.** La diferencia de potencial entre dos terminales de una batería AA (de las que se usan en las linternas y los estéreos portátiles) es de 1.5 V. Si se colocan dos baterías AA extremo con extremo con la terminal positiva de una batería en contacto con la terminal negativa de la otra, ¿cuál es la diferencia de potencial entre las terminales en los extremos expuestos de la combinación? ¿Qué pasa si las dos terminales positivas se tocan entre sí? Explique su razonamiento.

Figura 23.28 Pregunta P23.7.



**P23.9.** Es fácil producir una diferencia de potencial de varios miles de voltios entre el cuerpo de una persona y el piso, frotando los zapatos sobre una alfombra de nailon. Cuando usted toca una perilla metálica recibe una descarga moderada. Sin embargo, es probable que el contacto con una línea eléctrica de voltaje comparable sea mortal. ¿A qué se debe la diferencia?

**P23.10.** Si se conoce el potencial eléctrico en un solo punto, ¿se puede determinar  $\vec{E}$  en ese punto? Si es así, ¿cómo? Si no es posible, ¿por qué?

**P23.11.** Como las líneas de campo eléctricas y las superficies equipotenciales siempre son perpendiculares, dos superficies equipotenciales nunca se cruzan; si lo hicieran, la dirección de  $\vec{E}$  sería ambigua en los puntos de intersección. Pero dos superficies equipotenciales parecen cruzarse en el centro de la figura 23.24c. Explique por qué no hay ambigüedad acerca de la dirección de  $\vec{E}$  en este caso particular.

**P23.12.** El campo eléctrico debido a una lámina muy grande con carga es independiente de la distancia desde la lámina, aunque los campos debidos a las cargas puntuales individuales en la lámina obedecen una ley del inverso del cuadrado. ¿Por qué el campo de la lámina no es más débil con el aumento de la distancia?

**P23.13.** Es frecuente que se diga que si un punto *A* está a un potencial más elevado que un punto *B*, entonces *A* está en un potencial positivo y *B* en un potencial negativo. ¿Se concluye necesariamente que un punto en un potencial positivo está cargado positivamente, o que un punto en un potencial negativo está cargado negativamente? Ilustre sus respuestas con ejemplos claros y sencillos.

**P23.14.** Una esfera conductora va a cargarse induciendo en ella poco a poco carga positiva hasta que la carga total sea  $Q$ . Se afirma que el trabajo total que se requiere para tal efecto es proporcional a  $Q^2$ . ¿Esto es correcto? ¿Por qué? Una esfera conductora va a cargarse induciendo en ella poco a poco carga positiva hasta que la carga total sea  $Q$ . Se afirma que el trabajo total que se requiere para tal efecto es proporcional a  $Q^2$ . ¿Esto es correcto? ¿Por qué?

**P23.15.** Tres pares de placas paralelas de metal (*A*, *B* y *C*) están conectadas como se ilustra en la figura 23.29, y una batería mantiene un potencial de 1.5 V a través de *ab*. ¿Qué puede decirse acerca de la diferencia de potencial a través de cada par de placas? ¿Por qué?

**P23.16.** Se coloca una esfera conductora entre dos placas paralelas con carga como las que se ilustran en la figura 23.2. El campo eléctrico dentro de la esfera, ¿depende precisamente de dónde se coloque la esfera entre las placas? ¿Qué pasa con el potencial eléctrico dentro de la esfera? ¿Las respuestas a estas preguntas dependen de si en la esfera hay o no una carga neta? Explique su razonamiento.

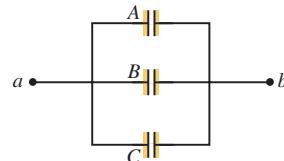
**P23.17.** Un conductor con una carga neta  $Q$  tiene una cavidad hueca en su interior. ¿El potencial varía de un punto a otro dentro del material del conductor? ¿Qué sucede dentro de la cavidad? ¿Cómo se compara el potencial en el interior de la cavidad con el potencial dentro del material del conductor?

**P23.18.** Una línea de cd de alto voltaje cae sobre un automóvil, por lo que toda la carrocería metálica del vehículo está a un potencial de 10,000 V con respecto a tierra. ¿Qué les pasa a los ocupantes cuando *a*) están sentados dentro del automóvil, y *b*) salen de éste? Explique su razonamiento.

**P23.19.** Cuando se acerca una tormenta, los marineros en altamar en ocasiones observan un fenómeno llamado “fuego de San Elmo”, que consiste en un resplandor azuloso en las puntas de los mástiles. ¿Qué es lo que lo causa? ¿Por qué ocurre en los extremos de los mástiles? ¿Por qué es más pronunciado el efecto cuando los mástiles se encuentran húmedos? (Sugerencia: considere que el agua de mar es un buen conductor de la electricidad.)

**P23.20.** Una carga puntual positiva se coloca cerca de un plano conductor muy grande. Un profesor de física asevera que el campo creado por esta configuración es el mismo que el que se obtendría si se retirara el plano y se colocara una carga puntual negativa de igual magnitud en la posición equivalente de una imagen en el espejo detrás de la posición inicial del plano. ¿Es correcto esto? ¿Por qué? (Sugerencia: estudie la figura 23.24b.)

**Figura 23.29** Pregunta P23.15.



**P23.21.** En electrónica se acostumbra definir el potencial de tierra (piense en la Tierra como en un conductor muy grande) como igual a cero. ¿Esto es congruente con el hecho de que la Tierra tiene una carga eléctrica neta diferente de cero? (Consulte el ejercicio 21.32.)

## Ejercicios

### Sección 23.1 Energía potencial eléctrica

**23.1.** Una carga puntual  $q_1 = +2.40 \mu\text{C}$  se mantiene estacionaria en el origen. Una segunda carga puntual  $q_2 = -4.30 \mu\text{C}$  se mueve del punto  $x = 0.150 \text{ m}$ ,  $y = 0$ , al punto  $x = 0.250 \text{ m}$ ,  $y = 0.250 \text{ m}$ . ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza eléctrica sobre  $q_2$ ?

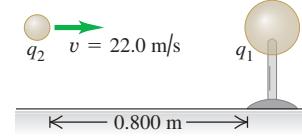
**23.2.** Una carga puntual  $q_1$  se mantiene estacionaria en el origen. Se coloca una segunda carga  $q_2$  en el punto *a*, y la energía potencial eléctrica del par de cargas es  $+5.4 \times 10^{-8} \text{ J}$ . Cuando la segunda carga se mueve al punto *b*, la fuerza eléctrica sobre la carga realiza  $-1.9 \times 10^{-8} \text{ J}$  de trabajo. ¿Cuál es la energía potencial eléctrica del par de cargas cuando la segunda carga se encuentra en el punto *b*?

**23.3. Energía del núcleo.** ¿Cuánto trabajo se necesita para ensamblar un núcleo atómico que contiene tres protones (como el del Be) si se modela como un triángulo equilátero de lado  $2.00 \times 10^{-15} \text{ m}$  con un protón en cada vértice? Suponga que los protones parten desde muy lejos.

**23.4.** *a)* ¿Cuánto trabajo se requiere para empujar dos protones con mucha lentitud desde una separación de  $2.00 \times 10^{-10} \text{ m}$  (una distancia atómica común) a  $3.00 \times 10^{-15} \text{ m}$  (una distancia nuclear común)? *b)* Si los dos protones se liberan desde el reposo en la distancia más cercana del inciso *a*), ¿con qué rapidez se moverán cuando alcancen su separación original?

**23.5.** Una esfera pequeña de metal tiene una carga neta de  $q_1 = -2.80 \mu\text{C}$  y se mantiene en posición estacionaria por medio de soportes aislados. Una segunda esfera metálica también pequeña con carga neta de  $q_2 = -7.80 \mu\text{C}$  y masa de  $1.50 \text{ g}$  es proyectada hacia  $q_1$ . Cuando las dos esferas están a una distancia de  $0.800 \text{ m}$  una de otra,  $q_2$  se mueve hacia  $q_1$  con una rapidez de  $22.0 \text{ m/s}$  (figura 23.30). Suponga que las dos esferas pueden considerarse como cargas puntuales y que se ignora la fuerza de gravedad. *a)* ¿Cuál es la rapidez de  $q_2$  cuando las esferas están a  $0.400 \text{ m}$  una de la otra? *b)* ¿Qué tan cerca de  $q_1$  llega la  $q_2$ ?

**Figura 23.30** Ejercicio 23.5.



**23.6.** ¿Qué tan lejos de una carga puntual de  $-7.20 \mu\text{C}$  debe situarse una carga puntual de  $+2.30 \mu\text{C}$  para que la energía potencial eléctrica  $U$  del par de cargas sea  $-0.400 \text{ J}$ ? (Considere  $U$  igual a cero cuando las cargas tengan separación infinita.)

**23.7.** Una carga puntual  $Q = +4.60 \mu\text{C}$  se mantiene fija en el origen. Una segunda carga  $q = +1.20 \mu\text{C}$  con masa de  $2.80 \times 10^{-4} \text{ kg}$  se coloca en el eje *x*, a  $0.250 \text{ m}$  del origen. *a)* ¿Cuál es la energía potencial  $U$  del par de cargas? (Considere  $U$  igual a cero cuando las cargas tengan separación infinita.) *b)* La segunda carga puntual se libera del reposo. ¿Cuál es su rapidez cuando su distancia al origen es *i)*  $0.500 \text{ m}$ ; *ii)*  $5.00 \text{ m}$ ; *iii)*  $50.0 \text{ m}$ ?

**23.8.** Se colocan tres cargas puntuales iguales de  $1.20 \mu\text{C}$  en las esquinas de un triángulo equilátero cuyos lados miden  $0.500 \text{ m}$  de longitud. ¿Cuál es la energía potencial del sistema? (Considere la energía potencial de las tres cargas igual a cero cuando se encuentren separadas por una distancia infinita.)

**23.9.** Una carga puntual  $q_1 = 4.00 \text{ nC}$  está situada en el origen, y una segunda carga puntual  $q_2 = -3.00 \text{ nC}$  está en el eje *x* en  $x = +20.0 \text{ cm}$ . Una tercera carga puntual  $q_3 = 2.00 \text{ nC}$  se coloca sobre el eje *x* entre  $q_1$  y  $q_2$ . (Considere la energía potencial de las tres cargas igual a cero cuando estén separadas por una distancia infinita.) *a)* ¿Cuál es la

energía potencial del sistema de tres cargas si  $q_3$  se coloca en  $x = +10.0$  cm? b) ¿Dónde debe situarse  $q_3$  para hacer que la energía potencial del sistema sea igual a cero?

**23.10.** Cuatro electrones se localizan en las esquinas de un cuadrado de 10.0 nm de lado, con una partícula alfa en su parte media. ¿Cuánto trabajo se necesita hacer para mover la partícula alfa al punto medio de uno de los lados del cuadrado?

**23.11.** Tres cargas puntuales que al principio están infinitamente alejadas entre sí, se colocan en las esquinas de un triángulo equilátero con lados  $d$ . Dos de las cargas puntuales son idénticas y tienen carga  $q$ . Si se requiere un trabajo neto igual a cero para situar las tres cargas en las esquinas del triángulo, ¿cuál debe ser el valor de la tercera carga?

**23.12.** Dos protones son lanzados por un acelerador ciclotrón directamente uno en dirección del otro con una rapidez de 1000 km/s, medida con respecto a la Tierra. Encuentre la fuerza eléctrica máxima que ejercerá cada protón sobre el otro.

### Sección 23.2 Potencial eléctrico

**23.13.** Un campo eléctrico uniforme está dirigido hacia el este. El punto  $B$  está a 2.00 m al oeste del punto  $A$ , el punto  $C$  está a 2.00 m del punto  $A$ , y el punto  $D$  se localiza a 2.00 m al sur de  $A$ . En cada punto,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , ¿el potencial es mayor, menor o igual al del punto  $A$ ? Exponga el razonamiento que sustenta sus respuestas.

**23.14.** Se colocan cargas puntuales idénticas  $q = +5.00 \mu\text{C}$  en las esquinas opuestas de un cuadrado. La longitud de cada lado del cuadrado es de 0.200 m. Una carga puntual  $q_0 = -2.00 \mu\text{C}$  se sitúa en una de las esquinas vacías. ¿Cuánto trabajo sobre  $q_0$  realiza la fuerza eléctrica cuando  $q_0$  se mueve a la otra esquina vacía?

**23.15.** Una partícula pequeña tiene carga de  $-5.00 \mu\text{C}$  y masa de  $2.00 \times 10^{-4} \text{ kg}$ . Se desplaza desde el punto  $A$ , donde el potencial eléctrico es  $V_A = +200 \text{ V}$ , al punto  $B$ , donde el potencial eléctrico es  $V_B = +800 \text{ V}$ . La fuerza eléctrica es la única que actúa sobre la partícula, la cual tiene una rapidez de 5.00 m/s en el punto  $A$ . ¿Cuál es su rapidez en el punto  $B$ ? ¿Se mueve más rápido o más lento en  $B$  que en  $A$ ? Explique su respuesta.

**23.16.** Una partícula con carga de  $+4.20 \text{ nC}$  está en un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$  dirigido hacia la izquierda. Se libera desde el reposo y se mueve a la izquierda; después de que se ha desplazado 6.00 cm, su energía cinética es de  $+1.50 \times 10^{-6} \text{ J}$ . a) ¿Qué trabajo realizó la fuerza eléctrica? b) ¿Cuál es el potencial del punto de inicio con respecto al punto final? c) ¿Cuál es la magnitud de  $\vec{E}$ ?

**23.17.** Una carga de 28.0 nC se coloca en un campo eléctrico uniforme que está dirigido verticalmente hacia arriba y tiene una magnitud de  $4.00 \times 10^4 \text{ V/m}$ . ¿Qué trabajo hace la fuerza eléctrica cuando la carga se mueve a) 0.450 m a la derecha; b) 0.670 m hacia arriba; c) 2.60 m con un ángulo de  $45.0^\circ$  hacia abajo con respecto a la horizontal?

**23.18.** Dos cargas puntuales estacionarias de  $+3.00 \text{ nC}$  y  $+2.00 \text{ nC}$  están separadas por una distancia de 50.0 cm. Se libera un electrón desde el reposo en un punto a la mitad de camino entre las dos cargas y se mueve a lo largo de la línea que las conecta. ¿Cuál es la rapidez del electrón cuando está a 10.0 cm de la carga de  $+3.00 \text{ nC}$ ?

**23.19.** Una carga puntual tiene una carga de  $2.50 \times 10^{-11} \text{ C}$ . a) A qué distancia de la carga puntual el potencial eléctrico es de a) 90.0 V y b) 30.0 V? Considera el potencial igual a cero a una distancia infinita de la carga.

**23.20.** Dos cargas de igual magnitud  $Q$  se mantienen separadas una distancia  $d$ . Considere sólo puntos sobre la línea que pasa a través de ambas cargas. a) Si las dos cargas tienen el mismo signo, encuentre la ubicación de todos los puntos (si los hay) en los que i) el potencial (en relación con el infinito) es igual a cero (en estos puntos, ¿el campo eléctrico es cero?), y ii) el campo eléctrico es de cero (en estos puntos, ¿el potencial es de cero?). b) Repita el inciso a) para dos cargas que tienen signos opuestos.

**23.21.** Dos cargas puntuales  $q_1 = +2.40 \text{ nC}$  y  $q_2 = -6.50 \text{ nC}$  están separadas 0.100 m. El punto  $A$  está a la mitad de la distancia entre ellas; el punto  $B$  está a 0.080 m de  $q_1$  y 0.060 m de  $q_2$  (figura 23.31). Considere el potencial eléctrico como cero en el infinito. Determine a) el potencial en el punto  $A$ ; b) el potencial en el punto  $B$ ; c) el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre una carga de 2.50 nC que viaja del punto  $B$  al punto  $A$ .

**23.22.** Dos cargas puntuales positivas, cada una con magnitud  $q$ , se encuentran fijas sobre el eje  $y$  en los puntos  $y = +a$  y  $y = -a$ . Considere el potencial igual a cero a una distancia infinita de las cargas. a) Indique en un diagrama la posición de las cargas. b) ¿Cuál es el potencial  $V_0$  en el origen? c) Demuestre que el potencial en cualquier punto sobre el eje  $x$  es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

(d) Elabore la gráfica del potencial sobre el eje  $x$  como función de  $x$  sobre el intervalo de  $x = -4a$  a  $x = +4a$ . e) ¿Cuál es el potencial cuando  $x \gg a$ ? Explique por qué se obtiene este resultado.

**23.23.** Una carga  $+q$  se localiza en el punto  $x = 0, y = -a$ , y una carga negativa  $-q$  se encuentra en el punto  $x = 0, y = +a$ . a) Señale en un diagrama las posiciones de las cargas. b) Obtenga una expresión para el potencial  $V$  en los puntos sobre el eje  $x$  como función de la coordenada  $x$ . Considere  $V$  igual a cero a una distancia infinita de las cargas. c) Elabore la gráfica de  $V$  en puntos sobre el eje  $x$  como función de  $x$  en el intervalo de  $x = -4a$  a  $x = +4a$ . d) ¿Cuál es la respuesta al inciso b) si las dos cargas se intercambian de manera que  $+q$  esté en  $y = +a$  y  $-q$  esté en  $y = -a$ ?

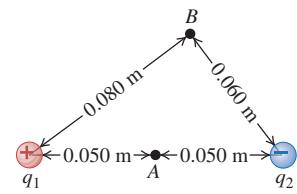
**23.24.** Considere la configuración de cargas descrita en el ejercicio 23.23. a) Obtenga una expresión para el potencial  $V$  en puntos sobre el eje  $y$  como función de la coordenada  $y$ . Considere  $V$  igual a cero a una distancia infinita de las cargas. b) Elabore la gráfica de  $V$  en puntos sobre el eje  $y$  como función de  $y$  en el intervalo de  $y = -4a$  a  $y = +4a$ . c) Demuestre que para  $y \gg a$ , el potencial en un punto sobre el eje  $y$  positivo está dado por  $V = -(1/4\pi\epsilon_0)2qa/y^2$ . d) ¿Cuáles son las respuestas a los incisos a) y c) si las dos cargas se intercambian de manera que  $+q$  esté en  $y = +a$  y  $-q$  esté en  $y = -a$ ?

**23.25.** Una carga positiva  $q$  está fija en el punto  $x = 0, y = 0$ , y una carga negativa  $-2q$  se encuentra fija en el punto  $x = a, y = 0$ . a) Señale las posiciones de las cargas en un diagrama. b) Obtenga una expresión para el potencial  $V$  en puntos sobre el eje  $x$  como función de la coordenada  $x$ . Considere  $V$  igual a cero a una distancia infinita de las cargas. c) ¿En qué posiciones sobre el eje  $x$   $V = 0$ ? d) Elabore la gráfica de  $V$  en puntos sobre el eje  $x$  como función de  $x$  en el intervalo de  $x = -2a$  a  $x = +2a$ . e) ¿Cuál es la respuesta para el inciso b) cuando  $x \gg a$ ? Explique por qué se obtiene este resultado.

**23.26.** Considere la configuración de cargas puntuales descrita en el ejercicio 23.25. a) Obtenga una expresión para el potencial  $V$  en puntos sobre el eje  $y$  como función de la coordenada  $y$ . Considere  $V$  igual a cero a una distancia infinita de las cargas. b) ¿En qué posiciones sobre el eje  $y$ ,  $V = 0$ ? c) Elabore la gráfica de  $V$  en puntos sobre el eje  $y$  como función de  $y$  en el intervalo de  $y = -2a$  a  $y = +2a$ . d) ¿Cuál es la respuesta para el inciso a) cuando  $y \gg a$ ? Explique por qué se obtiene este resultado.

**23.27.** Antes del advenimiento de la electrónica de estado sólido, en los aparatos de radio y otros dispositivos se usaban bulbos de vacío. Un tipo sencillo de bulbo de vacío conocido como *diodo* consiste en esencia en dos electrodos en el interior de un compartimiento al alto vacío. Un electrodo, el *cátodo*, se mantiene a temperatura elevada y

Figura 23.31 Ejercicio 23.21.



emite electrones desde su superficie. Entre el cátodo y el otro electrodo, conocido como *ánodo*, hay una diferencia de potencial de algunos cientos de volts, con el ánodo en el potencial más alto. Suponga que en un bulbo de vacío en particular el potencial del ánodo es 295 V mayor que el del cátodo. Un electrón sale de la superficie del cátodo con rapidez inicial igual a cero. Calcule su rapidez al incidir en el ánodo.

**23.28.** A cierta distancia de una carga puntual, el potencial y la magnitud del campo eléctrico debido a esa carga son 4.98 V y 12.0 V/m, respectivamente. (Considere el potencial como cero en el infinito.) *a)* ¿Cuál es la distancia a la carga puntual? *b)* ¿Cuál es la magnitud de la carga? *c)* El campo eléctrico está dirigido hacia la carga puntual o se aleja de ésta?

**23.29.** Un campo eléctrico uniforme tiene una magnitud  $E$  y está dirigido en la dirección negativa de  $x$ . La diferencia de potencial entre el punto *a* (en  $x = 0.60$  m) y el punto *b* (en  $x = 0.90$  m) es 240 V. *a)* ¿Cuál punto, *a* o *b*, tiene el potencial más alto? *b)* Calcule el valor de  $E$ . *c)* Una carga puntual negativa  $q = -0.200 \mu\text{C}$  se desplaza de *b* a *a*. Calcule el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre la carga puntual.

**23.30.** Para cada una de las siguientes configuraciones de dos cargas puntuales, encuentre todos los puntos a lo largo de la línea que pasa a través de ambas cargas para las que el potencial eléctrico  $V$  es igual a cero (considere que  $V = 0$  a una distancia infinita de las cargas) y para las que el campo eléctrico  $E$  es cero: *a)* cargas  $+Q$  y  $+2Q$  separadas por una distancia  $d$ , y *b)* cargas  $-Q$  y  $+2Q$  separadas por una distancia  $d$ . *c)* ¿Son  $V$  y  $E$  iguales a cero en los mismos lugares? Explique.

**23.31.** *a)* Un electrón se acelera de  $3.00 \times 10^6$  m/s a  $8.00 \times 10^6$  m/s. ¿A través de qué diferencia de potencial debe pasar el electrón para que esto suceda? *b)* ¿A través de qué diferencia de potencial debe pasar el electrón si ha de disminuir su velocidad de  $8.00 \times 10^6$  m/s hasta detenerse?

### Sección 23.3 Cálculo del potencial eléctrico

**23.32.** Una carga eléctrica total de  $3.50 \text{ nC}$  está distribuida de manera uniforme sobre la superficie de una esfera de metal con radio de 24.0 cm. Si el potencial es igual a cero en un punto en el infinito, encuentre el valor del potencial a las siguientes distancias desde el centro de la esfera: *a)* 48.0 cm; *b)* 24.0 cm; *c)* 12.0 cm.

**23.33.** Un anillo delgado con carga uniforme tiene un radio de 15.0 cm y carga total de  $+24.0 \text{ nC}$ . Se coloca un electrón sobre el eje del anillo a una distancia de 30.0 cm de su centro y queda restringido a permanecer sobre ese eje. Despues se libera el electrón desde el reposo. *a)* Describa el movimiento posterior del electrón. *b)* Determine la rapidez del electrón cuando alcanza el centro del anillo.

**23.34.** Una línea infinitamente larga de carga tiene densidad superficial de carga de  $5.00 \times 10^{-12} \text{ C/m}$ . Un protón (masa de  $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , carga de  $+1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ ) se localiza a 18.0 cm de la línea y se mueve directamente hacia ella con una rapidez de  $1.50 \times 10^3$  m/s. *a)* Calcule la energía cinética inicial del protón. *b)* ¿A qué distancia de la línea de carga llega el protón? (Sugerencia: véase el ejemplo 23.10.)

**23.35.** Un alambre muy largo tiene una densidad lineal de carga uniforme  $\lambda$ . Se utiliza un voltímetro para medir la diferencia de potencial y se encuentra que cuando un sensor del instrumento se coloca a 2.50 cm del alambre y el otro sensor se sitúa a 1.00 cm más lejos del alambre, el aparato lee 575 V. *a)* ¿Cuál es el valor de  $\lambda$ ? *b)* Si ahora se coloca un sensor a 3.50 cm del alambre y el otro a 1.00 cm más lejos, ¿el voltímetro leerá 575 V? Si no es así, ¿la lectura estará por encima o por debajo de 575 V? ¿Por qué? *c)* Si se sitúan ambos sensores a 3.50 cm del alambre pero a 17.0 cm uno de otro, ¿cuál será la lectura del voltímetro?

**23.36.** Un cilindro aislante muy largo de carga con radio de 2.50 cm tiene una densidad lineal uniforme de  $15.0 \text{ nC/m}$ . Si se coloca un sen-

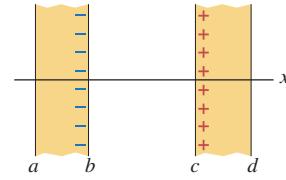
sor del voltímetro en la superficie, ¿a qué distancia de la superficie debe situarse el otro sensor para que la lectura sea de 175 V?

**23.37.** Una coraza cilíndrica aislante muy larga con radio de 6.00 cm tiene una densidad lineal de carga de  $8.50 \mu\text{C/m}$  distribuida de manera uniforme en su superficie exterior. ¿Cuál sería la lectura del voltímetro si se conectara entre *a)* la superficie del cilindro y un punto a 4.00 cm arriba de la superficie, y *b)* la superficie y un punto a 1.00 cm del eje central del cilindro?

**23.38.** Un anillo con diámetro de 8.00 cm está fijo en un lugar y tiene una carga de  $+5.00 \mu\text{C}$  distribuida de manera uniforme sobre su circunferencia. *a)* ¿Cuánto trabajo se requiere para desplazar una esfera diminuta con carga de  $+3.00 \mu\text{C}$  y masa de 1.50 g desde una distancia muy lejana al centro del anillo? *b)* ¿Es necesario seguir una trayectoria a lo largo del eje del anillo? ¿Por qué? *c)* Si la esfera se desplaza ligeramente del centro del anillo, ¿qué haría y cuál sería la velocidad máxima que alcanzaría?

**23.39.** Dos placas de metal paralelas, muy grandes, tienen densidades de carga de la misma magnitud pero con signos opuestos (figura 23.32). Suponga que están suficientemente cerca como para ser tratadas como placas ideales infinitas. Si se considera el potencial igual a cero a la izquierda de la superficie de la placa negativa, elabore una gráfica del potencial como función de  $x$ . Incluya *todas* las regiones de izquierda a derecha de las placas.

Figura 23.32 Ejercicio 23.39.



**23.40.** Dos placas conductoras paralelas y grandes, que llevan cargas opuestas de igual magnitud, están separadas por una distancia de 2.20 cm. *a)* Si la densidad superficial de carga para cada placa tiene una magnitud de  $47.0 \text{ nC/m}^2$ , ¿cuál es la magnitud de  $\vec{E}$  en la región entre las placas? *b)* ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las dos placas? *c)* Si la separación entre las placas se duplica mientras la densidad superficial de carga se mantiene constante en el valor que se obtuvo en el inciso *a*), ¿qué sucede con la magnitud del campo eléctrico y la diferencia de potencial?

**23.41.** Dos placas metálicas, grandes y paralelas tienen cargas opuestas de igual magnitud. Están separadas por una distancia de 45.0 mm, y la diferencia de potencial entre ellas es de 360 V. *a)* ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico (el cual se supone uniforme) en la región entre las placas? *b)* ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que ejerce este campo sobre una partícula con carga de  $+2.40 \text{ nC}$ ? *c)* Utilice los resultados del inciso *b*) para calcular el trabajo realizado por el campo sobre la partícula conforme se desplaza de la placa de mayor potencial a la de menor potencial. *d)* Compare el resultado del inciso *c*) con el cambio de energía potencial de la misma carga, calculado a partir del potencial eléctrico.

**23.42.** *a)* ¿Cuánta carga excedente debe colocarse en una esfera de cobre de 25.0 cm de diámetro de manera que el potencial de su centro, en relación con el infinito, sea de 1.50 kV? *b)* ¿Cuál es el potencial de la superficie de la esfera en relación con el infinito?

**23.43.** *a)* Demuestre que para una coraza esférica de radio  $R$ , que tiene una carga  $q$  distribuida de manera uniforme sobre su superficie,  $V$  es igual que  $V$  para un sólido conductor con radio  $R$  y carga  $q$ . *b)* Se frota un globo inflado sobre una alfombra, con lo que adquiere un potencial que es 1560 V más bajo que su potencial antes de haber sido cargado. Si la carga está distribuida de manera uniforme sobre la superficie del globo y el radio de éste es de 15 cm, ¿cuál es la carga neta en el globo? *c)* A la luz de su diferencia de potencial de 1200 V en relación con usted, ¿piensa que este globo es peligroso? Explique su respuesta.

**23.44.** El campo eléctrico en la superficie de una esfera de cobre con carga, sólida y con radio de 0.200 m es de  $3800 \text{ N/C}$ , dirigido hacia el centro de la esfera. ¿Cuál es el potencial en el centro de la esfera si se considera un potencial igual a cero a una distancia infinitamente grande con respecto a la esfera?

### Sección 23.4 Superficies equipotenciales y

### Sección 23.5 Gradiente potencial

**23.45.** Se establece una diferencia de potencial de 480 V entre placas metálicas grandes y paralelas. El potencial de una placa es de 480 V, y el de la otra es 0 V. Las placas están separadas por  $d = 1.70$  cm. *a)* Elabore un diagrama de las superficies equipotenciales que correspondan a 0, 120, 240, 360 y 480 V. *b)* En el diagrama, indique las líneas de campo eléctrico. ¿El diagrama confirma que las líneas de campo y las superficies equipotenciales son perpendiculares entre sí?

**23.46.** Una lámina muy grande de plástico tiene una densidad de carga uniforme de  $-6.00 \text{ nC/m}^2$  en una cara. *a)* Conforme usted se aleja de la lámina a lo largo de una línea perpendicular a ella, ¿el potencial se aumenta o disminuye? ¿Cómo lo sabe, sin hacer cálculos? ¿La respuesta depende del lugar que elija como punto de referencia para el potencial? *b)* Encuentre el espaciamiento entre superficies equipotenciales que difieren en 1.00 V una de otra. ¿Qué tipo de superficies son éstas?

**23.47.** En cierta región del espacio, el potencial eléctrico es  $V(x, y, z) = Ax - Bx^2 + Cy$ , donde  $A, B$  y  $C$  son constantes positivas. *a)* Calcule las componentes  $x, y$  y  $z$  del campo eléctrico. *b)* ¿En qué puntos el campo eléctrico es igual a cero?

**23.48.** El potencial debido a una carga puntual  $Q$  en el origen se puede escribir como

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

*a)* Calcule  $E_x, E_y$  y  $E_z$  utilizando las ecuaciones (23.19). *b)* Demuestre que los resultados del inciso *a*) concuerdan con la ecuación (21.7) para el campo eléctrico de una carga puntual.

**23.49.** Una esfera metálica con radio  $r_a$  está apoyada en un soporte aislante en el centro de una coraza esférica, hueca, metálica y con radio  $r_b$ . En la esfera interior hay una carga  $+q$  y en la exterior otra  $-q$ . *a)* Calcule el potencial  $V(r)$  para i)  $r < r_a$ ; ii)  $r_a < r < r_b$ ; iii)  $r > r_b$ . (Sugerencia: el potencial neto es la suma de los potenciales debidos a las esferas individuales.) Considere  $V$  igual a cero cuando  $r$  es infinito. *b)* Demuestre que el potencial de la esfera interior con respecto al de la esfera exterior es

$$V_{ab} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

*c)* Utilice la ecuación (23.23) y el resultado del inciso *a*) para mostrar que el campo eléctrico en cualquier punto entre las esferas tiene una magnitud de

$$E(r) = \frac{V_{ab}}{(1/r_a - 1/r_b)} \frac{1}{r^2}$$

*d)* Use la ecuación (23.23) y el resultado del inciso *a*) para encontrar el campo eléctrico en un punto fuera de la esfera más grande a una distancia  $r$  del centro, donde  $r > r_b$ . *e)* Suponga que la carga en la esfera exterior no es  $-q$  sino una carga negativa de diferente magnitud, por ejemplo,  $-Q$ . Demuestre que las respuestas para los incisos *b*) y *c*) son las mismas que antes, pero la del inciso *d*) es distinta.

**23.50.** Una esfera metálica con radio  $r_a = 1.20$  cm está sostenida por un soporte aislante en el centro de una coraza esférica, hueca, metálica y con radio  $r_b = 9.60$  cm. En la esfera interior se coloca una carga  $+q$  y en la exterior otra  $-q$ . Se elige que la magnitud de  $q$  sea tal que haga que la diferencia de potencial entre las esferas sea de 500 V, con la esfera interior a un potencial más elevado. *a)* Use el resultado del ejercicio 23.49*b*) para calcular  $q$ . *b)* Con ayuda del resultado del ejercicio 23.49*a*), elabore un diagrama de las superficies equipotenciales que correspondan a 500, 400, 300, 200, 100 y 0 V. *c)* En el diagrama indique las líneas de campo eléctrico. ¿Son perpendiculares entre sí las líneas de campo eléctrico y las superficies equipotenciales? Cuant

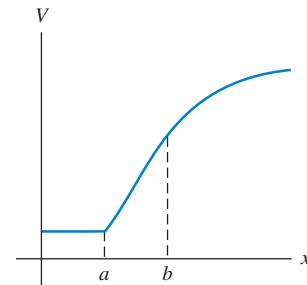
do la magnitud de  $\vec{E}$  es máxima, ¿las superficies equipotenciales están más cercanas?

**23.51.** Un cilindro muy grande de 2.00 cm de radio tiene una densidad de carga uniforme de  $1.50 \text{ nC/m}$ . *a)* Describa la forma de las superficies equipotenciales para este cilindro. *b)* Tome el nivel de referencia de manera que el potencial cero sea la superficie del cilindro, encuentre el radio de las superficies equipotenciales que tienen potenciales de 10.0 V, 20.0 V y 30.0 V. *c)* ¿Están igualmente espaciadas las superficies equipotenciales? Si no es así, ¿están más juntas o separadas conforme  $r$  se incrementa?

### Problemas

**23.52.** La figura 23.33 muestra el potencial de una distribución de carga como función de  $x$ . Elabore una gráfica del campo eléctrico  $E_x$  sobre la región que se ilustra.

Figura 23.33 Problema 23.52.



**23.53.** Una partícula con carga  $+7.60 \text{ nC}$  está en un campo eléctrico uniforme dirigido a la izquierda. Otra fuerza, además de la eléctrica, actúa sobre la partícula de manera que cuando parte del reposo se desplaza a la derecha. Después de haberse movido 8.00 cm, la fuerza adicional ha efectuado un trabajo de  $6.50 \times 10^{-5} \text{ J}$  y la partícula tiene una energía cinética de  $4.35 \times 10^{-5} \text{ J}$ . *a)* ¿Qué trabajo realizó la fuerza eléctrica? *b)* ¿Cuál es el potencial del punto de inicio con respecto al del punto final? *c)* ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico?

**23.54.** En el *modelo de Bohr* del átomo de hidrógeno, un único electrón gira alrededor de un solo protón en un círculo de radio  $r$ . Suponga que el protón permanece en reposo. *a)* Igualando la fuerza eléctrica con la masa del electrón multiplicada por su aceleración, obtenga una expresión para la rapidez del electrón. *b)* Obtenga una expresión para la energía cinética del electrón, y demuestre que su magnitud es la mitad de la de la energía potencial eléctrica. *c)* Obtenga una expresión para la energía total, y evalúela con  $r = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$ . Exprese el resultado numérico en joules y en electrón volts.

**23.55.** Un diodo de bulbo de vacío (véase el ejercicio 23.27) consiste en electrodos cilíndricos concéntricos, el cátodo negativo y el ánodo positivo. A causa de la acumulación de carga cerca del cátodo, el potencial eléctrico entre los electrodos no es una función lineal de la posición, ni siquiera con geometría plana, sino que está dada por

$$V(x) = Cx^{4/3}$$

donde  $x$  es la distancia desde el cátodo y  $C$  es una constante, característica de un diodo en particular y de las condiciones de operación. Suponga que la distancia entre el cátodo y el ánodo es de 13.0 mm y que la diferencia de potencial entre los electrodos es de 240 V. *a)* Determine el valor de  $C$ . *b)* Obtenga una fórmula para el campo eléctrico entre los electrodos como función de  $x$ . *c)* Determine la fuerza sobre un electrón cuando éste se encuentre en el punto medio entre los electrodos.

**23.56.** Dos esferas aislantes idénticas con cargas opuestas, cada una de 50.0 cm de diámetro y con carga uniforme de magnitud  $175 \mu\text{C}$ , están colocadas con sus centros separados por una distancia de 1.00 m (figura 23.34). *a)* Si se conecta un voltímetro entre los puntos más cercanos (*a* y *b*) sobre sus superficies, ¿cuál será la lectura? *b)* ¿Cuál punto, *a* o *b*, está en el potencial más grande? ¿Cómo se puede saber esto sin hacer cálculos?

**23.57. Cristal iónico.** La figura 23.35 muestra ocho cargas puntuales situadas en las esquinas de un cubo con lados de longitud  $d$ . Los valores de las cargas son  $+q$  y  $-q$ , como se indica. Éste es un modelo de una celda de un cristal cúbico iónico. Por ejemplo, en el cloruro de sodio ( $\text{NaCl}$ ) los iones positivos son  $\text{Na}^+$  y los negativos son  $\text{Cl}^-$ . *a)* Calcule la energía potencial  $U$  de esta configuración. (Considere la energía potencial de las ocho cargas igual a cero cuando están separadas por una distancia infinita.) *b)* En el inciso *a*), se debe de haber encontrado que  $U < 0$ . Explique la relación entre este resultado y la observación de que tales cristales iónicos existen en la naturaleza.

**23.58.** *a)* Calcule la energía potencial de un sistema de dos esferas pequeñas, una con carga de  $2.00 \mu\text{C}$  y la otra con carga de  $-3.50 \mu\text{C}$ , con sus centros separados por una distancia de 0.250 m. Suponga una energía potencial igual a cero cuando las cargas están separadas por una distancia infinita. *b)* Suponga que una de las esferas permanece en su lugar y la otra, con masa de 1.50 g, se aleja de ella. ¿Qué rapidez inicial mínima sería necesario que tuviera la esfera en movimiento para escapar por completo de la atracción de la esfera fija? (Para escapar, la esfera en movimiento tendría que alcanzar una rapidez de cero cuando hubiera una distancia infinita entre ella y la esfera fija.)

**23.59. El ion  $\text{H}_2^+$ .** El ion  $\text{H}_2^+$  está compuesto por dos protones, cada uno con carga  $+e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ , y un electrón de carga  $-e$  y masa  $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ . La separación entre los protones es de  $1.07 \times 10^{-10} \text{ m}$ . Los protones y el electrón pueden ser tratados como cargas puntuales. *a)* Suponga que el electrón se localiza en el punto medio entre los dos protones. ¿Cuál es la energía potencial de la interacción entre el electrón y los dos protones? (No incluya la energía potencial debida a la interacción entre los dos protones.) *b)* Suponga que el electrón del inciso *a)* tiene una velocidad de magnitud  $1.50 \times 10^6 \text{ m/s}$  en una dirección a lo largo de la bisectriz perpendicular de la línea que conecta los dos protones. ¿Qué tan lejos del punto medio entre los dos protones se mueve el electrón? Como las masas de los protones son mucho mayores que la del electrón, los movimientos de los protones son muy lentos y se pueden ignorar. (Nota: una descripción realista del movimiento del electrón requiere el uso de la mecánica cuántica, no la newtoniana.)

**23.60.** Una esfera pequeña con masa de 1.50 g cuelga de una cuerda entre dos placas verticales paralelas separadas por una distancia de 5.00 cm (figura 23.36). Las placas son aislantes y tienen densidades de carga superficial uniformes de  $+\sigma$  y  $-\sigma$ . La carga sobre la esfera es  $q = 8.90 \times 10^{-6} \text{ C}$ . ¿Cuál diferencia de potencial entre las placas ocasionará que la cuerda formara un ángulo de  $30.0^\circ$  con respecto a la vertical?

Figura 23.34 Problema 23.56.

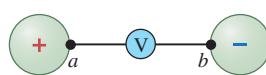


Figura 23.36 Problema 23.60.

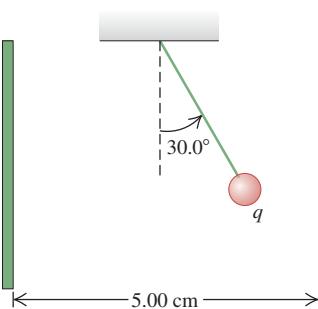
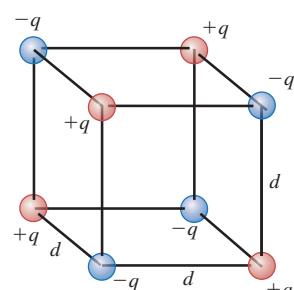


Figura 23.35 Problema 23.57.



**23.61. Cilindros coaxiales.** Un cilindro metálico largo con radio  $a$  está apoyado en un soporte aislante sobre el eje de un tubo metálico largo y hueco con radio  $b$ . La carga positiva por unidad de longitud sobre el cilindro interior es igual a  $\lambda$ , y en el cilindro exterior hay una carga negativa igual por unidad de longitud. *a)* Calcule el potencial  $V(r)$  para i)  $r < a$ ; ii)  $a < r < b$ ; iii)  $r > b$ . (Sugerencia: el potencial neto es la suma de los potenciales debidos a los conductores individuales.) Considere  $V = 0$  en  $r = b$ . *b)* Demuestre que el potencial del cilindro interior con respecto al exterior es

$$V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

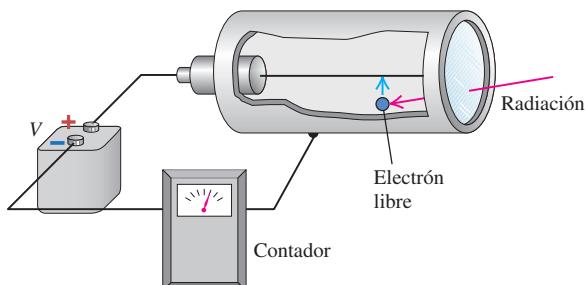
*c)* Use la ecuación (23.23) y el resultado del inciso *a*) para demostrar que el campo eléctrico en cualquier punto entre los cilindros tiene magnitud

$$E(r) = \frac{V_{ab}}{\ln(b/a)} \frac{1}{r}$$

*d)* ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los dos cilindros si el cilindro exterior no tiene carga neta?

**23.62.** Un *contador Geiger* detecta radiaciones como las partículas alfa utilizando el hecho de que la radiación ioniza el aire a lo largo de su trayectoria. Un alambre delgado está sobre el eje de un cilindro de metal hueco y aislado de éste (figura 23.37). Entre el alambre y el cilindro exterior se establece una diferencia de potencial grande, con el alambre con el potencial más elevado; esto produce un campo eléctrico intenso dirigido radialmente hacia fuera. Cuando una radiación ionizante entra al aparato, se ionizan algunas moléculas de aire. Los electrones libres producidos son acelerados por el campo eléctrico hacia el alambre y, en el camino, ionizan muchas más moléculas de aire. Entonces se produce un pulso de corriente que puede detectarse mediante circuitos electrónicos apropiados y convertirse en un “clic” audible. Suponga que el radio del alambre central es de  $145 \mu\text{m}$  y que el radio del cilindro hueco es de 1.80 cm. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre el alambre y el cilindro que produce un campo eléctrico de

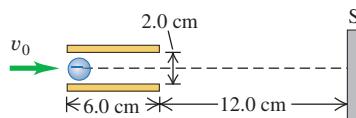
Figura 23.37 Problema 23.62.



$2.00 \times 10^4 \text{ V/m}$  a una distancia de  $1.20 \text{ cm}$  del eje del alambre? (El alambre y el cilindro son muy largos en comparación con sus radios, por lo que se aplican los resultados del problema 23.61.)

**23.63. Desviación en un TRC.** Es frecuente que en los osciloscopios y monitores de computadora haya tubos de rayos catódicos (TRC). En la figura 23.38 se proyecta un electrón con rapidez inicial de  $6.50 \times 10^6 \text{ m/s}$  a lo largo del eje en el punto medio entre las placas de desviación de un tubo de rayos catódicos. El campo eléctrico uniforme entre las placas tiene una magnitud de  $1.10 \times 10^3 \text{ V/m}$  y va hacia arriba. *a)* ¿Cuál es la fuerza (magnitud y dirección) sobre el electrón cuando está entre las placas? *b)* ¿Cuál es la aceleración del electrón (magnitud y dirección) cuando actúa sobre él la fuerza del inciso *a*)? *c)* ¿Qué tan lejos por debajo del eje se ha movido el electrón cuando alcanza el final de las placas? *d)* ¿Con qué ángulo con respecto al eje se mueve cuando abandona las placas? *e)* A qué distancia por debajo del eje golpeará la pantalla fluorescente *S*?

Figura 23.38 Problema 23.63.



**23.64. Placas de desviación de un osciloscopio.** Las placas de desviación verticales de un osciloscopio estudiantil común son un par de cuadrados metálicos paralelos con cargas iguales pero de signo contrario. Las dimensiones comunes miden aproximadamente  $3.0 \text{ cm}$  por lado, con una separación de cerca de  $5.0 \text{ mm}$ . Las placas están suficientemente cerca, por lo que se puede ignorar la flexión en los extremos. En estas condiciones: *a)* ¿Cuánta carga hay en cada placa, y *b)* ¿qué tan fuerte es el campo eléctrico entre las placas? *c)* Si un electrón es lanzado del reposo desde las placas negativas, ¿qué tan rápido se mueve cuando alcanza la placa positiva?

**23.65.** Los *precipitadores electrostáticos* se utilizan para eliminar partículas contaminantes de humo, en particular en las chimeneas de las plantas generadoras de energía a base de carbón. Una forma del precipitador consiste en un cilindro metálico, vertical y hueco, con un alambre delgado aislado del cilindro, que recorre su eje (figura 23.39). Entre el alambre y el cilindro exterior se establece una diferencia de potencial elevada, con el alambre en el menor potencial. Esto genera un campo eléctrico radial intenso dirigido hacia dentro. El campo crea una región de aire ionizado cerca del alambre. El humo entra al precipitador por la base, la ceniza y polvo capturan electrones, y los conta-

minantes con carga son acelerados por el campo eléctrico hacia la pared del cilindro exterior. Suponga que el radio del alambre central es  $90.0 \mu\text{m}$ , el radio del cilindro es de  $14.0 \text{ cm}$ , y se establece una diferencia de potencial de  $50.0 \text{kV}$  entre el alambre y el cilindro. También suponga que el alambre y el cilindro son muy largos en comparación con el radio del cilindro, por lo que se aplican los resultados del problema 23.61. *a)* ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en el punto medio entre el alambre y la pared del cilindro? *b)* ¿Qué magnitud de carga debe tener una partícula de ceniza de  $30.0 \mu\text{g}$  si el campo eléctrico calculado en el inciso *a*) debe ejercer una fuerza equivalente a 10 veces el peso de la partícula?

**23.66.** Un disco con radio  $R$  tiene una densidad superficial de carga  $\sigma$ . *a)* Si el disco se considera como una serie de anillos concéntricos, calcule el potencial eléctrico  $V$  en un punto sobre el eje del disco a una distancia  $x$  del centro del disco. Suponga que el potencial es igual a cero en el infinito. (*Sugerencia:* use el resultado del ejemplo 23.11 en la sección 23.3.) *b)* Calcule  $-\partial V/\partial x$ . Demuestre que el resultado concuerda con la expresión para  $E_x$  calculada en el ejemplo 21.12 (sección 21.5).

**23.67.** *a)* A partir de la expresión para  $E$  obtenida en el problema 22.40, encuentre las expresiones para el potencial eléctrico  $V$  como función de  $r$ , tanto dentro como fuera del cilindro. Sea  $V = 0$  en la superficie del cilindro. En cada caso, exprese el resultado en términos de la carga por unidad de longitud  $\lambda$  de la distribución de carga. *b)* Elabore la gráfica de  $V$  y  $E$  como funciones de  $r$ , desde  $r = 0$  hasta  $r = 3R$ .

**23.68.** Las partículas alfa ( $masa = 6.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , carga =  $+2e$ ) son proyectadas directamente hacia una lámina de oro. El núcleo del oro puede modelarse como una esfera de carga uniforme; suponga que el oro no se mueve. *a)* Si el radio del núcleo del oro es  $5.6 \times 10^{-15} \text{ m}$ , ¿cuál es la rapidez mínima que necesitan las partículas alfa cuando están lejos de alcanzar la superficie del núcleo del oro? (Ignore los efectos relativistas.) *b)* Dé buenas razones físicas de por qué se pueden ignorar los efectos de los electrones orbitales cuando la partícula alfa está i) fuera de las órbitas del electrón, y ii) dentro de las órbitas del electrón.

**23.69.** Para el anillo de carga descrito en el ejemplo 23.11 (sección 23.3), integre la expresión para  $E_x$  obtenida en el ejemplo 21.10 (sección 21.5) para calcular el potencial en el punto  $P$  sobre el eje del anillo. Suponga que  $V = 0$  en el infinito. Compare el resultado con el que se obtuvo en el ejemplo 23.11 por medio de la ecuación (23.16).

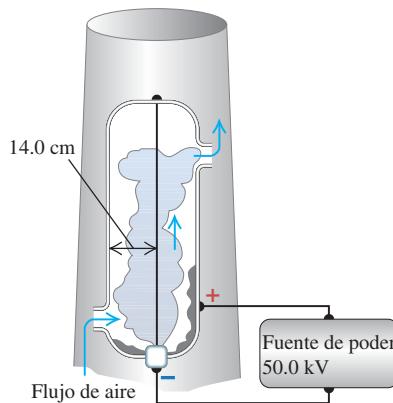
**23.70.** Una varilla aislante delgada se dobla para formar un arco semicircular de radio  $a$ , y una carga eléctrica total  $Q$  está distribuida de manera uniforme a lo largo de la varilla. Calcule el potencial en el centro de curvatura del arco si se supone que el potencial es igual a cero en el infinito.

**23.71. Autoenergía de una esfera de carga.** Una esfera sólida de radio  $R$  contiene una carga total  $Q$  distribuida de manera uniforme en todo su volumen. Calcule la energía necesaria para ensamblar esta carga por medio de traer cargas infinitesimales desde muy lejos. Esta energía se llama “autoenergía” de la distribución de carga. (*Sugerencia:* después de ensamblar la carga  $q$  en una esfera de radio  $r$ , ¿cuánta energía se necesitaría agregar a una coraza esférica con espesor  $dr$  y carga  $dq$ ? Despues integre para obtener la energía total.)

**23.72.** *a)* A partir de la expresión para  $E$  obtenida en el ejemplo 22.9 (sección 22.4), encuentre la expresión para el potencial eléctrico  $V$  como función de  $r$  tanto dentro como fuera de la esfera con carga uniforme. Suponga que en el infinito  $V = 0$ . *b)* Elabore una gráfica de  $V$  y  $E$  como funciones de  $r$ , desde  $r = 0$  a  $r = 3R$ .

**23.73.** Una esfera aislante sólida de radio  $R$  tiene carga  $Q$  con distribución uniforme en todo su volumen. *a)* Utilice los resultados del problema 23.72 para encontrar la magnitud de la diferencia de potencial entre la superficie de la esfera y su centro. *b)* ¿Cuál tiene mayor potencial, la superficie o el centro si, i)  $Q$  es positiva y ii) si  $Q$  es negativa?

Figura 23.39 Problema 23.65.



**23.74.** Una coraza esférica aislante con radio interior de 25.0 cm y radio exterior de 60.0 cm, tiene una carga de  $+150.0 \mu\text{C}$  distribuida con uniformidad sobre su superficie externa (véase el ejercicio 23.43). El punto *a* está en el centro de la coraza, el punto *b* se encuentra en la superficie interna, y el punto *c* se localiza en la superficie exterior. *a)* ¿Cuál será la lectura de un voltímetro si se conecta entre los siguientes puntos: i) *a* y *b*; ii) *b* y *c*; iii) *c* y el infinito; iv) *a* y *c*? *b)* ¿Cuál tiene mayor potencial: i) *a* o *b*; ii) *b* o *c*; iii) *a* o *c*? *c)* ¿Cuál de las respuestas cambiaría, si alguna lo hiciera, si las cargas fueran de  $-150 \mu\text{C}$ ?

**23.75.** El ejercicio 23.43 demuestra que afuera de una coraza esférica con carga superficial uniforme, el potencial es el mismo que si toda la carga estuviera concentrada en una carga puntual situada en el centro de la esfera. *a)* Utilice este resultado para demostrar que para dos corazas aislantes con carga uniforme, la fuerza que ejercen una sobre la otra y su energía eléctrica mutua son las mismas que si toda la carga se concentrara en sus centros. (*Sugerencia:* consulte la sección 12.6.) *b)* ¿Este mismo resultado se cumple para esferas sólidas aislantes, con distribución de carga uniforme en todo su volumen? *c)* ¿Es válido este mismo resultado para la fuerza entre dos corazas conductoras con carga? ¿Y entre dos conductores sólidos con carga? Explique su respuesta.

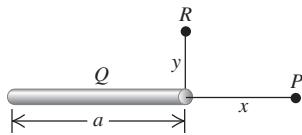
**23.76.** Dos esferas de plástico, cada una con carga distribuida de manera uniforme en su interior, entran en contacto inicialmente y luego se liberan. Una esfera mide 60.0 cm de diámetro, tiene masa de 50.0 g y contiene  $-10.0 \mu\text{C}$  de carga. La otra esfera tiene un diámetro de 40.0 cm, masa de 150.0 g y contiene  $-30.0 \mu\text{C}$  de carga. Determine la aceleración y la rapidez máximas que alcanza cada esfera (en relación con el punto fijo de su localización inicial en el espacio), suponiendo que no hay más fuerzas que actúen sobre ellas. (*Sugerencia:* las cargas distribuidas de manera uniforme se comportan como si estuvieran concentradas en los centros de las dos esferas.)

**23.77.** Use el campo eléctrico calculado en el problema 22.43 para determinar la diferencia de potencial entre la esfera conductora sólida y la delgada coraza aislante.

**23.78.** Considere una esfera conductora sólida dentro de otra esfera conductora hueca, con los radios y cargas especificados en el problema 22.42. Considere  $V = 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ . Use el campo eléctrico calculado en el problema 22.42 para calcular el potencial  $V$  para los siguientes valores de  $r$ : *a)*  $r = c$  (en la superficie exterior de la esfera hueca); *b)*  $r = b$  (en la superficie interior de la esfera hueca); *c)*  $r = a$  (en la superficie de la esfera sólida); *d)*  $r = 0$  (en el centro de la esfera sólida).

**23.79.** Una carga eléctrica se encuentra distribuida de manera uniforme a lo largo de una varilla delgada de longitud  $a$ , con carga total  $Q$ . Considere el potencial igual a cero en el infinito. Determine el potencial en los siguientes puntos (figura 23.40): *a)* punto *P*, distancia  $x$  a la derecha de la barra, y *b)* punto *R*, distancia  $y$  arriba del extremo derecho de la varilla. *c)* En los incisos *a)* y *b)*, ¿a qué se reduce el resultado conforme  $x$  se vuelve mucho más grande que  $a$ ?

Figura 23.40 Problema 23.79.



**23.80.** *a)* Si una gota de lluvia esférica de radio 0.650 mm tiene una carga de  $-1.20 \text{ pC}$  distribuida de manera uniforme en su volumen, ¿cuál es el potencial en su superficie? (Considere el potencial igual a cero a una distancia infinita de la gota.) *b)* Dos gotas idénticas, cada una con el radio y la carga especificados en el inciso *a*), chocan y forman una gota más grande. ¿Cuál es el radio de esta gota más grande, y cuál el potencial en su superficie, si su carga está distribuida de manera uniforme en su volumen?

**23.81.** Dos esferas de metal de diferentes tamaños tienen carga de manera que el potencial eléctrico es el mismo en la superficie de cada una. La esfera *A* tiene un radio tres veces mayor que el de la esfera *B*. Sean  $Q_A$  y  $Q_B$  las cargas en las dos esferas, y  $E_A$  y  $E_B$  las magnitudes de los campos eléctricos en las superficies de las dos esferas. ¿Cuáles son *a)* la razón  $Q_B/Q_A$  y *b)* la razón  $E_B/E_A$ ?

**23.82.** Una partícula alfa con energía cinética de 11.0 MeV colisiona de frente con un núcleo de plomo en reposo. ¿Cuál es la distancia de la aproximación máxima de las dos partículas? (Suponga que el núcleo del plomo permanece estacionario y que puede tratarse como una carga puntual. El número atómico del plomo es 82. La partícula alfa es un núcleo de helio, con número atómico 2.)

**23.83.** Una esfera de metal de radio  $R_1$  tiene una carga  $Q_1$ . Considere el potencial eléctrico igual a cero a una distancia infinita de la esfera. *a)* ¿Cuáles son el campo eléctrico y el potencial eléctrico en la superficie de la esfera? Esta esfera se conecta ahora con un alambre conductor largo y delgado con otra esfera de radio  $R_2$  que está alejada varios metros de la primera. Antes de hacer la conexión, esta segunda esfera está descargada. Después de alcanzar el equilibrio electrostático, indique cuáles son *b)* la carga total en cada esfera; *c)* el potencial eléctrico en la superficie de cada esfera; *d)* el campo eléctrico en la superficie de cada esfera. Suponga que la cantidad de carga en el alambre es mucho menor que la carga en cada esfera.

**23.84.** Use la distribución de carga y el campo eléctrico calculados en el problema 22.57. *a)* Demuestre que para  $r \geq R$  el potencial es idéntico al que produce una carga puntual  $Q$ . (Considere el potencial igual a cero en el infinito.) *b)* Obtenga una expresión para el potencial eléctrico que sea válida en la región  $r \leq R$ .

**23.85. Fusión nuclear en el Sol.** La fuente de la energía del Sol es una secuencia de reacciones nucleares que tienen lugar en su núcleo. La primera de ellas implica la colisión de dos protones, que se funden para formar un núcleo más pesado y liberan energía. Para que ocurra este proceso, llamado *fusión nuclear*, los dos protones primero deben acercarse hasta que sus superficies entren, esencialmente, en contacto. *a)* Suponga que ambos protones se mueven con la misma rapidez y que colisionan de frente. Si el radio del protón es  $1.2 \times 10^{-15} \text{ m}$ , ¿cuál es la rapidez mínima que permitiría que la fusión nuclear ocurriera? La distribución de carga dentro de un protón tiene simetría esférica, por lo que el campo eléctrico y el potencial fuera del protón son los mismos que si se tratara de una carga puntual. La masa del protón es  $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ . *b)* Otra reacción de fusión nuclear que sucede en el núcleo del Sol implica una colisión entre dos núcleos de helio, cada uno de los cuales tiene 2.99 veces la masa del protón, carga  $+2e$  y radio de  $1.7 \times 10^{-15} \text{ m}$ . Si se supone la misma geometría de colisión que en el inciso *a*), ¿cuál es la rapidez mínima que se requiere para que tenga lugar esta reacción de fusión si los núcleos deben aproximarse a una distancia de  $3.5 \times 10^{-15} \text{ m}$  entre sus centros? Igual que para el protón, la carga del núcleo de helio está distribuida de manera uniforme en todo su volumen. *c)* En la sección 18.3 se demostró que la energía cinética traslacional media de una partícula con masa  $m$  en un gas a temperatura absoluta  $T$  es  $\frac{3}{2}kT$ , donde  $k$  es la constante de Boltzmann (que aparece en el apéndice F). Para que dos protones con energía cinética igual a este valor medio sean capaces de experimentar el proceso descrito en el inciso *a*), ¿cuál es la temperatura absoluta que se requiere? ¿Qué temperatura absoluta se requiere para que dos núcleos de helio sean capaces de pasar por el proceso que se describe en el inciso *b*)? (A estas temperaturas, los átomos están ionizados por completo, por lo que los núcleos y los electrones se mueven por separado.) *d)* La temperatura en el núcleo del Sol es aproximadamente de  $1.5 \times 10^7 \text{ K}$ . ¿Cómo se compara ésta con las temperaturas calculadas en el inciso *c*)? ¿Cómo es posible que ocurran las reacciones descritas en los incisos *a*) y *b*) en el interior del Sol? (*Sugerencia:* consulte el análisis de la distribución de rapidez molecular en la sección 18.5.)

**23.86.** El potencial eléctrico  $V$  en cierta región del espacio está dada por

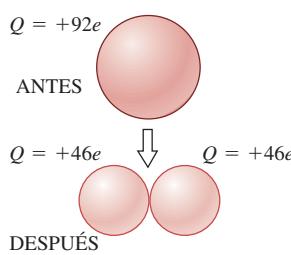
$$V(x, y, z) = A(x^2 - 3y^2 + z^2)$$

donde  $A$  es una constante. *a)* Obtenga una expresión para el campo eléctrico  $\vec{E}$  en cualquier punto de esta región. *b)* Se mide el trabajo realizado por el campo cuando una carga de prueba de  $1.50 \mu\text{C}$  se mueve del punto  $(x, y, z) = (0, 0, 0.250 \text{ m})$  al origen y resulta ser de  $6.00 \times 10^{-5} \text{ J}$ . Determine  $A$ . *c)* Determine el campo eléctrico en el punto  $(0, 0, 0.250 \text{ m})$ . *d)* Demuestre que en todo plano paralelo al plano  $xz$ , las líneas equipotenciales son círculos. *e)* ¿Cuál es el radio de la línea equipotencial que corresponde a  $V = 1280 \text{ V}$  y  $y = 2.00 \text{ m}$ ?

**23.87. Fisión nuclear.** El núcleo inestable del uranio 236 se puede considerar una esfera con carga uniforme con  $Q = +92e$  y radio  $R = 7.4 \times 10^{-15} \text{ m}$ . En la fisión nuclear, este núcleo se puede dividir en dos núcleos más pequeños, cada uno con la mitad de la carga y del volumen del núcleo original del uranio 236. Ésta es una de las reacciones que ocurrieron en la bomba nuclear que se hizo detonar en Hiroshima, Japón, en agosto de 1945.

*a)* Calcule los radios de los dos núcleos “hijos” de carga  $+46e$ . *b)* En un modelo sencillo del proceso de fisión, inmediatamente después que el núcleo de uranio 236 ha pasado por el proceso de fisión, los núcleos “hijos” están en reposo y apenas en contacto, como se ilustra en la figura 23.41. Calcule la energía cinética que cada uno de estos núcleos “hijos” tendrá cuando estén muy separados. *c)* En este modelo, la suma de las energías cinéticas de los dos núcleos “hijos”, calculadas en el inciso *b*, es igual a la energía liberada por la fisión del núcleo de uranio 236. Calcule la energía liberada por la fisión de  $10.0 \text{ kg}$  de uranio 236. La masa atómica del uranio 236 es 236 u, donde  $1 \text{ u} = 1$  unidad de masa atómica  $= 1.66 \times 10^{-24} \text{ kg}$ . Exprese su respuesta tanto en joules como en kilotonnes de TNT (1 kiloton de TNT libera  $4.18 \times 10^{12} \text{ J}$  al explotar). *d)* En términos de este modelo, analice por qué una bomba atómica podría llamarse también “bomba eléctrica”.

Figura 23.41 Problema 23.87.



## Problemas de desafío

**23.88.** En cierta región, existe una distribución de carga con simetría esférica pero no uniforme. Es decir, la densidad volumétrica de carga  $\rho(r)$  depende de la distancia  $r$  del centro de la distribución, pero no de los ángulos polares esféricos  $\theta$  y  $\phi$ . El potencial eléctrico  $V(r)$  debido a esta carga es

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 a^2}{18\epsilon_0} \left[ 1 - 3\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{a}\right)^3 \right] & \text{para } r \leq a \\ 0 & \text{para } r \geq a \end{cases}$$

donde  $\rho_0$  es una constante con unidades de  $\text{C/m}^3$ , y  $a$  es una constante en unidades de metros. *a)* Obtenga expresiones  $\vec{E}$  para las regiones  $r \leq a$  y  $r \geq a$ . [Sugerencia: utilice la ecuación (23.23).] Explique por qué  $\vec{E}$  sólo tiene una componente radial. *b)* Obtenga una expresión para  $\rho(r)$  en cada una de las dos regiones  $r \leq a$  y  $r \geq a$ . [Sugerencia: utilice la ley de Gauss para dos corazas esféricas, una de radio  $r$  y otra de radio  $r + dr$ . La carga contenida en la coraza esférica infinitesimal de radio  $dr$  es  $dq = 4\pi r^2 \rho(r) dr$ .] *c)* Demuestre que la carga neta contenida en el volumen de una esfera de radio mayor o igual que  $a$  es cero. [Sugerencia: integre las expresiones obtenidas en el inciso *b*) para  $\rho(r)$  sobre un volumen esférico de radio mayor o igual que  $a$ .] ¿Este resultado es congruente con el campo eléctrico para  $r > a$  que se calculó en el inciso *a*)?

**23.89.** En los experimentos en que colisionan núcleos atómicos, suceden choques de frente como los descritos en el problema 23.82, pero son más comunes los que “fallan”. Suponga que la partícula alfa en el problema 23.82 no “acertó” en el centro del núcleo de plomo, sino que tuvo cantidad de movimiento angular inicial distinta de cero (con respecto al núcleo de plomo estacionario) de magnitud  $L = p_0 b$ , donde  $p_0$  es la magnitud de la cantidad de movimiento inicial de la partícula alfa y  $b = 1.00 \times 10^{-12} \text{ m}$ . ¿Cuál es la distancia de la máxima aproximación? Repita el ejercicio para  $b = 1.00 \times 10^{-13} \text{ m}$  y  $b = 1.00 \times 10^{-14} \text{ m}$ .

**23.90.** Un cilindro hueco, aislante, de paredes delgadas, radio  $R$  y longitud  $L$  (como el tubo de cartón de un rollo de papel sanitario) tiene carga  $Q$  distribuida de manera uniforme sobre su superficie. *a)* Calcule el potencial eléctrico en todos los puntos a lo largo del eje del tubo. Como origen tome el centro del tubo, y el potencial cero en el infinito. *b)* Demuestre que si  $L \ll R$ , el resultado del inciso *a*) se reduce al potencial sobre el eje de un anillo de carga de radio  $R$ . (Véase el ejemplo 23.11 en la sección 23.3.) *c)* Utilice el resultado del inciso *a*) para determinar el campo eléctrico en todos los puntos a lo largo del eje del tubo.

**23.91. Experimento de la gota de aceite de Millikan.** La carga de un electrón fue medida por primera vez por el físico estadounidense Robert Millikan entre 1909 y 1913. En su experimento roció gotas muy finas (alrededor de  $10^{-4} \text{ mm}$  de diámetro) de aceite en el espacio entre dos placas paralelas en posición horizontal separadas por una distancia  $d$ . Mantuvo una diferencia de potencial  $V_{AB}$  entre las placas paralelas, lo que ocasionó entre ellas un campo eléctrico dirigido hacia abajo. Algunas de las gotas de aceite adquirieron carga negativa por efecto de la fricción o la ionización del aire circundante por medio de rayos x o radiactividad. Se observaron las gotas con un microscopio. *a)* Demuestre que una gota de aceite de radio  $r$  que esté en reposo entre las placas seguirá en reposo si la magnitud de la carga es

$$q = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho r^3 gd}{V_{AB}}$$

donde  $\rho$  es la densidad del aceite. (Ignore la fuerza de flotabilidad del aire.) Al ajustar  $V_{AB}$  para mantener una gota dada en reposo, es posible determinar la carga sobre ésta, si se conoce su radio. *b)* Las gotas de aceite eran demasiado pequeñas como para medir sus radios en forma directa. En vez de ello, Millikan determinó  $r$  recortando el campo eléctrico y midiendo la rapidez terminal  $v_t$  de la gota al caer. (En la sección 5.3 se estudió el concepto de rapidez terminal.) La fuerza de la viscosidad  $F$  de una esfera de radio  $r$  que se desplaza con rapidez  $v$  a través de un fluido con viscosidad  $\eta$  está dada por la ley de Stokes:  $F = 6\pi\eta rv$ . Cuando la gota cae con velocidad  $v_t$ , la fuerza de la viscosidad compensa exactamente el peso  $w = mg$  de la gota. Demuestre que la magnitud de la carga sobre la gota es

$$q = 18\pi \frac{d}{V_{AB}} \sqrt{\frac{\eta^3 v_t^3}{2\rho g}}$$

Dentro de los límites del error experimental, cada una de los miles de gotas que Millikan y sus colaboradores midieron que tenía una carga igual a cierto múltiplo entero pequeño de una carga básica  $e$ . Es decir, encontraron gotas con cargas  $\pm 2e$ ,  $\pm 5e$ , etcétera, pero no valores tales como  $0.76e$  o  $2.49e$ . Una gota con carga  $-e$  adquiría un electrón adicional; si su carga era  $-2e$ , había adquirido dos electrones más, y así sucesivamente. *c)* En el aparato de Millikan para este experimento, se observó que una gota de aceite con carga caía  $1.00 \text{ mm}$  con rapidez constante en  $39.3 \text{ s}$  si  $V_{AB} = 0$ . La misma gota podía estar en reposo entre las dos placas separadas  $1.00 \text{ mm}$  si  $V_{AB} = 9.16 \text{ V}$ . ¿Cuántos electrones en exceso había adquirido la gota, y cuál era su radio? La viscosidad del aire es  $1.81 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ , y la densidad del aceite es de  $824 \text{ kg}/\text{m}^3$ .

**23.92.** Dos cargas puntuales se desplazan hacia la derecha a lo largo del eje  $x$ . La carga puntual 1 tiene carga de  $q_1 = 2.00 \mu\text{C}$ , masa  $m_1 = 6.00 \times 10^{-5} \text{ kg}$  y rapidez  $v_1$ . La carga puntual 2 se encuentra a la derecha de  $q_1$  y tiene carga  $q_2 = -5.00 \mu\text{C}$ , masa  $m_2 = 3.00 \times 10^{-5} \text{ kg}$ , y rapidez  $v_2$ . En un instante en particular, las cargas están separadas por una distancia de 9.00 mm y su rapidez es, en cada caso,  $v_1 = 400 \text{ m/s}$  y  $v_2 = 1300 \text{ m/s}$ . Las únicas fuerzas que actúan sobre las partículas son las que ejercen una sobre la otra. *a)* Determine la rapidez  $v_{\text{cm}}$  del centro de masa del sistema. *b)* La *energía relativa*  $E_{\text{rel}}$  del sistema se define como la energía total menos la energía cinética aportada por el movimiento del centro de masa:

$$E_{\text{rel}} = E - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{\text{cm}}^2$$

donde  $E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + q_1q_2/4\pi\epsilon_0 r$  es la energía total del sistema y  $r$  es la distancia entre las cargas. Demuestre que  $E_{\text{rel}} = \frac{1}{2}\mu v^2 + q_1q_2/4\pi\epsilon_0 r$ , donde  $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$  se denomina la *masa reducida* del sistema, y  $v = v_2 - v_1$  es la rapidez relativa de las partículas en movimiento. *c)* Para los valores numéricos dados, calcule el valor numérico de  $E_{\text{rel}}$ . *d)* Con base en el resultado del inciso *c*), para las condiciones mencionadas, indique si las partículas escapan una de la otra. Explique su respuesta. *e)* Si las partículas escapan, ¿cuál sería su rapidez final relativa cuando  $r \rightarrow \infty$ ? Si las partículas no escapan, ¿cuál sería su distancia de máxima separación? Es decir, ¿cuál sería el valor de  $r$  cuando  $v = 0$ ? *f)* Repita los incisos *c)* a *e)* para  $v_1 = 400 \text{ m/s}$  y  $v_2 = 1800 \text{ m/s}$  cuando la separación es de 9.00 mm.