

自动控制原理

电子教案

《自动控制原理》课程教学大纲

课程编号：

课程名称：自动控制原理

英文名称：Automatic Control Theory

课程类型：专业基础必修课

总学时：64 讲课学时：56 上机学时：8

学时：64

学分：4

适用对象：电气工程及其自动化专业（电力系统及自动化、电力系统继电保护、电网监控技术、供电用电技术专业方向）

先修课程：高等数学、大学物理、积分变换、电路、数字电子技术、模拟电子技术

一、课程性质、目的和任务

本课程为电气工程及其自动化专业的主要专业基础课程之一，目的是使学生掌握负反馈控制原理、控制系统数学模型的建立和系统性能分析、设计的基本方法，培养学生分析和设计自动控制系统性能的基本能力并能满足其它后续专业课程对自动控制理论知识的需要。

二、教学基本要求

本课程采用时域法、根轨迹法和频率特性法对自动控制系统的性能进行分析和设计，学完本课程应达到以下基本要求。

1．掌握负反馈控制原理

掌握负反馈控制原理，能够分析负反馈控制系统的调节过程并画出相应的控制系统方框图。了解控制系统的基本构成和分类。

2．熟悉建立控制系统数学模型的方法

熟悉用拉氏变换法求解线性系统微分方程的基本方法。掌握控制系统传递函数、动态结构图建立和简化方法。

3．熟悉运用时域分析法分析系统性能的方法

掌握典型二阶系统的单位阶跃响应以及性能指标的求取。掌握用劳斯代数稳定判据判断系统的稳定性的方法。掌握求系统的稳态误差及误差系数的方法。

4．熟悉用根轨迹分析法分析控制系统性能的方法

掌握根据系统开环传递函数的零、极点分布绘制闭环系统根轨迹图的基本方法。根据根轨迹图分析控制系统的性能。了解开环零、极点对系统性能的影响。

5．熟悉频率分析法分析控制系统性能的方法

熟悉典型环节频率特性的求取以及频率特性曲线，掌握系统开环对数频率特性曲线、极坐标曲线绘制的基本方法。了解根据开环对数频率特性曲线分析闭环系统性能的方法。熟悉用奈奎斯特稳定判据判断系

统稳定性的方法。掌握稳定裕度的计算方法。

6. 熟悉控制系统校正的方法

了解串联超前校正、串联滞后校正的校正装置设计的基本原理和方法。

7. 熟悉非线性控制系统的分析方法

了解非线性控制系统的特点和常见非线性特性。熟悉非线性控制系统的描述函数法。

三、教学内容及要求

(一) 自动控制系统的基本概念

了解自动控制理论的主要任务以及研究对象，掌握负反馈控制原理并分析控制系统的自动控制过程，熟悉自动控制系统的基本构成并能绘制控制系统方框图，了解自动控制系统的分类方法和基本要求。

主要内容

1. 自动控制与自动控制系统

2. 负反馈调节原理

3. 自动控制系统的分类

3. 对控制系统的性能要求

4. 自动控制理论发展简史

(二) 自动控制系统的数学模型

熟悉系统微分方程的建立，拉氏变换及其应用。掌握系统传递函数的定义及求取，系统动态结构图的建立及其简化以及系统不同传递函数的定义及求取。

1. 控制系统微分方程的建立

2. 非线性数学模型的线性化

3. 控制系统的传递函数

4. 典型环节的传递函数

5. 控制的动态结构图及变换

6. 信号流图及梅逊公式

7. 反馈控制系统的传递函数

(三) 自动控制系统的时域分析法

熟悉控制系统的时域指标，一阶系统的单位阶跃响应、斜坡响应以及性能指标的求取。掌握典型二阶系统的单位阶跃响应以及性能指标的求取。掌握劳斯稳定判据分析系统的稳定性方法。熟悉控制系统稳态误差分析以及稳态误差、误差系数的求取。

1. 控制系统性能指标的定义

2. 一阶系统性能分析

3. 二阶系统性能分析

4. 欠阻尼二阶系统的时域分析和指标计算

5. 高阶系统的时域分析、闭环主导极点和高阶系统的降阶

6. 控制系统的稳定性分析

7. 控制系统的稳态误差分析和改进措施

8. 同步发电机励磁调节（选讲）

（四）根轨迹分析法

了解根轨迹的基本概念，熟悉根轨迹的绘制规则，掌握最小相位系统的根轨迹图绘制，了解非最小相位系统根轨迹图的绘制。运用根轨迹法分析系统的暂态特性。

1. 根轨迹的基本概念（根轨迹、根轨迹方程）

2. 绘制 180° 根轨迹的基本法则

3. 绘制 0° 根轨迹的基本法则

4. 广义根轨迹

5. 非最小相位系统的根轨迹

6. 用根轨迹法分析系统性能

（五）频率法

了解频率特性的基本概念，频率特性的几何表示方法，熟悉典型环节的对数频率特性曲线（Bode图）绘制和极坐标曲线（Nyquist曲线），掌握系统开环对数频率特性曲线的绘制，了解系统开环极坐标曲线绘制的一般方法，熟悉开环对数频率特性低频段、中频段、高频段的特征，学会运用奈奎斯特稳定判据判断闭环系统的稳定性，掌握系统稳定裕度的基本概念和计算方法，了解系统性能和开环频率特性的关系。

1. 频率特性的基本概念和几何表示

2. 典型环节的频率特性

3. 控制系统开环对数频率特性和极坐标曲线的绘制

4. 最小相位系统传递函数的确定

5. 奈奎斯特稳定判据和Bode图上的稳定判据

6. 稳定裕度的基本概念和计算方法

7. 频率特性与系统性能的基本关系

（六）控制系统性能的校正

了解校正装置和校正方法，熟悉串联超前校正、串联滞后校正的基本原理和方法。了解频率法反馈校正的基本原理和方法（选讲）。

1. 控制系统校正的基本概念和一般方法

2. 频率法串联超前校正的基本原理和方法

3. 频率法串联滞后校正的基本概念和方法

4. 频率法反馈校正的基本原理和方法（选讲）

（七）非线性控制系统

了解非线性系统与线性系统的区别，了解非线性特性和非线性系统的主要特征，学会非线性系统的描述函数分析方法，了解非线性系统的相平面分析法（选讲）。

1. 非线性系统的基本概念
2. 典型非线性特性、非线性系统的主要特征
3. 描述函数定义、应用条件和求取方法
4. 应用描述函数分析非线性系统的稳定性
5. 非线性系统自激振荡分析和计算
6. 介绍非线性系统相平面分析法（选讲）

四、所含实践环节

通过对 MATLAB 仿真软件的学习，掌握 MATLAB 软件的基本应用方法，能够学会运用 MATLAB 软件分析控制系统的性能和基本设计方法。

自动控制理论的实验安排在课程内计算机上完成，开设 4 个实验：

1. 熟悉 MATLAB 软件的基本使用方法，并利用 MATLAB 程序实现控制系统典型环节的性能仿真。
(验证性实验) 2 学时
2. 利用 MATLAB 程序绘制控制系统阶跃响应曲线、计算性能指标，讨论开环放大倍数对闭环系统响应速度、稳定性和稳态误差的影响。(验证性实验) 2 学时
3. 利用 MATLAB 程序绘制控制系统的 Nyquist 曲线、Bode 图，计算控制系统的幅值裕度和相位裕度。
(验证性实验) 2 学时
4. 利用 MATLAB 软件设计控制系统(设计性实验) 2 学时

五、课外习题及课程讨论

为达到本课程的教学基本要求，课外习题一般不应少于 50 题。

六、教学方法与手段

本课程采用以课堂板书为主适当结合多媒体课件并辅以上机实验的方式进行教学。

七、各教学环节学时分配

章节(或内容)	讲课	习题课	讨论课	上机	其它	合计
自动控制系统的的基本概念	4					
控制系统的数学模型	10			2		
线性系统的时域分析法	10			2		
根轨迹分析法	8					
线性系统的频域分析法	12			2		
控制系统的校正	6			2		
非线性系统	6					
合计	56			8		64

八、考核方式

本课程考核为期末闭卷笔试和平时考核相结合。学生的课程总评成绩由平时成绩(占 30%)和期末考

试成绩（占 70%）两部分构成，平时成绩中上机实验成绩占 20%，出勤、作业、课堂提问、学习主动性等占 10%。

九、推荐教材和教学参考书

教 材：《自动控制原理》，国防工业出版社，王划一主编，2001 年

参考书：《自动控制原理》，国防工业出版社，胡寿松主编，1994 年

《自动控制原理》，清华大学出版社，吴麒主编，1990 年

《现代控制工程》，电子工业出版社，Katsuhiko Ogata 著，卢伯英、于海勋等译，2000

年

大纲制订人：杨志超

大纲审定人：李先允

制订日期：2005 年 6 月

《自动控制原理》课程实验教学大纲

一、实验教学目标与基本要求

《自动控制原理》课程实验通过上机使用 MATLAB 软件,使学生初步掌握 MATLAB 软件在控制理论中的基本应用,学会利用 MATLAB 软件分析控制系统,从而加深对自动控制系统的认识,帮助理解经典自动控制的相关理论和分析方法。通过本课程上机实验,要求学生对 MATLAB 软件有一个基本的了解,掌握 MATLAB 软件中基本数组和矩阵的表示方法,掌握 MATLAB 软件的基本绘图功能,学会 MATLAB 软件中自动控制理论常用函数的使用,学会在 MATLAB 软件工作窗口进行交互式仿真和使用 M_File 格式的基本编程方法,初步掌握利用 MATLAB 软件进行控制系统设计,让学生得到撰写报告的基本训练。

二、本课程实验的基本理论与实验技术知识

采用 MATLAB 软件上机进行实验,就是利用现代计算机硬件和计算机软件技术,以数字仿真技术为核心,实现对自动控制系统基本理论和分析方法的验证以及控制系统设计。

通过上机实验,使学生在 MATLAB 软件的基本使用、编程调试、仿真实验数据的获取、整理、分析以及实验报告的撰写等基本技能得到训练。

三、实验方法、特点与基本要求

本课程实验采用计算机 MATLAB 软件仿真方法,其特点是利用 MATLAB 软件丰富的功能函数、灵活的编程和调试手段以及强大的人机交互和图形输出功能,可以实现对控制系统直观和方便的分析和设计。

本课程实验的基本要求是,使学生对 MATLAB 软件有一个基本的了解,掌握 MATLAB 软件中基本数组和矩阵的表示方法,掌握 MATLAB 软件的基本绘图功能,学会 MATLAB 软件中自动控制理论常用函数的使用,学会在 MATLAB 软件工作窗口进行交互式仿真和使用 M_File 格式的基本编程方法,初步掌握利用 MATLAB 软件进行控制系统设计,让学生得到撰写报告的基本训练。

四、实验主要仪器设备

配备有 50 台计算机,并安装 MATLAB 6.X 软件。

五、实验项目的设置与内容提要

序号	实验项目	内 容 提 要	实验学时	实验类型	每组人数	实验要求
1	控制系统典型环节性能分析	熟悉 MATLAB 软件的基本使用方法,并利用 MATLAB 实现控制系统典型环节性能的仿真分析	2	验证	1	必做
2	自动控制系统的稳定性和稳态误差分析	利用 MATLAB 程序绘制控制系统阶跃响应曲线、计算性能指标,讨论开环放大倍数对闭环系统响应速度、稳定性和稳态误差的影响	2	验证	1	必做

3	自动控制系统频域分析	利用 MATLAB 程序绘制控制系统的 Nyquist 图、Bode 图，判别稳定性，计算控制系统的幅值裕度和相位裕度	2	验证	1	必做
4	控制系统校正及设计	利用 MATLAB 软件设计控制系统	2	设计	1	必做

六、实验报告要求

每次上机实验必须提交实验报告。实验报告由实验原理、实验内容、仿真程序、实验数据记录及分析处理等内容组成。

七、考核方式与成绩评定标准

实验成绩：预习 10%、上机操作 50%、报告 40%

八、教材及主要参考资料

教材：《自动控制理论实验指导书》，王芳、杨志超编写，2007 年

参考书：《自动控制原理》，国防工业出版社，王划一主编，2001 年

《基于 MATLAB 的系统分析与设计》-控制系统，楼顺天、于卫编著，西安电子科技大学出版社，1999 年

《MATLAB 控制系统设计与仿真》，赵文峰编著，西安电子科技大学出版社，2002 年

大纲制订人：杨志超

大纲审定人：李先允

制订日期：2005 年 6 月

自动控制原理授课计划（64 学时）

序号	周时	需用 时数	授课 性质	授课或实验内容摘要	课外作业
1	1	4	理论 教学	绪论	1-2、1-6
2	2	2	理论 教学	系统数学模型的特点、类型和建模原则 系统微分方程的建立	2-4(a) 2-5(b)
3	2	2	理论 教学	非线性数学模型线性化 线性系统的传递函数	
4	3	2	理论 教学	线性系统的传递函数 典型环节及其传递函数	2-2(1)(2) 2-8 2-9
5	3	2	理论 教学	系统结构图	2-6 2-10(c) 2-11(a)
6	4	2	理论 教学	信号流图及梅逊公式	2-12(b) 2-13(a) 2-14(c)
7	4	2	上机 实验	控制系统典型环节性能分析上机实验	完成实验报告
8	5	2	理论 教学	线性系统时间相应的性能指标 一阶系统的时域分析	
10	5	2	理论 教学	二阶系统的时域分析	3-2
11	6	2	理论 教学	二阶系统的时域分析 高阶系统的时域分析	3-3
12	6	2	理论 教学	线性系统稳定性概念、定义和条件 线性系统的代数稳定判据	3-4
13	7	2	理论 教学	线性系统的误差分析	3-7 3-11
14	7	2	上机 实验	自动控制系统稳定性和稳态性能分析	完成实验报告
15	8	1	理论 教学	根轨迹法的基本概念	
16	8	3	理论 教学	绘制系统 180 根轨迹的基本法则	4-2
17	9	2	理论 教学	0° 根轨迹绘制及参变量根轨迹绘制	4-12 4-13

序号	周时	需用 时数	授 课 性 质	授课或实验内容摘要	课外作业
18	9	2	理论 教学	控制系统的根轨迹分析方法	4-4、4-6 4-8、4-15
19	10	2	理论 教学	频率特性基本概念、定义及几何表示法 典型环节的频率特性	
20	10	2	理论 教学	典型环节的频率特性 开环极坐标图的绘制	5-4(2)、(4)
21	11	2	理论 教学	开环伯德图的绘制 最小相位系统传递函数的确定	5-3(4) 5-5(2)(3)
22	11	2	理论 教学	奈奎斯特稳定判据	5-10
23	12	2	理论 教学	稳定裕度	5-7 5-9
24	12	2	理论 教学	闭环频率特性 频率特性分析	
25	13	2	上机 实验	自动控制系统频域分析上机实验	完成实验报告
26	13	2	理论 教学	系统的设计及校正问题 频率法串联校正	
27	14	2	理论 教学	频率法串联超前校正	6-1
28	14	2	理论 教学	频率法串联迟后校正	6-2
29	15	2	上机 实验	控制系统的校正及设计上机实验	完成实验报告
30	15	2	理论 教学	典型非线性特性、非线性特征、非线性系统分析方法 描述函数	
31	16	2	理论 教学	描述函数 描述函数分析法	7-2
32	16	2	理论 教学	描述函数分析法	7-7 7-8

第 1 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第一章 绪论（1-3 节）
主要内容	1. 自动控制在各领域的应用 2. 自动控制的作用 3. 自动控制定义：自动控制就是在没有人直接参与的情况下，利用控制器使被控对象（或过程）的某些物理量自动地按预先给定的规律去运行。 4. 自动控制系统的基本职能元件及基本框图等 5. 开环控制与闭环控制
目的与要求	了解自动控制系统的基本职能元件、基本术语及方框图 掌握自动控制定义 掌握开环、闭环控制的定义、基本框图
重点与难点	重点：自动控制的定义、开环控制与闭环控制的定义及框图
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	1-2
<p>1.1 引言</p> <p>无论是人们的日常生活、工业生产，还是空间探索、导弹制导等尖端科技领域中，自动控制技术无所不在、无所不能。自动控制理论和技术已经渗透到社会、经济和科学研究的各个方面。</p> <p>自动控制技术是建立在控制论基础上的，而控制论研究的是控制的一般性理论，它不具体面对某一类控制系统的，因此它是一门以理论为主的课程。</p> <p>自动控制理论是一门理论性和工程性的综合科学。</p> <p>1. 控制理论的基础观念</p> <p>控制理论是建立在有可能发展一种方法来研究各式各样系统中控制过程这一基础上的理论（也即，它是研究系统共性的控制过程的理论，可以把实际对象的物理涵义抽象出来，因此，它一定是以数学工具作为主要研究手段的）。</p> <p>2. 控制理论的研究对象</p> <p>控制论的研究是面向系统的。</p> <p>广义地讲：控制论是研究信息的产生、转换、传递、控制和预报的科学；</p> <p>狭义地讲：根据期望的输出来改变控制输入，使系统的输出能达到某中预期的效果。</p> <p>3. 控制论与数学及自动化技术的关系</p> <p>控制论是应用数学的一个分支，它的某些理论的研究还要借助于抽象数学。而控制论的研究成果若要应用于实际工程中，就必须在理论概念与用来解决这些实际问题的实用方法之间架起一座桥梁。</p> <p>1.2 自动控制和自动控制系统</p> <p>1.2.1 自动控制问题的提出</p> <p>人们存在着一种普遍的要求或希望，即要求某些物理量维持在某种特定的（如恒定不变或按某种规律变化或跟踪某个变化的量等等）标准上。</p> <p>例如：水箱的液位高度 H 的恒定控制就是一个十分典型的例子。</p> <p>人工控制的系统，特别是在系统较为复杂时，其控制的快速性、准确性和稳定性就不容易得到保证，甚至是不可能达到预期的控制效果，同时，也不利于提高劳动生产力和解放人类自身。</p> <p>1.2.2 自动控制的定义及基本职能元件</p> <p>1. 自动控制的定义</p> <p>自动控制就是在没有人直接参与的情况下，利用控制器使被控对象（或过程）的某些物理量（被控量）自动地按预先给定的规律去运行。</p> <p>2. 基本职能元件</p>	

比较自动控制与人工控制系统，可见自动控制系统存在着三个最基本的职能元件。

- (1) 测量元件与变送器：代替人的眼睛，完成信号的采集测量和变送；
- (2) 控制器：代替人的大脑，完成比较、计算、判断，并发出调节指令；
- (3) 执行元件：代替人的肌肉和手，完成或实现对被控对象的调节作用。

任何实际的自动控制系统，都少不了上述三个的职能元件（部件、部分）。

3. 自动控制中的常用术语

● **控制系统 (Control system)**: 为了达到预期的目的（响应）而设计出来的系统，它由相互关联的部件组合而成。

● **控制对象 (Control plant)**: 指被控设备或过程。

● **控制器 (Controller)**: 使被控对象达到所要求的性能或状态的控制设备。它接受输入信号或偏差信号，按预定的控制规律给出控制信号（操作量），送到执行元件（放大器）或被控对象。

● **系统 (System)**: 为实现预期的目标而将有关部件（部分）互联在一起的整体。

● **系统输出，也称被控量 (System output)**: 指被控制的量。它表征被控对象或过程的状态和性能，它又常常被称为系统对输入的响应（Response）。

● **控制量（操作量 Control signal）**: 是由控制器给出的作用于执行机构或被控对象的信号，它体现了对被控对象的调节作用。

● **参考输入或给定输入或希望输入 (Desired Input)**: 是人为给定的系统预期输出的希望值。

● **扰动 (Interaction)**: 干扰和破坏系统预期性能和输出的干扰信号（作用）。由系统内部产生的称为内部扰动，由系统外部产生的称为外部扰动，且外部扰动对系统而言是一种输入量。

● **偏差信号 (Error signal)**: 参考输入与实际输出的差称为偏差信号，偏差信号一般作为控制器的输入信号。

4. 方框图 (Block)

将系统各部分用方框并注以文字或符号按信息传递关系联结起来的一种图形表示。

方框图明确地表示了系统内各部分对信息加工的内容和信息间的关系，以及信息的传递路径，是一种直观的图形表示，在工程各领域用于进行定性和定量分析，因此得到极其广泛的应用。

1.3 开环控制与闭环控制

1.3.1 开环控制

开环控制是控制量与被控对象之间只有一条通路而没有反馈通路，也即控制作用的传递路径不是闭合的，或者说输出信号不反馈作用于输入信号。

开环控制又可以分为按给定控制和按扰动控制

1. 按给定控制

这种开环控制系统的结构简单，调整方便，成本也较低，其控制的性能（如精度）主要取决于构成系统所用元件的性能优劣和外界环境。

开环控制的缺点是：

- (1) 控制精度较差；
- (2) 系统的抗干扰性能较差（鲁棒性较差）。

所以复杂的控制系统和精度要求较高的场合一般不适合应用开环控制。

2. 按扰动控制

从按给定的开环控制分析可知，影响控制系统精度的主要因素是扰动，对于那些预先明确其对系统影响的扰动，可以根据测得的扰动量大小，对系统采取一种补偿和修正处理，以抵消或减小扰动对系统输出的影响，它可以提高控制系统的精度，减小扰动对输出的影响，提高系统的抗干扰能力。

当然按扰动的开环控制必须有两个前提条件，即

- (1) 扰动对输出的影响特性必须是预知的；

- (2) 扰动必须是可测量的。

3. 开环控制的定义

若系统的输出量对系统的控制作用没有影响的系统称为开环控制。

特点：

- (1) 输出量产生控制作用直接影响输出量；
- (2) 输出量对输入产生的控制作用没有影响（无反馈作用）。

1.3.2 闭环控制 (Closed-Loop Control)

在控制系统中，根据实际输出来修正控制作用，实现对被控对象进行控制的任务，这种控制原理称为反馈控制原理。由于引入了输出量的反馈信息，使整个系统成为闭合的，因此，按反馈原理建立起来的控制系统，叫做闭环控制系统。因为是按偏差的大小进行调节控制的，所以闭环反馈控制又称为按偏差控制。

闭环控制的定义：

系统的输出信号对控制作用能有直接影响的系统，叫做闭环控制系统。

特点和优点：

(1) 系统的控制器根据偏差的大小来发出调节信号的，所以，又称闭环控制为按偏差控制。

(2) 信号的传递途径形成一个闭合的环路，称为闭环。闭环系统可以是正反馈的，也可以是负反馈的，实际可用的自动控制系统一般是负反馈控制系统。

(3) 可以用精度不高的元器件，构成精度较高的控制系统。

(4) 系统具有较强的抗干扰能力。

缺点：(1) 增加了组成系统的元器件数量，从而增加了系统的成本。

(2) 增加了系统的复杂性。

(3) 系统的增益（放大倍数）损失，这意味着控制系统的调节能力被削弱，响应速度变慢。

(4) 由于引入了反馈，所以闭环系统就存在着稳定性问题，而稳定性是控制系统工作的首要条件。

1.3.3 其它控制方式

在实际的工程控制实践中，还可以将上述两种控制方式进行适当的组合，构成复合控制方式。

1. 附加给定输入的补偿控制方式

2. 附加扰动输入的补偿控制方式

第 2 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第一章 绪论（4-6 节）
主要内容	自动控制系统的分类及组成 对控制系统的要求 控制系统的分析与设计 自动控制理论的发展简史 反馈控制举例
目的与要求	掌握自动控制系统的分类以及对系统的要求 了解控制系统的基本组成、控制系统的分析与设计 了解自动控制理论的发展简史 掌握自动控制系统的工作原理和方框图的绘制
重点与难点	重点：自动控制系统的分类 对控制系统的要求 难点：自动控制系统的工作原理和方框图的绘制
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	1-6
	<p>1.4 自动控制系统的分类及基本组成</p> <p>1.4.1 按给定信号的特征分类</p> <p>1. 恒值控制系统</p> <p>特点：希望系统的输出维持在给定值上不变或变化很小，这类控制系统是最常见的，常常也称为自镇定系统，像压力、流量、温度、速度、电压、电流等恒定控制系统。</p> <p>2. 随动控制系统</p> <p>特点：这类控制系统的主要特点是给定信号的变化规律是事先不确定的随机信号，控制系统的主要任务是使系统的输出能快速、准确地跟随输入的变化而变化，故这类系统常常又称为跟踪控制系统。常见的例子如火炮、雷达、导弹制导等控制系统。</p> <p>3. 程序控制系统</p> <p>特点：程序控制系统与随机控制系统的不同在于系统的给定输入不是随机的，而是确定的、按预先的规律变化。它要求系统的输出能严格按输入变化而变化，并具有足够的精度，常见的例子如数控加工、自动流水生产线系统等。</p> <p>1.4.2 按系统的数学模型分类</p> <p>这种分类方法是按照元件或系统的数学模型（方程或数学描述）的特征，依据其输入输出之间的关系来进行分类，常可以分为线性系统和非线性系统两大类。</p> <p>1. 线性系统</p> <p>对于一个系统，当其输入（激励）和输出（响应）同时满足叠加性和齐次性时称其为线性系统。根据线性系统的定义，满足线性特性的元件称为线性元件，而构成系统的所有元件均为线性元件的，必为线性系统。</p> <p>所谓线性特性，从几何上来看，是指元件的静态特性为一条通过坐标原点的直线。线性系统常可以用微分方程来表示，若微分方程的系数均为常数，则称为线性定常系统。</p> <p>例 1：判断下列输出响应对应的系统是否为线性系统。</p> <p>系统 1：$y_1(t) = 3q(0) + 5 \int_0^t x(\tau) d\tau, t > 0$</p> <p>系统 2：$y_2(t) = 3q(0) + 5x^2(t), t > 0$</p> <p>系统 3：$y_3(t) = 3q^2(0) + 5x(t), t > 0$</p> <p>系统 4：$y_4(t) = 3q^2(0) + \lg x(t), t > 0$</p>

[解]：

系统 1：零输入响应 $[3q(0)]$ 和零状态响应 $[5\int_0^t x(\tau)d\tau]$ 均具有线性性，故为线性系统。

系统 2：仅零输入响应 $[3q(0)]$ 具有线性性；

系统 3：仅零状态响应 $[5x(t)]$ 具有线性性；

系统 4：零输入响应和零状态响应均不具有线性性；

2. 非线性系统

凡是不满足线性系统特性的系统，统称为非线性系统。具体地讲，只要系统中存在一个或一个以上的非线性元件，那么，这个系统就是非线性系统。非线性系统用非线性方程来表示。

可以将非线性特性分为两大类，即非本质非线性和本质非线性。

(1) 非本质非线性：对于某一类非线性特性，在某一区域内可以近似为线性关系，而在大范围工作区域时，这种近似的线性关系就不存在了。

(2) 本质非线性：对于任意大小的输入信号，均呈现非线性特性的这类非线性特性。

典型的本质非线性如下：

非本质非线性系统可以通过对非本质非线性在工作点附近进行线性化处理而得到线性化后的系统数学模型，仍可按线性系统的理论进行分析和设计。而本质非线性特性，只能按照非线性系统的方法进行分析和设计。

1.4.3 按信号传递的连续性划分

1. 连续系统

这类系统中的所有元件的输入输出信号均为时间的连续函数，所以又常称为模拟系统。

2. 离散系统

系统中只要有一处的信号是脉冲序列或数字信号时，该系统就是离散系统。这类系统常用差分方程来表示。离散系统实现上是将连续信号经过采样后离散化为脉冲或数字信号后送入计算机进行分析、处理、决策后，形成脉冲或数字式控制信号，并还原为相应的模拟量控制信号对被控对象实现控制。

1.4.4 按系统的输入/输出信号的数量分类

1. 单变量系统 (SISO)

所谓单变量系统是指系统只有一个输入和一个输出，它只注重系统的外部输入和输出，而不关心系统内部的状态变化，所以单输入单输出系统可以把系统看成为一个黑匣子。

经典控制理论研究的对象主要是单输入单输出的线性定常系统。

2. 多变量系统 (MIMO)

所谓多变量系统是指系统有多个输入或单个输出或多个输出，它不仅仅注重系统的输入和输出变量，还更多地关心系统结构内部各状态变量的变化和个状态变量之间的耦合关系。

多变量系统是现代控制理论研究的主要对象，在数学上以状态空间变量法和矩阵理论为主要研究工具。

1.4.5 自动控制系统的基本组成

1. 给定元件：其职能是给出与期望的输出相对应的系统输入量，是一类产生系统控制指令的装置。

2. 测量元件：其职能是检测被控量（系统输出），并进行信号的变换（如非电量转换）和传输，用于反馈被控量到比较元件与输入进行比较（形成偏差信号）。

3. 比较元件：其职能是把测量元件检测到的实际输出量与给定元件给出的输入量进行比较，得到偏差信号。

4. 放大元件：其职能是将微弱的偏差信号进行放大，以足够的功率来推动执行机构或被控对象。

5. 执行元件：其职能是直接控制被控对象，使其被控量发生变化，例如阀门、伺服机构等。

6. 校正元件：其职能是为了改善或提高控制系统的性能（如稳定性、稳态精度、响应速度等），在控制系统的基本结构上附加一定的装置（元件），这种附加的校正装置（元件）可以有多种形式，如串联校正、并联校正、反馈校正等。

1.5 对控制系统的要求和设计

1.5.1 对系统的要求

理想的控制系统，必须具备两方面的性能，即

(1) 使系统的输出快速、准确地按输入信号要求的期望输出值变化；

(2) 使系统的输出尽量不受任何扰动的影响；

对自动控制系统性能的主要要求为：

- (1) **稳定性**：要求系统稳定并具有一定的稳定裕度。
- (2) **瞬态质量**：要求系统的瞬态响应快速且变化平稳。
- (3) **稳态精度**：要求系统的稳态误差满足设计的要求。

上述三个要求往往很难同时满足，并且相互之间有一定的制约关系，例如，为保证系统有足够的精度，要求系统的开环放大倍数越大越好，但开环放大倍数的大小，却受制与闭环系统的稳定性，因此这些一切之间需要进行折中选择。

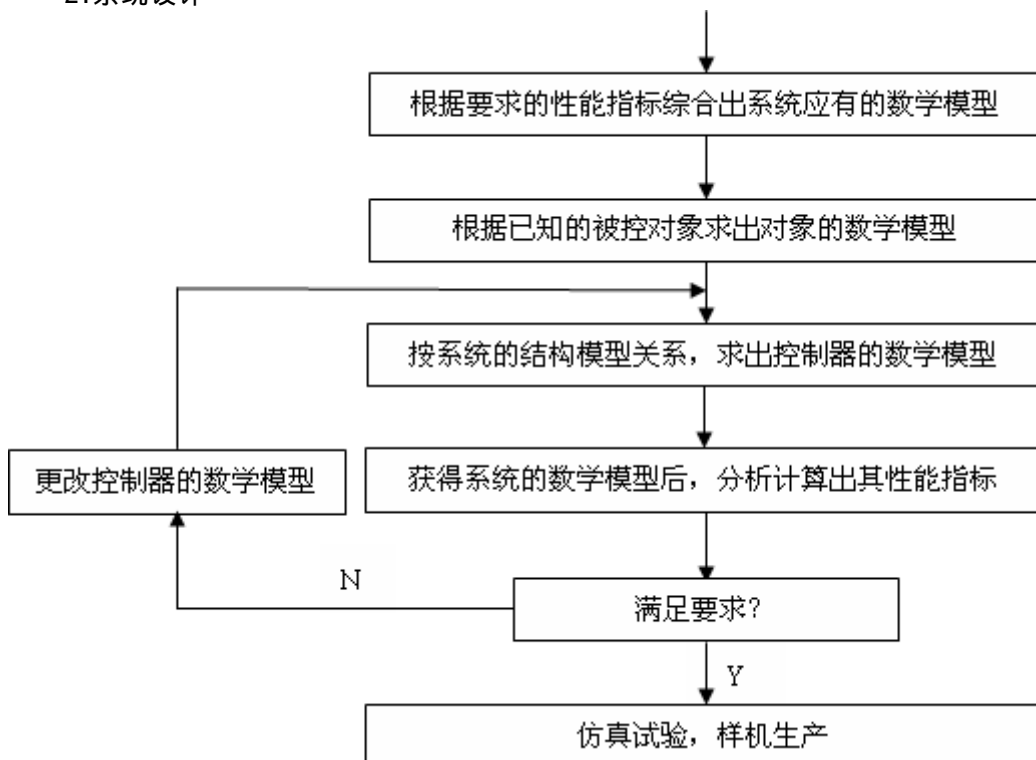
1.5.2 控制系统的分析和设计

1. 系统分析

一般步骤：(1) 建立数学模型；(2) 分析系统的性能，计算出具体的性能指标；(3) 分析系统参数变化对系统性能的影响，并决定选择合理的分析方法。

系统的分析方法往往随着数学模型的不同而不同，在经典控制理论中，常用的分析主要有**时域分析法**、**复频域分析法**、**根轨迹分析法**等。

2. 系统设计



第 3 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第二章 控制系统的数学模型（1、2 节）
主要内容	数学模型的基本概念、特点、类型 系统微分方程的建立
目的与要求	了解建立数学模型的意义和数学模型的特点、类型 掌握建立微分方程数学模型的方法和步骤， 机械平移、旋转系统、电学系统和复杂系统微分方程的建立
重点与难点	重点：微分方程的建立 难点：根据物理机理建立各类不同系统的微分方程
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	2-4 (a) 2-5 (b)
<p>2.1 引言</p> <p>数学模型：描述系统动态特性及其变量之间关系的数学表达式或其它形式的表示称为数学模型。</p> <p>2.1.1 数学模型的特点</p> <p>1. 相似性和抽象化 具有相同数学模型的不同的具体系统之间就是相似系统。</p> <p>2. 简化性和精确性 在建模的时候，要在简化和精确之间作折中选择，其原则是简化后的数学方程的解的结果必须满足工程实际的要求并留有一定的余地。</p> <p>3. 动态模型 所谓动态模型是指描述系统变量的各阶导数之间关系的微分方程称为系统的动态模型。</p> <p>4. 静态模型 所谓静态模型是指在静态条件下，即描述系统变量的各阶导数为零，描述变量之间关系的代数方程称为静态模型。</p> <p>2.1.2 数学模型的种类</p> <p>数学模型有多种形式，例如微分方程、差分方程、状态方程和传递函数、结构图、频率特性等等，究竟选用哪种模型，一般要视采用的分析方法和系统的类型而定，例如：</p> <p>连续系统的单输入/单输出系统的时域分析法，可采用微分方程。 连续多输入多输出系统的时域分析法可以采用状态方程。 分析频域法可以采用频率特性。离散系统可以采用差分方程，等等。</p> <p>2.2 系统微分方程的建立</p> <p>2.2.1 一般步骤</p> <p>(1) 确定系统的输入量、输出量及中间变量，弄清各变量之间的关系； (2) 依据合理的假设，忽略一些次要因素，使问题简化； (3) 根据支配系统各部分动态特性的基本定律，列写出各部分的原始方程，其一般原则是： A. 从系统输入端开始，依次列写组成系统各部分的运动方程。 B. 相邻元部件之间后一级若作为前一级负载的，要考虑这种负载效应。 C. 常见的基本定律主要有，牛顿三大定律（惯性定律、加速度定律、作用和反作用定律）、能量守恒定律、动量守恒定律、科希霍夫电压、电流定律、物质守恒定律及各学科有关导出定律等等。 (4) 列写中间变量与其它变量的因果关系式（称为辅助方程式）。 (5) 联立上述方程组，消去中间变量，最终得到系统关于输入输出变量的微分方程。 (6) 标准化，即将与输入变量有关各项放到方程式等号的右侧，将与输出变量有关各项放到方程式等号的左侧，且各阶导数按降幂排列。</p> <p>2.2.2 理想元件的微分方程描述</p> <p>在电气和机械系统中几种最常见的理想元件有：</p> <p>1. 电容</p>	

电容两端电压与电流的关系为： $i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$ 或 $u_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$

2. 电感

流过电感电流与两端的电压的关系为： $u_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$ 或 $i_L(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt$

3. 弹性力它是一种弹簧的弹性恢复力，其大小与机械变形成正比，弹性力分平动和旋转两种。

$F = ky = k \int v dt$ 或 $v = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$ ，式中 k 为弹簧的弹性系数， F 为作用于弹簧的外力， y 为直线位移量， v 为直线位移速度。

4. 阻尼器

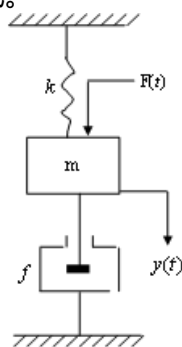
平动阻尼器阻尼力： $F = fv = f \frac{dy}{dt}$ ，式中 f 为阻尼系数， F 为阻尼力。

旋转阻尼器阻尼力矩： $T = f\omega = f \frac{d\theta}{dt}$ ，式中 ω 为旋转角速度， θ 为旋转角度， T 为阻尼力矩。

阻尼器本身不储存能量，它吸收能量并以热的形式耗散掉。

2.2.3 数学建模举例

例 1：弹簧-质量-阻尼器串联系统，试列写以外力 $F(t)$ 为输入，以质量位移 $y(t)$ 为输出的微分方程式。



[解]：这是一个经典的直线机械位移动力学系统，可以假定系统采用集中参数， m 为质点

(1) 系统的输入为 $F(t)$ ，输出为 $y(t)$ ，弹簧的弹性阻力为 $F_k(t)$ ，阻尼器的阻尼力为 $F_f(t)$ 均为中间变量。

(2) 画出 m 的受力图

(3) 由牛顿第二定律（即加速度定律）：

$$\sum F_i = ma = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$F(t) - F_k(t) - F_f(t) = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

(4) 列写中间变量、 $F_f(t)$ 表达式

$$F_k(t) = ky(t), F_f(t) = f \frac{dy}{dt}$$

(5) 将上述中间变量的辅助方程代入原始方程，消去中间变量 $F_k(t)$ 和 $F_f(t)$

$$F(t) - ky(t) - f \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

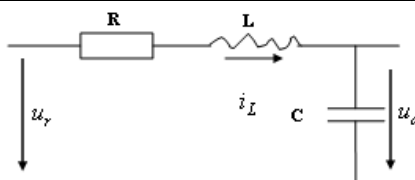
(6) 标准化，得到： $m \frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky(t) = F(t)$

若令 $T_m^2 = m/k, T_f = f/k$ ，则上述方程可以表示为： $\frac{m}{k} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{f}{k} \frac{dy}{dt} + y = \frac{1}{k} F(t)$ 。

静态方程为： $y(t) = \frac{1}{k} F(t)$ ，因此 $1/k$ 又称为系统的静态放大倍数。

例 2：R-L-C 串联电路，输入为电压 $u_r(t)$ ，输出为电容电压 $u_c(t)$ ，试求输入输出微分方程。

[解]：(1) 确定系统的输入为电压 $u_r(t)$ ，输出为电容电压 $u_c(t)$ ，中间变量为电流 $i(t)$



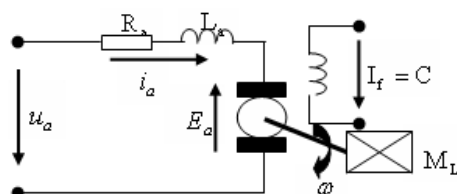
(2) 网络按集中参数考虑，且输出为开路电压，即无后级负载。

(3) 由克希霍夫定律写出原始方程： $L \frac{di}{dt} + Ri + u_c = u_r$

(4) 列写中间变量 $i(t)$ 与 $u_c(t)$ 的关系式： $i = C \frac{du_c}{dt}$

(5) 将 $i(t)$ 代入原始方程，消去中间变量 $i(t)$ ，得到： $LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r$

例 3：电枢控制的直流电机，在系统中，输入电枢电压 u_a 在电枢回路中产生电枢电流 i_a ，再由 i_a 与励磁磁通相互作用产生电磁转矩 M_D ，从而使电枢旋转，拖动负载，完成了由电能向机械能转换的过程。



(1) 确定输入、输出量为： u_a 为输入电压， ω 为输出角频率， M_L 为负载扰动力矩；

(2) 忽略电枢反应、磁滞等影响，当 $I_f = C$ 时，励磁磁通不变，变量关系可视为线性关系；

(3) 列写原始方程 $L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + E_a = u_a$

由刚体旋转定律写出电机轴上的机械运动方程 $J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = J \frac{d\omega}{dt} = M_D - M_L$

(4) 写出辅助方程式

电枢反应的反电势： $E_a = k_e \omega$ ， k_e 为电势系数，由电机结构参数决定。

电磁转矩： $M_D = k_m i_a$ ， k_m 为转矩系数，由电机结构参数决定。

(5) 消去中间变量 i_a 、 E_a 、 M_D ， M_L 为负载扰动输入力矩

$$\frac{L_a J}{k_e k_m} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{R_a J}{k_e k_m} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{k_e} u_a - \frac{L_a}{k_e k_m} \frac{dM_L}{dt} - \frac{R_a}{k_e k_m} M_L$$

若令 $T_m = R_a J / k_e k_m$ 为机电时间常数， $T_a = L_a / R_a$ 为电磁时间常数，则上式可以写为：

$$T_a T_m \frac{d^2 \omega}{dt^2} + T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{k_e} u_a - \frac{T_a T_m}{J} \frac{dM_L}{dt} - \frac{T_m}{J} M_L$$

若忽略掉负载转矩 M_L ，即空载时，则有： $T_a T_m \frac{d^2 \omega}{dt^2} + T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{k_e} u_a$

2.2.4 微分方程的一般特征

微分方程的一般形式：

$$a_0 \frac{d^n c}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} c}{dt^{n-2}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dc}{dt} + a_n c = b_0 \frac{d^m r}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r}{dt^{m-1}} + b_2 \frac{d^{m-2} r}{dt^{m-2}} + \cdots + b_{m-1} \frac{dr}{dt} + b_m r$$

(1) 其中 a_i ， b_j 为实常数，由物理系统的参数决定；

(2) 方程输出变量的微分阶次高于输入变量的微分阶次，因为物理系统含有储能元件，即 $n > m$ 。

第 4 次课

授课时间 2 学时

授课题目 (章、节)

第二章 控制系统的数学模型 (3、4 节)

主要内容

非线性模型的线性化
线性常系数微分方程的求解
传递函数的定义、实际意义、性质及微观结构

目的与要求

掌握非线性模型的线性化的方法、条件和步骤
掌握线性常系数微分方程的拉氏变换法求解
掌握线性定常系统传递函数的定义、实际意义、性质及微观结构

重点与难点

重点：传递函数的定义、性质及微观结构
难点：线性常系数微分方程的求解

教学手段

授课、例题讲解

思考题或作业题

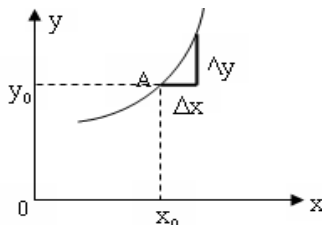
2-2 (1)(2) 2-8、2-9

2.3 非线性数学模型线性化

实际意义上纯粹的线性系统是不存在的,组成系统的元件或多或少地存在着非线性特性,对非本质的非线性特性我们要进行线性化处理,既线性近似。

2.3.1 小偏差线性化的概念

例如如下的非线性特性,对于工作点 $A(x_0, y_0)$,若在工作点 A 附近很小的范围内工作,即变量 x 、 y 相对于 (x_0, y_0) 作微小的增量 Δx 、 Δy 的变化,以 A 点 (x_0, y_0) 处的切线来代替在 $(\Delta x, \Delta y)$ 范围内很小一端曲线,因为这种线性化处理被限制在工作点 (x_0, y_0) 附近很小的范围 Δx 、 Δy 内才得以成立,因此称为“小偏差法”。



2.3.2 线性化的数学意义和步骤

1、设 $y = f(x)$ 为非线性特性方程,稳定工作点 (x_0, y_0) 近似式 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x = K\Delta x$, 式中系数 $K = f'(x_0)$ 为工作点 (x_0, y_0) 处切线的斜率,即 $K = f'(x_0) = \tan \alpha$, 这样就将非线性特性 $y = f(x)$ 近似为线性特性 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x = K\Delta x$ 。

例:已知非线性函数 $y = \sin \theta$, 试在 $\theta_0 = 0$ 和 $\theta_0 = \pi$ 两点处作线性化处理。

解:显然 $y = \sin \theta$ 是一个非线性函数,我们从 $\theta_0 = 0$ 和 $\theta_0 = \pi$ 两点处可以直观地看出,在其领域内呈现出很高的线性度。

(1) $\theta_0 = 0$ 时, $y_0 = \sin \theta_0|_{\theta_0=0} = 0$, 故 $(\theta_0, y_0) = (0, 0)$,

$$\Delta y = y'(\theta_0)\Delta \theta = \cos \theta|_{\theta_0=0} \Delta \theta = \Delta \theta$$

但我们常常习惯仍将 Δy 写成 y , $\Delta \theta$ 写成 θ , 不过此时的 θ 和 y 均是针对 $(\theta_0, y_0) = (0, 0)$ 工作点处的增量 $\Delta \theta$ 、 Δy , 于是有近似的线性函数为 $y = \theta$

(2) $\theta_0 = \pi$ 时, $y_0 = \sin \theta_0|_{\theta_0=\pi} = 0$, 故 $(\theta_0, y_0) = (\pi, 0)$,

$$\Delta y = y'(\theta_0)\Delta \theta = \cos \theta|_{\theta_0=\pi} \Delta \theta = -\Delta \theta$$

于是有近似的线性函数为 $y = -\theta$ 。

显然工作点不同时，线性化的系数是不同的。

2、对多变量非线性函数，同样可以有类似的线性化处理，设有非线性函数 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，式中的 x_1, x_2, \dots, x_n 为系统的 n 个输入（激励），若系统的工作点为 $y = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ ，近似表达式 $\Delta y = K_1 \Delta x_1 + K_2 \Delta x_2 + \dots + K_n \Delta x_n$ 。

系数 $K_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x_0}$ ， $K_2 = \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{x_0}$ ， \dots ， $K_n = \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{x_0}$ 为各工作点的偏导数，特别是当 $n=2$ 时有：

$$\Delta y = K_1 \Delta x_1 + K_2 \Delta x_2, \quad K_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1 = x_{10} \\ x_2 = x_{20}}}, \quad K_2 = \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_1 = x_{10} \\ x_2 = x_{20}}}$$

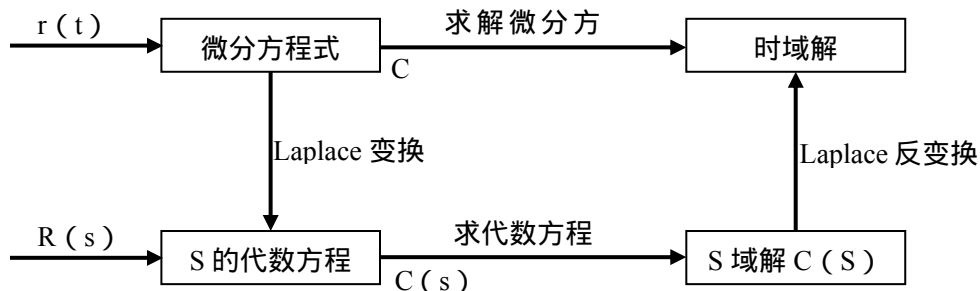
关于线性化的几点说明：

- （1）线性化必须针对某一个工作点处进行，工作点不同则线性化的结果也不一样；
- （2）线性化的条件是在工作点附近的小范围内，满足小偏差的条件；
- （3）线性化只能针对非本质非线性特性进行，从数学意义上讲，就是非线性函数必须是单值、连续、光滑和可导的；
- （4）线性化的结果是得到基于工作点附近（邻域）变量增量 $(\Delta x, \Delta y)$ 的线性方程式，习惯上我们仍将 $\Delta x, \Delta y$ 写成 x, y 。

2.4 线性系统的传递函数

2.4.1 微分方程的求解

微分方程的求解分为时域法和变换域法，它们之间的关系可以用下图来表示：



从图中可知，通过 Laplace 变换，可以将微分方程的解简化为复变域中关于 s 的代数方程，并得到输出的 Laplace 变换 $C(s)$ 后，反变换得到微分方程的时间域解 $c(t)$ 。

2.4.2 传递函数 (Transfer Function)

1. 传递函数定义

在线性系统中，当初始条件为零时，系统输出的 Laplace 变换象函数 $C(s)$ 与输入的 Laplace 变换象函数 $R(s)$ 之比，称为系统的传递函数。

设线性时不变系统的微分方程为：

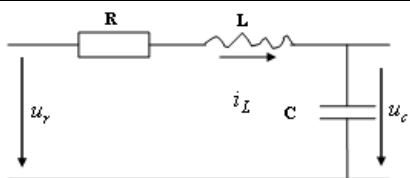
$$a_0 \frac{d^n c}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} c}{dt^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{dc}{dt} + a_n c = b_0 \frac{d^m r}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r}{dt^{m-1}} + b_2 \frac{d^{m-2} r}{dt^{m-2}} + \dots + b_{m-1} \frac{dr}{dt} + b_m r$$

在零初始条件下，对上述微分方程两边同时求 Laplace 变换，并令输出 $c(t)$ 的 Laplace 变换为 $C(s)$ ，输入 $r(t)$ 的 Laplace 变换为 $R(s)$ ，利用 Laplace 变换的微分性质，得到：

$$(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) C(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m) R(s)$$

$$\text{求得传递函数: } G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

例：试求 RLC 串联电路的传递函数。



解：该电路的微分方程前面已经求得 $LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r$

令初始条件为零，方程两边求 Laplace 变换，得到： $LCs^2 U_c(s) + RCs U_c(s) + U_c(s) = U_r(s)$

$$(LCs^2 + RCs + 1)U_c(s) = U_r(s) \Rightarrow G(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

例：动力学系统如下图，试求传递函数。

解：该系统的微分方程为 $my'' + (f_1 + f_2)y' + ky = F(t)$

令初始条件为零，对方程两边同时求 Laplace 变换，得到：

$$(ms^2 + (f_1 + f_2)s + k)Y(s) = F(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + (f_1 + f_2)s + k}$$

2. 传递函数的结构特征：

(1) 传递函数是从微分方程演变过来的，因此传递函数同样表征了系统的固有特性，它是系统在复变域中的一种数学模型；

(2) 由于传递函数适用于线性系统，所以传递函数不会因为输入量或输出量函数而异；

(3) 传递函数包含了微分方程的全部系数，所以它与微分方程是完全相通的，如果传递函数中不存在分子分母对消的因子，那么传递函数与微分方程一样包含了系统的全部信息；

(4) 传递函数的分母多项式就是微分方程左端函数的微分算子符多项式，也就是系统的特征多项式，不过它是复变域里的表现形式。传递函数的分子多项式就是微分方程右端函数的微分算子符多项式；

(5) 虽然传递函数与微分方程是相通的，但从形式上说，传递函数是一个函数，而微分方程是一个方程，因此传递函数在运算和作图方面是比较方便的，但它也带来了分子分母相消等问题；

(6) 由于传递函数与微分方程的相通性，因此只要将微分方程中的微分算子符 $P = d/dt$ 换成复变量 s ，即可得到传递函数；

令 $P = d/dt \rightarrow s$, $c(t) \rightarrow C(s)$, $r(t) \rightarrow R(s)$ ，则可得到传递函数 $G(s)$ 。

(7) 传递函数 $G(s)$ 与系统的冲击响应 $g(t)$ 为一对变换对，即 $G(s) \leftrightarrow g(t)$

为我们提供了传递函数的一种求取方法，即若已知系统的冲击响应 $g(t)$ ，则其传递函数 $G(s) = L[g(t)]$ 。

(8) 对于一个物理上可实现的线性集中参数对象，其传递函数必定是严格真有理函数，也即传递函数的分子多项式的阶次 m 总是小于分母多项式的阶次 n ， $m < n$ 。

例：设系统的单位阶跃响应为 $c(t) = 1 - e^{-2t} + e^{-t}$ ，试求系统的传递函数和脉冲响应函数。

解：方法一：根据传递函数的定义，系统的传递函数为：

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{L(1 - e^{-2t} + e^{-t})}{L[1(t)]} = \frac{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1}}{\frac{1}{s}} = \frac{s^2 + 4s + 2}{(s+1)(s+2)}$$

脉冲响应函数为： $g(t) = L^{-1}[G(s)] = \delta(t) + 2e^{-2t} - e^{-t}$

方法二：根据线性系统的性质，系统的脉冲响应函数为：

$$g(t) = \frac{dc(t)}{dt} = \delta(t) + 2e^{-2t} - e^{-t}$$

系统的传递函数为： $G(s) = L[g(t)] = L[\delta(t) + 2e^{-2t} - e^{-t}] = 1 + \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1} = \frac{s^2 + 4s + 2}{(s+1)(s+2)}$

第 5 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第二章 控制系统的数学模型（4、6 节）
主要内容	零极点分布与系统响应的关系 典型环节及传递函数
目的与要求	掌握零极点分布与系统响应的关系 掌握各典型环节的传递函数、运动方程、阶跃响应及特点
重点与难点	重点：零极点分布与系统响应的关系、典型环节的传递函数 难点：零极点分布与系统响应的关系
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	<p>3. 传递函数的零、极点</p> <p>(1) 传递函数的零点与极点</p> $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{M(s)}{N(s)}$ <p>定义传递函数分子多项式 $M(s) = 0$ 的 m 个根 z_1, z_2, \cdots, z_m 为零点，分母多项式 $N(s) = 0$ 的 n 个根 p_1, p_2, \cdots, p_n 为极点，实际上极点也就是特征方程式的根，即特征根。零点和极点可以是实数或共轭复数。</p> <p>(2) 传递函数的表示形式</p> <p>零极点表达式</p> $G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = K_g \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$ <p>式中 $K_g = b_0/a_0$ 称为传递系数或根轨迹增益。</p> <p>归一化（时间常数）表达式</p> $G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = K \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2^2 s^2 + 2\tau_2 \zeta_2 s + 1) \cdots}{(T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 2T_2 \zeta_2 s + 1) \cdots}$ <p>式中 $K = b_m/a_n$ 称为系统传递函数的静态（稳态）放大系数。</p> $K \text{ 与 } K_g \text{ 的关系： } K = K_g \frac{(-z_1)(-z_2) \cdots (-z_m)}{(-p_1)(-p_2) \cdots (-p_n)} = K_g \frac{\prod_{i=1}^m (-1)^m z_i}{\prod_{j=1}^n (-1)^n p_j}$ <p>(3) 零点、极点图</p> <p>习惯上在 s 平面上以“○”表示零点，以“×”表示极点的图称为零极点图。</p> <p>例如：系统的传递函数为 $G(s) = (s+2)/(s+3)(s^2+2s+2)$，则传递函数可表示为</p> $G(s) = (s+2)/(s+3)(s+1+j)(s+1-j)$ <p>4. 零点、极点、传递系数与系统响应的关系</p> <p>(1) 极点决定了系统自由（固有）运动属性</p> <p>系统的自由运动是系统的固有运动属性，而与外部输入信号无关。</p> <p>一般而言，传递函数 $G(s)$ 极点的形式，决定了系统自由运动模态的具体形式。</p> <p>当极点为互不相等的实数根 p_1, p_2, \cdots, p_n 时，自由运动的模态形式为：</p> $e^{p_1 t}, e^{p_2 t}, \cdots, e^{p_n t}$

当极点有共轭复数根如 $p_i = \sigma_i \pm j\omega_i$ 时，自由运动的模态形式将出现：

$$e^{\sigma_i t} \cos \omega_i t \text{ 或 } e^{\sigma_i t} \sin \omega_i t$$

当极点出现实数重根，如 m 重实数根 p_i 时，自由运动的模态形式将出现：

$$e^{p_i t}, te^{p_i t}; \cdots, t^{m-1} e^{p_i t}$$

当极点出现复数重根，如 m 重复数根 $p_i = \sigma_i \pm j\omega_i$ 时，自由运动的模态形式将出现：

$$e^{\sigma_i t} \cos \omega_i t, te^{\sigma_i t} \cos \omega_i t; \cdots, t^{m-1} e^{\sigma_i t} \cos \omega_i t$$

$$\text{或 } e^{\sigma_i t} \sin \omega_i t, te^{\sigma_i t} \sin \omega_i t; \cdots, t^{m-1} e^{\sigma_i t} \sin \omega_i t$$

当极点既有互异的实数根、共轭复数根，又有重实数根、重复数根时，自由运动的模态形式将是上述几种形式的线性组合。

(2) 极点位置决定了系统响应的稳定性和快速性

●系统传递函数的开环极点的实部均小于零，从 s 平面来看，所有极点均位于其左半平面，则其模态就会随着时间 t 的增长而衰减，最终消失。系统响应的自由运动分量（即能得到稳态响应）能够消失的称为稳定系统，因此系统的稳定性由其全部极点的位置来决定。

●对于稳定的系统，即所以极点均位于 S 左半平面，每个极点所对应的运动模态，随着时间 t 衰减的快慢，则由该极点离开虚轴的距离来决定，显然离开虚轴越远，则衰减得越快，离开虚轴越近，则衰减越慢。而系统响应的快速性，即暂态响应衰减的快慢，就是由极点决定的自由运动模态衰减的快慢，因此系统响应的快速性，由其全部极点在 S 左半平面上的分布决定。

(3) 零点决定了运动模态的比重

零点决定了各模态在响应中所占的“比重”，因而也就影响系统响应的曲线形状，因此也就会影响系统响应的快速性。

零点离极点较远时，相应于该极点模态所占的比重较大，离极点较近时，相应于该极点模态所占的比重较小。当零点与极点重合，出现零极点对消现象，此时相应于该极点的模态也就消失了（实际上是该模态的比重为零）。因此零点有阻断极点模态“产生”或“生成”的作用。

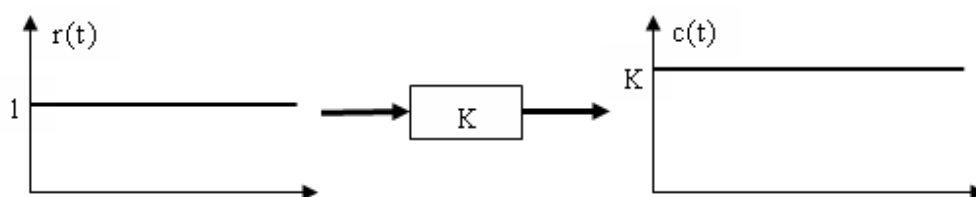
(4) 传递系数决定了系统稳态传递性能

K 决定了稳态响应的放大倍数关系。

2.5 典型环节及其传递函数

1. 比例环节（放大环节）

运动方程： $c(t) = Kr(t)$ ，传递函数为： $G(s) = K$ ，



比例环节的典型例子有运算放大器、齿轮变速箱、电位器、测速发电机等。

2. 惯性环节

运动方程： $T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t)$ ，传递函数： $G(s) = \frac{1}{Ts + 1} = \frac{\omega_0}{s + \omega_0}$ ， $\omega_0 = \frac{1}{T}$

T 称为惯性时间常数，只有一个实数极点 $-1/T$ ，没有零点。

若输入为阶跃函数 $r(t) = ul(t)$ ，则该惯性环节的输出为：

$$c(t) = u + [c(0) - u]e^{-t/T}, \quad c(0) \text{ 为 } c \text{ 的初值。}$$

典型的实例有一阶 RC 电路。

3. 积分环节

运动方程： $T \frac{dc(t)}{dt} = r(t)$ 或 $c(t) = \frac{1}{T} \int_0^t r(t) dt$ ，即环节输出为输入信号的积分，环节由此得名。

传递函数： $G(s) = 1/s$

积分环节的特点是除非输入信号 $r(t)$ 恒为 0，否则积分环节的输出量 $c(t)$ 不可能维持为常数不变。

4. 微分环节

运动方程： $c(t) = T \frac{dr(t)}{dt}$ ，即环节输出量为输入信号的微分，环节由此得名。

传递函数： $G(s) = Ts$ ，有时 $G(s) = Ts + 1$ 也称为微分环节。

5. 振荡环节

运动方程： $T^2 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t)$

传递函数： $G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} = \frac{1/T^2}{s^2 + 2\xi s/T + 1/T^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$

其中 $\omega_n = 1/T$ ， $0 \leq \xi < 1$ 。该环节具有一对共轭复数极点，无零点。其单位阶跃响应呈典型的振荡衰减形式。

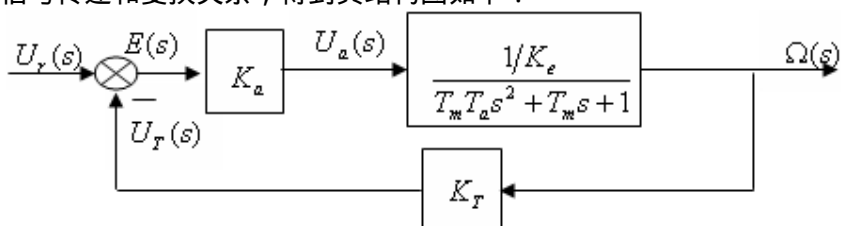
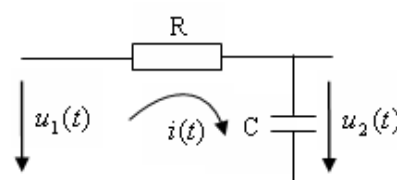
6. 延时环节

运动方程： $c(t) = r(t - \tau)$ ，这个方程实际上不是微分方程而是差分方程。

传递函数： $G(s) = e^{-\tau s}$ ，是 s 的无理函数，函数 $e^{-\tau s}$ 在 $s = \infty$ 点有无穷多个极点和零点。

第 5 次课

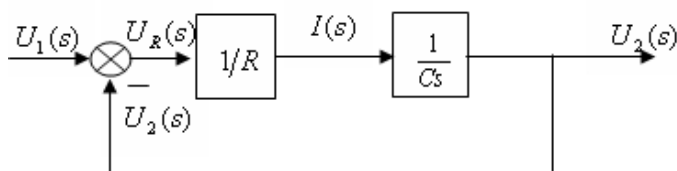
授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第二章 控制系统的数学模型（7 节）
主要内容	控制系统的动态结构图
目的与要求	掌握系统结构图的定义、基本组成、绘制、基本连接形式、等效变换及化简 掌握闭环系统常用的传递函数
重点与难点	重点：系统结构图的绘制和化简、闭环系统常用的传递函数 难点：系统结构图的绘制、化简
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	2-6 2-10 (c) 2-11 (a)
<p>2.7 系统的动态结构图</p> <p>1. 定义</p> <p>控制系统的动态结构图是描述系统各元件之间信号流向和传递关系的数学图示模型，它表示系统各变量之间的因果关系以及对各变量所进行的运算，是控制理论中描述复杂系统的一种简便方法，它适用于线性和非线性系统。</p> <p>2. 结构图的组成</p> <p>结构图由信号线、分支点、相加（综合）点和方框等单元。</p> <p>举例：直流电机转速控制系统（空载）。</p> <p>受控对象传递函数：$G_1(s) = \frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{1/K_e}{T_m T_a s^2 + T_m s + 1}$</p> <p>控制器（放大器）传递函数：$G_2(s) = \frac{U_a(s)}{E(s)} = K_a$</p> <p>比较环节传递函数：$E(s) = U_r(s) - U_T(s)$</p> <p>反馈测量（测速发电机）传递函数：$G_3(s) = \frac{U_T(s)}{\Omega(s)} = K_T$</p> <p>根据上述各环节的信号传递和变换关系，得到其结构图如下：</p>  <p>3. 结构图的绘制方法</p> <p>步骤：(1) 列写每个元件的原始微分方程，并注意负载效应； (2) 将原始微分方程求 Laplace 变换，并将得到的传递函数写入方框中； (3) 将这些方框按信号的流向和传递关系用信号线、相加点和分支点连接起来，即得到整个系统的结构图。</p> <p>例题 1：画出 RC 电网络的结构图</p> 	

列写原始微分方程：求 Laplace 变换：

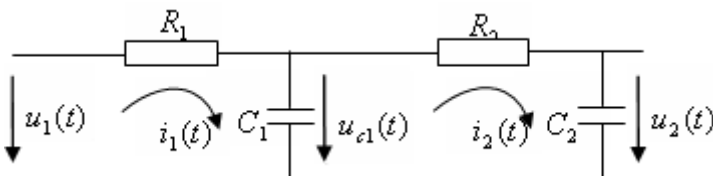
$$\begin{cases} u_R(t) = u_1(t) - u_2(t) \\ i(t) = u_R(t)/R \\ u_2(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_R(s) = U_1(s) - U_2(s) \\ I(s) = U_R(s)/R \\ U_2(s) = I(s)/sC \end{cases}$$

画出结构图：



该网络的传递函数为：\$G(s) = U_2(s)/U_1(s) = 1/(RCs + 1)\$

例题 2：画出两级 RC 电网络的结构图

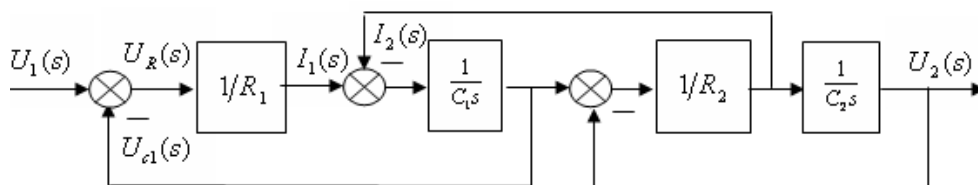


列写原始方程：

求 Laplace 变换：

$$\begin{cases} u_{R1}(t) = u_1(t) - u_{c1}(t) \\ i_1(t) = u_{R1}(t)/R_1 \\ u_{c1}(t) = \frac{1}{C_1} \int [i_1(t) - i_2(t)] dt \\ u_2(t) = \frac{1}{C_2} \int i_2(t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{R1}(s) = U_1(s) - U_{c1}(s) \\ I_1(s) = U_{R1}(s)/R_1 \\ U_{c1}(s) = \frac{I_1(s) - I_2(s)}{sC_1} \\ U_2(s) = \frac{I_2(s)}{sC_2} \end{cases}$$

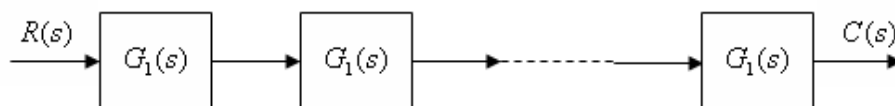
画出结构图：



网络传递函数为：\$G(s) = U_2(s)/U_1(s) = 1/[R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_1C_2)s + 1]\$

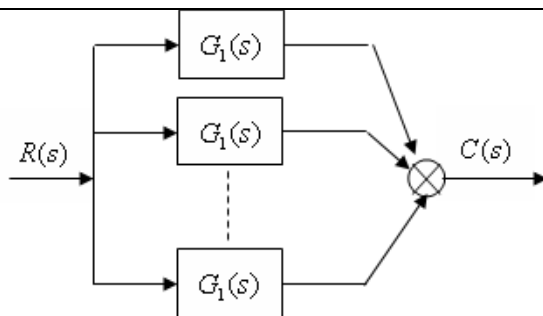
4. 结构图的基本连接形式

(1) 串联 (series)



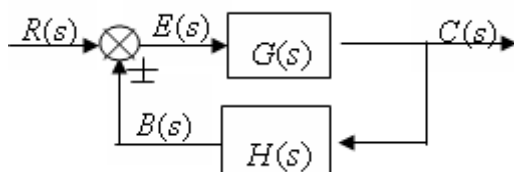
$$G(s) = C(s)/R(s) = G_1(s)G_2(s)\cdots G_n(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s)$$

(2) 并联 (parallel)



$$G(s) = C(s)/R(s) = G_1(s) + G_2(s) + \cdots + G_n(s) = \sum_{i=1}^n G_i(s)$$

(3) 反馈连接 (Feedback)

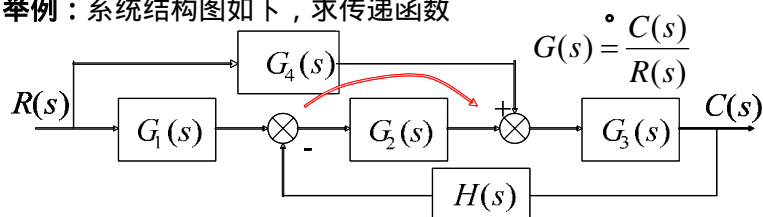


$$\Phi_B(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}, \quad \Phi_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

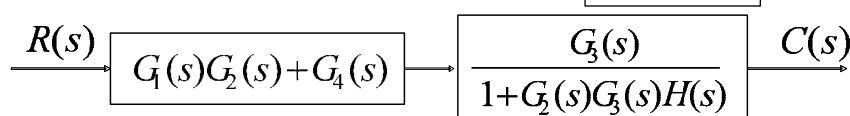
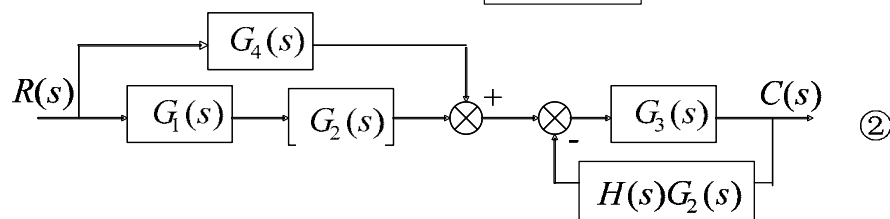
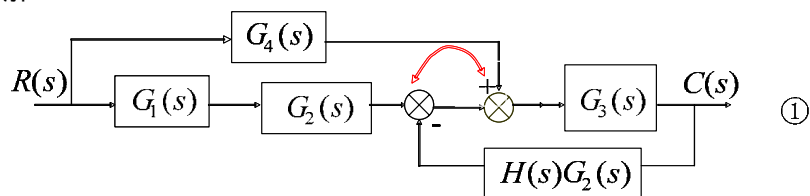
5. 结构图的等效变换

结构图等效变换法则主要有：分支点前移、分支点后移、相加点前移、相加点后移。

举例：系统结构图如下，求传递函数



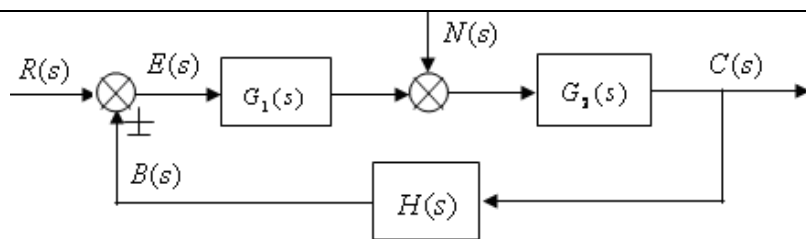
解：



$$\therefore G(s) = \frac{G_3(s)(G_1(s)G_2(s) + G_4(s))}{1 + G_2(s)G_3(s)H(s)}$$

6. 系统的常用传递函数

典型控制系统结构图：



(1) 前向通道传递函数： $C(s)/E(s) = G_1(s)G_2(s)$

(2) 反馈通道传递函数： $B(s)/C(s) = H(s)$

(3) 开环传递函数： $G_0(s) = B(s)/E(s) = G_1(s)G_2(s)H(s)$

(4) 闭环传递函数： $\Phi_c(s) = C(s)/R(s) = G_1(s)G_2(s)/[1 + G_1(s)G_2(s)H(s)]$

(5) 误差传递函数：
$$\begin{cases} \Phi_E(s) = E(s)/R(s) = 1/[1 + G_1(s)G_2(s)H(s)] \\ \Phi_N(s) = N(s)/R(s) = -G_2(s)H(s)/[1 + G_1(s)G_2(s)H(s)] \end{cases}$$

(6) 闭环特征方程式： $1 + G_1(s)G_2(s)H(s) = 1 + G_0(s) = 0$

上式表明：

- (1) 系统的闭环特征方程式为开环传递函数有理分式的分母多项式与分子多项式之和。
- (2) 只要开环传递函数是严格真有理函数，则闭环系统与开环系统的特征多项式就具有相同的阶次。
- (3) 闭环系统与开环系统的传递函数没有公共极点。
- (4) 闭环系统与开环系统的传递函数具有相同的零点。

第 7 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第二章 控制系统的数学模型（7 节）
主要内容	信号流图及梅逊公式
目的与要求	掌握信号流图的定义、组成元素 掌握结构图与信号流图的对应关系、信号流图的绘制 掌握梅逊公式和应用
重点与难点	重点：结构图与信号流图的对应关系、信号流图的绘制、梅逊公式和应用 难点：信号流图的绘制、梅逊公式和应用
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	2-12 (b) 2-13 (a) 2-14 (c)

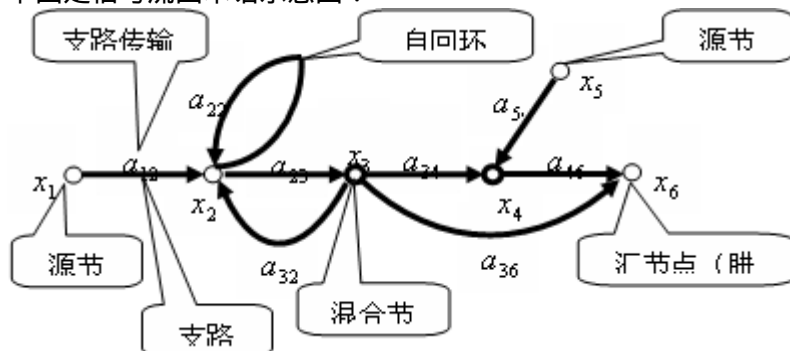
2.8 信号流图

信号流图是一种表示一组线性代数方程的图示方法。像结构图一样，它也是一种描述系统内部信号传递关系的数学模型。信号流图比结构图更简便明了，不用进行化简，就可利用梅逊（Mason）公式求出任意两点之间的传递函数，但它与结构图不同的是只能用来描述线性系统。

1. 信号流图的组成

信号流图由节点和有向线段（支路）组成，节点（用圆圈表示）表示系统中的变量（包括输入、输出变量），有向线段表示两个节点之间的传递方向和信号（变量）的变换关系，在有向线段上方标注增益，增益是两个变量之间的因果关系式，实际上这里的增益就是两个变量之间的传递函数表达式。

下图是信号流图术语示意图：



$a_{12}a_{23}a_{34}a_{46}$ 称为从 x_1 到 x_6 的通道传输， $a_{23}a_{32}$ 称为回环传输， a_{22} 称为自回环传输。

2. 结构图与信号流图的对应关系

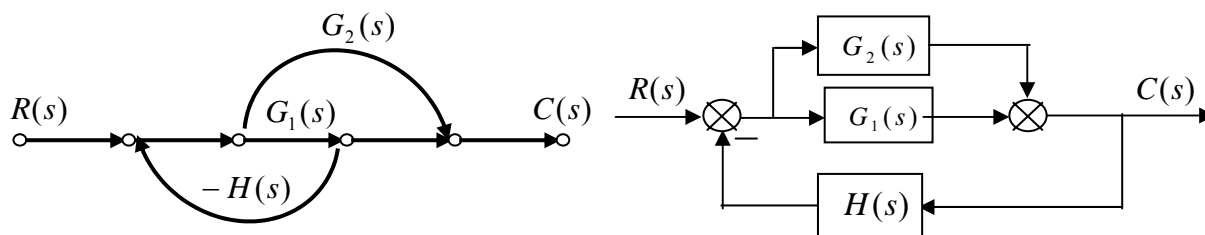
2 条原则：

- (1) 节点所表示的变量等于流入该节点的信号之和；
- (2) 从节点流出的每一支路信号都等于该节点所表示的变量；

6 条对应关系和注意事项：

- (1) 结构图中的相加点和分支点对应于信号流图中的混合节点；
- (2) 结构图中的输入信号和输出信号对应于信号流图中的源节点和汇节点；
- (3) 结构图中的方框对应于信号流图中的支路，框中的传递函数对应于支路传输；
- (4) 结构图中的负反馈符号“-”必须计入相应的支路中（传递函数）；
- (5) 结构中遇到相邻的相加点和分支点时，对应到信号流图中时，必须将相邻的相加点和分支点视为 2 个节点，之间通过传输为 1 的支路连接；
- (6) 在进行结构图与信号流图的对应过程中，无须对原结构图先进行化简然后再对应到相应的信号流图，应该采用“直译”的方法。

举例：



3. 梅逊公式

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{K=1}^n P_K \Delta_K$$

式中： P 为总增益，在控制理论中可以理解为某 2 点之间的传递函数 $G(s)$ ；

P_K 为从源节点到汇节点的第 K 条前向通路的增益（传递函数的乘积）；

Δ 为信号流图的特征式，具体为：

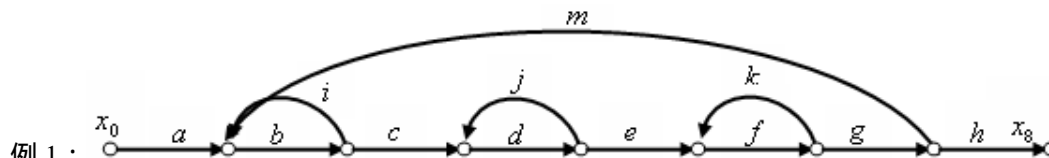
$\Delta = 1 - (\text{所有不同回路增益之和}) + (\text{每两个互不接触回路增益的乘积之和}) - (\text{每三个互不接触回路增益的乘积之和}) + \dots$

$$= 1 - \sum_a L_a + \sum_{b, c} L_b L_c - \sum_{d, e, f} L_d L_e L_f + \dots$$

Δ_K 为去除与第 K 条前向通路相接触的回路后剩余的信号流图的特征式，称为第 K 条前向通路特征式的余子式，它可以从 Δ 中除去与通路 P_K 相接触的回路增益后得到。

注：总增益 P 实际上就是系统某两点之间的传递函数，特征式 Δ 实际上就是闭环系统的特征多项式。

4. 例题



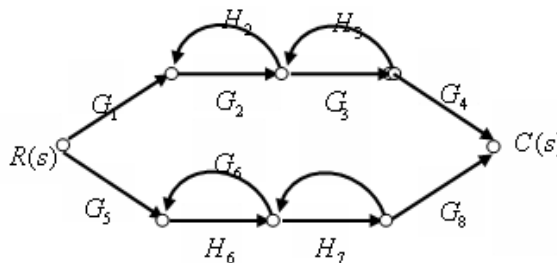
例 1：

[解] $\Delta = 1 - (bi + dj + fk + bcdefgm) + (bidj + bifik + djfk) - (bidjfk)$

$P_1 = abcdefgh, \Delta_1 = 1$

$$\frac{x_8}{x_0} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{abcdefgh}{1 - (bi + dj + fk + bcdefgm) + (bidj + bifik + djfk) - (bidjfk)}$$

例 2：



[解] $\Delta = 1 - (G_2 H_2 + G_3 H_3 + G_6 H_6 + G_7 H_7) + (G_2 H_2 G_6 H_6 + G_2 H_2 G_7 H_7 + G_3 H_3 G_6 H_6 + G_3 H_3 G_7 H_7)$

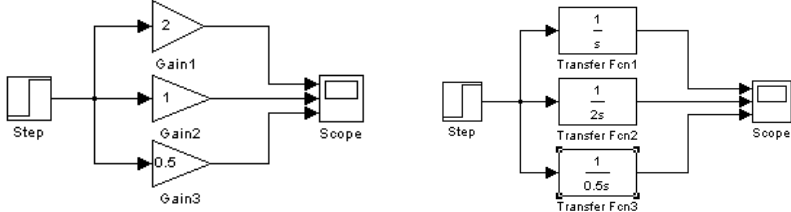
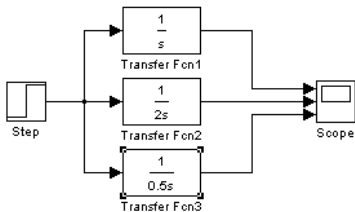
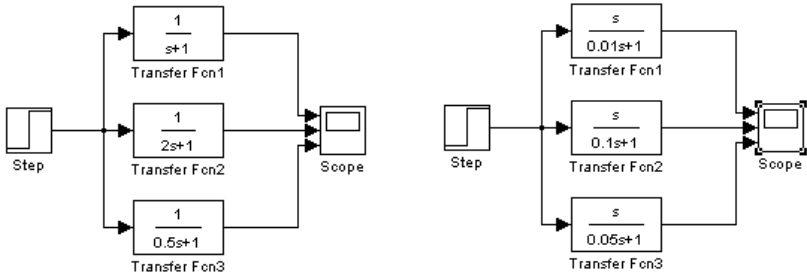
$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4, \Delta_1 = 1 - (G_6 H_6 + G_7 H_7)$

$P_2 = G_5 G_6 G_7 G_8, \Delta_2 = 1 - (G_2 H_2 + G_3 H_3)$

$$G(s) = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 [1 - (G_6 H_6 + G_7 H_7)] + G_5 G_6 G_7 G_8 [1 - (G_2 H_2 + G_3 H_3)]}{1 - (G_2 H_2 + G_3 H_3 + G_6 H_6 + G_7 H_7) + (G_2 H_2 G_6 H_6 + G_2 H_2 G_7 H_7 + G_3 H_3 G_6 H_6 + G_3 H_3 G_7 H_7)}$$

第 8 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第二章 控制系统的数学模型
主要内容	控制系统典型环节性能分析上机实验
目的与要求	熟悉 MATLAB 软件的使用环境 熟悉 MATLAB 软件的 Simulink 的基本使用方法 通过 Simulink 软件仿真，分析各典型环节的性能
重点与难点	重点：熟悉 MATLAB 软件的 Simulink 的基本使用方法 通过 Simulink 软件仿真，分析各典型环节的性能
教学手段	上机实验
思考题或作业题	完成实验报告
<p>一、实验目的</p> <ol style="list-style-type: none"> 1、熟悉各种典型环节的阶跃响应曲线； 2、了解参数变化对典型环节动态特性的影响。 <p>二、实验任务</p> <ol style="list-style-type: none"> 1、比例环节（K） <p>从图形库浏览器中拖曳 Step（阶跃输入）、Gain（增益模块）、Scope（示波器）模块到仿真操作画面，连接成仿真框图。改变增益模块的参数，从而改变比例环节的放大倍数 K，观察它们的单位阶跃响应曲线变化情况。可以同时显示三条响应曲线，仿真框图如图所示：</p>  <ol style="list-style-type: none"> 2、积分环节（$\frac{1}{Ts}$） <p>将上图仿真框图中的 Gain（增益模块）换成 Transfer Fcn（传递函数）模块，设置 Transfer Fcn（传递函数）模块的参数，使其传递函数变成 $\frac{1}{Ts}$ 型。改变 Transfer Fcn（传递函数）模块的参数，从而改变积分环节的 T，观察它们的单位阶跃响应曲线变化情况。仿真框图如上右图所示。</p>  <ol style="list-style-type: none"> 3、一阶惯性环节（$\frac{1}{Ts+1}$） <p>将上图中 Transfer Fcn（传递函数）模块的参数重新设置，使其传递函数变成 $\frac{1}{Ts+1}$ 型，改变惯性环节的时间常数 T，观察它们的单位阶跃响应曲线变化情况。仿真框图如图所示：</p> 	

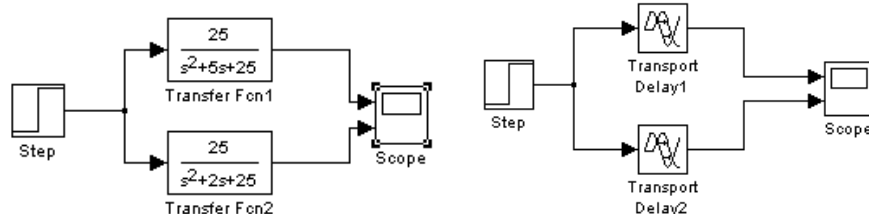
4、实际微分环节 ($\frac{Ks}{Ts+1}$)

将 Transfer Fcn (传递函数) 模块的参数重新设置, 使其传递函数变成 $\frac{Ks}{Ts+1}$ 型, (参数设置时应注意 $T \ll 1$)。令 K 不变, 改变 Transfer Fcn (传递函数) 模块的参数, 从而改变 T , 观察它们的单位阶跃响应曲线变化情况。仿真框图如上右图所示。

5、二阶振荡环节 ($\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$)

将 Transfer Fcn (传递函数) 模块的参数重新设置, 使其传递函数变成 $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ 型 (参数设置时应注意 $0 < \xi < 1$), 仿真框图如图所示:

- (1) 令 ω_n 不变, ξ 取不同值 ($0 < \xi < 1$), 观察其单位阶跃响应曲线变化情况;
- (2) 令 $\xi=0.2$ 不变, ω_n 取不同值, 观察其单位阶跃响应曲线变化情况。

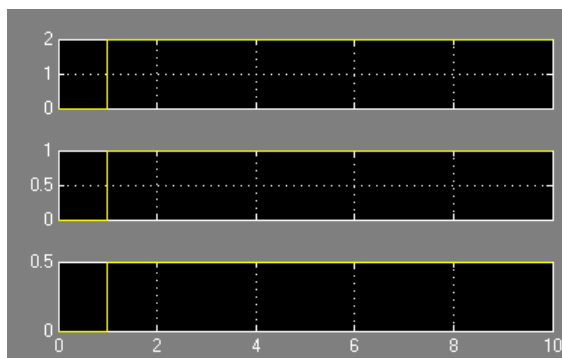


6、延迟环节 ($e^{-\tau s}$)

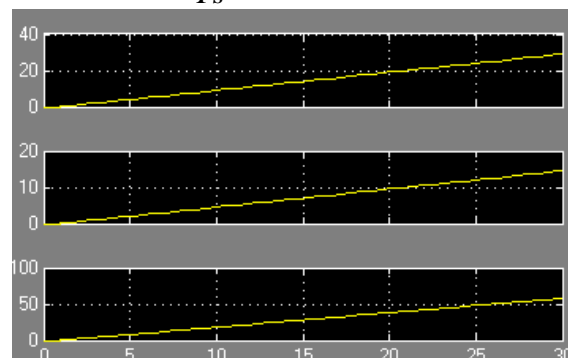
将仿真框图中的 Transfer Fcn (传递函数) 模块换成 Transport Delay (时间延迟) 模块, 改变延迟时间 τ , 观察单位阶跃响应曲线变化情况。仿真框图如上右图所示。

三、实验数据

1、比例环节 (K)

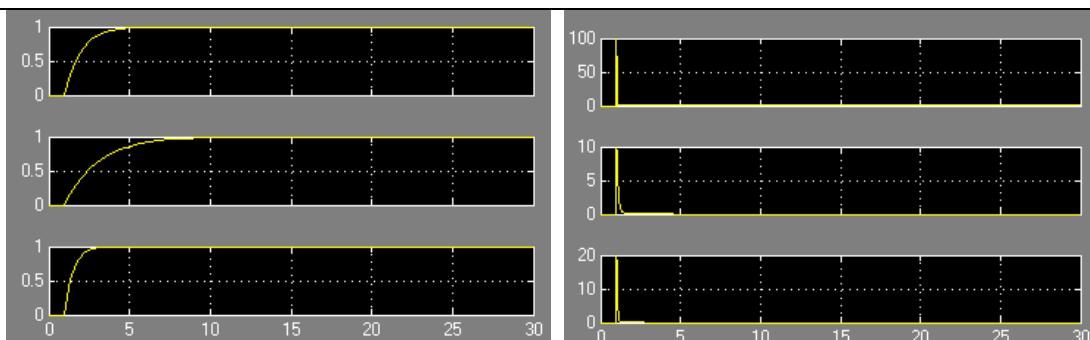


2、积分环节 ($\frac{1}{Ts}$)



3、一阶惯性环节 ($\frac{1}{Ts+1}$)

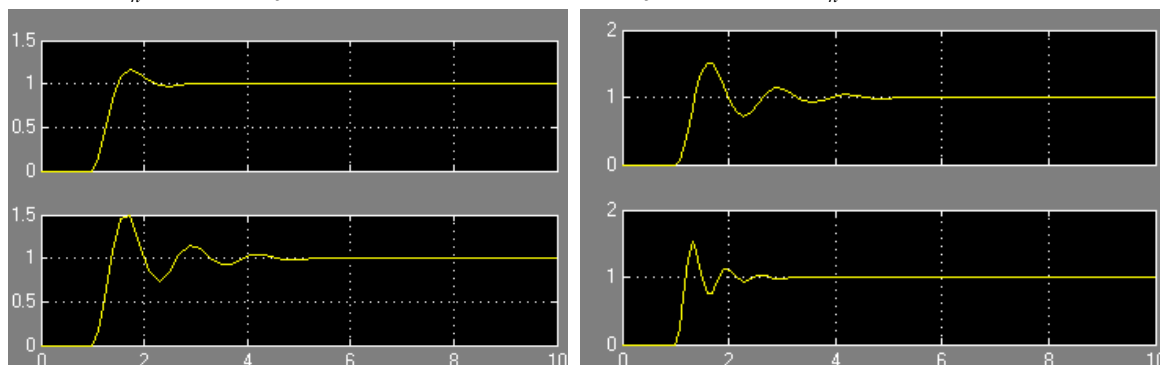
4、实际微分环节 ($\frac{Ks}{Ts+1}$)



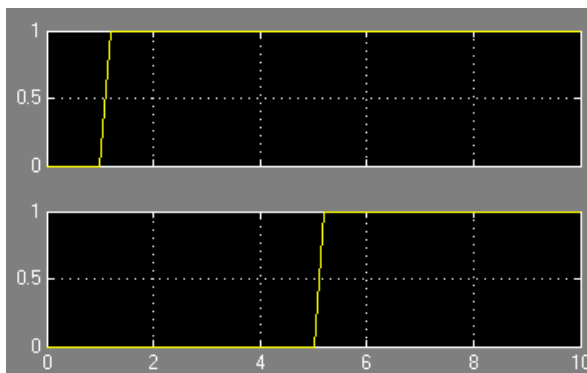
5、二阶振荡环节 ($\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$)

(1) 令 $\omega_n=5$ 不变, ξ 取 0.5 和 0.2

(2) 令 $\xi=0.2$ 不变, ω_n 取 5 和 10



6、延迟环节 ($e^{-\tau s}$)



四、实验结论

- 1、从单位阶跃响应来看,比例环节能够不失真的成比例的复现输入,比例环节 K 改变,则放大倍数改变。
- 2、从单位阶跃响应来看,积分环节的输出是输入对时间上的积分,改变时间常数 T , T 越大,则积分越慢。
- 3、从单位阶跃响应来看,惯性环节能延缓的复现输入, T 越大,惯性越大,复现输入越慢。
- 4、从单位阶跃响应来看,微分环节输出能反应输入对时间的变化率。
- 5、从单位阶跃响应来看,若二阶振荡环节的 ω_n 相同, ξ 越大,超调量越小,响应越快;若 ξ 相同, ω_n 改变,不影响超调量, ω_n 越大,响应越快。
- 6、从单位阶跃响应来看,延迟环节输出在 τ 时刻后能复现输入, τ 的大小,影响输出滞后的时间。

通过这次实验,熟悉了各典型环节以及其单位阶跃响应,了解的各典型环节的特点,以及相应参数变化对响应的影响。

第 9 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）		第三章 线性系统的时域分析（1、2 节）
主要内容	典型输入信号 系统响应的时域性能指标 一阶系统的时域分析	
目的与要求	了解自动控制系统的典型输入信号，掌握控制系统的动态性能指标和稳态性能指标 掌握一阶系统的数学模型、阶跃响应及其性能指标 了解一阶系统的脉冲响应和斜坡响应	
重点与难点	重点：控制系统的动态性能指标和稳态性能指标、一阶系统的阶跃响应及其性能指标 难点：控制系统的动态性能指标	
教学手段	授课、例题讲解	
思考题或作业题		

3.1 引言

对于线性控制系统工程上常用的分析方法有时域分析法、根轨迹分析法、频域分析法等。本章重点介绍时域分析法，所谓时域分析法，是指控制系统在一定的输入信号作用下，根据系统输出量的时域表达式，分析系统的稳定性、暂态和稳态性能。

1．典型输入信号

(1) 单位冲击（脉冲）信号 $\delta(t)$

定义： $\delta(t)=\begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$ ， $\int_{0^{-}}^{0^{+}} \delta(t) d t=1$ ，Laplace 变换： $L[\delta(t)]=1$

(2) 单位阶跃信号 $1(t)$

定义： $1(t)=\begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$ ，Laplace 变换： $L[1(t)]=1 / s$

(3) 单位斜坡（速度）信号

定义： $r_v(t)=\begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$ ，Laplace 变换： $L\left[r_v(t)\right]=1 / s^2$

(4) 单位加速度（抛物线）信号

定义： $r_a(t)=\begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} t^2 & t \geq 0 \end{cases}$ ，Laplace 变换： $L\left[r_a(t)\right]=1 / s^3$

(5) 正弦（余弦）信号

定义： $r(t)=\begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin \omega t & t \geq 0 \end{cases}$ ，Laplace 变换： $L[r(t)]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

定义： $r(t)=\begin{cases} 0 & t < 0 \\ \cos \omega t & t \geq 0 \end{cases}$ ，Laplace 变换： $L[r(t)]=\frac{s}{s^2+\omega^2}$

2．暂态响应和稳态响应

任何一个控制系统的时间响应都可以分为暂态响应和稳态响应两部分。

(1) 暂态响应

暂态响应又称为暂态过程或过渡过程。它是指在输入信号或扰动信号作用下，系统地输出量从初始状态到最终状态的响应过程。

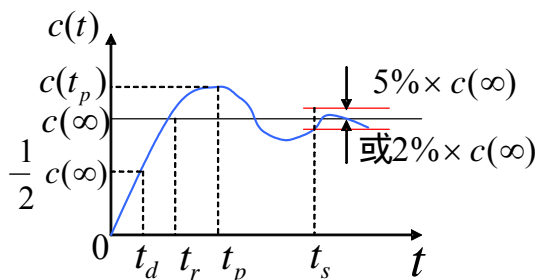
过程可以表现为响应曲线的单调减、单调增、衰减振荡、等幅振荡、发散等多种形式，其形式由系统的基本运动模态决定。显然一个实际可行的控制系统其响应地暂态过程必须是单调减或衰减振荡的，也即表现为系统的暂态过程是随时间逐渐消失的，这样的系统才是稳定的。

(2) 稳态响应

稳态响应由称为稳态过程。它是指系统在输入信号或扰动信号作用下，当时间 t 趋近于无穷大时，系统的输出响应的状态。稳态过程反映了系统输出量复现输入量的程度，常常用稳态精度或稳态误差来衡量。

3. 暂态和稳态性能指标

为了定量表示控制系统暂态和稳态响应的性能，在工程上一般以单位阶跃信号作为输入试验信号来定义系统的暂态和稳态性能指标。



(1) 上升时间 t_r ：系统阶跃响应从零开始第一次上升到稳态值的时间（有时可取响应的稳态值得 10% 到 90% 所对应的时间）。

(2) 延迟时间 t_d ：系统阶跃响应从零开始第一次上升到稳态值 50% 的时间。

(3) 峰值时间 t_p ：系统阶跃响应从零开始第一次超过稳态值达到第一个峰值的时间。

(4) 调节时间 t_s ：系统阶跃响应曲线进入规定允许的误差带 $c(\infty) \times \Delta\%$ 范围，并且以后不再超出这个误差带所需的时间。

(5) 超调量 $M_p\%$ ：系统阶跃响应的最大峰值 $c(t_p)$ 与稳态值 $c(\infty)$ 的差值与稳态值 $c(\infty)$ 之比的百分数，即 $M_p\% = \frac{|c(t_p) - c(\infty)|}{c(\infty)} \times 100\%$ 。误差带可取： $\Delta = \pm 2\%$ 或 $\Delta = \pm 5\%$ 。

(6) 振荡次数 N ：在 $0 \leq t \leq t_s$ 时间内，系统阶跃响应曲线穿越其稳态值 $c(\infty)$ 次数的一半（穿越 2 次相当于振荡 1 次）。

(7) 稳态误差 e_{ss} ：当时间 $t \rightarrow \infty$ 时，系统期望输出与实际输出之差，即

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)]$$

小结：上述性能指标中 t_r 、 t_d 、 t_p 、 t_s 反应了系统暂态响应的快速性，其中 t_s 反应了系统响应的总体快速性，所以一般认为在 t_s 之前为暂态响应， t_s 之后为稳态响应。 $M_p\%$ 反应了系统暂态过程的振荡性，其本质反应了系统的相对稳定性。 e_{ss} 反应了系统的稳态精度。

3.2 一阶系统的时域分析

1. 一阶系统的数学模型

一阶系统的微分方程： $T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) \quad t \geq 0$ ；

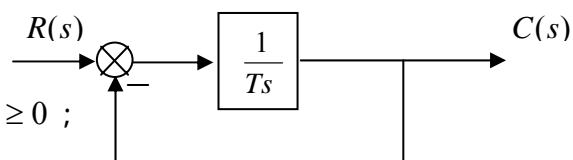
一阶系统的传递函数： $G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$ ，式中 T 为时间常数

系统结构图：

例一阶 RC 电路：

2. 一阶系统的单位阶跃响应

输入 $r(t) = 1(t) \Leftrightarrow R(s) = 1/s$



$$\text{输出 } c(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1}[\Phi(s)R(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{Ts+1} \times \frac{1}{s}\right] = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, t \geq 0$$

$$(1) \text{ 延迟时间: } t_d = 0.69T; (2) \text{ 上升时间: } t_r = 2.20T; (3) \text{ 调节时间: } t_s = \begin{cases} 3T, \Delta = \pm 5\% \\ 4T, \Delta = \pm 2\% \end{cases};$$

$$(4) \text{ 响应曲线呈单调上升, 无超调, 无振荡; } (5) \text{ 稳态误差: } e_{ss} = 0。$$

响应速度与时间常数 T 成反比, 即 T 越小, 响应速度越快, 在 $t=0$ 处最大, 并随时间增大而变小, 直至为零。

3. 一阶系统单位脉冲响应

$$\text{输入 } r(t) = \delta(t) \Leftrightarrow R(s) = 1$$

$$\text{输出 } c(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1}[\Phi(s)R(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{Ts+1} \times 1\right] = \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}, t \geq 0$$

(1) 响应曲线呈单调下降, 无超调, 无振荡, 在 $t=0$ 处下降速率最大, 之后速率变小, 且下降速率与时间常数 T 成反比, 即 T 越小, 下降速率越快。

4. 单位斜坡响应

$$\text{输入: } r(t) = t \bullet 1(t) \Leftrightarrow R(s) = 1/s^2$$

$$\text{输出: } c(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1}[\Phi(s)R(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{Ts+1} \times \frac{1}{s^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s+1/T}\right]$$

$$= t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}}), t \geq 0$$

$$\text{误差函数: } e(t) = r(t) - c(t) = T(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

$$\text{稳态误差: } e_{ss} = T$$

结论:

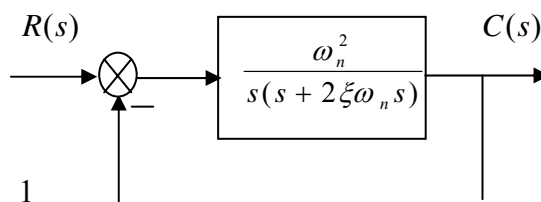
(1) 一阶系统在跟踪单位斜坡信号时, 总存在位置误差, 且位置误差的大小随时间而增大, 最终趋于时间常数 T , 因此 T 越大则误差也越大。

(2) 响应速度 (即斜率) 为 $c'(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$, 所以响应速度在 $t=0$ 处最小, t 很大 (理论上 $t \rightarrow \infty$) 响应速度最大 1 (曲线近乎垂直于时间轴)。

第 10 次课

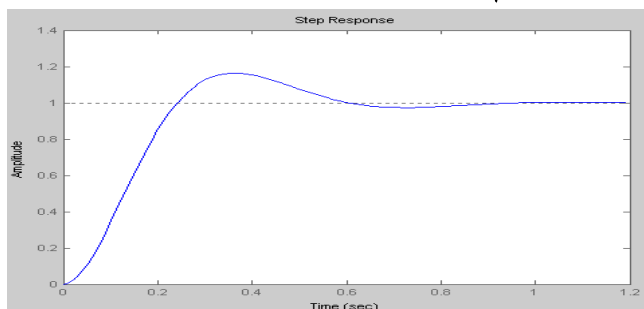
授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第三章 线性系统的时域分析（3 节）
主要内容	二阶系统的一般数学模型和参数 二阶系统的闭环极点分布和参数的关系 二阶系统的单位阶跃响应 欠阻尼二阶系统动态性能指标的计算
目的与要求	了解二阶系统闭环极点的分布和参数的关系 掌握二阶系统的不同阻尼比下的单位阶跃响应 掌握欠阻尼二阶系统动态性能指标的计算
重点与难点	重点：二阶系统的不同阻尼比下的单位阶跃响应、欠阻尼二阶系统动态性能指标的计算 难点：欠阻尼二阶系统动态性能指标的计算
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	3-2 3-3
<div data-bbox="221 907 569 943" data-label="Section-Header"> <h3>3.3 二阶系统的时域分析</h3> </div> <div data-bbox="221 943 580 978" data-label="Section-Header"> <h4>1. 典型二阶系统的数学模型</h4> </div> <div data-bbox="221 978 699 1072" data-label="Equation-Block"> <p>开环传递函数：$G_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}$</p> </div> <div data-bbox="221 1072 979 1167" data-label="Equation-Block"> <p>闭环传递函数：$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}$</p> </div> <div data-bbox="165 1167 1423 1256" data-label="Text"> <p>式中：ω_n 称为二阶系统的无阻尼振荡频率或自然振荡频率，单位是 rad/s，$T = 1/\omega_n$ 称为二阶系统的时间常数，ξ 称为阻尼比，一般是无量纲的。</p> </div> <div data-bbox="221 1256 1209 1308" data-label="Text"> <p>例：RLC 串联电路的微分方程为 $LC d^2 u_0(t)/dt^2 + RC du_0/dt + u_0(t) = u_r(t)$，</p> </div> <div data-bbox="221 1308 1090 1400" data-label="Equation-Block"> <p>其传递函数为 $G(s) = \frac{U_0(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{Lcs^2 + Rcs + 1} = \frac{1/LC}{s^2 + (R/C)s + 1/LC}$</p> </div> <div data-bbox="221 1400 1115 1494" data-label="Equation-Block"> <p>可以得到：$\omega_n^2 = 1/LC \Rightarrow \omega_n = 1/\sqrt{LC}$，$2\xi\omega_n = R/C \Rightarrow \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$</p> </div> <div data-bbox="221 1494 552 1534" data-label="Section-Header"> <h4>2. 二阶系统的闭环零极点</h4> </div> <div data-bbox="221 1534 861 1579" data-label="Equation-Block"> <p>二阶系统的闭环特征方程式：$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$</p> </div> <div data-bbox="221 1579 857 1639" data-label="Equation-Block"> <p>特征根（闭环极点）为：$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$</p> </div> <div data-bbox="221 1639 914 1682" data-label="Text"> <p>显然随着阻尼比 ξ 取值的不同，闭环极点的分布也不同。</p> </div> <div data-bbox="221 1682 525 1722" data-label="Section-Header"> <h4>3. 二阶系统的阶跃响应</h4> </div> <div data-bbox="221 1722 555 1762" data-label="Section-Header"> <h5>(1) 欠阻尼 ($\xi < 1$) 响应</h5> </div> <div data-bbox="221 1762 1334 1827" data-label="Equation-Block"> <p>$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d$，$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ 称为阻尼振荡频率，</p> </div> <div data-bbox="221 1827 820 1928" data-label="Equation-Block"> <p>$\beta = \arctg \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} = \arccos \xi = \arcsin \sqrt{1 - \xi^2}$</p> </div> <div data-bbox="165 1928 1423 2020" data-label="Text"> <p>结论：由上图可见，在自然振荡频率 ω_n 保持不变的情况下，阻尼角 β 越大，则阻尼比 ξ 越小；阻尼角 β 越小，则阻尼比 ξ 越大。</p> </div>	



欠阻尼二阶系统的单位阶跃响应为：

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \beta) \quad (t \geq 0)$$



分析欠阻尼二阶系统单位阶跃响应表达式，可以得出如下结论：

第一，暂态响应为 $c_t(t) = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \beta)$ ，稳态响应为 $c_{ss}(t) = 1$ ；

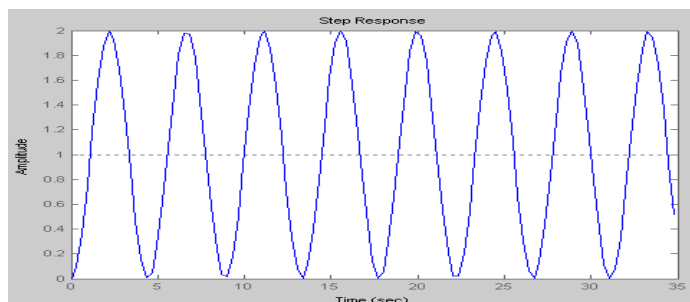
第二，暂态响应为按指数衰减的正弦振荡形态；

第三，阻尼比 ξ 的减小将导致系统响应的振荡加剧，且衰减速度变慢；

(2) 无阻尼 ($\xi = 0$) 响应

特征根： $s_{1,2} = \pm j\omega_n$ ，单位阶跃响应： $c(t) = 1 - \cos \omega_n t \quad (t \geq 0)$

分析结论：无阻尼二阶系统的单位阶跃响应曲线呈等幅振荡形式，其振荡频率为 ω_n ，幅值为 1。



(3) 临界阻尼 ($\xi = 1$) 响应

特征根： $s_{1,2} = -\omega_n$ ，单位阶跃响应： $c(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad (t \geq 0)$

分析结论：临界阻尼二阶系统的单位阶跃响应曲线按指数单调上升形式，但由于是重极点，所以响应中增加了 $\omega_n t e^{-\xi\omega_n t}$ 一项。

(4) 过阻尼 ($\xi > 1$) 响应

特征根： $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$ ， $c(t) = 1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}, (t \geq 0)$

式中： $T_1 = 1/\omega_n (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) = -1/s_1$ ， $T_2 = 1/\omega_n (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) = -1/s_2$

分析结论：

第一，由于过阻尼状态的两个特征根均为负实数，所以其响应实际上就分解为了两个衰减的指数项 $e^{s_1 t}$ 、 $e^{s_2 t}$ 的线性组合，组合后的响应曲线是非振荡的单调上升形式。

第二，响应速度由两个时间常数 T_1 、 T_2 共同决定。

4. 欠阻尼二阶系统性能指标

(1) 上升时间 t_r

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

(2) 峰值时间 t_p

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

(3) 超调量 $M_p\%$

$$M_p\% = \frac{|c(t_p) - c(\infty)|}{c(\infty)} \times 100\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\%$$

从上式可知超调量 $M_p\%$ 仅与阻尼比 ξ 有关，而与自然振荡频率无关。

结论：阻尼比 ξ 越小，则超调量 $M_p\%$ 越大；阻尼比 ξ 越大，则超调量 $M_p\%$ 越小。

(4) 调节时间 t_s

当 $0.1 < \xi < 0.9$ 时， $\sqrt{1 - \xi^2} \approx 1$ ，于是调节时间的近似计算公式为：

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n}, \text{ 取 } \Delta = 5$$

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n}, \text{ 取 } \Delta = 2$$

结论：

第一，调节时间 t_s 与 $\xi\omega_n$ 成反比，即与极点的实部数值成反比。这说明极点距离虚轴越远，系统的调节时间越短。

第二，由于阻尼比 t_s 的选取主要是依据系统对超调量 $M_p\%$ 的要求来确定的，而超调量 $M_p\%$ 与自然振荡频率 ω_n 无关，故可以在保持阻尼比 t_s 不变的前提下，适当增大自然振荡频率 ω_n ，从而既可保证超调量 $M_p\%$ 的不变，又能使调节时间 t_s 缩短。

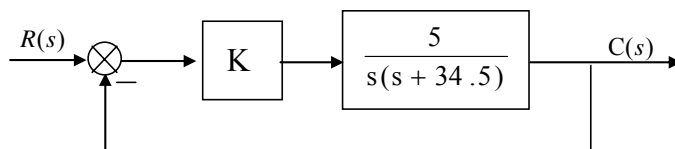
分析：通过对调节时间、超调量与阻尼比之间关系得比较，可以得出如下的基本结论：调节时间 t_s 、超调量 $M_p\%$ 对阻尼比 ξ 的要求是相互矛盾的，即阻尼比 ξ 的选择，无法同时满足调节时间 t_s 、超调量 $M_p\%$ 比较小的要求。

工程上取 $\xi = \sqrt{2}/2 = 0.707$ 作为系统性能最佳的设计依据，此时，系统性能总体获得“最佳”。

例 1：随动控制系统如下图所示，输入信号 $r(t) = 1(t)$ ，试

(1) $K=200$ ，计算动态性能指标；

(2) $K=1500$ 和 $K=13.5$ ，分别计算讨论前置放大器对系统动态性能的影响。



解：(1) $K=200$ 时

开环传递函数为： $G_c(s) = 5K/s(s + 34.5)$

闭环传递函数为： $\Phi(s) = 5K/(s^2 + 34.5s + 5K)$

比照二阶系统标准形式，求得： $\omega_n = \sqrt{5K} = \sqrt{1000} = 31.6 \text{ (rad/s)}$ ， $\xi = 34.5/2\omega_n = 0.545$ 。

由此得到性能指标：

$$t_p = \pi/\omega_d = \pi/\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 0.12s, \quad M_p\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% = 13\%,$$

$$t_s = 3/\xi\omega_n = 0.17s \text{ 或 } t_s = 4/\xi\omega_n = 0.23s$$

(2) 讨论 $K=1500$ 和 $K=13.5$ 时的情况

$$K = 1500$$

$$K = 13.5$$

$$\xi = 0.2, \omega_n = 86.2(\text{rad/s})$$

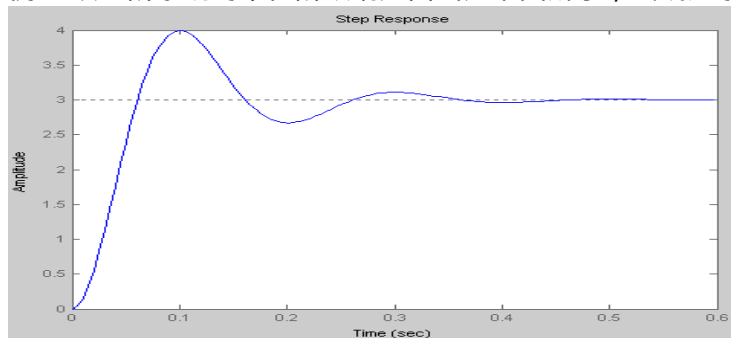
$$\xi = 2.1, \omega_n = 8.22(\text{rad/s})$$

$$t_p = 0.037s, M_p = 52.7\%, t_s = 0.17s$$

$$T_1 = 0.5s, T_2 = 0.05s, T_1 \gg T_2, t_s = 3T_1 = 1.46s$$

由该例题可知, 当 $K \uparrow \rightarrow \xi \downarrow \rightarrow M_p \uparrow$ 而 $K \downarrow \rightarrow \xi \uparrow \rightarrow M_p \downarrow$
 $\rightarrow t_s, t_p \downarrow$ $\rightarrow t_s, t_p \uparrow$

例 2 设二阶系统的单位阶跃响应曲线如下图所示, 试确定系统的传递函数。



解: 从响应曲线明显可以看出, 在单位阶跃函数作用下, 系统响应的稳态值为 3, 故此系统的增益不是 1, 而是 3, 因此系统的传递函数形式应为:

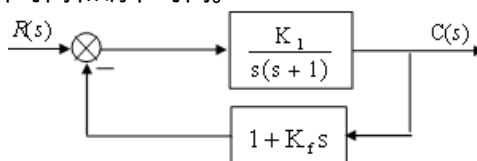
$$\Phi(s) = \frac{3\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\begin{cases} M_p \% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% = \frac{4-3}{3} \times 100\% = 33\% = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% \\ t_p = 0.1(s) = \pi / \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \end{cases}$$

解得: $\xi = 0.33$, $\omega_n = 33.2(\text{rad/s})$, 传递函数为: $\Phi(s) = \frac{3306.72}{s^2 + 22s + 1102.4}$

例 3: 设系统如下图所示, 如果要求系统的超调量等于 15%, 峰值时间等于 0.8s, 试确定增益 K_1 和速度反馈系数 K_f , 同时计算在此 K_1 和 K_f 数值下系统的上升时间和调节时间。

解: $\begin{cases} M_p \% = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 15\% \\ t_p = \pi / \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = 0.8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = 0.517 \\ \omega_n = 4.588 \end{cases}$



闭环传递函数为: $\Phi(s) = K_1 / [s^2 + (1 + K_1 K_f)s + K_1]$

从而有: $\omega_n^2 = K_1, 2\xi\omega_n = 1 + K_1 K_f \Rightarrow K_1 = 21.05, K_f = 0.178$

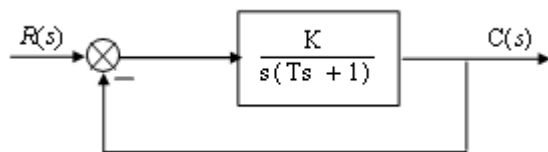
在此 $K_1 = 21.05, K_f = 0.178$ 数值下, 可求得上升时间和峰值时间

$$\begin{cases} t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 0.538 \\ t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = 1.234s \end{cases}$$

例 4: 有一位置随动系统, 其结构图如下图所示。其中 $K=4, T=1$ 。试求:

(1) 该系统的无阻尼振荡频率 ω_n ; (2) 系统的阻尼比 ξ ; (3) 系统的超调量 $M_p\%$ 和调节时间 t_s ; (4)

系统的上升时间 t_r ; (5) 如果要求 $\xi = \sqrt{2}/2$, 在不改变时间常数 T 的情况下, 应怎样改变系统开环放大系数 K ?



解: 系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{K}{Ts^2 + s + K} = \frac{K/1}{s^2 + 1/Ts + K/T} = \frac{4}{s^2 + s + 4}$$

(1) $\omega_n = \sqrt{K/T} = 2$; (2) $\xi = 1/2\omega_n = 0.25$;

(3) $M_p \% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% = 44.4\%$, $t_s = 3/\xi\omega_n = 6s$;

(4) $t_r = (\pi - \beta)/\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 0.94s$;

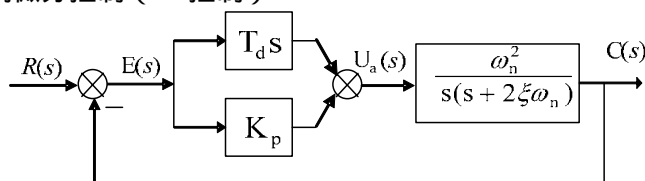
(5) 当 $\xi = \sqrt{2}/2$ 时, $\omega_n = 1/2\omega_n = 0.707$, 则 $K = \omega_n^2 = 0.5$, 可见要满足二阶系统最佳阻尼比的要求, 必须降低开环放大倍数 K 的数值。

第 11 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第三章 线性系统的时域分析（3、4 节）
主要内容	二阶系统的单位冲击响应和单位斜坡响应 二阶系统的性能改善 常规控制在自动控制系统中的应用 高阶系统的时域分析
目的与要求	了解二阶系统的单位冲击响应和单位斜坡响应以及改善二阶系统性能的两种方法 了解常规控制在自动控制系统中的应用 了解高阶系统的阶跃响应、零极点分布对高阶系统响应的影响 掌握闭环主导极点的意义、定义及条件 掌握高阶系统的降阶
重点与难点	重点：高阶系统的阶跃响应、闭环主导极点的条件、高阶系统的降阶 难点：改善二阶系统性能的两种方法、零极点分布对高阶系统响应的影响
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	
<p>5. 二阶系统的单位脉冲响应</p> $r(t) = \delta(t) \leftrightarrow R(s) = 1, \quad C(s) = G(s) * R(s) = \omega_n^2 / (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)$ <p>(1) 无阻尼 $\xi = 0$</p> $g(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1}[\omega_n^2 / (s^2 + \omega_n^2)] = \omega_n \sin \omega_n t, \quad t \geq 0$ <p>(2) 欠阻尼 $0 \leq \xi < 1$</p> $g(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1}[\omega_n^2 / (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)] = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t, \quad t \geq 0$ <p>(3) 临界阻尼 $\xi = 1$</p> $g(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1}[\omega_n^2 / (s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2)] = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}, \quad t \geq 0$ <p>(4) 过阻尼 $\xi > 1$</p> $g(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1}[\omega_n^2 / (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)] = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} [e^{-(\xi-\sqrt{\xi^2-1})t} - e^{-(\xi+\sqrt{\xi^2-1})t}], \quad t \geq 0$ <p>6. 二阶欠阻尼系统的斜坡响应</p> $r(t) = \delta(t) \leftrightarrow R(s) = 1/s^2 \quad C(s) = G(s) * R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \times \frac{1}{s^2}$ $c(t) = t - \frac{2\xi}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + 2\beta), \quad t \geq 0, \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}, \quad \beta = \arccos \xi,$ <p>稳态误差：$e_{ss} = \frac{2\xi}{\omega_n}$</p> <p>显然二阶欠阻尼系统可以跟踪输入信号变化，但存在着固定的误差，这种误差始终存在，只能通过调整系统的参数和结构来减小，但不能消除。如果要使误差减小，则必须增大 ω_n 或减小 ξ，但这样做的结果可能会使系统的动态性能指标变差，因此要改善二阶系统的性能，往往要通过增加校正装置等办法来实现。</p> <p>7. 二阶系统性能的改善</p> <p>改善二阶系统性能的常用校正方法主要有以下 2 种。</p>	

(1) 误差信号的比例微分控制 (PI 控制)



比例微分控制，实际上在前向通道上加入误差信号的比例+微分的控制器，简称为 PI 控制，控制器的传递函数为： $G_c(s) = \frac{U_a(s)}{E(s)} = K_p + T_d s$

时域表达式为： $u_a(t) = K_p e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt}$

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2 (K_p + T_d s)}{s^2 + (2\xi\omega_n + T_d \omega_n^2)s + K_p \omega_n^2}$$

结论：第一，系统的等效阻尼比和无阻尼振荡频率都增加了，在合理选择 K_p, T_d 后，等效阻尼比的增加，将会有效地抑制系统的振荡，减小超调量；

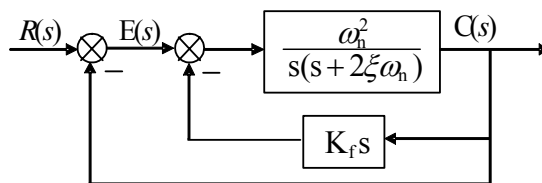
第二，系统由典型的二阶系统，变为一个附加有一个零点的二阶系统。这个附加的零点，具有微分作用，可以使系统的暂态响应速度加快。

(2) 输出量的速度反馈控制 (速度反馈校正)

控制的闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\xi\omega_n + K_f \omega_n^2)s + \omega_n^2}$$

等效阻尼比 $\xi' = \xi + \frac{1}{2} K_f \omega_n$



结论：第一，带速度反馈的二阶系统仍然是典型二阶系统，其无阻尼振荡频率没有改变；

第二，有效地提高了系统的阻尼比，系统的超调量可以明显减小；

第三，由于 ω_n 保持不变，而阻尼比增大，从而系统的调节时间 t_s 变小，则系统的响应速度得到加快。

例 1：已知速度反馈系统，要求系统的超调量为 20%， $t_p = 1$ 秒，试求 K 和 K_f 的值，若保持 K 不变，而取消速度反馈 ($K_f = 0$)，再求 $M_p\%$ 的值。

解：闭环传递函数为： $\Phi(s) = \frac{K}{s^2 + (1 + KK_f)s + K}$

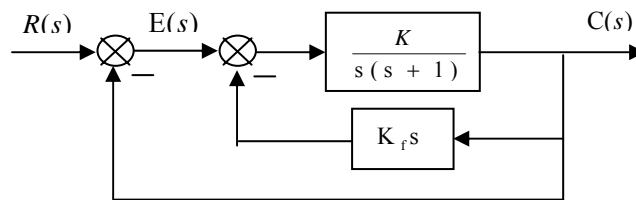
显然有：

$$\begin{cases} 2\xi\omega_n = 1 + KK_f \\ \omega_n^2 = K \end{cases}$$

由： $\begin{cases} M_p\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% \\ t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 1 \end{cases}$ ，求得： $\begin{cases} \xi = 0.456 \\ \omega_n = 3.53 \text{ (rad/s)} \\ t_s = 1.875s \end{cases}$

于是有： $K = \omega_n^2 = 12.5$ ， $K_f = (2\xi\omega_n - 1)/K = 0.178$

依据题目要求保持 $K=12.5$ 不变，令 $K_f = 0$ ，即无速度反馈时，有：



$$\Phi(s) = \frac{12.5}{s^2 + s + 12.5} \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = 0.14 \\ \omega_n = 3.53 \text{ (rad/s)} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} M_p \% = 64\% \\ t_s = 6.07s \end{array} \right.$$

比较可见，采用速度反馈后，由于阻尼比的增加，使得系统的超调量大大小于没有速度反馈的情况；同时调节时间也减少，从而使系统的响应速度加快。

3.4 高阶系统的时域分析

1. 高阶系统的单位阶跃响应

设一般控制的传递函数为：

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = K_g \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

在初始条件为零和单位阶跃输入信号作用下，求其输出响应，得到：

$$C(s) = G(s)R(s) = K_g \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \times \frac{1}{s} = \frac{A_0}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s - p_i}$$

于是系统的单位阶跃响应为：
$$c(t) = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t}$$

分析其响应可见，系统的响应是由一系列指数函数（运动模态）的和构成，其中每一项所占的“比重”就由留数 $|A_i|$ 的大小决定，而 $|A_i|$ 的大小由零点和极点共同来决定，

那些远离坐标原点的极点所对应的运动形态对阶跃响应的影响很小。

结论：在分析高阶系统时，对于符合上述两种条件的极点可以作为次要因素而忽略，从而把高阶系统降阶为低阶系统来近似。

2. 闭环主导极点和高阶系统的近似

(1) 在稳定的高阶系统中，对其时间响应起主导作用的闭环极点称为闭环主导极点。

(2) 闭环主导极点的条件：

第一：在 s 左半平面上离虚轴最近，且其周围没有零点的极点；

第二：其实部离虚轴的距离是其它极点离虚轴的距离5倍以上。

(3) 高阶系统的近似

高阶系统简化降阶为低阶系统的原则和具体步骤：

原则 在符合极点分布要求的前提下，必须保证简化前后传递函数的稳态值要相等。

步骤 第一，确定系统的闭环主导极点；第二，将高阶系统的开环传递函数或闭环传递函数写为时间常数表达式；第三，忽略小时间常数项。

例：某高阶系统的闭环传递函数为：
$$\Phi(s) = \frac{10\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + p)}$$

如果极点的位置满足： $p/\xi\omega_n > 5$

则该系统的闭环主导极点为： $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ ，于是系统可以降阶为：

$$\Phi(s) = \frac{10\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + p)} = \frac{10\omega_n^2}{p(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \left(\frac{1}{s + 1/p} \right) \approx -\frac{10\omega_n^2}{p(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

简化前的稳态值（单位阶跃信号）

$$c(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi(s)R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{10\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + p)} = \frac{10}{p}$$

简化后的稳态值（单位阶跃信号）

$$c(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi(s)R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{10\omega_n^2}{p(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{10}{p}$$

第 12 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）		第三章 线性系统的时域分析（5 节）																	
主要内容	系统稳定性分析																		
目的与要求	掌握稳定的概念和定义、系统稳定的充要条件 掌握线性系统的劳斯判据及应用中的特殊问题																		
重点与难点	重点：系统稳定的充要条件、劳斯判据 难点：劳斯判据及在系统稳定性分析中的应用																		
教学手段	授课、例题讲解																		
思考题或作业题	3-4 3-5																		
<div>3.5 线性系统的稳定性分析</div> <div>一个线性控制系统能够正常工作的首要条件，就是它必须是稳定的。</div> <div>1．系统运动的稳定性</div> <div>稳定性描述：如果线性系统受到扰动的作用而使被控量产生偏差，当扰动消失后，随着时间的推移，该偏差逐渐减小并趋于零，即被控量回到原来的平衡工作状态，则称该系统稳定。反之，若在扰动的影响下，系统的被控量随着时间的推移而发散，则称系统不稳定。</div> <div>若暂态响应能消失的，则系统是稳定的，若暂态响应不能消失，则系统不稳定。线性系统的稳定性，与系统的输入信号、初始状态均无关，它是系统的固有本质属性，完全取决于系统的结构和参数。</div> <div>2．线性控制系统稳定性的充分必要条件</div> <div>假设系统的初始条件为零，外部激励为输入信号 $r(t) = \delta(t)$：</div> <table><tr><td>序号</td><td>脉冲函数极限值</td><td>脉冲响应衰减情况</td><td>稳定状态</td></tr><tr><td>1</td><td>$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$</td><td>衰减</td><td>系统稳定</td></tr><tr><td>2</td><td>$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$</td><td>发散</td><td>系统不稳定</td></tr><tr><td>3</td><td>$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = C$</td><td>等幅振荡</td><td>系统临界稳定</td></tr></table> <div>线性系统稳定要满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ 的条件，实际上取决于其特征根，也即系统闭环传递函数的极点。</div> <div>线性系统稳定的充分必要条件为：</div> <div>系统微分方程的特征根的全部根都是都负实数或实部为负的复数，也即，系统闭环传递函数的极点均位于 S 平面的左半平面。</div> <div>当特征根出现正实数或实部为正的复数或有极点分布于 S 平面的右半平面时，线性系统为不稳定；当特征根出现纯虚数或有极点位于 S 平面的虚轴时，线性系统为临界稳定。</div> <div>例 1：系统的闭环传递函数为：$\Phi(s) = 2(s - 1)/(s + 1)(s + 2)$ 判别系统稳定性。</div> <div>解：系统的闭环极点分别为 $p_1 = -2$、$p_2 = -1$，所以系统稳定。</div> <div>例 2：已知线性系统的闭环特征方程为 $D_B(s) = (s + 10)(s^2 + 16) = 0$，试判别系统的稳定性。</div> <div>解：由给定的闭环特征方程 $D_B(s) = (s + 10)(s^2 + 16) = 0$，可以求得特征根为：</div> <div>$s_1 = -10$，$s_2 = \pm j4$，依据线性系统稳定的充分必要条件可知系统为临界稳定。</div> <div>例 3：单位负反馈控制系统的开环传递函数为：$G_0(s) = 2/s(s + 3)$，试判别闭环系统的稳定性。</div> <div>解：闭环系统的传递函数为 $\Phi(s) = 2/(s^2 + 3s + 2)$，其闭环极点为 $p_1 = -2$、$p_2 = -1$，所以系统稳定。</div> <div>3．代数稳定判据</div> <div>系统特征方程的各项系数与系统的稳定性之间一定存在着某种内在的联系。</div>				序号	脉冲函数极限值	脉冲响应衰减情况	稳定状态	1	$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$	衰减	系统稳定	2	$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$	发散	系统不稳定	3	$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = C$	等幅振荡	系统临界稳定
序号	脉冲函数极限值	脉冲响应衰减情况	稳定状态																
1	$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$	衰减	系统稳定																
2	$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$	发散	系统不稳定																
3	$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = C$	等幅振荡	系统临界稳定																

劳斯稳定判据

设研究的线性系统的特征方程为： $a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = 0$ ，并依照以下的方法构造一个表格，这个表格称为劳斯表，构造方法如下。

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
 s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
 s^{n-2} & b_1 = \frac{a_2a_1 - a_0a_3}{a_1} & b_2 = \frac{a_4a_1 - a_0a_5}{a_1} & b_3 = \frac{a_6a_1 - a_0a_7}{a_1} & \cdots \\
 s^{n-3} & c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1} & c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1} & c_3 = \frac{b_1a_7 - a_1b_4}{b_1} & \cdots \\
 \vdots & \vdots & & & \\
 s^2 & d_1 & d_2 & d_3 & \\
 s^1 & e_1 & e_2 & & \\
 s^0 & f_1 & & &
 \end{array}$$

Routh 判据：线性系统稳定的充分必要条件是 Routh 表第一列的所有元素符号不改变，且符号改变的次数为特征根位于 S 右半平面的个数。

例 1：讨论二阶、三阶系统稳定的充分必要条件。

二阶系统： $a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$ ，构造 Routh 表：

$$\begin{array}{c|cc}
 s^2 & a_0 & a_2 \\
 s^1 & a_1 & 0 \\
 s^0 & \frac{a_1a_2 - a_0 \times 0}{a_1} = a_2 &
 \end{array}$$

由 Routh 表并依据劳斯判据可知，二阶系统稳定的充分必要条件为：

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0。$$

三阶系统： $a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 = 0$ ，构造 Routh 表：

$$\begin{array}{c|cc}
 s^3 & a_0 & a_2 \\
 s^2 & a_1 & a_3 \\
 s^1 & \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1} & 0 \\
 s^0 & a_3 &
 \end{array}$$

由 Routh 表并依据劳斯判据可知，三阶系统稳定的充分必要条件为：

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, \text{ 且 } a_1a_2 > a_0a_3。$$

例 2：设闭环系统的特征方程为 $D_B(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$ ，试判别其稳定性。

解：构造劳斯表

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^4 & 1 & 3 & 5 \\
 s^3 & 2 & 4 & \\
 s^2 & 1 & 5 & \\
 s^1 & -6 & & \\
 s^0 & 5 & &
 \end{array}$$

由劳斯表可见，其第一列元素的符号发生了 2 次改变，所以该系统是不稳定的，且有 2

个特征根位于 S 右半平面。

几种特殊情况

第一种特殊情况：劳斯表中第一列的某一行元素出现零元素，而该行的其余元素不全为零。

结论：当出现这种情况时，说明系统特征方程具有正实数根或纯虚根，系统不稳定或临界稳定。

处理方法：可以用一个小正数 ε 来代替那个零元素，然后继续构造下去，并令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ，判别第一列元素符号改变的次数。

例 3：设系统的特征方程为 $s^3 - 3s + 2 = 0$

解：构造劳斯表如下，并作特殊处理。

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & -3 \\ s^2 & 0 = \varepsilon & 2 \\ s^1 & \frac{-3\varepsilon - 2}{\varepsilon} & 0 \\ s^0 & \varepsilon & 2 \end{array}, \text{由劳斯表可见, 其第一列元素的符号改变了 2 次, 故系统不稳定, 且具有 2 个特}$$

征根位于 S 右半平面。

第二种特殊情况：劳斯表中出现某一行元素全为零。

结论：出现这种特殊情况，说明存在着等值反号的实数根或成对出现的纯虚根或对称于 S 平面坐标轴原点的偶数对共轭复数根。系统是不稳定的或临界稳定。

处理方法：利用全零行上一行的元素及相应的阶次构造辅助多项式 $F(s)$ ，并以 $dF(s)/ds$ 各系数代替全零行元素，然后继续构造劳斯表的其余部分。

例 4：设系统的特征方程为 $s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$

解：构造劳斯表如下，并作特殊处理。

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 24 & -25 \\ s^4 & 2 & 48 & -50 \\ s^3 & 0 \rightarrow 8 & 0 \rightarrow 96 & \\ s^2 & 24 & -50 & \\ s^1 & 112.7 & & \\ s^0 & -50 & & \end{array} \quad \Leftarrow \begin{cases} F(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50 \\ \frac{dF(s)}{ds} = 8s^3 + 96s \end{cases}$$

由于劳斯表第一列元素的符号发生改变，所以系统必然不稳定。实际上可以求得该系统的 5 个特征根分别为 $s_{1,2} = \pm 1, s_3 = -2, s_{4,5} = \pm j5$ 。

4. 代数判据的应用

例 1：设单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G_0(s) = K/s(s+1)(s+5)$ ，试分析闭环系统稳定时放大倍数 K 的取值范围。

解：闭环特征方程为 $s(s+1)(s+5) + K = 0 \Rightarrow s^3 + 6s^2 + 5s + K = 0$

由三阶系统稳定的充分必要条件可以得到，当 $0 < K < 30$ 时该闭环系统是稳定的。

例 2：设单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G_0(s) = K/s(T_m s + 1)(T_f s + 1)$ ，且 $T_m > 0, T_f > 0$ ，试确定闭环系统稳定时放大倍数 K 的取值范围。

解：系统的闭环传递函数为 $\Phi(s) = \frac{K}{T_m T_f s^3 + (T_m + T_f)s^2 + s + K}$

系统的闭环特征方程为： $T_m T_f s^3 + (T_m + T_f)s^2 + s + K = 0$

三阶系统稳定的条件为： $T_m + T_f > K T_m T_f, K > 0 \Rightarrow 0 < K < \frac{T_m + T_f}{T_m T_f} = \frac{1}{T_m} + \frac{1}{T_f}$

例 3：设单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G_0(s) = K/s(s+1)(s+5)$ ，若要求闭环特征根均位于 S 平面 $s = -0.1$ 垂线的左侧，试分析闭环系统稳定时 K 的取值范围。

解：闭环特征方程为 $s(s+1)(s+5) + K = 0 \Rightarrow s^3 + 6s^2 + 5s + K = 0$

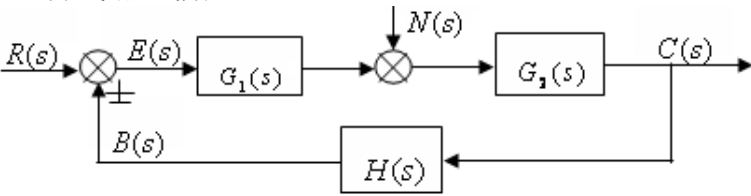
作线性变换，令 $s = z - 0.1$ ，并代入上述闭环特征方程，整理得到

$$D_B(s) = s^3 + 5.7s^2 + 3.82s + (K - 0.441) = 0$$

根据劳斯判据，可以得到满足条件时 K 的取值范围， $0.441 < K < 21.39$ 。

第 13 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第三章 线性系统的时域分析（6 节）
主要内容	线性系统的误差分析
目的与要求	<p>掌握误差的概念和定义、给定作用下稳态误差的计算及对应各种输入下误差系数的计算</p> <p>掌握扰动作用下稳态误差的计算</p> <p>了解提高系统控制精度的措施</p>
重点与难点	<p>重点：给定作用下稳态误差的计算及对应各种输入下误差系数的计算</p> <p>难点：扰动作用下稳态误差的计算</p>
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	3-7 3-11
<p>3.6 控制系统的稳态误差分析</p> <p>1. 误差的定义</p> $e(t) = r(t) - b(t) \implies E(s) = R(s) - B(s)$ $e(t) = r(t) - c(t) \implies E(s) = R(s) - C(s)$ <p>2. 稳态误差</p> <p>控制系统的误差函数 $e(t)$ 也可以分为 2 个分量，即暂态分量 $e_{ts}(t)$ 和稳态分量 $e_{ss}(t)$，$e(t) = e_{ts}(t) + e_{ss}(t)$，对于稳定的系统，当时间 t 趋向无穷大时，暂态部分 $e_{ts}(t)$ 不定趋于零，而只留下稳态部分 $e_{ss}(t)$，而系统的稳态误差可以写为</p> $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ <p>3. 误差传递函数</p>  <p>(1) 由 $r(t)$ 作用下的误差函数</p> $\text{令 } n(t) = 0, \Phi_{ER}(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$ <p>(2) 由 $n(t)$ 作用下的误差函数</p> $\text{令 } r(t) = 0, \Phi_{EN}(s) = -\frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$ <p>(3) 系统总误差</p> $E(s) = E_R(s) + E_N(s) = \Phi_{ER}(s)R(s) + \Phi_{EN}(s)N(s)$ <p>4. 稳态误差计算</p> <p>需要指出的是，只有当系统稳定时，研究稳态误差才有意义，因此，在计算系统的稳态误差之前，必须判断系统是稳定的。</p> <p>由 Laplace 变换的终值定理，可得到稳态误差的计算 $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$</p> <p>例 1：设控制系统的稳态误差如下图所示，当输入信号为单位斜坡函数时，试求系统的稳态误差；为使稳态误差小于 0.1 应该如何调整 K 值。</p>	

解：判别系统的稳定性，闭环

特征方程为

$$2s^3 + 3s^2 + (1 + 0.5K)s + k = 0$$

系统稳定时 K 的取值范围是： $0 < K < 6$

系统的误差函数为：

$$\Phi_{ER}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \frac{K(0.5s+1)}{s(s+1)(2s+1)}} = \frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + K(0.5s+1)}$$

系统的稳态误差为：

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi_{ER}(s)R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + K(0.5s+1)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{K}$$

为使稳态误差小于 0.1，则只要满足 $e_{ss} = \frac{1}{K} < 0.1$ ，即 $K > 10$

但由系统稳定的条件知道，当 $K > 10$ 时，系统将变为不稳定，故无法通过选择 K 值来达到稳态误差小于 0.1 的要求。

5. 稳态误差分析

设系统闭环传递函数如下，并表示为归一化（时间常数）形式

$$G(s) = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} = K \frac{(\tau_1s+1)(\tau_2^2s^2 + 2\tau_2\zeta_2s+1)\dots}{s^\gamma(T_1s+1)(T_2^2s^2 + 2T_2\zeta_2s+1)\dots} = \frac{K}{s^\gamma} G_0(s)$$

其中： $G_0(s) = \frac{(\tau_1s+1)(\tau_2^2s^2 + 2\tau_2\zeta_2s+1)\dots}{(T_1s+1)(T_2^2s^2 + 2T_2\zeta_2s+1)\dots}$ ，且显然有 $\lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = G_0(0) = 1$ ，K 为系统开环放

大倍数， $\tau_1, \tau_2, \dots, T_1, T_2, \dots$ 为时间常数， γ 为积分环节数目。

通常根据系统开环传递函数所含积分环节的数目 γ 来对系统进行分类，当 γ 为 0, 1, 2, 3, ... 时，分别定义系统的型别为 0 型、I 型、II 型、III 型，...N 型， γ 也称为系统得无差度阶数。

关系到系统稳态误差的因素有：系统 $\left\{ \begin{array}{l} \text{输入信号 } r(t) \text{ 形式} \\ \text{开环放大倍数 } K \\ \text{开环传递函数中积分环节的数目 } \gamma \end{array} \right.$

(1) 输入信号为单位阶跃函数和静态位置误差系数

设输入信号为 $r(t) = 1(t) \Leftrightarrow R(s) = 1/s$

$$\text{稳态误差：} e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + G_K(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_K(s)}$$

$$\text{令：} K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_K(s)$$

K_p 为系统静态位置误差系数，系统在单位阶跃函数作用下的稳态误差为： $e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$

稳态误差为零的系统称为无差系统，稳态误差为有限值的系统称为有差系统。

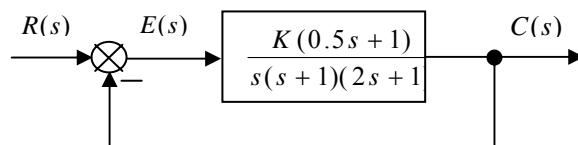
(2) 输入信号为单位斜坡函数和静态速度误差系数

设输入信号为 $r(t) = t1(t) \Leftrightarrow R(s) = 1/s^2$

$$\text{稳态误差：} e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + G_K(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG_K(s)}$$

$$\text{令：} K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_K(s)$$

K_v 为系统的静态速度误差系数，系统在单位斜坡函数作用下的稳态误差为： $e_{ss} = \frac{1}{K_v}$



(3) 输入信号为单位加速度函数和静态加速度误差系数

设输入信号为 $r(t) = \frac{1}{2}t^2 \Leftrightarrow R(s) = 1/s^3$

$$\text{稳态误差: } e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+G_K(s)} \cdot \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_K(s)}$$

$$\text{令: } K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_K(s)$$

K_a 为系统的静态加速度误差系数, 系统在单位加速度函数作用下的稳态误差为: $e_{ss} = \frac{1}{K_a}$

(4) 输入信号为单位阶跃、斜坡、加速度信号时的稳态误差

设输入信号为 $r(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 \Leftrightarrow R(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}$

利用线性系统的叠加原理, 可得系统的稳态误差为 $e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} + \frac{1}{K_v} + \frac{1}{K_a}$

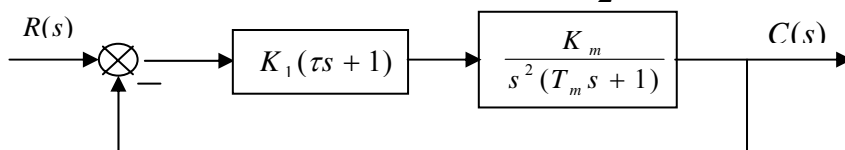
系统 类型 别	静态误差系数			阶跃信号 $r(t) = At$	斜坡信号 $r(t) = Bt$	加速度信号 $r(t) = Ct^2/2$
	K_p	K_v	K_a	位置误差 $e_{ss} = A/(1+K_p)$	速度误差 $e_{ss} = B/K_v$	加速度误差 $e_{ss} = C/K_a$
0	K	0	0	$A/(1+K)$	∞	∞
1	∞	K	0	0	B/K	0
2	∞	∞	K	0	0	C/K
3	∞	∞	∞	0	0	0

分析结论: (1) 系统的稳态误差与输入信号有关;

(2) 系统的稳态误差与开环放大倍数 K 基本成反比关系。对于有差的系统, K 值越大, 稳态误差越小, 但同时系统的稳定性变差;

(3) 系统的稳态误差与开环传递函数的积分环节数 ν 有关。积分环节数增加, 稳态误差减小, 但同时系统的稳定性变差。

例 1: PD 控制系统如下所示, 输入信号为 $r(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$, 试作稳定性分析和稳态误差分析。



解: (1) 稳定性分析:

$$\text{系统闭环特征方程 } T_m s^3 + s^2 + K_m K_1 \tau s + K_m K = 0$$

根据劳斯判据, 为使闭环系统稳定, 必须满足 $T_m > 0, K_m > 0, K_1 > 0, \tau > 0, \tau > T_m$

(2) 稳态误差分析

$$\text{系统开环传递函数为 } G_K(s) = K_1 K_m (\tau s + 1) / s^2 (T_m s + 1)$$

显然为 2 型系统, 故其静态误差系数分别为 $K_p = \infty, K_v = \infty, K_a = K_1 K_m$

$$\text{系统稳态误差为 } e_{ss} = e_{ss1} + e_{ss2} + e_{ss3} = 1/K_1 K_m$$

例 2: 已知单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G_K(s) = 10/s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)$, 式中 $T_1 = 0.1s, T_2 = 0.5s$, 若输入信号为 $r(t) = 2 + 0.5t$, 试求系统的稳态误差。

解：闭环特征方程 $T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + 10 = 0$

根据劳斯判据，系统稳定的条件为 $T_1 + T_2 > 10T_1 T_2 \Rightarrow 0.1 + 0.5 = 0.6 > 10 \times 0.1 \times 0.5 = 0.5$

显然，满足系统稳定的条件，所以闭环系统稳定。

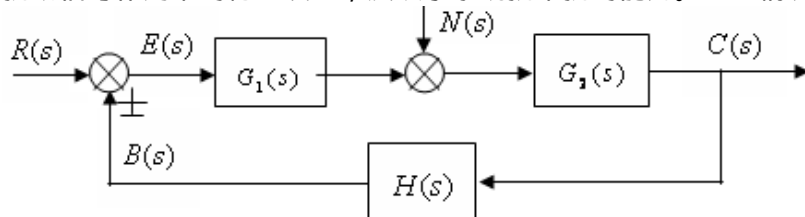
开环传递函数 $G_K(s) = 10/s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)$

显然是 1 型系统，其静态位置误差系数、静态速度误差系数分别为 $K_p = \infty, K_v = 10$

所以，系统稳态误差为 $e_{ss} = e_{ss1} + e_{ss2} = 0 + 0.5/10 = 0.05$

6. 扰动信号误差分析

扰动信号作用下的稳态误差，反映了系统抗干扰的能力。理想情况下，扰动产生的误差越小越好。



由扰动产生的误差，可以表示为

$$\text{令 } R(s) = 0 \quad E_N(s) = -C_N(s)H(s) = -\frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$

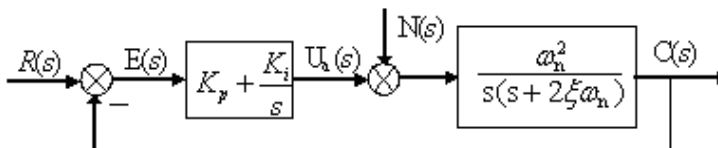
由扰动引起的稳态误差为

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \cdot N(s)$$

7. 减小或消除稳态误差的措施

减小或消除稳态误差的措施主要有

(1) 比例积分 (PI) 控制



控制器数学模型 $U_a(s) = (K_p + \frac{K_i}{s})E(s) \Rightarrow u_a(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t)dt$ ， K_i 积分时间常数。

显然控制器的输出信号是误差信号 $e(t)$ 比例+积分，故而称为比例积分控制。

开环传递函数 $G_K(s) = \frac{\omega_n^2(K_p s + K_i)}{s^2(s + 2\xi\omega_n)}$ ， $\nu = 2$ ，闭环传递函数 $\Phi(s) = \frac{\omega_n^2(K_p s + K_i)}{s^3 + 2\xi\omega_n s^2 + K_p \omega_n^2 s + K_i \omega_n^2}$

由劳斯判据可知，当 $0 < K_i < 2\xi\omega_n$ ，闭环系统稳定。

$$\text{静态误差系数} \begin{cases} K_p = \infty \\ K_v = \infty \\ K_a = \frac{K_i \omega_n}{2\xi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_{ssr} = 0, r(t) = 1(t) \\ e_{ssr} = 0, r(t) = t1(t) \\ e_{ssr} = \frac{2\xi}{K_i \omega_n} \end{cases}$$

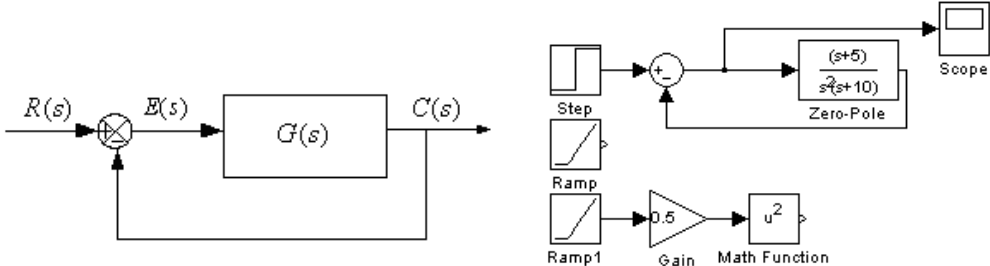
显然，采用比例积分控制后，系统在扰动作用下的误差减小了。

(2) 复合控制

复合控制分为输入补偿控制和扰动补偿控制两种形式。

第 14 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第三章 线性系统的时域分析
主要内容	自动控制系统稳定性和稳态性能分析上机实验
目的与要求	熟悉 MATLAB 软件对系统稳定性分析的基本命令语句 熟悉 MATLAB 软件对系统误差分析的 Simuink 仿真 通过编程或 Simuink 仿真完成系统稳定性和稳态性能分析
重点与难点	重点：通过编程或 Simuink 仿真完成系统稳定性和稳态性能分析 难点：系统稳定性和稳态性能分析
教学手段	上机
思考题或作业题	完成实验报告
<p>一、实验目的</p> <ol style="list-style-type: none"> 1、研究高阶系统的稳定性，验证稳定判据的正确性； 2、了解系统增益变化对系统稳定性的影响； 3、观察系统结构和稳态误差之间的关系。 <p>二、实验任务</p> <ol style="list-style-type: none"> 1、稳定性分析 <p>欲判断系统的稳定性，只要求出系统的闭环极点即可，而系统的闭环极点就是闭环传递函数的分母多项式的根，可以利用 MATLAB 中的 tf2zp 函数求出系统的零极点，或者利用 root 函数求分母多项式的根来确定系统的闭环极点，从而判断系统的稳定性。</p> <p>(1) 已知单位负反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{0.2(s+2.5)}{s(s+0.5)(s+0.7)(s+3)}$，用 MATLAB 编写程序来判断闭环系统的稳定性，并绘制闭环系统的零极点图。</p> <p>(2) 已知单位负反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{k(s+2.5)}{s(s+0.5)(s+0.7)(s+3)}$，当取 $k=1, 10, 100$ 用 MATLAB 编写程序来判断闭环系统的稳定性。</p> <p>只要将 (1) 代码中的 k 值变为 1, 10, 100，即可得到系统的闭环极点，从而判断系统的稳定性，并讨论系统增益 k 变化对系统稳定性的影响。</p> 2、稳态误差分析 <p>(1) 已知如图所示的控制系统。其中 $G(s) = \frac{s+5}{s^2(s+10)}$，试计算当输入为单位阶跃信号、单位斜坡信号和单位加速度信号时的稳态误差。</p>  <p>从 Simulink 图形库浏览器中拖曳 Sum（求和模块）、Pole-Zero（零极点）模块、Scope（示波器）模块到仿真操作画面，连接成仿真框图如右上图所示：</p> <p>(2) 若将系统变为 I 型系统，$G(s) = \frac{5}{s(s+10)}$，在阶跃输入、斜坡输入和加速度信号输入作用下，通过仿真来分析系统的稳态误差。</p> 	

三、实验数据

1、稳定性分析

(1) 已知单位负反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{0.2(s+2.5)}{s(s+0.5)(s+0.7)(s+3)}$ ，用 MATLAB 编写程序来判断闭环系统的稳定性，并绘制闭环系统的零极点图。

程序代码、运行结果以及零极点分布图见指导书。

由运行结果可知， $k=0.2$ 时，系统是稳定的。

(2) 已知单位负反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{k(s+2.5)}{s(s+0.5)(s+0.7)(s+3)}$ ，当取 $k=1, 10, 100$ 用 MATLAB 编写程序来判断闭环系统的稳定性。

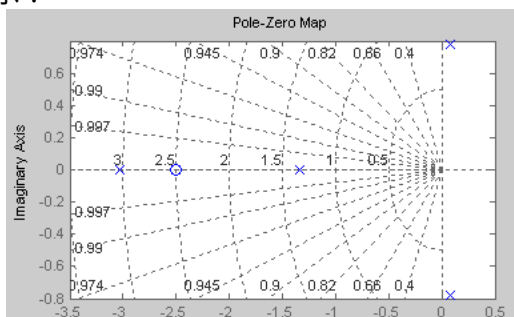
$k=1$ 时，MATLAB 程序代码如下：

```
z=-2.5;p=[0,-0.5,-0.7,-3];k=1;Go=zpk(z,p,k);Gc=feedback(Go,1);Gctf=tf(Gc);[z,p,k]=zpkdata(Gctf,'v');
pzmap(Gctf);grid;
```

运行结果如下：

$z = -2.5000$; $p = -3.0297, 1.3319, 0.0808 + 0.7829i, 0.0808 - 0.7829i$; $k = 1$

输出零极点分布图如下图所示：



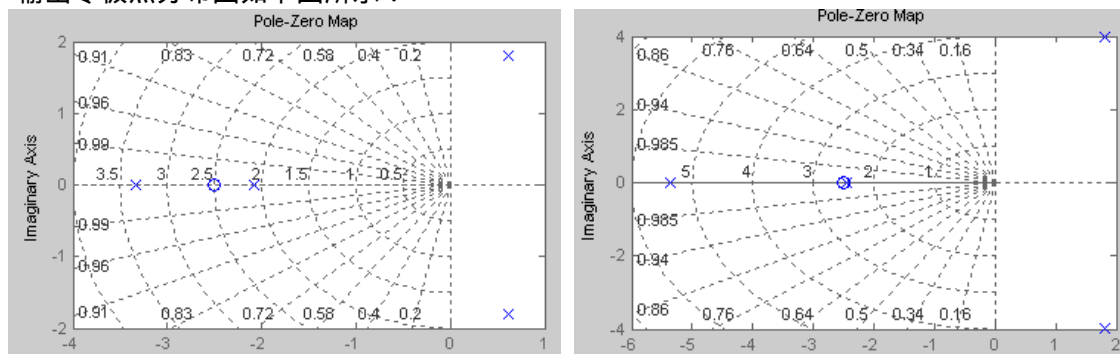
由其闭环极点的值或者零极点分布图可知 $k=1$ 时，系统不稳定。

$k=10$ 时，只需将上面的程序代码 k 的值变为 10，就不再罗列。

运行结果如下：

$z = -2.5000$; $p = 0.6086 + 1.7971i, 0.6086 - 1.7971i, -3.3352, -2.0821$; $k = 10$

输出零极点分布图如下图所示：



由其闭环极点的值或者零极点分布图可知 $k=10$ 时，系统不稳定。

$k=100$ 时，运行结果如下：

$z = -2.5000$; $p = 1.8058 + 3.9691i, 1.8058 - 3.9691i, -5.3575, -2.4541$; $k = 100$

输出零极点分布图如上图。

由其闭环极点的值或者零极点分布图可知 $k=10$ 时，系统不稳定。

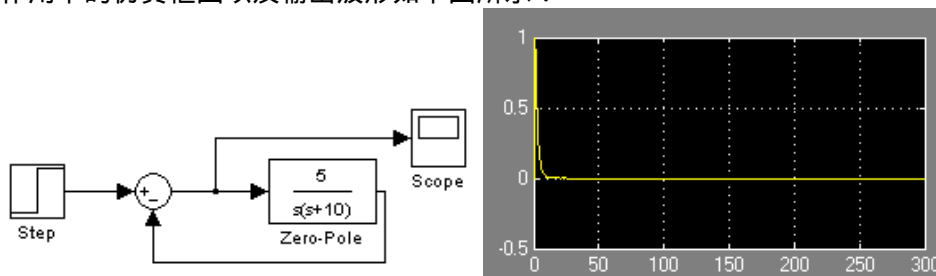
2、稳态误差分析

(1) 已知如图所示的控制系统，其中 $G(s) = \frac{s+5}{s^2(s+10)}$ ，试计算当输入为单位阶跃信号、单位斜坡信号和单位加速度信号时的稳态误差。

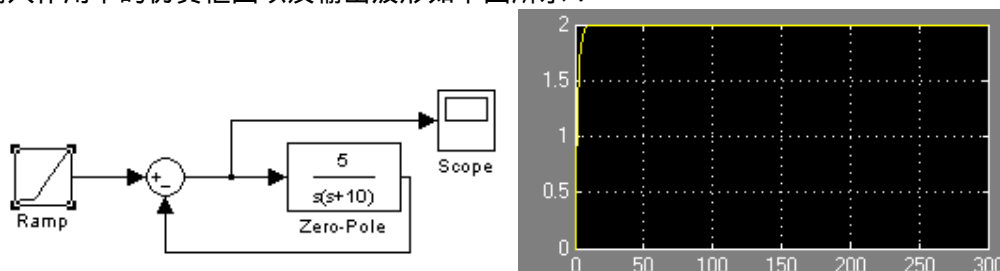
仿真框图以及输出波形见指导书，从输出波形可以看出不同输入作用下的系统的稳态误差，系统是 II 型系统，因此在阶跃输入和斜坡输入下，系统稳态误差为零，在加速度信号输入下，存在稳态误差。

(2) 若将系统变为 I 型系统, $G(s) = \frac{5}{s(s+10)}$, 在阶跃输入、斜坡输入和加速度信号输入作用下, 通过仿真来分析系统的稳态误差。

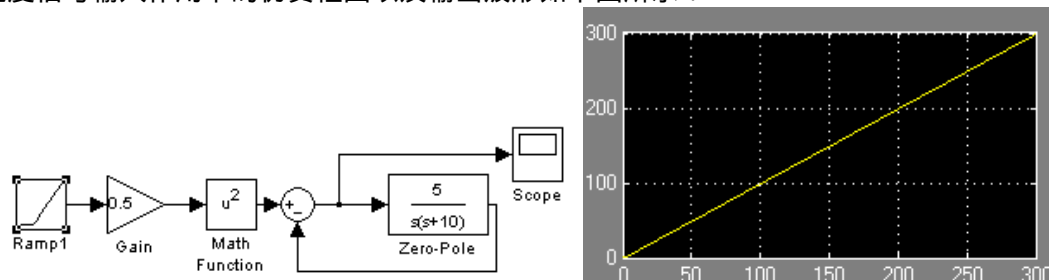
阶跃输入作用下的仿真框图以及输出波形如下图所示：



斜坡输入作用下的仿真框图以及输出波形如下图所示：



加速度信号输入作用下的仿真框图以及输出波形如下图所示：



由仿真结果可知, 系统是 I 型系统, 因此在阶跃输入作用下, 系统稳态误差为零; 在斜坡输入作用下存在稳态误差, 是有差跟踪; 在加速度信号输入下, 稳态误差趋于无穷大, 因此 I 型系统不能跟踪加速度信号。

四、实验结论

1、讨论系统增益 k 变化对系统稳定性的影响。

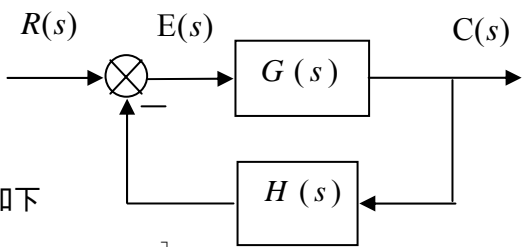
从结果可知, 增益 k 变大, 系统的稳定性能变差。

2、讨论系统型数以及系统输入对系统稳态误差的影响。

从结果可知, 系统型数越高, 能无差跟踪的输入信号的阶次越高; 不同输入作用下, 同一个系统对其响应的稳态误差不同, 输入阶次越高, 要求系统的型数越高, 才能实现无差跟踪。

第 15 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第四章 根轨迹法（1、2 节）
主要内容	根轨迹法的基本概念 绘制 180° 根轨迹的基本法则
目的与要求	了解根轨迹法、根轨迹的定义 掌握根轨迹方程（幅值方程和相角方程） 掌握绘制 180° 根轨迹的基本法则（起点和终点、连续性和对称性、分支数、渐近线、实轴上的根轨迹分布）
重点与难点	重点：根轨迹的定义、根轨迹方程、绘制 180° 根轨迹的基本法则 难点：根轨迹方程、绘制根轨迹的基本法则
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	
<p>4.1 引言</p> <p>根轨迹分析法：当开环系统的一个或多个参数发生变化时，根据系统的开环零点和极点，借助于若干条绘图法则，绘制出闭环特征根变化的轨迹。利用根轨迹法可以分析闭环系统的稳定性，计算（或估算）闭环系统的暂态和稳态性能指标，确定闭环系统的某些参数对于系统性能的影响以及对闭环系统进行校正等。</p> <p>1. 根轨迹</p> <p>根轨迹：当系统开环传递函数中某个参数（如本例中的根轨迹增益 K_g）在某一范围内（如 $0 \rightarrow \infty$）连续变化时，闭环特征根在 S 平面上移动的轨迹，称为根轨迹。</p> <p>可以由根轨迹图来分析系统的性能。</p> <p>2. 根轨迹方程</p> <p>（1）负反馈系统的根轨迹方程</p> <p>典型负反馈控制系统的结构图</p>  <p>如右图所示。</p> <p>根轨迹方程是关于复变量 s 方程，写成极坐标形式如下</p> $K_g \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = K_g \frac{\prod_{i=1}^m s - z_i }{\prod_{j=1}^n s - p_j } e^{j \left[\sum_{i=1}^m (s - z_i) - \sum_{j=1}^n (s - p_j) \right]} = -1 = e^{j(2k+1)\pi}$ <p>于是，根轨迹方程又可以分解为幅值方程和相角方程如下</p> <p>幅值方程： $K_g \frac{\prod_{i=1}^m s - z_i }{\prod_{j=1}^n s - p_j } = 1 \Rightarrow K_g \prod_{i=1}^m s - z_i = \prod_{j=1}^n s - p_j \Rightarrow K_g = \frac{\prod_{j=1}^n s - p_j }{\prod_{i=1}^m s - z_i }$</p> <p>相角方程： $\left[\sum_{i=1}^m (s - z_i) - \sum_{j=1}^n (s - p_j) \right] = (2k + 1)\pi = 2k\pi + \pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$</p> <p>（2）幅值方程、相角方程的几何意义</p> <p>从绘制根轨迹图的角度来看，根轨迹上的任意一点只要满足相角方程，即可画出根轨迹了，可以说相角方程是根轨迹的充分必要条件。而幅值方程的作用主要用来确定已知点对应的增益。</p>	

(3) 正反馈系统的根轨迹方程

若系统为正反馈时, 其根轨迹方程为

$$\text{幅值方程为: } K_g \frac{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}{\prod_{j=1}^n |s - p_j|} = 1$$

$$\text{相角方程为: } \left[\sum_{i=1}^m (s - z_i) - \sum_{j=1}^n (s - p_j) \right] = 2k\pi = 0^0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

另外, $0 \leq K_g < +\infty$ 时, 负反馈系统的根轨迹称为 180^0 根轨迹, 正反馈系统的根轨迹就称为 0^0 根轨迹。

4.2 绘制根轨迹的基本法则

1. 180^0 根轨迹作图法则

法则 1: 根轨迹的起点和终点

根轨迹的起点是指根轨迹增益 $K_g = 0$ 时, 闭环极点在 S 平面上的位置, 而根轨迹的终点则是指 $K_g = \infty$ 时闭环极点在 S 平面上的位置。

根轨迹起始于系统的开环极点 (包括重极点), 而终止于开环零点。

然而实际的控制系统中, 开环传递函数的分子多项式阶次 m 与分母多项式阶次 n 之间, 满足 $n \geq m$ 的关系。如果 $n > m$, 那么剩余的 $n - m$ 条根轨迹分支终止于无穷远处。

法则 2: 根轨迹的连续性和分支数

根轨迹具有连续性, 且对称于实轴。

法则 3: 根轨迹的分支数

根轨迹的分支数与开环有限零点数 m 和有限极点数 n 中的大者相等。当 $n \geq m$ 时, 分支数等于 n , 即系统的阶数。

法则 4: 根轨迹的渐近线

所谓根轨迹的渐近线, 是指当 $n > m$ 时, 应有 $n - m$ 条根轨迹分支的终点在无穷远处, 所谓渐近线, 可以认为当 $K_g \rightarrow \infty$ 时, 根轨迹与渐近线是重合的。

渐近线与实轴正方向的夹角为:

$$\varphi_a = \frac{(2k + 1)\pi}{n - m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - m - 1$$

渐近线与实轴的交点为:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

法则 5: 实轴上根轨迹的分布

实轴上某区域, 若其右边的开环零点和开环极点个数之和为奇数, 则该区域必是根轨迹。

第 16 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第四章 根轨迹法（2 节）
主要内容	绘制 180° 根轨迹的基本法则
目的与要求	掌握绘制 180° 根轨迹的基本法则：分离点、会合点的确定、与虚轴的交点、出射角与入射角的计算、极点的和与积。
重点与难点	重点：绘制 180° 根轨迹的基本法则 难点：分离点、会合点的确定、出射角与入射角的计算
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	4-1、4-2、4-9（3）
<p>法则 6：根轨迹的分离（会合）点 两条或两条以上根轨迹分支在复平面上相遇后又分离的点称为分离（会合）点。 根轨迹的分离（会合）点实质上闭环特征方程的重根，因而可以用求解方程式重根的方法来确定其在复平面上的位置。 设系统开环传递函数为</p> $G_K(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = \frac{KN(s)}{D(s)}$ <p>其闭环特征方程为：$1 + \frac{KN(s)}{D(s)} = 0 \Rightarrow f(s) = D(s) + KN(s) = 0$</p> <p>满足以下任何一个方程，且保证 K 为正实数的解，即是根轨迹的分离（会合）点。</p> $\begin{cases} \frac{df(s)}{ds} = \frac{d[D(s) + KN(s)]}{ds} = 0 \\ \frac{dK}{ds} = 0 \\ \frac{d}{ds} \left[\frac{D(s)}{N(s)} \right] = 0 \end{cases}$ <p>法则 7：根轨迹与虚轴的交点 根轨迹与虚轴的交点，实质上就是闭环系统的临界稳定工作点。因此临界工作点的求法有如下两种方法。</p> <p>方法一：在闭环特征方程 $D_B(s) = 0$ 中，令 $s = j\omega$，得到 $D_B(j\omega) = 0$，将 $D_B(j\omega)$ 分为实部和虚部，即 $\text{Re}[D_B(j\omega)] + j\text{Im}[D_B(j\omega)] = 0$</p> <p>于是有 $\begin{cases} \text{Re}[D_B(j\omega)] = 0 \\ \text{Im}[D_B(j\omega)] = 0 \end{cases}$，求解得到 ω 值，即为根轨迹与虚轴的交点坐标频率。</p> <p>方法二：由劳斯稳定判据，令劳斯表中出现全零行，但第一列元素符号保持不变，此时系统处于临界稳定状态，并可求得根轨迹与虚轴的交点。</p> <p>例 1：设单位负反馈控制系统的开环传递函数为 $G_K(s) = K_g / s(s+1)(s+5)$，试绘制系统的闭环根轨迹，并求根轨迹的分离（会合）点以及与虚轴的交点。</p>	

解：开环极点： $p_1=0, p_2=-1, p_3=-5$ ，无开环零点， $n=3, m=0$

有 3 条根轨迹分支，分别起始于 3 个开环极点 $p_1=0, p_2=-1, p_3=-5$ ，终止于无穷远处。

渐近线夹角和实轴的交点坐标分别为

$$\varphi_a = \frac{(2K+1)\pi}{n-m} = \frac{(2K+1)\pi}{3} = \begin{cases} \pi/3 = 60^\circ, k=0 \\ \pi = 180^\circ, k=1 \\ 5\pi/3 = 300^\circ, k=2 \end{cases}$$

$$\sigma_a = \frac{\sum p_j - \sum z_i}{n-m} = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3} = -2$$

实轴上根轨迹分布为 $(0, -1), (-5, -\infty)$

根轨迹分离（会合）点。

由开环传递函数，可以得到闭环特征方程式 $K_g + s(s+1)(s+5) = 0$ ，则

$$K_g = -s(s+1)(s+5), \text{ 令 } \frac{dK_g}{ds} = -\frac{ds(s+1)(s+5)}{ds} = 3s^2 + 12s + 5 = 0, \text{ 求得:}$$

$s_1 = -0.473, s_2 = -3.52$ ，由于 s_2 不在根轨迹上，所以分离（会合）点为 $s_1 = -0.473$ 。

根轨迹的分离（会合）角， $\theta_d = 180^\circ/k = 180^\circ/2 = 90^\circ$ 。

根轨迹与虚轴的交点：

方法一：闭环特征方程： $s^3 + 6s^2 + 5s + K_g = 0$

令 $s = j\omega$ 代入闭环特征方程 $(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 5(j\omega) + K_g = 0$

分解为实部和虚部： $(K_g - 6\omega^2) + j(5\omega - \omega^3) = 0$

$$\text{于是有: } \begin{cases} K_g - 6\omega^2 = 0 \\ 5\omega - \omega^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 1, \pm\sqrt{5} \\ K_g = 0, 30 \end{cases}, \text{ 显然交点为 } \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{5} \\ K_g = 30 \end{cases}$$

方法二：构造劳斯表

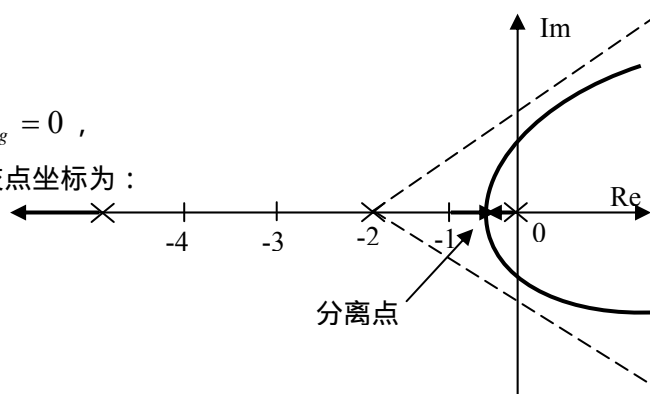
$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 6 & K_g \\ s^1 & 30 - K_g & 0 \\ s^0 & 6 & K_g \end{array} \quad \text{当 } K_g = 30 \text{ 时, } s^1 \text{ 行为全零, 劳斯表第一列符号不变, 系统特征根为纯虚数, 可}$$

根据 s^2 行的辅助方程： $F(s) = 6s^2 + K_g = 0$ ，

求得 $s = \pm j\sqrt{5}$ ，因此根轨迹与虚轴的交点坐标为：

$(K_g = 30, s = \pm j\sqrt{5})$ 。

根轨迹草图如下。



法则 8：根轨迹的出射角和入射角

当开环零点和开环极点处于复平面时，根轨迹离开开环极点处的切线与正实轴的方向夹角，称为根轨迹的出射角（出发角）。同样，根轨迹进入开环零点处的切线与正实轴的方向夹角，称为根轨迹的入射角（终止角）。用公式表示为：

$$\theta_{p_x} = (2k+1)\pi + \sum_{i=1}^m \angle(p_x - z_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq x}}^n \angle(p_x - p_j)$$

由 p_x 与 p_{x+1} 的共轭性， $\theta_{p_{x+1}} = -\theta_{p_x}$

同理可得，复数零点的入射角用公式表示为

$$\varphi_{z_x} = (2k+1)\pi - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^m \angle(z_x - z_i) + \sum_{j=1}^n \angle(z_x - p_j)$$

由 z_x 与 z_{x+1} 的共轭性, $\varphi_{z_{x+1}} = -\varphi_{z_x}$ 。

例：设单位反馈控制系统的开环传递函数为： $G_K(s) = K_g / s(s^2 + 2s + 2)$ ，试绘制系统的完整根轨迹，并要求计算出射角。

解：开环极点为 $p_1 = 0, p_2 = -1 + j, p_3 = -1 - j$ ，无开环零点， $n = 3, m = 0$

(1) 由于 $n = 3, m = 0$ ，所以根轨迹有 3 条分支；

(2) 根轨迹起始于开环极点 $p_1 = 0, p_2 = -1 + j, p_3 = -1 - j$ ，终止于无穷远处。

(3) 3 条根轨迹的渐近线夹角和交点坐标

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \begin{cases} \pi/3 (60^\circ), k = 0 \\ \pi (180^\circ), k = 1 \\ 5\pi/3 (-60^\circ, 300^\circ), k = 2 \end{cases}$$

$$\sigma_a = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3} = \frac{0 - 1 + j - 1 - j}{3} = -\frac{2}{3}$$

(4) 实轴上的根轨迹为 $(-\infty, 0)$ ，即整个负实轴；

(5) 根轨迹无分离（会合）点；

(6) 起始于 $p_2 = -1 + j, p_3 = -1 - j$ 根轨迹分支向着 $\varphi_a = \pi/3, 5\pi/3$ 的两条渐近线逼近；

(7) 根轨迹与虚轴的交点

闭环特征方程： $s^3 + 2s^2 + 2s + K_g = 0$

令 $s = j\omega$ 代入特征方程， $(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2(j\omega) + K_g = 0$

$$\text{或} \quad \begin{cases} K_g - 2\omega^2 = 0 \\ 2\omega - \omega^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{2} \\ K_g = 4 \end{cases}$$

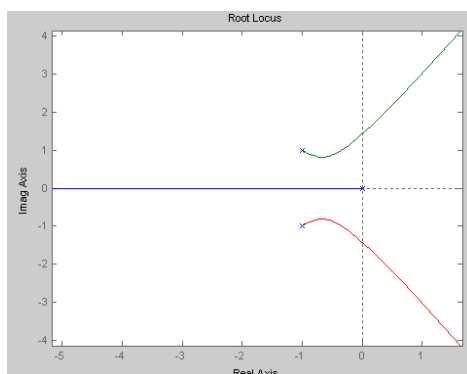
(8) 根轨迹出射角

$$\theta_{p_2} = 180^\circ - \angle(p_2 - p_1) - \angle(p_2 - p_3) = 180^\circ - \angle(-1 + j) - \angle[(-1 + j) - (-1 - j)]$$

$$= -45^\circ$$

$$\theta_{p_3} = 45^\circ$$

(9) 绘制根轨迹如下



法则 9：系统闭环极点的和与积
系统开环传递函数

$$G(s) = K_g \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = K_g \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$= K_g \frac{s^m - (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)s^{m-1} + \cdots + (-1)^m z_1 z_2 \cdots z_m}{s^n - (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)s^{n-1} + \cdots + (-1)^n p_1 p_2 \cdots p_n}$$

开环零点的和与积：

$$\sum_{i=1}^m z_i = z_1 + z_2 + \cdots + z_m = -b_1, \quad \prod_{i=1}^m z_i = z_1 z_2 \cdots z_m = (-1)^m b_m$$

开环极点的和与积：

$$\sum_{j=1}^n p_j = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = -a_1, \quad \prod_{j=1}^n p_j = p_1 p_2 \cdots p_n = (-1)^n a_n$$

闭环特征方程：

$$D_B(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n + K_g (s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m) = 0$$

若设系统的闭环极点为 s_i ($i=1, 2, \cdots, n$), 则有

$$D_B(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i) = s^n + C_1 s^{n-1} + C_2 s^{n-2} + \cdots + C_{n-1} s + C_n = 0$$

(1) 系统闭环极点的和

$$\sum_{i=1}^n s_i = -c_1$$

当 $n-m \geq 2$ 时, 闭环极点之和等于开环极点之和, 且为常数, 这个常数也称为闭环极点的重心。

这表明：当 K_g 由 $0 \rightarrow \infty$ 变化时, 闭环极点之和保持不变, 且等于 n 个开环极点之和。这意味着一部分闭环极点增大时, 另外一部分闭环极点必然变小。也即, 如果一部分闭环根轨迹随着 K_g 的增加而向右移动时, 另外一部分根轨迹必将随着 K_g 的增加而向左移动, 始终保持闭环极点的重心不变。

(2) 系统闭环极点的积

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n s_i &= (-1)^n c_n = (-1)^n (a_n + K_g b_m) \\ &= (-1)^n a_n + (-1)^n K_g b_m \\ &= \prod_{i=1}^n p_i + (-1)^{n-m} K_g \prod_{j=1}^m z_j \end{aligned}$$

若系统存在零值开环极点 (即 $a_n = 0$), 于是系统闭环极点的积为

$$\prod_{i=1}^n s_i = (-1)^{n-m} K_g \prod_{j=1}^m z_j = K_g [(-1)^{n-m} \prod_{j=1}^m z_j]$$

这表明系统的闭环极点的积与系统的开环根轨迹增益成正比。

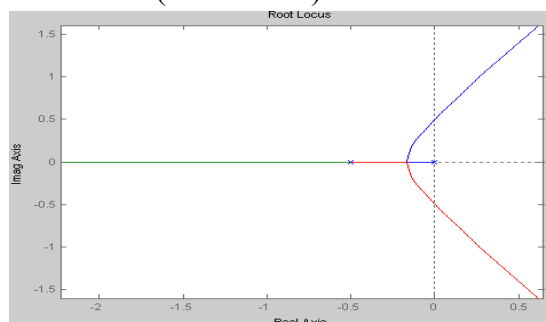
第 17 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第四章 根轨迹法（2 节）
主要内容	绘制 0° 根轨迹的基本法则 参变量系统的根轨迹 非最小相位系统的根轨迹
目的与要求	掌握绘制 0° 根轨迹的基本法则，并与 180° 根轨迹绘制法则相比较，掌握其不同之处 掌握参变量系统的根轨迹绘制的步骤 掌握非最小相位系统的定义以及 180° 与 0° 根轨迹的判断
重点与难点	重点：绘制 0° 根轨迹的基本法则、参变量系统的根轨迹绘制 难点：参变量系统的根轨迹绘制
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	4-8、4-12、4-13
<p>2. 0° 根轨迹作图法则</p> <p>0° 等相角根轨迹作图法则，与 180° 等相角根轨迹作图法则所不同的是，要修改与相角条件有关的规则，具体有：</p> <p>（1）根轨迹的渐近线 渐近线的交点坐标不变，倾角改为</p> $\varphi_a = \frac{2k\pi}{n-m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-m-1$ <p>（2）实轴上的根轨迹分布 实轴上某区域，若其右边的开环零点和开环极点个数之和为偶数（包括 0），则该区域必是根轨迹。</p> <p>（3）根轨迹的出射角和入射角</p> <p>出射角：$\theta_{p_x} = \sum_{i=1}^m \angle(p_x - z_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq x}}^n \angle(p_x - p_j)$</p> <p>入射角：$\varphi_{z_x} = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^m \angle(z_x - z_i) + \sum_{j=1}^n \angle(z_x - p_j)$</p> <p>3. 参变量根轨迹</p> <p>以上讨论的是系统根轨迹增益 K_g 作为参变量时闭环根轨迹的作图规则，但实际情况不完全是这样的。当以系统中其它参数作为变量（时间常数、反馈系数、开环零点和极点等）时的根轨迹称为参变量根轨迹或广义根轨迹。</p> <p>从理论的角度来看，参量根轨迹并无特殊之处，其处理方法是，将原来的开环传递函数经过数学变换成以参变量作为“根轨迹增益”的等效开环传递函数形式，然后依上述的作图规则绘制根轨迹图。</p> <p>例：已知负反馈控制系统的开环传递函数为 $G_K(s) = G(s)H(s) = \frac{1}{4}(s+a)/s^2(s+1)$</p> <p>试绘制参数 a 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时，闭环系统的根轨迹。</p> <p>解：闭环特征方程 $D_B(s) = 1 + G_K(s) = 1 + \frac{1}{4} \frac{(s+a)}{s^2(s+1)} = 0$，即：$s^3 + s^2 + \frac{1}{4}s + \frac{1}{4}a = 0$。</p>	

将方程变形为： $1 + \frac{\frac{1}{4}a}{s^3 + s^2 + \frac{1}{4}s} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{a}{4s^3 + 4s^2 + s} = 0 \Rightarrow 1 + \frac{a}{s(4s^2 + 4s + 1)} = 0$

等效的开环传递函数为： $G'_K(s) = \frac{a}{s(4s^2 + 4s + 1)}$ ，作出参数 a 变化时的根轨迹图如下：



4. 关于 180° 和 0° 等相角根轨迹的几个问题

根据根轨迹增益的正负、反馈结构（正反馈、负反馈），可以分别得到根轨迹方程，分析可知无论是 180° 根轨迹还是 0° 根轨迹，它们所不同的是相角方程，幅值方程是一样的，具体的对应关系总结如下表。

序号	K_g	负反馈	正反馈
1	$0 \leq K_g < +\infty$	180° 根轨迹	0° 根轨迹
2	$-\infty < K_g \leq 0$	0° 根轨迹	180° 根轨迹

但要注意的是，在根轨迹的绘图规则中，开环传递函数 $G_K(s)$ 分子、分母的形式为 $s - z_i$ 、 $s - p_j$ ，因此有些控制的虽然是负反馈结构，但在其开环传递函数的分子或分母多项式中， s 的最高次幂的系数为负，使系统具有正反馈的性质，如：

$$G_{K1}(s) = \frac{K(1-2s)}{(s+2)(s+3)}, \quad G_{K2}(s) = \frac{K(-s^2+3s-2)}{s(s^2+2s+3)}, \quad \text{且 } K > 0$$

就属此情况，遇到这种情况时，在绘制根轨迹前，应先将它们转换为零、极点形式。

$$G_{K1}(s) = \frac{-2K(s-0.5)}{(s+2)(s+3)} = \frac{K_{g1}(s-0.5)}{(s+2)(s+3)}, \quad K_{g1} < 0$$

$$G_{K2}(s) = \frac{-K(s^2-3s+2)}{s(s^2+2s+3)} = \frac{K_{g2}(s^2-3s+2)}{s(s^2+2s+3)}, \quad K_{g2} < 0$$

由于 $K_{g1} < 0$ 、 $K_{g2} < 0$ ，所以它们因该采用 0° 根轨迹法则绘制。

在绘制根轨迹时，若没有特殊指明，一般认为是绘制负反馈控制系统的根轨迹，根轨迹增益 K_g 作为参变量，且大于零，即绘制 180° 根轨迹。

第 18 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第四章 根轨迹法（3 节）
主要内容	系统的根轨迹分析方法
目的与要求	掌握闭环零极点的确定 了解闭环零极点的分布对系统性能的影响 了解开环零极点的分布对系统性能的影响 掌握根据绘制的根轨迹分析系统的稳定性、单调性
重点与难点	重点：系统的稳定性、单调性分析 难点：闭环零极点的确定、
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	4-4、4-6、4-15
<p>4.3 根轨迹分析法</p> <p>应用根轨迹法分析系统，可以进行系统性能的定性分析和估算，以及估计参数变化对系统性能的影响，并提出具体的改善（校正）方法。</p> <p>1. 闭环零点、极点和开环根轨迹增益的确定</p> <p>（1）闭环零点</p> <p>闭环传递函数零点的确定是十分容易的，它实际上是前向通道的零点和反馈通道的极点组成，当为单位反馈时，闭环零点就是开环零点。</p> <p>（2）闭环极点</p> <p>闭环极点的确定方法：</p> <p>一般而言，对于比较简单的系统可先使用幅值方程进行试探确定部分闭环实数极点，然后用综合长除法求其余的闭环极点，或采用闭环极点的和与积的性质来确定其余的闭环极点。</p> <p>（3）根轨迹增益</p> <p>若已知系统的闭环零点和闭环极点，则可利用幅值方程来确定对应的根轨迹增益 K_g。</p> <p>设开环零点、极点分别为 z_i ($i=1,2,\dots,m$)、p_j ($j=1,2,\dots,n$)，求闭环根轨迹上某一点 s_l 对应的根轨迹增益 K_g，则由幅值方程得到：</p> $K_g \frac{\prod_{i=1}^m (s_l - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s_l - p_j)} = 1 \Rightarrow K_g = \frac{\prod_{j=1}^n (s_l - p_j)}{\prod_{i=1}^m (s_l - z_i)}$ <p>2. 闭环零点、极点分布对系统性能的影响</p> <p>（1）稳定性，要求闭环系统稳定，其根轨迹必须全部位于 S 左半平面。如果系统存在三条或三条以上的渐近线，则必有一个 K_g 值，使系统处于临界稳定状态。</p> <p>（2）运动形态，系统的基本运动形态由闭环极点的位置决定。当有一闭环零点和闭环极点重合时，二者构成一对偶极子。留数的计算可知，对应于偶极子的那个极点的运动形态分量将消失。当闭卷极点全部位于负实轴时，响应呈单调上升状态。当闭环极点出现复数时，响应呈衰减振荡形式。</p> <p>（3）平稳性，阻尼角 β 越大，阻尼比 ξ 小，系统的振荡频率越高，振荡越剧烈。要使系统的暂态响应平稳，同时又有比较好的快速性，系统的阻尼比不能太大，也不能太小，理论上讲 $\beta = 45^\circ$，阻尼比 $\xi = 0.707$ 时，系统的总体性能最好。</p> <p>（4）快速性，要使系统具有较好的快速性，除闭环主导极点以外，其余闭环极点应该远离虚轴，使其暂态响应分量衰减加快，系统调节时间减小，从而提高系统的响应速度。</p>	

3. 利用根轨迹估算系统性能

根轨迹法估算闭环系统的性能的方法，主要是利用根轨迹进行图解。

例：设单位反馈系统的开环传递函数为： $K/s(s+1)(0.5s+1)$ ，试应用根轨迹法求系统的单位阶跃响应，并估算系统的性能指标。

解：将开环传递函数该写为零极点表示形式

$$G_K(s) = K/s(s+1)(0.5s+1) = 2K/s(s+1)(s+2) = K_g/s(s+1)(s+2) \quad K_g = 2K$$

计算得到根轨迹的分离会合点坐标为： $d = -0.423, K_g = 0.385$ ；

根轨迹与虚轴的交点为 $s = \pm j1.414, K_g = 6$ 。

绘制根轨迹图如下：

按题目给定要求： $K = 0.525$

则 $K_g = 2K = 1.05$ ，显然对应

的闭环极点应该位于分离

(会合)点以后 ($K_{gd} = 0.385$)

的复平面上，但不会超出左半

平面 (与虚轴交点处的根轨迹增益为 $K_{gs} = 6$)

经试探当 $K_g = 2K = 1.05$ 时的 2 个闭环极点为 $s_{1,2} = -0.33 \pm j0.58$ 。

写出闭环特征方程： $D_B(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K_g = s^3 + 3s^2 + 2s + 1.05 = 0$

由于 $n - m = 3 - 0 = 3 > 2$ ，所以由特征根的和或积的关系可以求取第三个闭环极点：

$$s_1 + s_2 + s_3 = -3 \Rightarrow s_3 = -3 - s_1 - s_2 = -2.43。$$

由于是单位反馈控制系统，且无开环零点，所以得到系统的闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{1.05}{(s + 2.43)(s + 0.33 + j0.58)(s + 0.33 - j0.58)}$$

系统的单位阶跃响应为：

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1.05}{(s + 2.43)(s + 0.33 + j0.58)(s + 0.33 - j0.58)} \times \frac{1}{s}$$

$$c(t) = L^{-1}[C(s)] = 1 - 0.125e^{-2.34t} - 1.297e^{-0.33t} \sin(0.58t + 44.3^\circ) \quad (t \geq 0)$$

性能指标估算：

由于复数极点 $s_{1,2} = -0.33 \pm j0.58$ 周围没有零点，且 $|s_{1,2}| \ll |s_3|$ ，所以可以确定 $s_{1,2} = -0.33 \pm j0.58$ 为闭环主导极点，于是闭环传递函数可以简化为二阶系统。

$$\Phi(s) = \frac{1.05}{2.43(s + 0.33 + j0.58)(s + 0.33 - j0.58)} = \frac{0.448}{s^2 + 0.66s + 0.448}$$

求得： $\omega_n = 0.67(\text{rad/s})$ ， $\xi = 0.49$

计算性能指标为：

$$M_p \% = e^{\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\% = 16.4\% , t_s = 3/\xi\omega_n = 12.1s \quad (\Delta = 0.02)$$

4. 开环零、极点分布对系统性能的影响

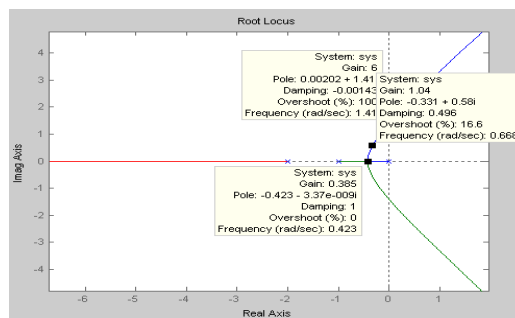
(1) 增加开环零点对根轨迹的影响

第一，加入开环零点，改变渐近线的条数和渐近线的倾角；

第二，增加开环零点，相当于增加微分作用，使根轨迹向左移动或弯曲，从而提高了系统的相对稳定性。系统阻尼增加，过渡过程时间缩短；

第三，增加的开环零点越接近坐标原点，微分作用越强，系统的相对稳定性越好。

(2) 增加开环极点对根轨迹的影响



第一，加入开环极点，改变渐近线的条数和渐近线的倾角；

第二，增加开环极点，相当于增加积分作用，使根轨迹向右移动或弯曲，从而降低了系统的相对稳定性。系统阻尼减小，过渡过程时间加长；

第三，增加的开环极点越接近坐标原点，积分作用越强，系统的相对稳定性越差。

(3) 增加开环偶极子的作用

增加一对开环偶极子，可以改善系统的稳态性能。

设开环偶极子的零点为 z_c 、极点为 p_c ，由于偶极子满足 $z_c \approx p_c$ ，即

$$\angle(s - z_c) = \angle(s - p_c), |s - z_c| = |s - p_c|$$

因此它们对根轨迹几乎没有影响。

设系统在没有增加开环偶极子时的开环放大倍数为 K

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_g \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = \frac{K_g \prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{j=1}^n (-p_j)}$$

增加开环偶极子后的开环放大倍数为 K_c

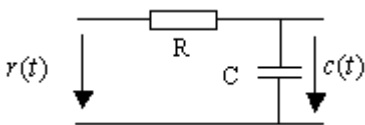
$$K_c = \frac{K_g \prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{j=1}^n (-p_j)} \frac{z_c}{p_c} = K \times \frac{z_c}{p_c}$$

若取 $z_c = -0.5$ ， $p_c = -0.05$ ，则有 $K_c = K \times \frac{z_c}{p_c} = K \times \frac{0.5}{0.05} = 10K$

显然开环放大倍数增加了 10 倍，系统的稳态精度得到了有效的提高。

第 19 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第五章 线性系统的频域分析方法（1、2 节）
主要内容	频率特性的基本概念、定义以及几何表示法 典型环节的频率特性
目的与要求	了解频率特性的基本概念 掌握频率特性的定义 掌握常用频率特性（幅频特性、相频特性、实频特性和虚频特性） 掌握频率特性的两种几何表示方法 了解个典型环节的频率特性
重点与难点	重点：频率特性的定义、常用频率特性以及两种几何表示方法 难点：频率特性的两种几何表示方法
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	5-2
<p>5.1 频率特性 一、基本概念 下面以 RC 电路为例，说明频率特性的基本概念。</p>  <p>上图网络的传递函数为 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1}$，其中 $T = RC$。</p> <p>若网络输入为正弦信号，即 $r(t) = R \sin \omega t$ 时，可得：$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \frac{R}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctan \omega T)$，</p> <p>可见网络的稳态输出仍然是正弦电压，其频率和输入电压频率相同，幅值是输入的 $\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$ 倍，相角比输入滞后 $\arctan \omega T$，两者都是 ω 的函数，$\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$ 称为 RC 网络的幅频特性，$-\arctan \omega T$ 称为 RC 网络的相频特性。</p> <p>则 $\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \cdot e^{-j \arctan \omega T} = \left \frac{1}{1+j\omega T} \right \cdot e^{j \angle \frac{1}{1+j\omega T}} = \frac{1}{1+j\omega T} = G(j\omega)$ 称为网络的频率特性。</p> <p>$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{1+Ts} \Big _{s=j\omega}$。这一结论对任何稳定的线性定常系统都是正确的。</p> <p>二、频率特性的定义</p> <p>频率特性：输出信号的 Fourier 变换与输入信号的 Fourier 变换之比。$G(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = G(s) \Big _{s=j\omega}$。</p> <p>其物理意义即反映了系统对正弦信号的三大传递能力：同频、变幅、移相。</p> <p>幅频特性函数：$A(\omega) = G(j\omega)$ 相频特性函数：$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$ 实频特性函数：$\text{Re}(\omega) = \text{Re}[G(j\omega)]$ 虚频特性函数：$\text{Im}(\omega) = \text{Im}[G(j\omega)]$</p>	

三、频率特性的几何表示方法

1、极坐标图或幅相频率特性曲线 (Nyquist 曲线)

这种曲线的特点是把频率 ω 看成参变量, 当 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时, 将频率特性的幅频和相频特性或实频和虚频特性同时表示在复数平面上。

极坐标图绘制时应注意以下几点:

规定实轴正方向为相角零度线, 曲线逆时针方向为正, 顺时针方向为负;

对于一个给定的 ω 值, 必有一个幅值为 $|G(j\omega)|$ 、相角为 $\angle G(j\omega)$ 的向量与之对应。

幅相曲线实际上是 $G(j\omega)$ 当 $\omega: 0 \rightarrow \infty$ 变化时, 矢量 $\overrightarrow{G(j\omega)}$ 的矢端在 S 平面上描绘出的一条曲线;

2、对数坐标图 (Bode 图)

对数频率特性图也称为伯德图 (Bode), 是由对数幅频曲线和对数相频曲线 2 条曲线组成。对数频率特性图的横坐标是 ω , 采用以 10 为底的对数 $\lg \omega$ 分度 (对于频率 ω 是非线性分度), 单位是 rad/s 。对数幅频曲线的纵坐标表示对数幅频特性的函数值, 按 $20 \lg |G(j\omega)|$ 均匀线性分度, 单位是分贝 (dB), 常用符号 $L(\omega)$ 表示, 即 $L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)|$ (dB); 对数相频特性的纵坐标为 $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$, 按度 ($^\circ$) 或弧度 (rad) 线性分度。

值得注意的是, 横坐标以 $\lg \omega$ 线性分度, 但对于 ω 却是非线性分度的。

对数频率特性图的优点:

高频部分横坐标得到了压缩, 而低频部分相对展宽。从而可以扩大频率的观察范围, 同时又可以在同一幅图上观察低频段的细小变化;

可以简化运算

可以将对数幅频的相乘运算, 变成为了取对数以后的加法运算, 从而使运算得到了简化。

方便叠加作图

在对数坐标图上, 对数频率特性可以用分段直线的渐近线来表示, 因此在进行叠加作图时, 只需要在直线斜率变化时, 修正直线的斜率即可。

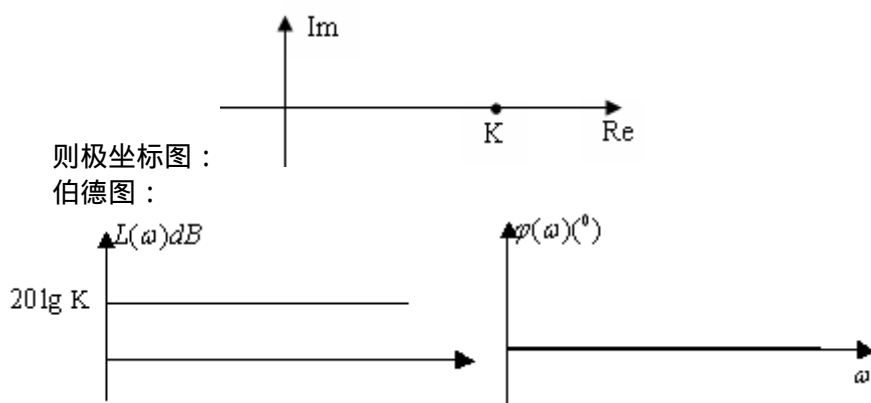
5.2 典型环节的频率特性

1. 比例环节

传递函数: $G(s) = K$, 频率特性: $G(j\omega) = K$,

幅频特性: $A(\omega) = K$, 相频特性: $\varphi(\omega) = 0^\circ$

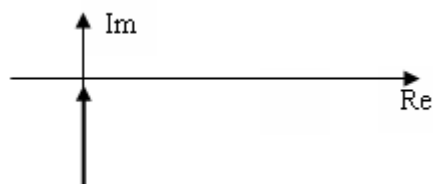
对数幅频特性: $L(\omega) = 20 \lg K$, 对数相频特性: $\varphi(\omega) = 0^\circ$



2. 积分环节

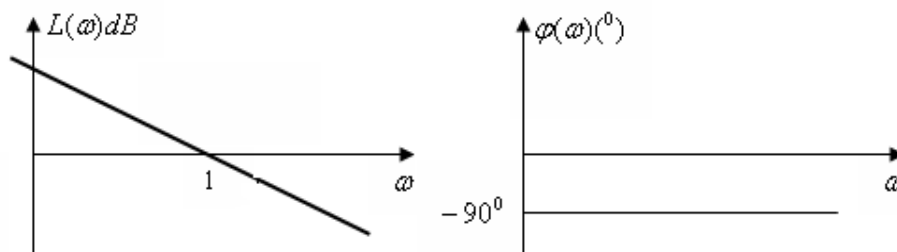
传递函数: $G(s) = 1/s$, 频率特性: $G(j\omega) = 1/j\omega$, 幅频特性: $A(\omega) = 1/\omega$, 幅值的大小与 ω 成反比, 相频特性: $\varphi(\omega) = -90^\circ$, 因此曲线在负虚轴上。

对数幅频特性: $L(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\omega} = -20 \lg \omega$, 对数相频特性: $\varphi(\omega) = -90^\circ$



极坐标图：

伯德图：

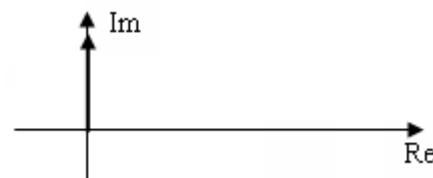


3. 微分环节

传递函数： $G(s) = s$ ，频率特性： $G(j\omega) = j\omega$ ，

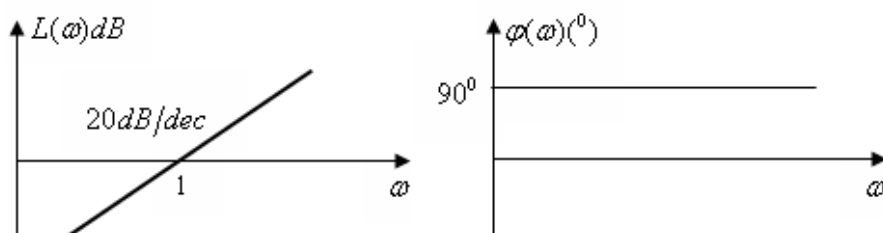
幅频特性： $A(\omega) = \omega$ ，相频特性： $\varphi(\omega) = 90^\circ$ ，幅值大小与 ω 成正比，因此曲线在正虚轴上。对

数幅频特性： $L(\omega) = 20 \lg \omega$ ，对数相频特性： $\varphi(\omega) = 90^\circ$



极坐标图：

伯德图：



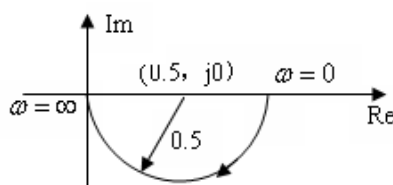
微分环节与积分环节的传递函数互为倒数，对数幅频特性和对数相频特性仅差一个符号，因此他们的伯德图关于横轴对称。

4. 惯性环节

传递函数： $G(s) = 1/(1 + Ts)$ ，频率特性 $G(j\omega) = 1/(1 + j\omega T)$ ，

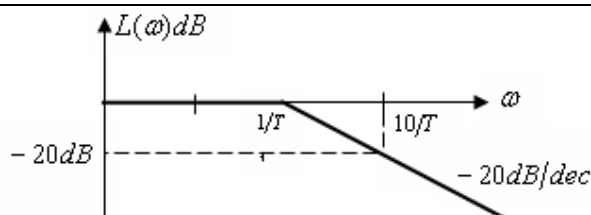
幅频特性： $A(\omega) = 1/\sqrt{1 + (\omega T)^2}$ ，相频特性： $\varphi(\omega) = -\arctan \omega T$

$$G(j\omega) = 1/(1 + j\omega T) = \frac{1}{1 + (\omega T)^2} - j \frac{\omega T}{1 + (\omega T)^2}$$



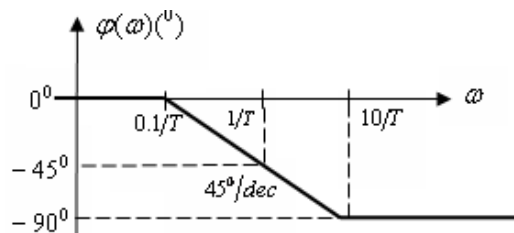
对数幅频特性：

$$L(\omega) = 20 \lg 1/\sqrt{1 + (\omega T)^2} = -20 \lg \sqrt{1 + (\omega T)^2} = \begin{cases} -20 \lg \sqrt{1 + 0} = 0, & \omega \ll 1/T \\ -20 \lg \sqrt{(\omega T)^2} = -20 \lg \omega - 20 \lg T, & \omega \gg 1/T \end{cases}$$



对数相频特性： $\varphi(\omega) = -\arctg \omega T$

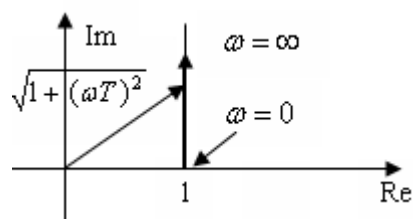
惯性环节的对数相频特性曲线为：



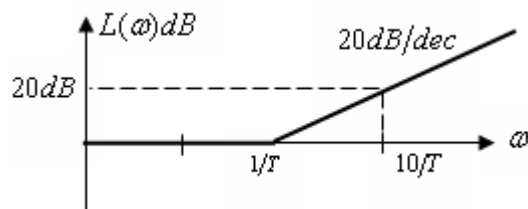
5. 一阶微分环节

传递函数： $G(s) = 1 + Ts$ ，频率特性 $G(j\omega) = 1 + j\omega T$ ，

幅频特性： $A(\omega) = \sqrt{1 + (\omega T)^2}$ ，相频特性： $\varphi(\omega) = \arctg \omega T$

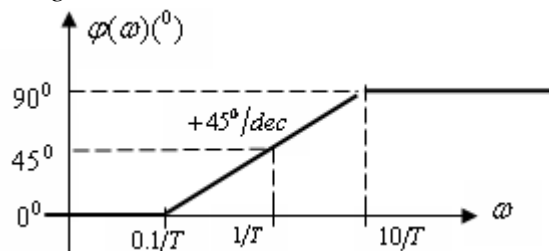


对数幅频特性： $L(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + (\omega T)^2} = \begin{cases} 20 \lg \sqrt{1 + 0} = 0, & \omega \ll 1/T \\ 20 \lg \sqrt{(\omega T)^2} = 20 \lg \omega + 20 \lg T, & \omega \gg 1/T \end{cases}$



一阶微分环节的对数幅频特性曲线与惯性环节的对数幅频特性是依横轴成镜像对称的。

对数相频特性： $\varphi(\omega) = \arctg \omega T$



一阶微分环节的对数相频特性曲线与惯性环节的对数相频特性是依横轴成镜像对称的。

第 20 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第五章 线性系统的频域分析方法（2、3 节）
主要内容	典型环节的频率特性 开环极坐标图的绘制
目的与要求	掌握各种典型环节的频率特性及其伯德图和极坐标图的特点 掌握开环极坐标图的绘制
重点与难点	重点：各种典型环节的伯德图、开环极坐标图的绘制 难点：开环极坐标图的绘制
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	5-4（2）、（4）

6. 振荡环节

传递函数： $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

频率特性： $G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$

幅频特性： $A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}}$

相频特性： $\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2}$

实频特性： $\text{Re}(\omega) = \frac{1-T^2\omega^2}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}$ 虚频特性： $\text{Im}(\omega) = -\frac{2\xi T\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}$

式中 $T = 1/\omega_n$ ，为振荡环节的转折频率。

在阻尼比 $\xi < 0.707$ ，且 $\omega = \omega_r$ 时，振荡环节发生了谐振。可以求得谐振时的 ω_r 和 M_r 。

$$\left. \frac{d}{d\omega} A(\omega) \right|_{\omega=\omega_r} = 0 \Rightarrow \omega_r = \frac{1}{T} \sqrt{1-2\xi^2}$$

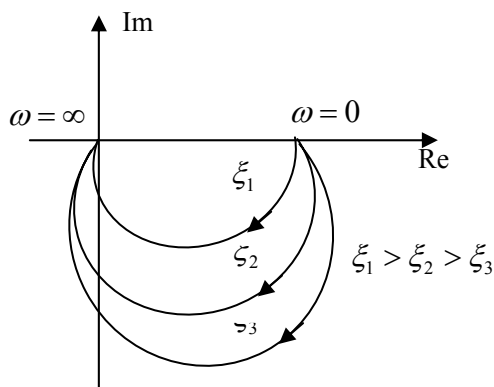
$$M_r = A(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$\xi > 0.707$ 时，无谐振峰值， $A(\omega)$ 单调衰减
 $\xi = 0.707$ 时，临界谐振， $\omega_r = 0$ ， $M_r = 1$
 $\xi < 0.707$ 时，有谐振峰值， $\omega_r > 0$ ， $M_r > 1$
 $\xi = 0$ 时， $\omega_r = \omega_n$ ， $M_r = \infty$ ，这说明外加的信号频率成分与系统的自然振荡频率相等时，将引起系统产生共振现象

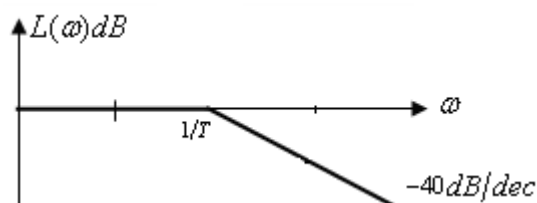
对数幅频特性：

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2} = \begin{cases} 20 \lg \sqrt{1+0} = 0 \text{ dB}, \omega \ll 1/T \\ -20 \lg 2\xi = -6.02 - 20 \lg \xi \text{ (dB)}, \omega = 1/T \\ 20 \lg (T\omega)^2 = 40 \lg \omega + 40 \lg T \text{ (dB)}, \omega \gg 1/T \end{cases}$$

上式 $\omega = \omega_n = 1/T$ 称为振荡环节的转折频率。

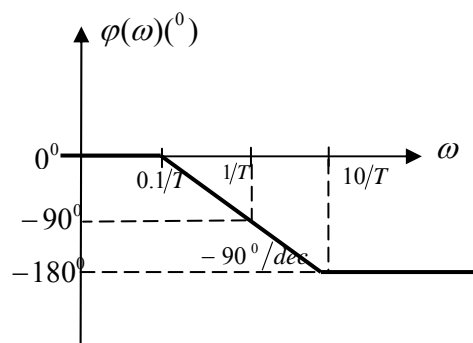


振荡环节的对数幅频特性曲线为：



对数相频特性： $\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2}$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2} = \begin{cases} 0^\circ, \omega \ll 1/T \\ -90^\circ, \omega = 1/T \\ -180^\circ, \omega \gg 1/T \end{cases}$$



7. 二阶微分环节

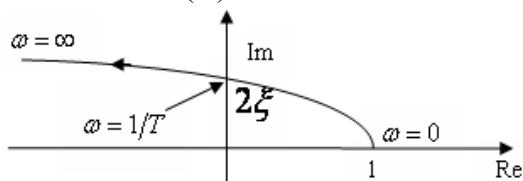
$$\text{传递函数: } G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{Ts^2 + 2\xi Ts + 1}, \quad T = \frac{1}{\omega_n}$$

$$\text{频率特性: } G(j\omega) = T^2(j\omega)^2 + 2\xi T(j\omega) + 1 \quad \text{幅频特性: } A(\omega) = \sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}$$

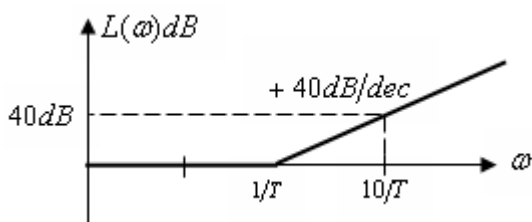
$$= (1-T^2\omega^2) + j(2\xi T\omega)$$

$$\text{相频特性: } \varphi(\omega) = \arctg \frac{2\xi T\omega}{1-(T\omega)^2}$$

$$\text{实频特性: } \text{Re}(\omega) = 1-T^2\omega^2, \quad \text{虚频特性: } \text{Im}(\omega) = 2\xi T\omega$$



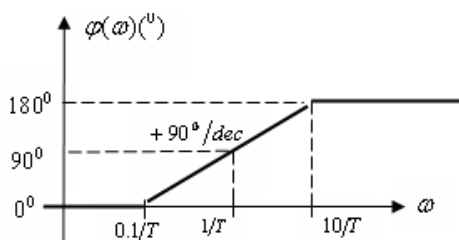
对数幅频特性：



二阶微分环节的对数频率特性与振荡环节是依横轴成镜像对称的，于是有 $\omega = \omega_n = 1/T$ 为二阶微分环节的转折频率。

$$\text{对数相频特性: } \varphi(\omega) = \arctg \frac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2}$$

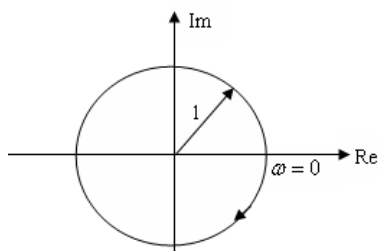
二阶微分环节的对数相率特性与振荡环节是依横轴成镜像对称的：



8. 延迟环节

传递函数： $G(s) = e^{-s}$, 频率特性： $G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$

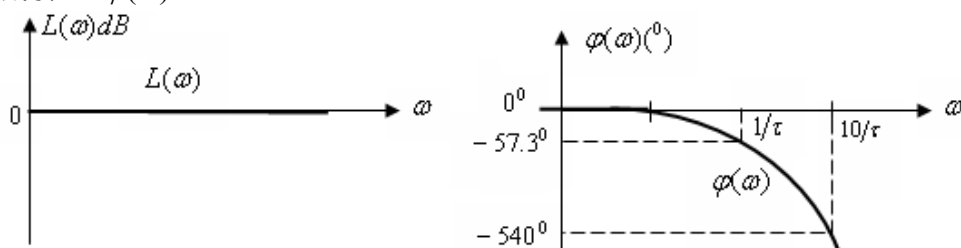
幅频特性： $A(\omega) = 1$, 相频特性： $\varphi(\omega) = -\omega\tau$



幅相频率特性：

对数幅频特性： $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg 1 = 0$

对数相频特性： $\varphi(\omega) = -\omega\tau$



5.3 系统开环频率特性的绘制

一、开环及坐标图

将开环传递函数表示为时间常数表达式

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = K \frac{\prod_{k=1}^{m_1} (\tau_k s + 1) \prod_{l=1}^{m_2} (\tau_l^2 s^2 + 2\tau_l \zeta_l s + 1)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n_1} (T_i s + 1) \prod_{j=1}^{n_2} (T_j^2 s^2 + 2T_j \xi_j s + 1)} = \frac{K}{s^\nu} G_0(s)$$

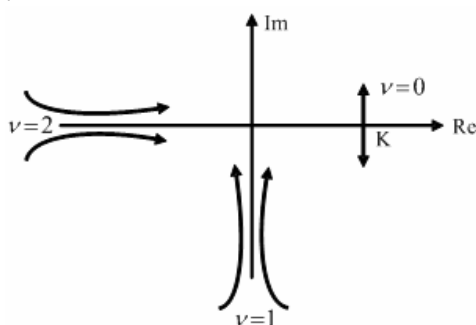
式中： $m_1 + 2m_2 = m$, $\nu + n_1 + 2n_2 = n$

(1) 确定极坐标图的起点

极坐标图的起点是 $\omega \rightarrow 0$ 时 $G_k(j0^+)$ 在复平面上的位置。

$$G_k(j0^+) = \left. \frac{K}{(j\omega)^\nu} G_0(j\omega) \right|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{K}{(j\omega)^\nu}$$

$$\begin{cases} \nu = 0 \text{ 时, } G_k(j\omega) = K \angle 0^\circ, \\ \text{即极坐标图起始于正实轴上的某一点} \\ \nu \neq 0 \text{ 时, } G_k(j\omega) = \infty \angle -\nu \times 90^\circ, \\ \text{即极坐标图起始于无穷远处} \end{cases}$$

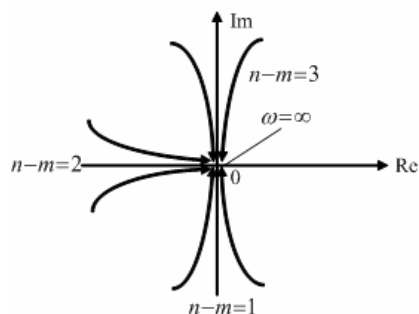


(2) 确定极坐标的终点 ($n > m$)

极坐标图的起点是 $\omega \rightarrow +\infty$ 时 $G_k(+j\infty)$ 在复平面上的位置。

$$G_k(+j\infty) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \bigg|_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{b_0}{a_0} \times \frac{1}{(j\omega)^{n-m}} = \frac{b_0/a_0}{(j\omega)^{n-m}}$$

$$\begin{cases} n-m=1 \text{ 时, } G_k(j\omega) = 0 \angle -90^\circ, \text{ 从负虚轴的方向进入坐标原点} \\ n-m=2 \text{ 时, } G_k(j\omega) = 0 \angle -180^\circ, \text{ 从负实轴的方向进入坐标原点} \\ n-m=3 \text{ 时, } G_k(j\omega) = 0 \angle -270^\circ, \text{ 从正虚轴的方向进入坐标原点} \end{cases}$$



(3) 极坐标图穿越实轴的位置

令频率特性 $G(j\omega)$ 的虚部为零, 即 $\text{Im}[G(j\omega)] = 0$, 并求得相应的频率 ω_x , 然后将此频率 ω_x 代入频率特性 $G(j\omega)$ 的实部, 则 $\text{Re}[G(j\omega_x)]$ 就是极坐标图与实轴的交点。

例: 设系统的开环传递函数为 $G_K(s) = k/(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)$, 试绘制其幅相曲线。

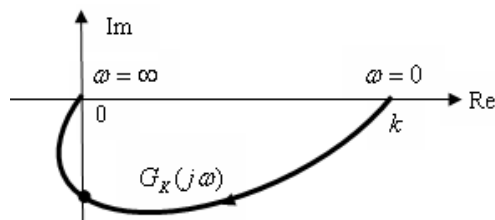
解: 系统的开环频率特性:

$$G_K(j\omega) = \frac{k}{T_1 T_2 (j\omega + \frac{1}{T_1})(j\omega + \frac{1}{T_2})}$$

由开环频率特性可知, 系统为 0 型, 即 $\nu = 0$ 。

幅相曲线的起点为: $G_K(j0) = k \angle 0^\circ$, 幅相曲线的终点为: $G_K(j\infty) = 0 \angle -180^\circ$ 。

粗略画出幅相曲线如下:



例: 已知单位负反馈系统开环传递函数为 $G_K(s) = \frac{1}{s(s+1)}$, 试绘制系统幅相曲线。

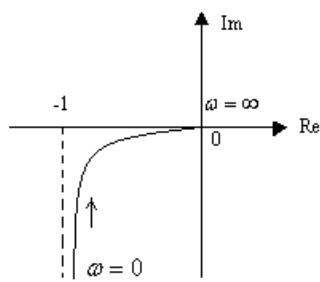
$$\text{解: 统的开环频率特性: } G_K(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)} = -\frac{1}{1+\omega^2} - j\frac{1}{\omega(1+\omega^2)}$$

由开环频率特性可知, 系统为 I 型, 即 $\nu = 1$ 。

于是幅相曲线的起点为: $G_K(j0) = \infty \angle -90^\circ$, 当 $\omega = 0$ 时, 实部函数有渐近线 -1。

由 $n-m=2$ 可得幅相曲线的终点为: $G_K(j\infty) = 0 \angle -180^\circ$

通过分析实部和虚部函数可知与坐标轴无交点。由上分析结论作出系统的开环极坐标图如下:



例：设系统的开环传递函数为 $G_K(s) = k(2s+1)/s^2(0.5s+1)(s+1)$ ，试粗略绘制其幅相曲线。

解：系统的开环频率特性：

$$G_K(j\omega) = \frac{k(j2\omega+1)}{(j\omega)^2(j0.5\omega+1)(j\omega+1)}$$

由开环频率特性可知，系统为 2 型，即 $\nu=2$ 。

于是幅相曲线的起点为： $G_K(j0) = \infty \angle -180^\circ$

幅相曲线的终点为： $G_K(j\infty) = 0 \angle -270^\circ$

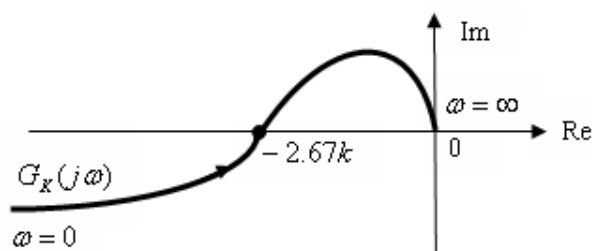
幅相曲线与实轴的交点：

$$G_K(j\omega) = \frac{k(j2\omega+1)}{(j\omega)^2(j0.5\omega+1)(j\omega+1)} = \frac{k}{\omega^2(1+0.25\omega^2)(1+\omega^2)} \left[-(1+2.5\omega^2) - j(0.5-\omega^2) \right]$$

$\text{Im}[G_K(j\omega)] = 0.5 - \omega^2 = 0$ ，求得 $\omega_x^2 = 0.5$ ，代入求得幅相曲线与实轴的交点为

$$\text{Re}[G_K(j\omega_x)] = -2.67k$$

粗略画出幅相曲线如下



第 21 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第五章 线性系统的频域分析方法（3 节）
主要内容	控制系统的开环频率特性
目的与要求	掌握开环 Bode 图的绘制 掌握根据 Bode 图确定最小相位系统的传递函数
重点与难点	重点：开环 Bode 图的绘制、根据 Bode 图确定最小相位系统的传递函数 难点：同上
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	5-3（4）、5-5（2）（3）

二、开环伯德图

手工作图的一般步骤：

（1）将开环传递函数表示为时间常数表达式

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = K \frac{\prod_{k=1}^{m_1} (\tau_k s + 1) \prod_{l=1}^{m_2} (\tau_l^2 s^2 + 2\tau_l \zeta_l s + 1)}{s^\nu \prod_{i=1}^{n_1} (T_i s + 1) \prod_{j=1}^{n_2} (T_j^2 s^2 + 2T_j \xi_j s + 1)} = \frac{K}{s^\nu} G_0(s)$$

式中：\$m_1 + 2m_2 = m\$，\$\nu + n_1 + 2n_2 = n\$

（2）求 \$20 \lg K\$ 的值，并明确积分环节的个数 \$\nu\$

（3）确定各典型环节的转折频率，并按由小到大排序

（4）确定低频段渐近线。

低频段频率特性为

$$G_K(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^\nu} G_0(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{K}{(j\omega)^\nu}$$

$$\text{对数幅频特性为：} L(\omega) = 20 \lg \left| \frac{K}{(j\omega)^\nu} \right| = 20 \lg K - 20 \times \nu \times \lg \omega$$

$$\text{对数相频特性为：} \varphi(\omega) = -\nu \times 90^\circ$$

上述表明：

低频段的对数幅频特性直线的斜率为 \$-20 \times \nu \text{ dB/dec}\$，相频角度为 \$-\nu \times 90^\circ\$；

当 \$\omega = 1\$ 时，低频段直线或其延长线（在 \$\omega < 1\$ 的范围内有转折频率）的分贝值为 \$20 \lg K\$，这是因为由低频段的幅频方程，可得到

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \times \nu \times \lg \omega \Big|_{\omega=1} = 20 \lg K$$

低频段直线（或其延长线）与零分贝线（横轴）的交点频率为 \$\omega_0 = K^{\frac{1}{\nu}}\$，对于 I 型系统交点频率为 \$\omega_0 = K\$，II 型系统交点频率为 \$\omega_0 = \sqrt{K}\$；这是因为由低频段的幅频方程，可得到

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \times \nu \times \lg \omega = 0 \Rightarrow 20 \lg K = 20 \times \nu \times \lg \omega = 20 \lg \omega^\nu$$

$$\text{于是有：} \omega^\nu = K \Rightarrow \omega_0 = K^{\frac{1}{\nu}}$$

(5) 绘制中频段

首先在横坐标轴上将转折频率按从低到高的顺序标出各转折频率。然后，依次在各转折频率处改变直线的斜率，改变的多少取决于转折处环节的性质，如惯性环节的斜率为 $-20\text{dB}/\text{dec}$ ，振荡环节为 $-40\text{dB}/\text{dec}$ ，一阶微分环节为 $+20\text{dB}/\text{dec}$ ，二阶微分环节为 $+40\text{dB}/\text{dec}$ 等等。

例：已知单位反馈控制系统的开环传递函数为 $G_K(s) = 100(s+2)/s(s+1)(s+20)$ ，试绘制其开环系统的 Bode 图。

解：由给定的系统开环传递函数得到系统的开环频率特性，并将其归一化

$$\begin{aligned} G_K(j\omega) &= 100(j\omega+2)/j\omega(j\omega+1)(j\omega+20) \\ &= \frac{100 \times 2(j0.5\omega+1)}{j\omega(j\omega+1) \times 20 \times (j0.05\omega+1)} \end{aligned}$$

由此可见，系统地开环频率特性有 5 个典型环节构成，分别为

(1) 比例环节： $G_1(j\omega) = 10$ ， $L_1(\omega) = 20\lg 10 = 20\text{dB}$ ， $\varphi_1(\omega) = 0^\circ$

(2) 一阶微分环节： $G_2(j\omega) = j0.5\omega+1$ ，转折频率 $\omega = 1/T = 1/0.5 = 2$

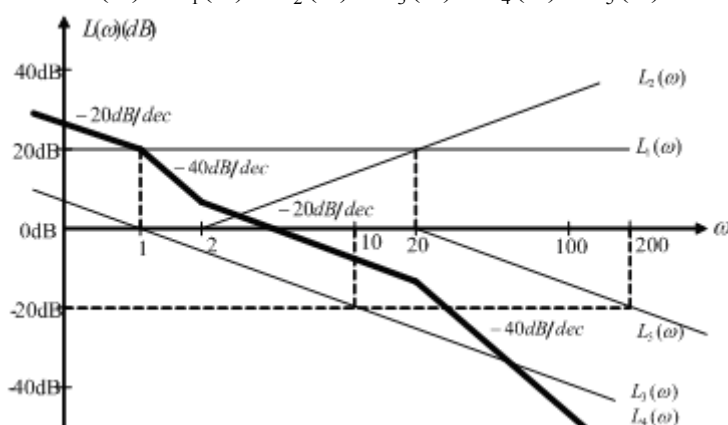
(3) 积分环节： $G_3(j\omega) = 1/j\omega$

(4) 一阶惯性环节： $G_4(j\omega) = 1/(j\omega+1)$ ，转折频率 $\omega = 1/T = 1/1 = 1$

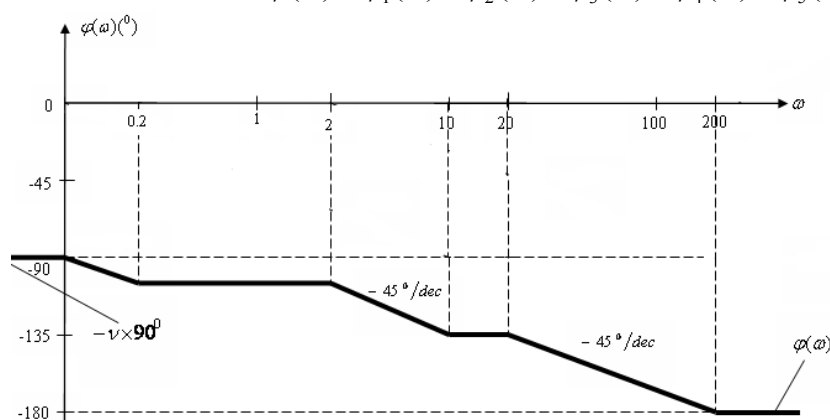
(5) 一阶惯性环节： $G_5(j\omega) = 1/(j0.05\omega+1)$ ，转折频率 $\omega = 1/T = 1/0.05 = 20$

合成后的系统开环对数幅频特性：

$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + L_3(\omega) + L_4(\omega) + L_5(\omega)$$



合成后的系统开环对数相频特性： $\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \varphi_3(\omega) + \varphi_4(\omega) + \varphi_5(\omega)$

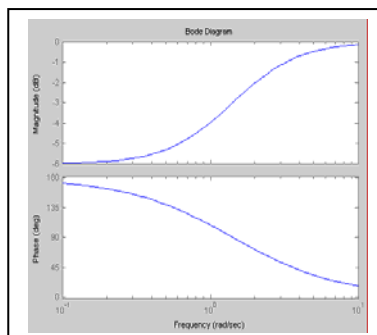
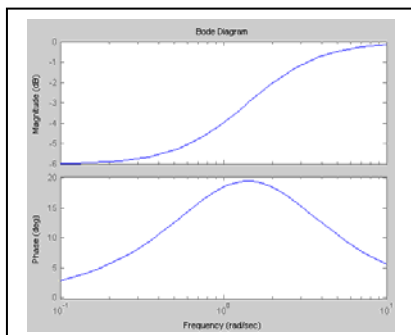


三、最小相位系统

最小相位系统定义：系统开环传递函数的零点、极点全部位于 S 左半平面，同时又无纯滞后环节的系统称为最小相位系统。否则就是非最小相位系统。

试绘制 $G_1(s) = \frac{1+s}{1+2s}$ 和 $G_2(s) = \frac{1-s}{1+2s}$ 的对数频率特性如下并比较如下

$$\begin{cases} L_1(\omega) = -20\lg\sqrt{1+\omega^2} - 20\lg\lg\sqrt{1+4\omega^2} \\ L_2(\omega) = -20\lg\sqrt{1+\omega^2} - 20\lg\lg\sqrt{1+4\omega^2} \end{cases}, \begin{cases} \varphi_1(\omega) = \arctg\omega - \arctg 2\omega \\ \varphi_2(\omega) = -\arctg\omega - \arctg 2\omega \end{cases}$$

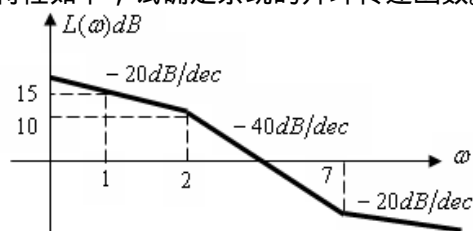


由上述比较，可以得出如下结论

- (1) 当 $\omega = 0 \rightarrow \infty$ 变化时，最小相位系统的相角变化最小，而非最小相位系统的相角变化一般较大；
- (2) 最小相位系统的对数幅频 $L(\omega)$ 的斜率变化趋势与对数幅频 $\varphi(\omega)$ 的变化趋势一致，而非最小相位系统则不然。

由于最小相位系统的幅频与相频的一一对应关系，因此可以仅由系统的开环幅频特性来确定系统的频率特性（或传递函数），而不会引起奇异。

例：已知系统的开环对数幅频特性如下，试确定系统的开环传递函数。



解：由图可见，低频段的斜率为 -20dB/dec ，所以开环传递函数有一个积分环节。

由于在低频段 $\omega = 1$ 时， $L(\omega) = 15\text{dB}$ ，所以系统的开环放大倍数为满足 $20\lg K = 15$ ，从而求得 $K = 10^{15/20} = 10^{0.75} = 5.6$ 。

由此可以写出系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{5.6(\frac{1}{7}s + 1)}{s(\frac{1}{2}s + 1)} = \frac{5.6(0.14s + 1)}{s(0.5s + 1)}$$

频率特性为： $G(j\omega) = \frac{5.6(j\frac{\omega}{7} + 1)}{j\omega(j\frac{\omega}{2} + 1)}$ ，相频特性为： $\varphi(\omega) = -90^\circ + \arctg\frac{\omega}{7} - \arctg\frac{\omega}{2}$

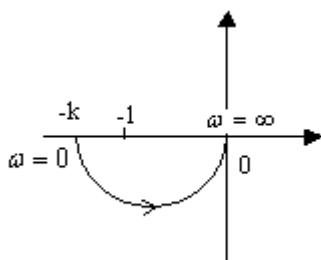
第 22 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第五章 线性系统的频域分析方法（4 节）
主要内容	奈氏稳定判据
目的与要求	了解辅助函数的构成以及奈氏判据的推导过程 掌握奈氏稳定判据及增补线的绘制
重点与难点	重点：奈氏稳定判据 难点：增补线的绘制、稳定的判断
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	5-10
<p>5.4 奈奎斯特稳定判据</p> <p>(1) 开环传递函数没有积分环节</p> <p>已知开环系统特征方程式在 S 右半平面的根的个数为 P，当 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时，开环频率特性的轨迹在 $G(j\omega)H(j\omega)$ 平面围绕 $(-1, j0)$ 点的圈数为 R（规定顺时针旋转为负，逆时针旋转为正），则闭环系统特征方程式在 S 右半平面的个数为 Z，且 $Z = P - 2R$。</p> <p>若 $Z = 0$，则闭环系统特征根均位于 S 左半平面，闭环系统稳定；</p> <p>若 $Z \neq 0$，则闭环系统有 Z 个特征根在 S 右半平面，闭环系统不稳定。</p> <p>以上的等价表示</p> <p>对于开环稳定的系统（即 $P = 0$），$G_K(s)$ 在 S 右半平面上无极点，闭环系统稳定的充分必要条件是**其开环极坐标曲线不包围 $(-1, j0)$ 点；</p> <p>对于开环不稳定的系统（即 $P \neq 0$），$G_K(s)$ 在 S 右半平面上有 P 个极点，闭环系统稳定的充分必要条件是**其开环极坐标曲线当 ω 从 $0 \rightarrow +\infty$ 变化时，以逆时针方向包围 $(-1, j0)$ 点 $P/2$ 圈，即 $R = P/2$；</p> <p>若闭环系统不稳定，则该系统在 s 右半平面的极点个数为 $Z = P - 2R$，R 为极坐标曲线围绕 $(-1, j0)$ 点的圈数（规定顺时针旋转为负，逆时针旋转为正）。</p> <p>推论：若极坐标曲线顺时针方向包围 $(-1, j0)$ 点 ($R < 0$)，则不论开环系统稳定与否，闭环系统总是不稳定的。</p> <p>例：已知各系统的开环幅相频率曲线如下，试判别其闭环系统的稳定性。</p> <p>解：图 (a)，已知 $p = 0$，且 $R = 0$，即开环幅相曲线没有包围 $(-1, j0)$ 点，所以闭环系统稳定；</p> <p>图 (b)，已知 $p = 0$，且 $R = -1$，即开环幅相曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 1 圈，于是 $Z = P - 2R = 0 - 2 \times (-1) = 2 \neq 0$，有 2 个闭环特征根位于 S 右半平面，所以闭环系统稳定；</p> <p>图 (c)，已知 $p = 0$，且 $R = -1/2 + 1/2 = 0$，即开环幅相曲线没有包围 $(-1, j0)$ 点，所以闭环系统稳定。</p> <p>例：单位负反馈系统开环传递函数为 $G_K(s) = K/(Ts - 1)$，试判断闭环系统的稳定性。</p> <p>解：绘制幅相曲线图</p>	

$$G_K(j\omega) = K / (jT\omega - 1) = \frac{-k}{1+T^2\omega^2} - j \frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2}$$

起点： $G_K(j0) = k \angle -180^\circ$ ，终点： $G_K(j\infty) = 0 \angle -90^\circ$ ，分析实部和虚部函数可知与实轴无交点（除起点）。作极坐标图如下：



系统有一个开环极点位于右半平面，所以 $P=1$ 。

当 $-k < -1$ 即 $k > 1$ 时， $R=1/2$ ，则 $Z = P - 2R = 0$ ，系统稳定；

当 $-k > -1$ 即 $0 < k < 1$ 时， $R=0$ ，则 $Z = P - 2R = 1 \neq 0$ ，系统不稳定。

(2) 若开环传递函数有积分环节

当开环传递函数有积分环节时，处理的方法是从幅相曲线 $\omega = 0^+$ 的位置开始，沿逆时针方向画 $\nu \times 90^\circ$ 的圆弧增补线（理论上半径为无穷大），在计算包围 $(-1, j0)$ 点的圈数时，要连同所画的圆弧增补线在内。

例：已知系统的开环传递函数为 $G_K(s) = K/s(T_1s+1)(T_2s+1)$ ，试画出幅相曲线图，并判别闭环系统的稳定性。

解：绘制幅相曲线图

起点： $G_K(j0) = \infty \angle -90^\circ$ ，终点： $G_K(j\infty) = 0 \angle -3 \times 90^\circ = \angle -270^\circ$

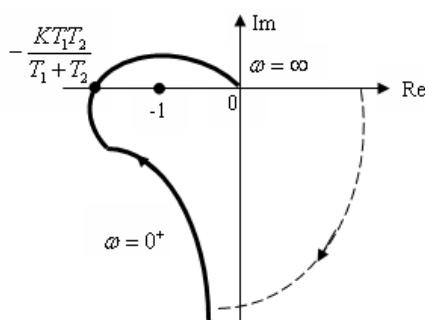
与实轴的交点：

$$G_K(j\omega) = K/s(T_1j\omega+1)(T_2j\omega+1) = \frac{1}{1+\omega^2(T_1^2+T_2^2)+\omega^4T_1^2T_2^2} \left[-K(T_1+T_2) - j \frac{K}{\omega}(1-\omega^2T_1T_2) \right] \quad \text{令}$$

虚部等于零，得到： $1 - \omega^2 T_1 T_2$ ，求得： $\omega_x^2 = 1/T_1 T_2$

于是幅相曲线与实轴的交点坐标为 $-\frac{K(T_1+T_2)}{1+\omega^2(T_1^2+T_2^2)+\omega^4T_1^2T_2^2} \Big|_{\omega_x^2=1/T_1T_2} = -\frac{KT_1T_2}{T_1+T_2}$

由此画出幅相曲线如下



由于 $\nu=1$ ，所以需从 $\omega = 0^+$ 的位

置开始逆时针画 90° 的增补线，如图中虚线所示，计算幅相曲线包围 $(-1, j0)$ 点的圈数。

当 $-\frac{KT_1T_2}{T_1+T_2} < -1$ ，即 $K > \frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$ 时，幅相曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 点 1 圈，即 $R = -1$ ，于是 $Z = P - 2R = 2$ ，所以闭环系统不稳定；

当 $-\frac{KT_1T_2}{T_1+T_2} > -1$ ，即 $K < \frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$ 时，幅相曲线不包围 $(-1, j0)$ 点，即 $R = 0$ ，于是 $Z = P - 2R = 0$ ，所以闭环系统稳定。

例：已知系统开环传递函数为 $G_K(s) = \frac{k(0.1s+1)}{s(s-1)}$ ，由奈氏稳定判据判断闭环系统的稳定性。

解：绘制幅相曲线图

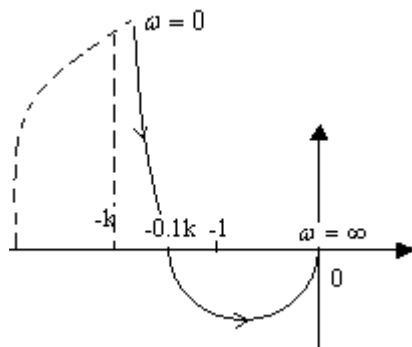
$$\text{系统的频率特性为 } G_K(j\omega) = \frac{k(j0.1\omega+1)}{j\omega(j\omega-1)} = \frac{-1.1\omega k + j(1-0.1\omega^2)k}{\omega(1+\omega^2)}$$

起点： $G_K(j0) = \infty \angle -270^\circ$ ，且有渐近线 $\text{Re}(0^+) = -k$ ；

终点： $G_K(j\infty) = 0 \angle -3 \times 90^\circ = \angle -270^\circ$

与实轴的交点：当 $\text{Im}(\omega) = 0$ 时， $\omega = \sqrt{10}$ 代入实部，得 $\text{Re}(\omega) = -0.1k$ 。

可作出系统极坐标图如下：



由于 $\nu=1$ ，所以需从 $\omega=0^+$ 的位置开始逆时针画 90° 的增补线，如图中虚线所示。

由开环传递函数可知 $P=1$ 。

当 $-0.1k < -1$ 即 $k > 10$ 时， $R=1-1/2=1/2$ ，则 $Z=P-2R=0$ ，系统稳定；

当 $-0.1k > -1$ 即 $0 < k < 10$ 时， $R=-1/2$ ，则 $Z=P-2R=2 \neq 0$ ，系统不稳定。

第 23 次课

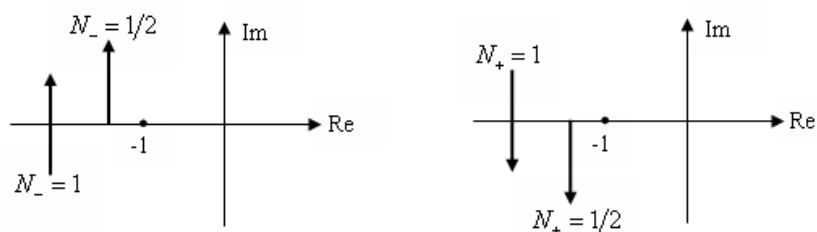
授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第五章 线性系统的频域分析方法（4、5 节）
主要内容	伯德图上的稳定判据 稳定裕度
目的与要求	了解极坐标图与伯德图的对应 掌握伯德图上的稳定判据 掌握稳定裕度的计算
重点与难点	重点：伯德图上的稳定判据、稳定裕度的计算 难点：稳定裕度的计算
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	5-7、5-9

四、奈奎斯特稳定判据在伯德图中的应用

（1）关于幅相曲线围绕 $(-1, j0)$ 点圈数 R 的计算

负穿越：幅相曲线由下向上（幅角减小）穿越 $(-\infty, -1)$ 区间的穿越称为负穿越，计为 $N_- = 1$ 。而从 $(-\infty, -1)$ 区间实轴开始的负穿越称为半次负穿越，计为 $N_- = 1/2$ ；正穿越：幅相曲线由上向下（幅角增大）穿越 $(-\infty, -1)$ 区间的穿越称为正穿越，计为 $N_+ = 1$ 。而从 $(-\infty, -1)$ 区间实轴开始的正穿越称为半次正穿越，计为 $N_+ = 1/2$ 。于是，幅相曲线围绕 $(-1, j0)$ 点的圈数为： $R = N_+ - N_-$



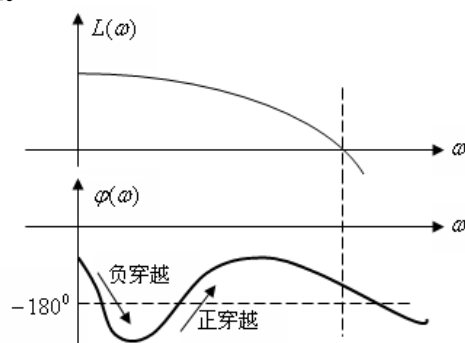
（2）开环系统的极坐标图与相应的对数坐标图的对应关系

极坐标图上的单位圆对应于对数坐标图上的零分贝线；

极坐标图上的负实轴对应于对数坐标图上的 -180° 相位线。

（3）对数频率特性图上的正负穿越

由正负穿越的定义和开环系统的极坐标图与相应的对数坐标图的对应关系可见，对数频率特性图上的正负穿越为：在对数坐标图上 $L(\omega) > 0$ ($A(\omega) > 1$) 的范围内，当 ω 增加时，相频特性曲线 $\varphi(\omega)$ 从上穿过 -180° 相位线（相位减小）的称为负穿越；而相频特性曲线 $\varphi(\omega)$ 从下穿过 -180° 相位线（相位增大）的称为正穿越。



(4) 对数频率稳定判据

若系统包含积分环节,在对数相频曲线 ω 为 0^+ 的地方补画一条从 $G_K(j0^+)+\nu\times 90^\circ$ 到 $G_K(j0^+)$ 的虚线,计算正负穿越次数时应将补画的虚线看成对数相频特性曲线的一部分。

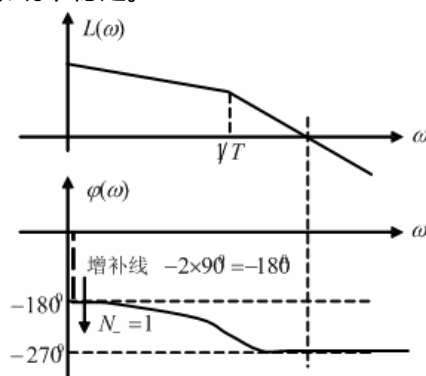
设 P 为开环传递函数 $G_K(s)$ 在 S 右半平面的极点数,闭环系统稳定的充分必要条件是,对数坐标图上幅频特性 $L(\omega)>0$ 的所有频段内,当频率 ω 增加时,对数相频特性对 -180° 相位线的正负穿越次数差为 $P/2$ 。

例:已知某负反馈控制系统的开环传递函数为 $G_K(s)=K/s^2(Ts+1)$,试判别闭环系统的稳定性。

解:(1)画出开环对数频率特性曲线如下图;(2) $P=0, \nu=2, m=0, n=3$;

(3)画出增补线(图中虚线);(4) $N_+=0, N_-=1$,则 $R=N_+-N_-=-1$

(5) $Z=P-2R=2\neq 0$,闭环系统不稳定。



5.5 稳定裕度

(1) 系统稳定性的关系

可以将最小相位系统的稳定性概括为:

幅相频率曲线

- 不围绕 $(-1, j0)$ 点时,闭环系统稳定
- 过 $(-1, j0)$ 点时,闭环系统临界稳定
- 围绕 $(-1, j0)$ 点时,闭环系统不稳定

对数频率曲线

- $L(\omega)$ 过 0dB 线后, $\varphi(\omega)$ 才过 -180° 相位线时,闭环系统稳定
- $L(\omega)$ 过 0dB 线, $\varphi(\omega)$ 也过 -180° 相位线时,闭环系统临界稳定
- $L(\omega)$ 过 0dB 线前, $\varphi(\omega)$ 已过 -180° 相位线时,闭环系统不稳定

(2) 幅值稳定裕度 $h(L_g)$

令幅相曲线穿越 -180° 相位线所对应的频率为 ω_g ,这个频率称为相角穿越频率,此频率所对应的幅值为 $A(\omega_g)$ 。

幅值稳定裕度的定义:相角穿越频率时的幅频特性的倒数称为幅值稳定裕度,简称幅值裕度,即

$$h = 1/A(\omega_g) \text{ 或 } h \times A(\omega_g) = 1$$

在对数坐标图上,采用 L_g 表示 h 的分贝值,即

$$L_g = 20 \lg h = 20 \lg [1/A(\omega_g)] = -20 \lg A(\omega_g) \text{ dB}$$

幅值裕度的物理意义:

稳定的系统,若系统的开环放大倍数再增大为原来的 h 倍(或对数幅频特性曲线向上移动 L_g 分贝),则系统将变为临界稳定状态;若开环放大倍数进一步增大,则系统将变为不稳定;反之亦然。

(3) 相位稳定裕度 γ

令幅相曲线穿越 0dB 线所对应的频率为 ω_c ,这个频率称为幅值穿越频率,此频率所对应的相位为 $\varphi(\omega_c)$ 。

相位稳定裕度的定义：幅值穿越频率 ω_c 时的相频特性与 -180° 之差称为相位稳定裕度，简称相位裕度，即

$$\gamma = \varphi(\omega_c) - (-180^\circ) = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$$

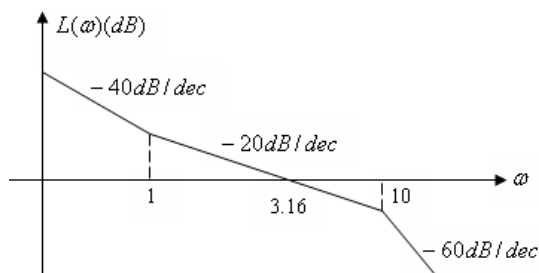
相位裕度的物理意义：

如果系统是稳定的，则相频特性 $\varphi(\omega_c)$ 再滞后 γ 角度（或对数相频特性 $\varphi(\omega)$ 再下移 γ 角度），则闭环系统将变为临界稳定状态；若对数相频特性 $\varphi(\omega)$ 再进一步减小，则系统将变为不稳定；反之亦然。

（4）利用稳定裕度判别系统稳定性

对于最小相位系统来说， $L_g > 0$ 和 $\gamma > 0$ 总是同时发生或同时不发生，因此工程上常只用相位稳定裕度 γ 来表示。显然，系统稳定时，必有 $L_g > 0$ 和 $\gamma > 0$ 。

例：已知单位反馈的最小相位系统，其开环对数幅频特性如下图所示，试求开环传递函数，并计算系统的稳定裕度。



解：（1）由给定的对数幅频特性可以求得开环传递函数为 $G_K(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(0.1s+1)^2}$

$$(2) \text{ 计算放大倍数 } K \quad A(\omega_c) = \frac{K\sqrt{\omega_c^2 + 1}}{\omega_c^2 \sqrt{(0.1\omega_c)^2 + 1}} = 1$$

考虑到 $\omega_c = 3.16 > 1$ ，所以 $\omega_c^2 \gg 1, (0.1\omega_c)^2 \ll 1$ ，于是，上式可以简化为

$$A(\omega_c) = \frac{K\omega_c}{\omega_c^2 \times 1} = 1 \Rightarrow K = \omega_c = 3.16$$

（3）计算稳定裕度

相位稳定裕度：

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ + \arctg \omega_c - 2 \times 90^\circ - 2 \times \arctg 0.1\omega_c \\ &= 180^\circ + \arctg 3.16 - 2 \times 90^\circ - 2 \times \arctg 0.1 \times 3.16 \\ &= 180^\circ + 72.40^\circ - 180^\circ - 2 \times 17.5^\circ \\ &= 37.4^\circ \end{aligned}$$

幅值稳定裕度：

由 $\varphi(\omega_g) = -180^\circ$ 可得

$$\arctg \omega_g - 2 \times 90^\circ - 2 \times \arctg 0.1\omega_g = -180^\circ$$

化简得到： $\arctg \omega_g = 2 \times \arctg 0.1\omega_g$

令： $\varphi = \arctg 0.1\omega_g$ ，则： $\lg[\arctg \omega_g] = \lg[2 \times \arctg 0.1\omega_g]$

由三角公式可得：

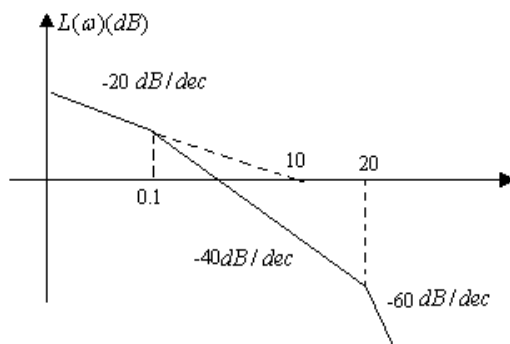
$$\omega_g = \lg 2\varphi = \sin 2\varphi / \cos 2\varphi = \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi} = \frac{2 \lg \varphi}{1 - \lg^2 \varphi} = \frac{2 \times 0.1\omega_g}{1 - 0.01\omega_g^2}$$

解得： $\omega_g = 8.94(\text{rad/s})$

于是幅值稳定裕度为： $L_g = -20 \lg A(\omega_g) = -20 \lg \frac{K \times \omega_g}{\omega_g^2} = -20 \lg \frac{3.16}{8.49} = 9.03 \text{dB}$

显然：由于 $L_g > 0, \gamma > 0$ 所以闭环系统稳定。

例：已知单位反馈的最小相位系统，其开环对数幅频特性如下图所示，试求（1）开环传递函数；（2）计算系统的相位裕度，并判断系统稳定性；（3）将其对数幅频特性向右平移十倍频程，试讨论对系统性能的影响。



解：（1）系统存在 2 个转折频率 0.1 和 20，故其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{k}{s(s/0.1+1)(s/20+1)}$$

且 $20 \lg \frac{k}{10} = 0$

得 $k = 10$ ，

所以 $G(s) = \frac{10}{s(s/0.1+1)(s/20+1)}$ 。

（2）由系统开环对数幅频特性可知

$$A(\omega_c) \approx \frac{10}{\omega_c \cdot \frac{\omega_c}{0.1} \cdot 1} = 1$$

得 $\omega_c = 1$

相频特性为 $\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan \frac{\omega}{0.1} - \arctan \frac{\omega}{20}$ ，将 $\omega_c = 1$ 代入的 $\varphi(\omega_c) = -177.15^\circ$

$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 2.85^\circ$ ，故系统稳定。

（3）将对数幅频特性向右平移十倍频程，可得新的开环传递函数

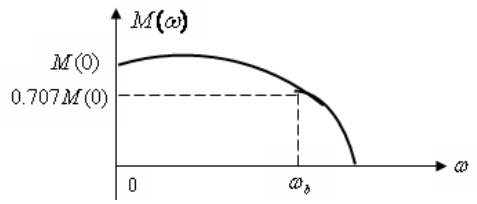
$$G(s) = \frac{100}{s(s/1+1)(s/200+1)}$$

其截止频率 $\omega_{c1} = 10\omega_c = 10$ ，而 $\varphi(\omega_{c1}) = -90^\circ - \arctan \omega_{c1} - \arctan \frac{\omega_{c1}}{200} = -177.15^\circ$ ，则

$\gamma_1 = \gamma = 2.85^\circ$ ，系统稳定性能不变。

第 24 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第五章 线性系统的频域分析方法（6、7 节）
主要内容	闭环频率特性、频率特性分析
目的与要求	了解闭环频率特性与开环频率特性的关系 了解闭环频率特性的性能指标 掌握系统稳态性能、动态性能及抗干扰性能和开环频率特性的关系
重点与难点	重点：开环频率特性分析 难点：闭环频率特性
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	
<p>5.6 闭环系统的频率特性</p> <p>1. 用向量法求取闭环频率特性</p> <p>系统的闭环频率特性为</p> $\Phi(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}$ $G(j\omega_1) = \vec{OA} = \vec{OA} e^{j\varphi} \quad 1 + G(j\omega_1) = \vec{PA} = \vec{PA} e^{j\theta}$ <p>于是在该频率值时的闭环频率特性值为</p> $\Phi(j\omega_1) = \frac{G(j\omega_1)}{1 + G(j\omega_1)} = \frac{ \vec{OA} e^{j\varphi}}{ \vec{PA} e^{j\theta}} = \frac{ \vec{OA} }{ \vec{PA} } e^{j(\varphi - \theta)}$ <p>故：$\Phi(j\omega_1) = M(\omega) \angle \alpha(\omega)$，$M(\omega_1) = \frac{ \vec{OA} }{ \vec{PA} }$，$\alpha(\omega_1) = \varphi - \theta = \angle PAO$</p> <p>比较开环对数幅频和闭环对数幅频可以发现：</p> <ul style="list-style-type: none"> (1) 低频段闭环对数幅频与 0dB 线重合、相频与 0° 线重合； (2) 高频段闭环对数幅频趋于开环对数幅频，闭环对数相频趋于开环对数相频； (3) 闭环对数幅频产生谐振峰值。 <p>2. 系统带宽和带宽频率</p> <p>下图是闭环系统的典型幅频特性</p>  <p>定义：闭环幅频特性的幅值由 $M(0)$ 衰减到 $0.707M(0)$ 时的频率，称为闭环系统的带宽频率，用 ω_b 来表示，$0 \sim \omega_b$ 即为频带宽度，简称带宽。</p> <p>带宽（频带宽度）的意义：从带宽的定义可知，当输入信号的频率高于带宽频率 ω_b 是，系统输出的幅值衰减很大，不能很好地反映输入信号，因此系统的带宽，实际上反映了系统对输入信号的复现能力，当输入信号的频率低于带宽频率时，系统可以产生足够强度的频率响应。</p>	

5.7 频率特性分析

1. 利用开环频率特性分析系统的稳态性能

(1) 开环频率特性的低频段决定了系统的稳态性能

$$\text{低频段频率特性为 } G_K(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^\nu} G_0(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{K}{(j\omega)^\nu}$$

$$\text{对数幅频特性为: } L(\omega) = 20 \lg \left| \frac{K}{(j\omega)^\nu} \right| = 20 \lg K - 20 \times \nu \times \lg \omega$$

$$\text{对数相频特性为: } \varphi(\omega) = -\nu \times 90^\circ$$

低频段的对数幅频特性直线的斜率为 $-20 \times \nu \text{ dB/dec}$ ，相频角度为 $-\nu \times 90^\circ$ ；

当 $\omega = 1$ 时，低频段直线或其延长线（在 $\omega < 1$ 的范围内有转折频率）的分贝值为 $20 \lg K$ ；

低频段直线（或其延长线）与零分贝线（横轴）的交点频率为 $\omega_0 = K^{\frac{1}{\nu}}$ ，对于 I 型系统交点频率为 $\omega_0 = K$ ，II 型系统交点频率为 $\omega_0 = \sqrt{K}$ 。

2. 频域性能指标与时域性能指标的关系

(1) 典型二阶系统的开环频域指标与暂态性能指标的关系

$$\text{典型二阶系统的开环频率特性: } G_K(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)(j\omega + 2\xi\omega_n)}$$

$$\text{幅值穿越频率 } \omega_c: \omega_c = \omega_n \sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2}$$

$$\text{相位裕度 } \gamma: \gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = \arctg \frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2}}$$

当阻尼比 $0 < \xi < 0.707$ 时，可近似为线性关系： $\xi = 0.01\gamma$ 。

由于超调量 $M_p\% = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\%$ ，即超调量 $M_p\%$ 是阻尼比 ξ 的单值函数。

分析可得：相位裕度 γ 越小，系统的单位阶跃响应超调量 $M_p\%$ 便越大。

$$\text{调节时间为 } t_s = \begin{cases} \frac{3}{\xi\omega_n} = \frac{6}{\omega_c} \times \frac{1}{\text{tg}\gamma}, \Delta = 5 \\ \frac{3}{\xi\omega_n} = \frac{8}{\omega_c} \times \frac{1}{\text{tg}\gamma}, \Delta = 2 \end{cases}$$

分析结论：当相位裕度 γ 不变时，调节时间 t_s 与截止频率（幅值穿越频率） ω_c 成反比关系。即 ω_c 越大，调节时间 t_s 越小，暂态响应速度越快，因此截止频率 ω_c 表征了系统的暂态响应的快速性。

(2) 欠阻尼二阶系统闭环频域性能指标与时域暂态性能指标的关系

$$\Phi(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

欠阻尼二阶系统闭环频率特性为

$$M(\omega) = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}}$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

$$\text{当 } 0 < \xi < 0.707 \text{ 时, } M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

由于 $M(0) = 1$ ，所以当 $M(\omega) = 0.707M(0)$ 时，可得到带宽频率 ω_b

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{2 - 4\xi^2 + 4\xi^4}}$$

$M_p\%$ 与 M_r 的关系： M_r 越小，系统的阻尼性能越好，从而系统的超调量 $M_p\%$ 也越小； M_r 较大时，系统的超调量 $M_p\%$ 较大，系统响应的平稳性较差。一般而言，当 $M_r = 1.2 \sim 15$ 时，系统的超调量 $M_p\% = 20\% \sim 30\%$ ，此时系统有适度的振荡，平稳性较好。

t_s 与 M_r 、 ω_b 的关系：

$$\text{由：}\omega_b = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{2 - 4\xi^2 + 4\xi^4}}$$

$$\text{可得：}\omega_b t_s = \begin{cases} \frac{3}{\xi \omega_n} = \frac{3}{\xi} \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{2 - 4\xi^2 + 4\xi^4}} \\ \frac{4}{\xi \omega_n} = \frac{4}{\xi} \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{2 - 4\xi^2 + 4\xi^4}} \end{cases}$$

$\omega_b t_s$ 随 M_r 的增加而单调增加。当 M_r 不变时，调节时间 t_s 与带宽频率 ω_b 成反比关系。

(3) 高阶系统的频域指标与时域暂态性能指标的关系

超调量 $M_p\%$ 随谐振峰值 M_r 的增大而增大；

调节时间 t_s 随谐振峰值 M_r 的增大而加长，并与 ω_c 成反比；

谐振峰值 M_r 与相位裕度 γ 的近似关系为： $M_r = 1/\sin \gamma$ ，这表明，相位裕度 γ 越小，则谐振峰值 M_r 越大，系统越容易振荡。当 $M_r \rightarrow \infty$ 时，相当于相位裕度 $\gamma = 0^\circ$ ，系统处于不稳定的边缘（临界稳定状态）。

系统的相位裕度 γ 不仅反映了系统的相对稳定性，还影响着系统的暂态响应速度。而相位裕度 γ 的大小主要取决于开环对数幅频特性在 ω_c 附近（中频段）的形状，一般要求系统的相位裕度 $\gamma = 30^\circ \sim 60^\circ$ ，这就要求开环对数幅频特性 $L(\omega)$ 过 0dB 线的斜率为 $-20\text{dB}/\text{dec}$ ，且占据一定的频带宽度。

3. 开环频率特性的高频段对系统性能的影响

对于单位反馈系统，开环和闭环传递函数的关系为 $\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$ ；

则频率特性之间的关系为 $\Phi(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}$ ；

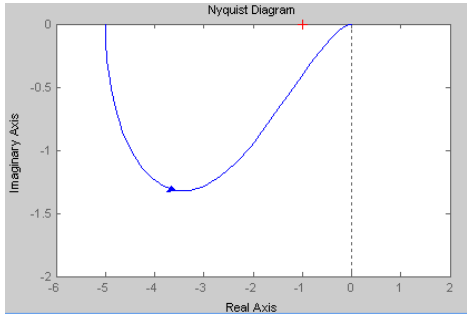
在高频段一般 $|20\lg G(j\omega)| \ll 0$ ，即 $|G(j\omega)| \ll 1$ ，故有

$$|\Phi(j\omega)| = \left| \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} \right| \approx |G(j\omega)|$$

即闭环幅频等于开环幅频。因此，开环对数幅频特性高频段的幅值，直接反映了系统对输入端高频信号的抑制能力，高频段分贝值越低，系统抗干扰能力越强。

第 25 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第五章 线性系统的频域分析方法
主要内容	自动控制系统频域分析上机实验
目的与要求	熟悉 MATLAB 软件在频域分析中的基本应用 熟悉 MATLAB 软件绘制 Bode 图、Nyquist 曲线 由 MATLAB 软件绘制的 Bode 图判别闭环系统的稳定性
重点与难点	重点：MATLAB 软件绘制 Bode 图、Nyquist 曲线及稳定性判断 难点：MATLAB 软件绘制 Bode 图、Nyquist 曲线
教学手段	上机
思考题或作业题	完成实验报告
<p>一、实验目的</p> <ol style="list-style-type: none"> 1、利用 MATLAB 绘制系统的频率特性图； 2、根据 Nyquist 图判断系统的稳定性； 3、根据 Bode 图计算系统的稳定裕度。 <p>二、实验任务</p> <p>利用 MATLAB 绘制系统的频率特性图 ,是指绘制 Nyquist 图、Bode 图 ,所用到的函数主要是 nyquist、ngrid、bode 和 margin 等。</p> <p>1、Nyquist 图的绘制及稳定性判断</p> <p>nyquist 函数可以计算连续线性定常系统的频率响应 ,当命令中不包含左端变量时 ,仅产生 Nyquist 图。</p> <p>命令 nyquist(num,den)将画出下列传递函数的 Nyquist 图：</p> $GH(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$ <p>其中 num = [b_m b_{m-1} … b₁ b₀] , den = [a_n a_{n-1} … a₁ a₀]。</p> <p>(1) 已知某控制系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{50}{(s+5)(s-2)}$, 用 MATLAB 绘制系统的 Nyquist 图 , 并判断系统的稳定性。</p> <p>MATLAB 程序代码如下：</p> <pre>num=[50]; den=[1,3,-10]; nyquist(num,den); axis([-6 2 -2 0]); title('Nyquist 图')</pre> <p>执行该程序后 , 系统的 Nyquist 图如图所示：</p>  <p>由上图可知 Nyquist 曲线逆时针包围(-1, j0)点半圈 , 而开环系统在右半平面有一个极点 , 故系统稳定。</p>	

(2) 已知系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{100k}{s(s+5)(s+10)}$ ，用 MATLAB 分别绘制 $k = 1, 8, 20$ 时系统的 Nyquist 图，并判断系统的稳定性。

2、Bode 图的绘制及稳定裕度的计算

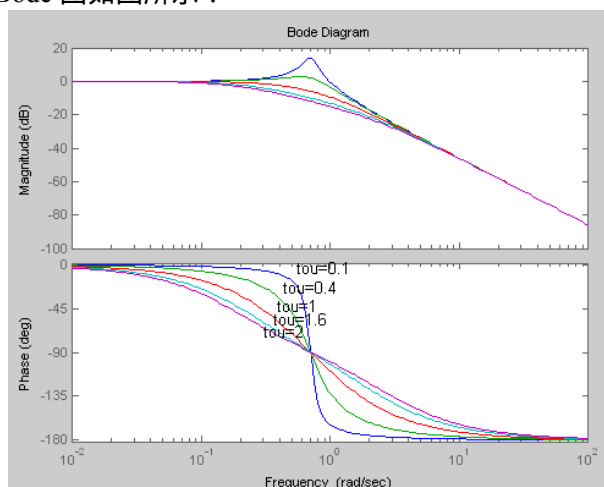
MATLAB 提供绘制系统 Bode 图函数 `bode()`，`bode(num,den)` 绘制以多项式函数表示的系统 Bode 图。

(1) 已知典型二阶环节的传递函数为 $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ ，其中 $\omega_n = 0.7$ ，分别绘制 $\xi = 0.1, 0.4, 1, 1.6, 2$ 时得 Bode 图。

MATLAB 程序代码如下：

```
w=[0,logspace(-2,2,200)]; wn=0.7; tou=[0.1,0.4,1,1.6,2]; for j=1:5;
sys=tf([wn*wn],[1,2*tou(j)*wn,wn*wn]); bode(sys,w); hold on; end; gtext('tou=0.1');
gtext('tou=0.4'); gtext('tou=1'); gtext('tou=1.6'); gtext('tou=2')
```

执行该程序后，系统的 Bode 图如图所示：

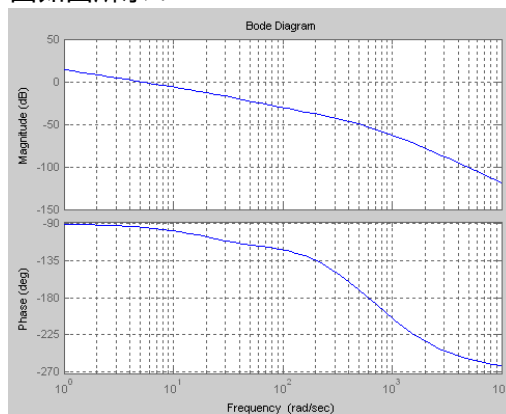


(2) 已知某高阶系统的传递函数为 $G(s) = \frac{5(0.0167s+1)}{s(0.03s+1)(0.0025s+1)(0.001s+1)}$ ，绘制系统的 Bode 图，并计算系统的相角裕度和幅值裕度。

MATLAB 程序代码如下：

```
num=5*[0.0167,1]; den=conv(conv([1,0],[0.03,1]),conv([0.0025,1],[0.001,1]));
sys=tf(num,den); w=logspace(0,4,50); bode(sys,w); grid; [Gm,Pm,Wg,Wc]=margin(sys)
```

执行该程序后，系统的 Bode 图如图所示：



运行结果如下：

$Gm = 455.2548$; $Pm = 85.2751$; $Wg = 602.4232$; $Wc = 4.9620$

由运行结果可知，系统的幅值裕度 $A_g = 455.2548$ ，相角裕度 $\gamma = 85.2751^\circ$ ，相角穿越频率 $\omega_g = 602.4262 \text{ rad/s}$ ，截止频率 $\omega_c = 4.962 \text{ rad/s}$ 。

(3) 已知某高阶系统的传递函数为 $G(s) = \frac{100(0.5s+1)}{s(s+1)(0.1s+1)(0.05s+1)}$ ，绘制系统的 Bode 图，并计算系统的相角裕度和幅值裕度。

三、实验数据及结论

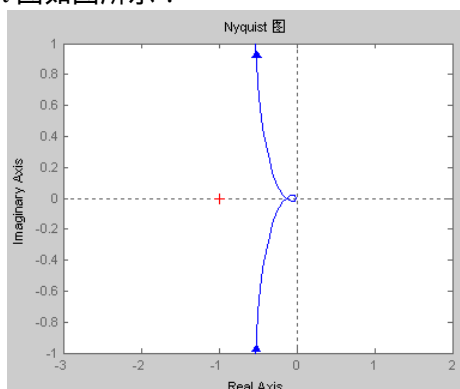
1、Nyquist 图的绘制及稳定性判断

(2) 已知系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{100k}{s(s+5)(s+10)}$ ，用 MATLAB 分别绘制 $k=1, 8, 20$ 时系统的 Nyquist 图，并判断系统的稳定性。

$k=1$ 时 MATLAB 程序代码如下：

```
num=[100];den=[1,15,50,0];nyquist(num,den);axis([-3 2 -1 1]);title('Nyquist 图');
```

执行该程序后，系统的 Nyquist 图如图所示：

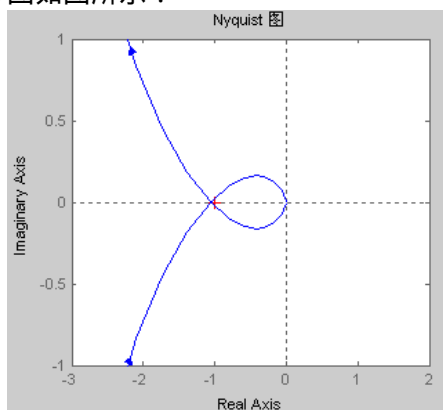


系统为 I 型系统，在上图作增补线，Nyquist 曲线不包围 $(-1, j0)$ 点，而开环系统在右半平面没有极点，故系统稳定。

$k=8$ 时 MATLAB 程序代码如下：

```
num=[800];den=[1,15,50,0];nyquist(num,den);axis([-3 2 -1 1]);title('Nyquist 图');
```

执行该程序后，系统的 Nyquist 图如图所示：

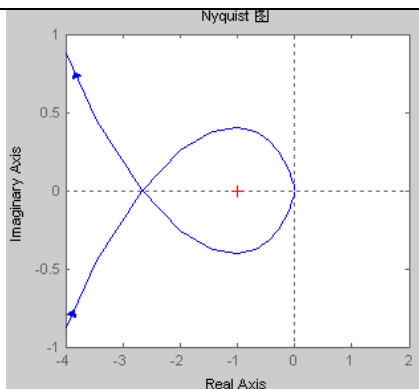


作增补线后 Nyquist 曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 点一圈，而开环系统在右半平面没有极点，故系统不稳定。

$k=20$ 时 MATLAB 程序代码如下：

```
num=[2000];den=[1,15,50,0];nyquist(num,den);axis([-4 2 -1 1]);title('Nyquist 图');
```

执行该程序后，系统的 Nyquist 图如图所示：



作增补线后 Nyquist 曲线顺时针包围 $(-1, j0)$ 点一圈，而开环系统在右半平面没有极点，故系统不稳定。

由以上结论可知， k 增大，系统的稳定性能变差。

2、Bode 图的绘制及稳定裕度的计算

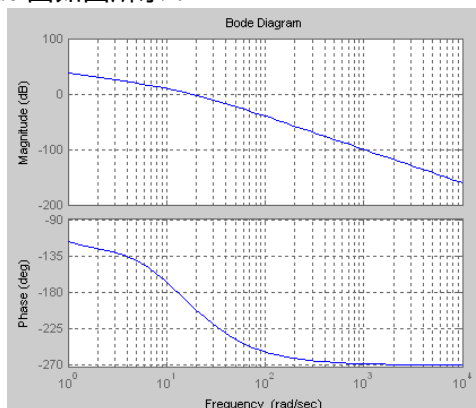
(3) 已知某高阶系统的传递函数为 $G(s) = \frac{100(0.5s+1)}{s(s+1)(0.1s+1)(0.05s+1)}$ ，绘制系统的 Bode 图，并计算系统的相角裕度和幅值裕度。

MATLAB 程序代码如下：

```
num=100*[0.5,1];den=conv(conv([1,0],[1,1]),conv([0.1,1],[0.05,1]));sys=tf(num,den);
```

```
w=logspace(0,4,50);bode(sys,w);grid;[Gm,Pm,Wg,Wc]=margin(sys);
```

执行该程序后，系统的 Bode 图如图所示：



运行结果如下：

$G_m = 0.5080$; $P_m = -16.2505$; $W_g = 13.0505$; $W_c = 18.0572$

由运行结果可知，系统的幅值裕度 $A_g = 0.5080$ ，相角裕度 $\gamma = -16.2505^\circ$ ，相角穿越频率 $\omega_g = 13.0505 \text{ rad/s}$ ，截止频率 $\omega_c = 18.0572 \text{ rad/s}$ ，由结果可知，系统不稳定。

第 26 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第六章 控制系统的校正（1、2 节）
主要内容	系统的设计及校正、频率法串联超前校正
目的与要求	了解时域、频域中的性能指标 了解几种校正结构 掌握频率法串联超前校正网络及传递函数
重点与难点	重点：时域、频域中的性能指标、频率法串联超前校正网络 难点：频率法串联超前校正
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	

6.1 引言

对于许多实际的控制系统，仅通过调节系统的某一个参数，无法兼顾提高系统的各方面性能，实际上系统的性能指标对于某一参数的依赖是相矛盾的。因此为改善系统的总体性能，我们往往要在系统中附加装置，来对系统进行结构上的校正，从而“迫使”系统的性能满足设计要求。

1. 校正

为了实现预期性能而对控制系统结构进行的调整称为校正。因此，校正就是为弥补系统的性能不足而进行的结构调整。

2. 校正装置

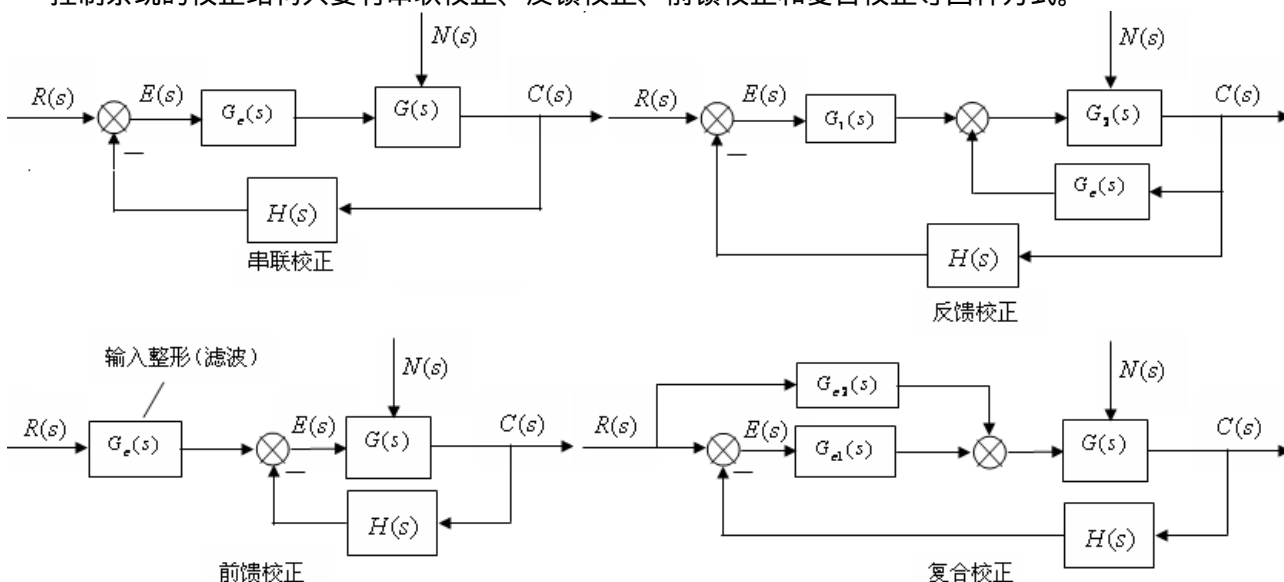
为对系统进行的校正，而在原系统中附加的装置称为校正装置。校正装置的形式可以多种多样，可以是电路、机械装置、液压装置、气动装置，甚至于可能是一个软件等等。

3. 性能指标

控制系统综合设计时既要考虑时域的性能指标，又要考虑频域的性能指标。同时还要注意稳态、动态和稳定性能，以及抗干扰能力。

4. 校正结构

控制系统的校正结构只要有串联校正、反馈校正、前馈校正和复合校正等四种方式。



5. 校正方法

线性控制校正设计的主要方法有：

(1) 分析法：分析法也称为试探法，它比较直观，物理上易于实现。但要求设计者具有一定的工程经验；

(2) 综合法：综合法也称为期望特性法。这种设计方法是根据闭环系统性能与开环系统特性密切相关这一概念出发，然后通过性能指标确定的期望特性与原有（未校正系统）系统特性相比较，从而确定校正装置的形式和参数。这种方法具有广泛的理论意义，但由于校正装置的传递函数比较复杂，物理实现比较困难。

无论是采用分析法，还是综合法设计校正装置，常常可以在频域中进行，或采用根轨迹法。而在频域中进行系统设计，是一种比较间接的方法，这是因为频域中设计满足的指标是频域指标，它与时域指标只有间接关系。但这种方法比较便捷，易于掌握。

在频域中设计控制系统，要遵循的原则是：

- (1) 开环频率特性的低频段表征了闭环系统的稳态性能；
- (2) 开环频率特性的中频段表征了闭环系统的动态性能；
- (3) 开环频率特性的高频段表征了闭环系统的复杂性和噪声抑制能力。

因此对系统校正的目的是使校正后开环对数幅频特性具有期望的形状，即

- (1) 低频段有足够大的增益，以保证系统的稳态精度要求；
- (2) 中频段对数幅频特性过 0dB 线的斜率为 -20dB/dec ，并占据一定的频带宽度；
- (3) 高频段增益尽快减小，即高频段的斜率比较大，一般要小于 -40dB/dec ，削弱噪声的影响。

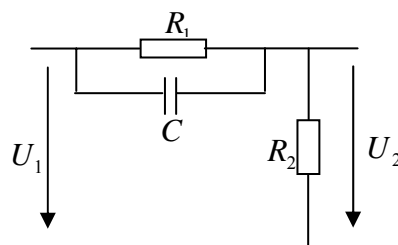
6.2 频率法串联校正

一、串联超前校正

1、超前校正网络及特性

网络传递函数：

$$G(s) = \frac{R_2}{R_1 // \frac{1}{sC} + R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts} = \frac{1}{\alpha} \times \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}$$

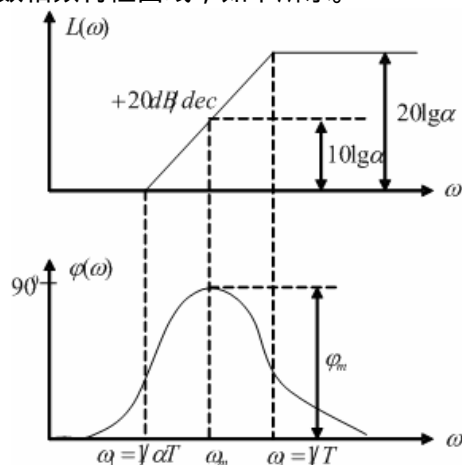


式中： $\alpha = (R_1 + R_2)/R_2 > 1$ 称为衰减因子， $T = R_1 R_2 C / (R_1 + R_2)$

由于 $1/\alpha < 1$ ，所以校正网络作用于系统后，将会使整个系统（校正后）的开环增益下降 α 倍，从而降低系统的稳态性能，为此，应该在校正后的系统中，增大系统的开环放大倍数 α 倍，以补偿由于校正网络的作用造成的放大倍数下降。

因此，研究超前校正网络特性时，只需要研究 $G(s) = \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}$ 即可。

超前校正网络的对数幅频和对数相频特性曲线，如下所示。



超前校正网络特性

在转折频率 $\omega_1 = 1/\alpha T$ 和 $\omega_2 = 1/T$ 之间，网络具有明显的微分作用；

在转折频率 $\omega_1 = 1/\alpha T$ 和 $\omega_2 = 1/T$ 之间，网络具有相位超前作用，故超前网络也由此得名；

在 $\omega = \omega_m$ 处有最大的超前相位角 ϕ_m ，且 ω_m 位于 $\omega_1 = 1/\alpha T$ 和 $\omega_2 = 1/T$ 之间的几何中心；

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha T} \times \frac{1}{T}} = \sqrt{\omega_1 \omega_2}, \quad \lg \omega_m = \lg \sqrt{\omega_1 \omega_2} = \frac{1}{2}(\lg \omega_1 + \lg \omega_2)$$

在 $\omega = \omega_m$ 处，获得的超前相位角为

$$\varphi_m = \arctg \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}} = \arcsin \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

该式表明，衰减系数 α 越大，超前相位角 φ_m 越大，从而微分作用越强。

在 $\omega = \omega_m$ 处，对数幅频值为： $L(\omega_m) = 10 \lg \alpha = \frac{1}{2}(0 + 20 \lg \alpha)$ ；

超前校正网络可以看作为是一个高通滤波器（信号的高频部分通过，低频部分被衰减）。

第 27 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第六章 控制系统的校正（2 节）
主要内容	频率法串联超前校正的方法及步骤 频率法串联迟后校正网络
目的与要求	掌握超前校正网络的参数确定的方法及步骤 了解迟后校正网络
重点与难点	重点：串联超前校正的方法及步骤 难点：串联超前校正的方法及步骤
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	6-1
<p>2、超前校正</p> <p>为了获得最大的相位超前量，应使得超前网络的最大超前相位发生在校正后系统的幅值穿越频率 ω_c 处，即校正后的幅值穿越频率 $\omega'_c = \omega_m$，从而使校正网络在 $\omega'_c = \omega_m$ 处产生的超前相位 φ_m 弥补校正前系统相位稳定裕度的不足，这就是超前校正的原理。</p> <p>依据超前校正的原理，校正的具体步骤是：</p> <p>作出未校正系统的开环对数幅频特性 $L(\omega)$ 和相频特性 $\varphi(\omega)$</p> <p>具体做法：根据开环对数幅频特性 $L(\omega)$，检验系统的稳态性能。若不满足 稳态误差要求，可按照要求增大开环放大倍数 K 值，即将开环对数幅频特性 $L(\omega)$ 向上平移，从而可以确定满足稳态性能要求的开环放大倍数 K 值。</p> <p>利用上一步骤确定的开环放大倍数 K 值，结合开环对数相频特性 $\varphi(\omega)$，计算或由图获得校正前的截止频率 ω_c 和相位稳定裕度 γ；</p> $\left\{ \begin{array}{l} \text{未校正 } \gamma < \text{期望的 } \gamma' \\ \text{未校正 } \omega_c < \text{期望的 } \omega'_c \\ \text{未校正系统过 } 0\text{dB} \text{ 线的斜率小于或等于 } -40\text{dB/dec} \end{array} \right.$ <p>计算需要补偿的超前相位角 φ_m：</p> <p>具体做法：令 $\varphi_m = \gamma' - \gamma + (5 \sim 12^\circ)$。式中 $\Delta\gamma = \gamma' - \gamma$ 为需要补偿的相位角，$(5 \sim 12^\circ)$ 为增加的裕量角。</p> <p>计算衰减因子 α</p> <p>具体做法：由上一步骤确定的超前网络补偿角 φ_m，依据 $\varphi_m = \arctg \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}} = \arcsin \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$，计算衰减因子 α 得到：</p> $\alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m}$ <p>但是，如果对校正后系统的截止频率 ω'_c 已经提出要求，则可以选择期望的 ω'_c 作为校正后的截止频率，在对数幅频特性图上查找到未校正系统的在 ω'_c 处的幅值 $L(\omega'_c)$，取 $\omega_m = \omega'_c$，并令</p> $L(\omega'_c) + 10 \lg \alpha = 0$ <p>由此可以求得衰减因子 α。</p>	

确定校正后系统的截止频率 ω'_c

具体做法：确定校正前系统的开环对数幅频特性的幅值等于 $-10\lg\alpha$ 时的频率，选择此频率作为校正后系统的幅值穿越频率 ω'_c （即截至频率），该频率即为校正网络产生最大超前相位角 φ_m 所对应的频率 ω_m ，即 $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\omega_1\omega_2}$ 。

确定校正网络传递函数

具体做法：由于 $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\omega_1\omega_2}$ ，所以 $T = \frac{1}{\omega_m\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\omega'_c\sqrt{\alpha}}$

于是有： $\omega_1 = \frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega'_c}{\sqrt{\alpha}}$ ， $\omega_2 = \frac{1}{T} = \sqrt{\alpha}\omega'_c$

校正装置的传递函数为： $G_c(s) = \frac{1+s/\omega_1}{1+s/\omega_2}$

校正后系统的开环传递函数为： $G'(s) = G(s)G_c(s)$ 。

校验性能指标

具体做法：由校正后系统的对数频率特性 $L'(\omega)$ 、 $\varphi'(\omega)$ 校验系统的性能指标是否满足要求，若不满足，则要重复上述的步骤，直至满足要求为止。

例：某控制系统的开环传递函数为： $G_K(s) = K/s(0.1s+1)(0.001s+1)$ ，对该系统的要求是：(1) 系统的相位裕度 $\gamma' \geq 45^\circ$ ；(2) 静态速度误差系数 $K_v = 1000(s^{-1})$ 。求校正的传递函数。

解：(1) 由于系统为 1 型，所以静态速度误差系数就是系统的开环放大倍数，即 $K = K_v = 1000$ ；

(2) 未校正系统的开环传递函数为： $G_K(s) = 1000/s(0.1s+1)(0.001s+1)$

画出未校正系统的 Bode 图，由图可求得， $\omega_c = 100, \gamma = 0^\circ$ ，系统处于临界稳定状态，故可采用超前串联校正。

采用计算的方法同样可以得出同样的结论：

由截止频率的定义可得

$$20\lg 1000 - 20\lg \omega_c - 20\lg \sqrt{(0.1\omega_c)^2 + 1} - 20\lg \sqrt{(0.001\omega_c)^2 + 1} = 0$$

由于 $10 < \omega_c < 1000$ ，所以上式可以近似为：

$$20\lg 1000 - 20\lg \omega_c - 20\lg 0.1\omega_c = 20\lg 10^3 - 20\lg 0.1\omega_c^2 = 0$$

即： $20\lg 10^4 = 20\lg \omega_c^2$ ，于是 $\omega_c = 100$

相位裕度：

$$\begin{aligned}\gamma &= 180^\circ + [-90^\circ - \arctg 0.1\omega_c - \arctg 0.001\omega_c] \\ &= 180^\circ - 90^\circ - \arctg 0.1 \times 100 - \arctg 0.001 \times 100 \\ &= 0^\circ\end{aligned}$$

〔3〕确定超前补偿相角 φ_m

$$\varphi_m = \gamma' - \gamma + (5^\circ \sim 12^\circ) = 45^\circ - 0^\circ + 5^\circ = 50^\circ$$

(4) 确定衰减系数 α

$$\alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} = 7.5$$

(5) 确定校正后的截止频率 ω'_c

由于： $10\lg \alpha = 10\lg 7.5 = 8.75\text{dB}$ ，为此在未校正系统开环对数幅频 $L(\omega)$ 上找到幅值为 -8.75dB 对应的频率，即为校正后的截止频率 ω'_c

$$\omega'_c = 164.5(\text{rad/s})$$

用计算的方法求解如下：

$$20 \lg 1000 - 20 \lg \omega'_c - 20 \lg 0.1 \omega'_c = 20 \lg 10^3 - 20 \lg 0.1 \omega'^2_c = -8.75$$

求得校正后的截止频率 ω'_c : $\omega'_c = 164.19(\text{rad/s})$

(6) 求校正装置传递函数

确定转折频率 ω_1, ω_2 。

$$\omega_1 = \frac{\omega_c}{\sqrt{\alpha}} = \frac{164.5}{\sqrt{7.5}} = 60(\text{rad/s})$$

$$\omega_2 = \sqrt{\alpha} \omega_c = \sqrt{7.5} \times 164.5 = 450(\text{rad/s})$$

$$\text{校正装置传递函数为: } G_c(s) = \frac{1 + s/\omega_1}{1 + s/\omega_2} = \frac{1 + 0.0167s}{1 + 0.00222s}$$

(7) 校验结果

校正后系统的开环传递函数为：

$$G'(s) = G_c(s)G(s) = \frac{1 + 0.0167s}{1 + 0.00222s} \times \frac{1000}{s(0.1s + 1)(0.001s + 1)} = \frac{1000(1 + 0.0167s)}{s(1 + 0.00222s)(0.1s + 1)(0.001s + 1)}$$

校验：

校正系统的开环放大倍数 $K = 1000 = K_v$ ，满足系统的稳态性能要求；

校正后的相位裕度 $\gamma' = 45^\circ$ ，满足稳定性能的要求；

中频段过 0dB 线时的斜率为 -20dB/dec ，且占据 $390(\text{rad/s})$ 的频带宽度，所以闭环系统的超调量下降；

由于校正后 $\omega'_c = 164.5$ 远远大于未校正时的 $\omega_c = 100$ ，所以闭环系统的频带宽度有效增加，从而使响应速度加快；

3、串联超前校正的使用受限的 2 个主要因素

若未校正系统不稳定，为了得到要求的相位裕度，需要超前校正网络提供很大的相角裕量，这样一来，超前网络的衰减系数 α 就会很大，一方面使物理实现比较困难，另一方面，又会造成已校正系统的频带宽度过大，使得通过系统的高频噪声电平过高，很可能使系统失控；

对于在截止频率附近相角迅速减小的未校正系统，一般不适宜采用超前校正。这是因为随着截止频率的增大，未校正系统的相角迅速减小，致使校正后的系统相位裕度改善不大。

二、串联迟后校正

1、迟后校正网络及特性

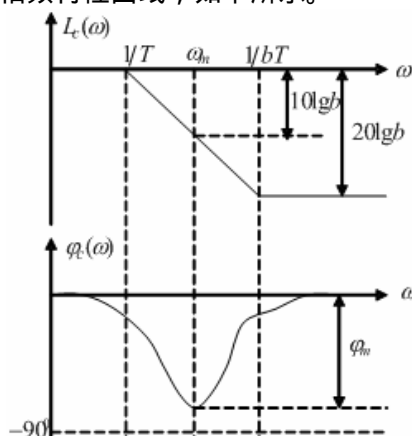
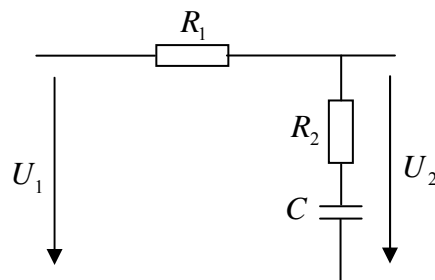
网络传递函数：

$$G(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{sc}}{R_1 + \frac{1}{sc} + R_2} = \frac{1 + scR_2}{1 + sc(R_1 + R_2)} = \frac{1 + bTs}{1 + Ts}$$

式中： $b = R_2/(R_1 + R_2) < 1$ ， $T = (R_1 + R_2)c$

b 称为迟后网络的分度系数，表示迟后的深度。

迟后校正网络的对数幅频和对数相频特性曲线，如下所示。



第 28 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第六章 控制系统的校正（2 节）
主要内容	迟后校正网络的特点 迟后校正的方法和步骤
目的与要求	掌握迟后校正网络的参数确定的方法及步骤 了解反馈校正的基本概念、反馈校正的基本原理及反馈校正的基本结构和方法
重点与难点	重点：迟后校正的方法和步骤 难点：同上
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	6-2
<p>迟后校正网络特性：</p> <p>在转折频率 $\omega_1 = 1/T$ 和 $\omega_2 = 1/bT$ 之间，网络具有明显的积分作用；</p> <p>在转折频率 $\omega_1 = 1/T$ 和 $\omega_2 = 1/bT$ 之间，网络具有相位迟后作用；</p> <p>在 $\omega = \omega_m$ 处，具有最大的迟后相位角 φ_m，且 ω_m 位于 $\omega_1 = 1/T$ 和 $\omega_2 = 1/bT$ 之间的几何中心；</p> $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{T} \times \frac{1}{bT}} = \sqrt{\omega_1 \omega_2}, \quad \lg \omega_m = \lg \sqrt{\omega_1 \omega_2} = \frac{1}{2}(\lg \omega_1 + \lg \omega_2)$ <p>在 $\omega = \omega_m$ 处，获得的迟后相位角为 $\varphi_m = \arctg \frac{b-1}{2\sqrt{b}} = \arcsin \frac{b-1}{b+1}$</p> <p>该式表明，分度系数 b 越大，迟后相位角 φ_m 越大，从而积分作用越强。但迟后前相位 φ_m 的极限值为 -90°，此时分度系数 b 为无穷大，从而使物理实现发生困难。</p> <p>在 $\omega = \omega_m$ 处，对数幅频值为：$L(\omega_m) = 10 \lg b = \frac{1}{2}(0 + 20 \lg b)$；</p> <p>迟后校正网络可以看作为是一个低通滤波器（信号的低频部分通过，高频部分被衰减）。</p> <p>在上述校正网络特性中，对系统起校正作用的是：</p> <p>由于低频段与 $0dB$ 线重合，故低频段对有用信号不产生衰减作用，因而不会影响系统的稳态性能；</p> <p>由于高频段的幅频为 $20 \lg b < 0dB$，即具有高频衰减特性，所以这个特性作用于被校正对象后，可以使校正后的系统高频段尽快衰减，截止频率 ω'_c 前移，从而改善系统的相位裕度 γ；</p> <p>由于相位迟后特性，特别是在 ω_m 处，相位迟后角最大，为了避免相位迟后对系统相位裕度 γ 的影响，应该使校正网络产生最大迟后相角 φ_m 的频率点 ω_m 远远小于系统的新截止频率 ω'_c。</p> <p>通常可取：$\omega_2 = \frac{1}{bT} = \frac{\omega'_c}{10} = 0.1\omega'_c$</p> <p>此时，迟后网络在 ω'_c 处产生的相角迟后可按下式确定：$\varphi_c(\omega'_c) \approx \arctg 0.1(b-1)$</p> <p>串联迟后校正的使用场合 一般 $\omega'_c < \omega_c$，即校正后期望的截止频率小于未校正系统的开环截止频率。而由于新的截止频率 ω'_c 的变小，因此迟后校正通过压缩频带，牺牲系统的响应速度，来提高系统的稳定裕度的。</p> <p>2、迟后校正</p> <p>迟后校正的基本原理是利用迟后校正网络的高频幅值衰减特性，使校正后系统的幅值穿越频率（截止频率）下降，借助于校正前系统在该幅值穿越频率处的相位，使系统获得足够的相位裕度。</p>	

依据迟后校正的原理，校正的具体步骤是：

作出未校正系统的开环对数幅频特性 $L(\omega)$ 和相频特性 $\varphi(\omega)$

具体做法：根据开环对数幅频特性 $L(\omega)$ ，检验系统的稳态性能。若不满足稳态误差要求，可按照要求增大开环放大倍数 K 值，即将开环对数幅频特性 $L(\omega)$ 向上平移，从而可以确定满足稳态性能要求的开环放大倍数 K 值。

利用上一步骤确定的开环放大倍数 K 值，结合开环对数相频特性 $\varphi(\omega)$ ，计算或由图获得未校正前的截止频率 ω_c 和相位稳定裕度 γ ；

$$\begin{cases} \text{未校正 } \gamma < \text{期望的 } \gamma' \\ \text{未校正 } \omega_c > \text{期望的 } \omega'_c \end{cases}$$

根据相位裕度的要求，选择并确定已校正系统的截止频率 ω'_c ；

具体做法：考虑到迟后校正网络在 ω'_c 处会产生一定的相角迟后 $\varphi(\omega'_c)$ ，因此下式成立：
 $\gamma' = \gamma(\omega'_c) + \varphi(\omega'_c)$

式中 $\gamma(\omega'_c)$ 为未校正系统在新截止频率 ω'_c 处的相角， $\varphi(\omega'_c)$ 为校正网络在 ω'_c 处的迟后相角，在 ω'_c 未确定之前，可取 $\varphi(\omega'_c) = -6^\circ$ 。这样由公式 $\gamma' = \gamma(\omega'_c) + \varphi(\omega'_c)$ 可以求得新截止频率 ω'_c 。

确定迟后网络参数 b 和 T

$$\begin{cases} L(\omega'_c) + 20\lg b = 0 \\ \frac{1}{bT} = 0.1\omega'_c \end{cases}$$

注意： $\frac{1}{bT}$ 可在 $(0.1 \sim 0.25)\omega'_c$ 之间选取， $\varphi(\omega'_c)$ 可在 $(-6^\circ \sim -14^\circ)$ 之间选取。

确定迟后校正网络传递函数

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 1/T, \omega_2 = 1/bT \\ G_c(s) &= \frac{1 + s/\omega_2}{1 + s/\omega_1} \end{aligned}$$

校验结果

具体做法：校验结果，若不满足要求，则要重复上述步骤。

例：设单位反馈系统的开环传递函数为 $G_K(s) = K/s(s+25)$ ，要求系统的静态速度误差系数为 $K_v = 100$ ，相角裕度 $\gamma \geq 45^\circ$ ，采用串联迟后校正，试确定校正装置的传递函数。

解：

(1) 根据 $K_v = 100$ 的要求，可确定开环放大倍数，因系统为型，故而 $K_v = K/25 = 100$ ，所以开环放大倍数 $K = 25K_v = 25 \times 100 = 2500$ 。

开环传递函数为： $G_K(s) = 2500/s(s+25) = 100/s(0.04s+1)$

(2) 绘制未校正系统的伯德图，从图中可得： $\omega_c = 50(\text{rad/s})$ ， $\gamma = 27^\circ < 45^\circ$ 也可计算得到：

$$20\lg 100 - 20\lg \omega_c - 20\lg \sqrt{(0.04\omega_c)^2 + 1} = 0\text{dB}$$

因 $\omega_c > 25$ ，故 $(0.04\omega_c)^2 \gg 1$ ，所以上式可以近似为

$$20\lg 100 - 20\lg \omega_c - 20\lg 0.04\omega_c = 0$$

求得： $\omega_c = 50(\text{rad/s})$

相位裕度： $\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ + [-90^\circ - \arctg 0.04 \times 50] = 26^\circ$

(3) 根据 $\gamma' \geq 45^\circ$ 的要求，取 $\gamma' = 45^\circ$ ， $\varphi_c(\omega'_c) = -6^\circ$ ，则有 $\gamma' = \gamma(\omega'_c) + \varphi(\omega'_c)$ 得到：

$$45^\circ = \varphi(\omega'_c) - 6^\circ$$

$$\varphi(\omega'_c) = 51^\circ = -90^\circ - \arctg 0.04\omega'$$

求得： $\omega'_c = 20.2(\text{rad} / \text{s})$

(4) 未校正系统在 $\omega'_c = 20.2(\text{rad} / \text{s})$ 处的幅值为 $L(\omega'_c) = 14\text{dB}$ ，这个值可以由图上量得，也可通过计算获得

精确计算：

$$\begin{aligned} L(\omega'_c) &= 20\lg 100 - 20\lg \omega'_c - 20\lg \sqrt{(0.04\omega'_c)^2 + 1} \\ &= 40 - 20\lg 20.2 - \lg \sqrt{(0.04 \times 20.2)^2 + 1} = 11.8\text{dB} \end{aligned}$$

近似计算

$$\begin{aligned} L(\omega'_c) &= 20\lg 100 - 20\lg \omega'_c - 20\lg \sqrt{(0.04\omega'_c)^2 + 1} \\ &\approx 40 - 20\lg 20.2 = 14\text{dB} \end{aligned}$$

(5) 确定校正装置的转折频率

由 $L(\omega'_c) + 20\lg b = 0$ ，可以得到 $20\lg b = -L(\omega'_c) = -14\text{dB}$ ，求得 $b = 0.2$

于是： $\frac{1}{bT} = 0.1\omega'_c = 0.1 \times 20.2$ ，求得 $T = 2.5(\text{s})$

(6) 确定校正装置的传递函数

$$G_c(s) = \frac{1 + bTs}{1 + Ts} = \frac{1 + 0.5s}{1 + 2.5s}$$

(7) 校验结果

校正后系统的开环传递函数为： $G'(s) = G_c(s)G(s) = \frac{100(1 + 0.5s)}{s(1 + 2.5s)(1 + 0.04s)}$

校正后系统的性能指标：

$$\begin{cases} \gamma' = 180^\circ + [-90^\circ + \arctg 0.5 \times 20 - \arctg 2.5 \times 20 - \arctg 0.04 \times 20] = 46.8^\circ > 45^\circ \\ K_v = 100 \end{cases}$$

符合设计要求。

第 29 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第六章 控制系统的校正
主要内容	控制系统的校正及设计上机实验
目的与要求	熟悉应用 MATLAB 软件设计系统的基本方法 熟悉应用 SISO Design Tool 进行系统设计的基本方法 通过学习自行设计完成一个二阶系统串联校正设计任务
重点与难点	重点：自行设计完成一个二阶系统串联校正设计任务 难点：自行设计完成一个二阶系统串联校正设计任务
教学手段	上机
思考题或作业题	完成实验报告
<p>一、实验目的</p> <ol style="list-style-type: none"> 1、掌握串联校正环节对系统稳定性的影响； 2、了解使用 SISO 系统设计工具（SISO Design Tool）进行系统设计。 <p>二、设计任务</p> <p>串联校正是指校正元件与系统的原来部分串联，如图 1 所示。</p> <div data-bbox="517 1077 1075 1218" data-label="Diagram"> </div> <p>图中，$G_c(s)$ 表示校正部分的传递函数，$G_o(s)$ 表示系统原来前向通道的传递函数。当 $G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$ ($a > 1$)，为串联超前校正；当 $G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$ ($a < 1$)，为串联迟后校正。</p> <p>我们可以使用 SISO 系统设计串联校正环节的参数，SISO 系统设计工具（SISO Design Tool）是用于单输入单输出反馈控制系统补偿器设计的图形设计环境。通过该工具，用户可以快速完成以下工作：利用根轨迹方法计算系统的闭环特性、针对开环系统 Bode 图的系统设计、添加补偿器的零极点、设计超前/滞后网络和滤波器、分析闭环系统响应、调整系统幅值或相位裕度等。</p> <p>（1）打开 SISO 系统设计工具</p> <p>在 MATLAB 命令窗口中输入 sisotool 命令，可以打开一个空的 SISO Design Tool，也可以在 sisotool 命令的输入参数中指定 SISO Design Tool 启动时缺省打开的模型。注意先在 MATLAB 的当前工作空间中定义好该模型。如图 2 为一个 DC 电机的设计环境。</p> <p>（2）将模型载入 SISO 设计工具</p> <p>通过 file/import 命令，可以将所要研究的模型载入 SISO 设计工具中。点击该菜单项后，将弹出 Import System Data 对话框，如图 3 所示。</p> <p>（3）当前的补偿器（Current Compensator）</p> <p>图 2 中当前的补偿器（Current Compensator）一栏显示的是目前设计的系统补偿器的结构。缺省的补偿器增益是一个没有任何动态属性的单位增益，一旦在跟轨迹图和 Bode 图中添加零极点或移动曲线，该栏将自动显示补偿器结构。</p> <p>（4）反馈结构</p> <p>SISO Design Tool 在缺省条件下将补偿器放在系统的前向通道中，用户可以通过“+/-”按钮选择正负反馈，通过“FS”按钮在如下图 4 几种结构之间进行切换。</p>	

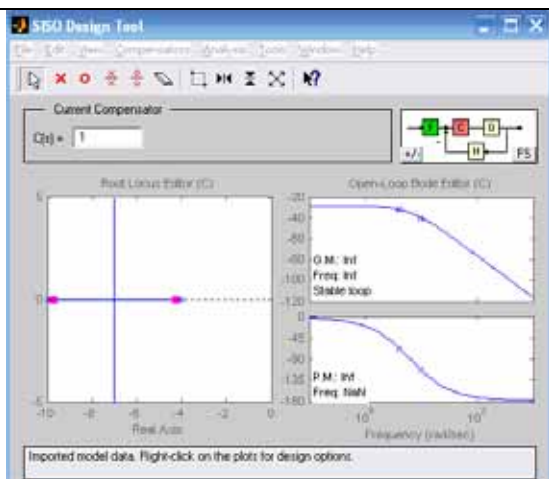


图 2 SISO 系统的图形设计环境

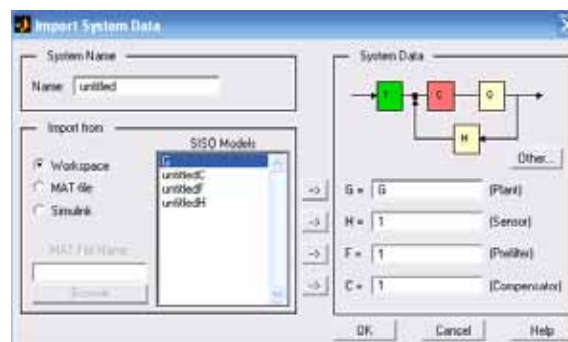


图 3 Import System Data 对话框



图 4 SISO Design Tool 中的反馈控制结构

1、图 1 所示的控制系统，原开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{2}{s(0.1s+1)(0.3s+1)}$ ，试用 SISO 系统设计工具(SISO

Design Tool) 设计超前校正环节，使其校正后系统的静态速度误差系数 $K_v \leq 6$ ，相角裕度为 45° ，并绘制校正前后的 Bode 图，并计算校正前后的相角裕度。

(1) 将模型载入 SISO 设计工具

在 MATLAB 命令窗口先定义好模型 $G_o(s) = \frac{2}{s(0.1s+1)(0.3s+1)}$ ，代码如下：

```
num=2; den=conv([0.1,1,0],[0.3,1]); G=tf(num,den)
```

得到结果如下：

2

0.03 s^3 + 0.4 s^2 + s

输入 sisotool 命令，可以打开一个空的 SISO Design Tool，通过 file/import 命令，可以将模型 G 载入 SISO 设计工具中，如图 5 所示。

(2) 调整增益

根据要求系统的静态速度误差系数 $K_v \leq 6$ ，补偿器的增益应为 3，将图 5 中的 $C(s)=1$ 改为 3，如图 5 所示。从图中 Bode 相频图左下角可以看出相位裕度 $\gamma = 21.2^\circ$ ，不满足要求。

(3) 加入超前校正网络

在开环 Bode 图中点击鼠标右键，选择“Add Pole/Zero”下的“Lead”菜单，该命令将在控制器中添加一个超前校正网络。这时鼠标的光标将变成“X”形状，将鼠标移到 Bode 图幅频曲线上接近最右端极点的位置按下鼠标，得到如图 6 所示的系统。

从图中 Bode 相频图左下角可以看出相位裕度 $\gamma = 28.4^\circ$ ，仍不满足要求，需进一步调整超前环节的参数。

(4) 调整超前网络的零极点

将超前网络的零点移动到靠近原来最左边的极点位置，接下来将超前网络的极点向右移动，并注意移动过程中相角裕度的增长，一直到相角裕度达到 45° ，此时超前网络满足设计要求。如图 7 所示。

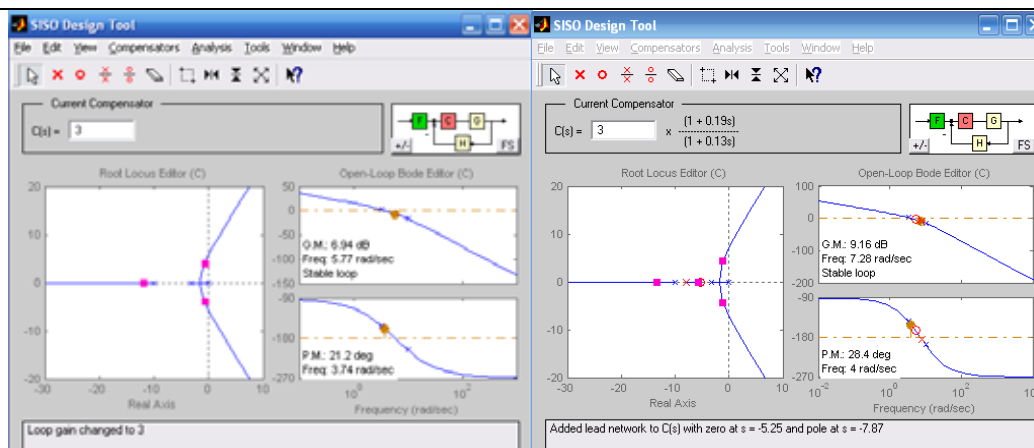


图 5 改变增益后的系统

图 6 增加超前网络后的系统

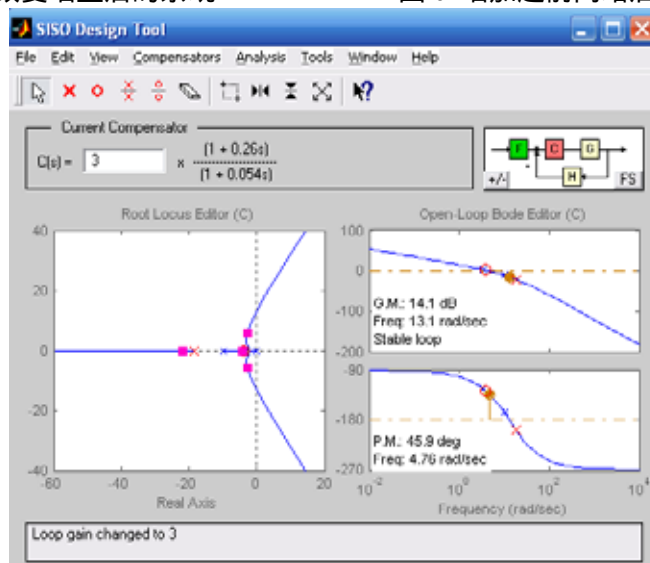


图 7 最后满足要求的系统

从图中可以看出，超前网络的传递函数为 $\frac{3(1+0.26s)}{(1+0.054s)}$ ，最后系统的 $K_v = 6$ ， $\gamma = 45.9^\circ$ 。

2、图 1 所示的控制系统，原开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{k}{s(0.2s+1)}$ ，试用 SISO 系统设计工具 (SISO

Design Tool) 设计超前校正环节，使其校正后系统的静态速度误差系数 $K_v \leq 100$ ，相角裕度为 30° ，并绘制校正前后的 Bode 图，并计算校正前后的相角裕度。

3、使用 SISO Design Tool 设计直流电机调速系统。典型电机结构示意图如图 8 所示，控制系统的输入变量为输入电压 $U_a(t)$ ，系统输出是电机负载条件下的转动角速度 $\omega(t)$ 。现设计补偿器的目的是通过对系统输入一定的电压，使电机带动负载以期望的角速度转动，并要求系统具有一定的稳定裕度。

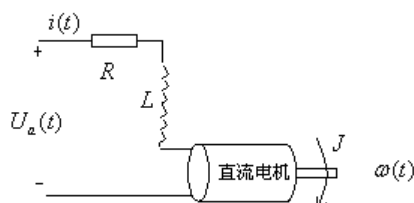


图 8 直流电动机调速系统

直流电机动态模型本质上可以视为典型二阶系统，设某直流电机的传递函数为

$$G(s) = \frac{1.5}{s^2 + 14s + 40.02}$$

系统的设计指标为：上升时间 $t_r < 0.5s$ ，稳态误差 $e_{ss} < 5\%$ ，最大超调量 $M_p\% < 10\%$ ，幅值裕度 $L_g > 20dB$ ，相角裕度 $\gamma > 40^\circ$ 。

系统设计步骤：

(1) 调整补偿器的增益

如果对该系统进行时域仿真，可发现其阶跃响应时间很大，提高系统响应速度的最简单方法就是增加补偿器增益的大小。在 SISO 的设计工具中可以很方便的实现补偿器增益的调节：鼠标移动到 Bode 幅值线上，按下鼠标左键抓取 Bode 幅值线，向上拖动，释放鼠标，系统自动计算改变的系统增益和极点。

既然系统要求上升时间 $t_r < 0.5s$ ，应调整系统增益，使得系统的穿越频率 ω_c 位于 $3rad/s$ 附近。这是因为 $3rad/s$ 的频率位置近似对应于 $0.33s$ 的上升时间。

为了更清楚的查找系统的穿越频率，点击鼠标右键，在快捷菜单中选择“Grid”命令，将在 Bode 图中绘制网格线。

观察系统的阶跃响应，可以看到系统的稳态误差和上升时间已得到改善，但要满足所有的设计指标，还应加入更复杂的控制器。

(2) 加入积分器

点击鼠标右键，在弹出的快捷菜单中选择“Add Pole/Zero”下的“Integrator”菜单，这时系统将加入一个积分器，系统的穿越频率随之改变，应调整补偿器的增益将穿越频率调整回 $3rad/s$ 的位置。

(3) 加入超前校正网络

为了添加一个超前校正网络，在开环 Bode 图中点击鼠标右键，选择“Add Pole/Zero”下的“Lead”菜单，该命令将在控制器中添加一个超前校正网络。这时鼠标的光标将变成“X”形状，将鼠标移到 Bode 图幅频曲线上接近最右端极点的位置按下鼠标。

从 Bode 图中可以看出幅值裕度还没有达到要求，还需进一步调整超前环节的参数。

(4) 移动补偿器的零极点

为了提高系统的响应速度，将超前网络的零点移动到靠近电机原来最左边的极点位置，接下来将超前网络的极点向右移动，并注意移动过程中幅值裕度的增长。也可以通过调节增益来增加系统的幅值裕度。

试按照上述方法调整超前网络参数和增益，最终满足设计的要求。

三、实验步骤及结果

2、图 1 所示的控制系统，原开环传递函数为 $G_o(s) = \frac{k}{s(0.2s+1)}$ ，试用 SISO 系统设计工具 (SISO

Design Tool) 设计超前校正环节，使其校正后系统的静态速度误差系数 $K_v \leq 100$ ，相角裕度为 30° ，并绘制校正前后的 Bode 图，并计算校正前后的相角裕度。

(1) 将模型载入 SISO 设计工具

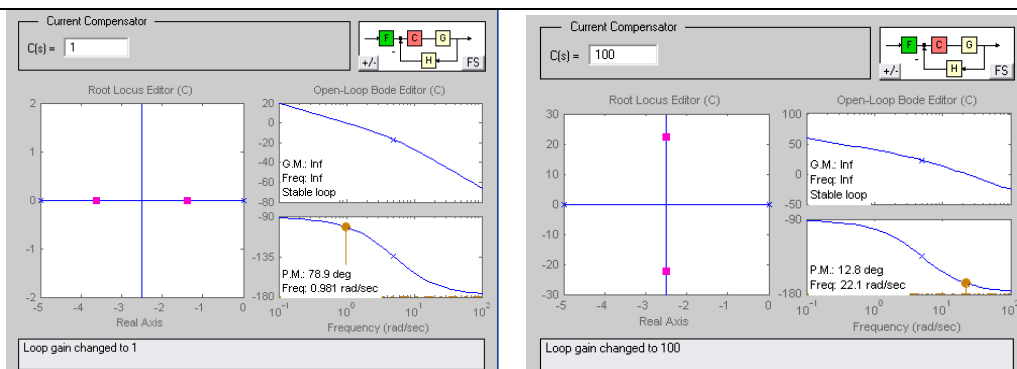
在 MATLAB 命令窗口先定义好模型 $G_o(s) = \frac{k}{s(0.2s+1)}$ ，代码如下：

```
num=1; den=conv([1,0],[0.2,1]); G=tf(num,den)
```

输入 sisotool 命令，可以打开一个空的 SISO Design Tool，通过 file/import 命令，可以将模型 G 载入 SISO 设计工具中，如图所示：

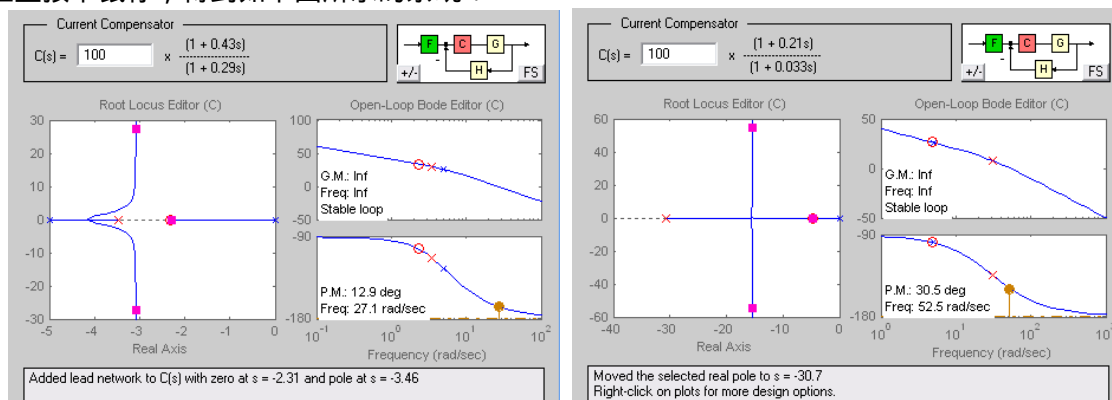
(2) 调整增益

根据要求系统的静态速度误差系数 $K_v \leq 100$ ，补偿器的增益应为 100，将上图中的 $C(s)=1$ 改为 100，如图所示。从图中 Bode 相频图左下角可以看出相位裕度 $\gamma = 12.8^\circ$ ，不满足要求。



(3) 加入超前校正网络

在开环 Bode 图中点击鼠标右键，选择“Add Pole/Zero”下的“Lead”菜单，该命令将在控制器中添加一个超前校正网络。这时鼠标的光标将变成“X”形状，将鼠标移到 Bode 图幅频曲线上接近最右端极点的位置按下鼠标，得到如下图所示的系统：



从图中 Bode 相频图左下角可以看出相位裕度 $\gamma = 12.9^\circ$ ，仍不满足要求，需进一步调整超前环节的参数。

(4) 调整超前网络的零极点

将超前网络的零点移动到靠近原来最左边的极点位置，接下来将超前网络的极点向右移动，并注意移动过程中相角裕度的增长，一直到相角裕度达到 30° ，此时超前网络满足设计要求，如图所示。

从图中可以看出来，超前网络的传递函数为 $\frac{100(1+0.21s)}{(1+0.033s)}$ ，最后系统的 $K_v = 100$ ， $\gamma = 30.5^\circ$ 。

3、使用 SISO Design Tool 设计直流电机调速系统。

直流电机动态模型本质上可以视为典型二阶系统，设某直流电机的传递函数为 $G(s) = \frac{1.5}{s^2 + 14s + 40.02}$ ，系统的设计指标为：上升时间 $t_r < 0.5s$ ，稳态误差 $e_{ss} < 5\%$ ，最大超调量 $M_p\% < 10\%$ ，幅值裕度 $L_g > 20dB$ ，相角裕度 $\gamma > 40^\circ$ 。

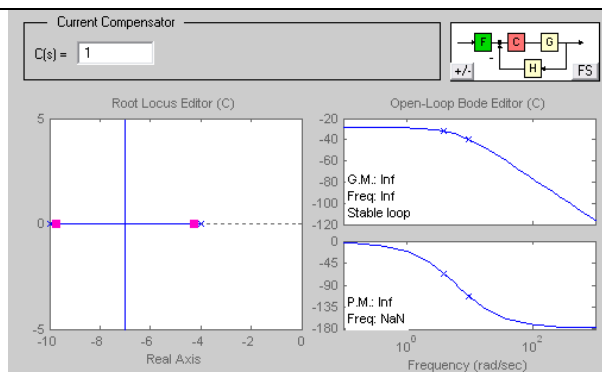
系统设计步骤：

(1) 将模型载入 SISO 设计工具

在 MATLAB 命令窗口先定义好模型 $G(s) = \frac{1.5}{s^2 + 14s + 40.02}$ ，代码如下：

```
num=1.5; den=[1 14 40.02]; G=tf(num,den)
```

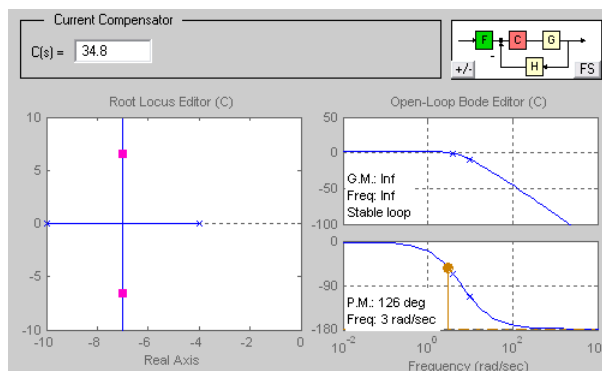
输入 sisotool 命令，通过 file/import 命令，将模型 G 载入 SISO 工具中，如图所示：



(2) 调整补偿器的增益

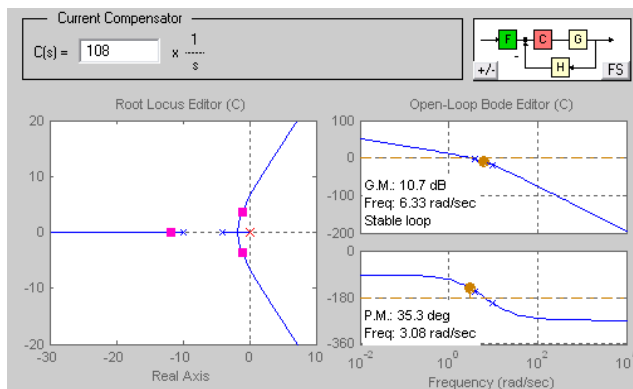
鼠标移动到 Bode 幅值线上，按下鼠标左键抓取 Bode 幅值线，向上拖动，释放鼠标，系统自动计算改变的系统增益和极点。既然系统要求上升时间 $t_r < 0.5s$ ，应调整系统增益，使得系统的穿越频率 ω_c 位于 $3rad/s$ 附近。这是因为 $3rad/s$ 的频率位置近似对应于 $0.33s$ 的上升时间。此时，系统增益为 34.8 ，如下图所示。

观察系统的阶跃响应，可以看到系统的稳态误差和上升时间已得到改善，但要满足所有的设计指标，还应加入更复杂的控制器。



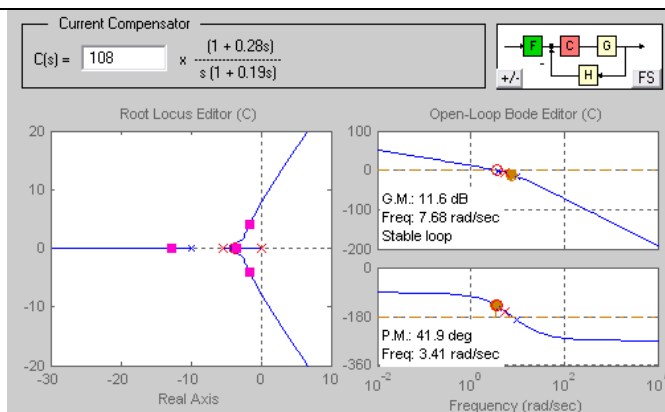
(2) 加入积分器

点击鼠标右键，在弹出的快捷菜单中选择“Add Pole/Zero”下的“Integrator”菜单，系统加入一个积分器，系统的穿越频率随之改变，应调整补偿器的增益将穿越频率调整回 $3rad/s$ 的位置，此时系统增益为 108 ，如下图所示：



(3) 加入超前校正网络

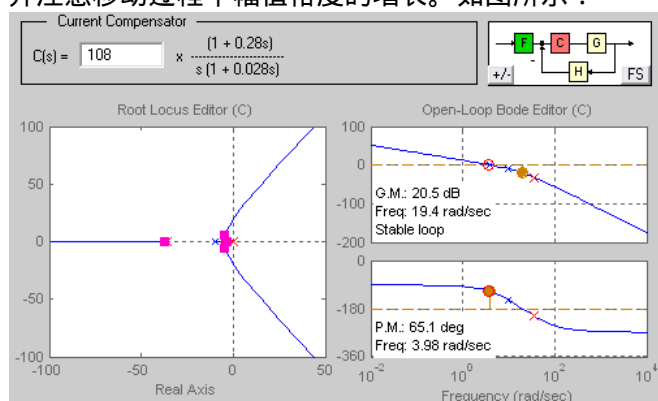
在开环 Bode 图中点击鼠标右键，选择“Add Pole/Zero”下的“Lead”菜单，该命令将在控制器中添加一个超前校正网络。这时鼠标的光标将变成“X”形状，将鼠标移到 Bode 图幅频曲线上接近最右端极点的位置按下鼠标。如图所示：



从 Bode 图中可以看出幅值裕度还没有达到要求，还需进一步调整超前环节的参数。

(4) 移动补偿器的零极点

为了提高系统的响应速度，将超前网络的零点移动到靠近电机原来最左边的极点位置，接下来将超前网络的极点向右移动，并注意移动过程中幅值裕度的增长。如图所示：

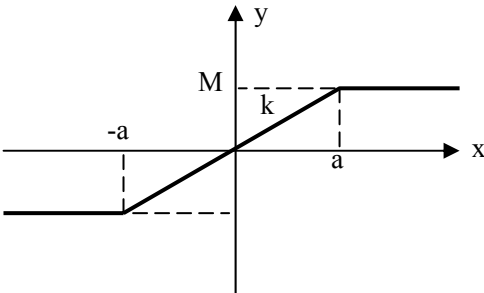


从图中可以看出，此时幅值裕度 $L_g = 20.5\text{dB}$ ，相角裕度 $\gamma = 65.1^\circ$ ，满足要求，穿越频率 $\omega_c = 3.98\text{rad/s}$ 位于 3rad/s 附近，观察其阶跃响应，可以看到系统的稳态误差和超调量均满足要求，此时补偿器的传递函数为

$$C(s) = \frac{108(1 + 0.28s)}{s(1 + 0.028s)}。$$

第 30 次课

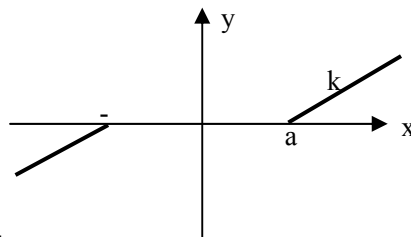
授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第七章 非线性系统分析（1、2 节）
主要内容	典型非线性特性、非线性特征及非线性系统分析方法 描述函数的定义
目的与要求	了解典型非线性特性（饱和、死去、滞环、继电特性） 了解非线性特征（初值敏感性、稳定性、频率响应、自激振荡、极限环等） 了解非线性系统分析方法（描述函数法、相平面法） 掌握描述函数定义（应用条件、描述函数定义）
重点与难点	重点：典型非线性特性、描述函数定义 难点：非线性特征
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	
<p>7.1 引言</p> <p>对于非线性系统，描述其运动状态的数学模型是非线性方程，它与线性系统的最大差别是不能使用叠加原理。</p> <p>一、非线性系统的特点</p> <p>（1）数学模型</p> <p>叠加原理无法应用于非线性微分方程中。</p> <p>（2）稳定性</p> <p>非线性系统的稳定性不仅与系统的结构和参数有关，而且与系统的输入信号和初始条件有关。研究非线性系统的稳定性，必须明确两点：一是指明给定系统的初始状态，二是指明相对于哪一个平衡状态来分析稳定性。</p> <p>（3）系统的零输入响应</p> <p>而非线性系统的零输入响应形式与系统的初始状态却有关。当初始状态不同时，同一个非线性系统可有不同的零输入响应形式。</p> <p>（4）自激振荡或极限环</p> <p>有些非线性系统，在初始状态的激励下，可以产生固定振幅和固定频率的周期振荡，这种周期振荡称为非线性系统的自激振荡或极限环。如果非线性有一个稳定的极限环，则它的振幅和频率不受扰动和初始状态的影响。</p> <p>二、非线性系统的研究方法</p> <p>目前工程上常用的分析非线性系统的方法有描述函数法、相平面法，以及分析非线性系统稳定性的更一般的方法，即李雅普诺夫直接法。当然，近几年发展起来的一些非线性系统分析法有：神经网络、分形理论、专家系统等等。</p> <p>三、典型非线性特性</p> <p>（1）饱和特性</p> <p>饱和非线性特性的数学描述</p> $y = \begin{cases} M & x > a \\ kx & x < a \\ -M & x < -a \end{cases}$  <p>饱和非线性特性的特点是：当输入信号较小时，工作在线性区域；当输入信号较大时，输出呈饱和状态。</p>	

(2) 死区特性

死区非线性特性的数学描述

$$y = \begin{cases} 0 & |x| \leq a \\ k(x-a) & x > a \\ k(x+a) & x < -a \end{cases}$$

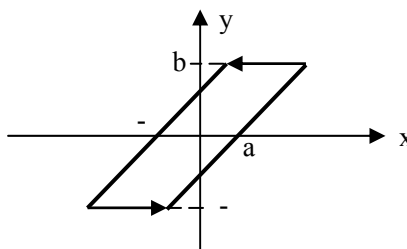


死区非线性出现在一些对小信号不灵敏的装置中，如测量元件、执行机构等。其特点是：当输入信号较小时，无输出信号；当信号大于死区后，输出信号才随着输入信号变化。

(3) 滞环特性

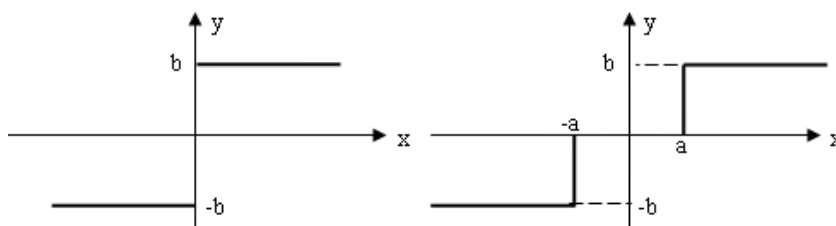
滞环非线性也称为间隙非线性，其数学描述为

$$y = \begin{cases} k(x - a \operatorname{sign} \dot{x}) & \dot{y} \neq 0 \\ b \cdot \operatorname{sign} x & \dot{y} = 0 \end{cases}$$



滞环非线性主要存在于机械加工设备由于装配带来的间隙，其特性是：当输入信号较小时，输出为零；当输入信号大于 a 时，输出呈线性变化；当输入信号反向时，输出保持不变，直到输入小于 -a 时，输出才又呈线性变化。

(4) 继电器特性

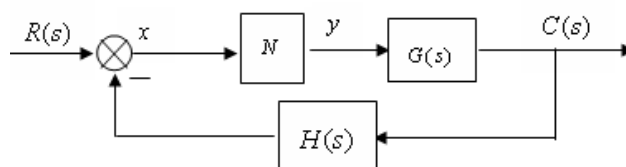


继电器非线性有双位继电器特性、具有死区的继电器特性、具有滞环的继电器特性、具有死区和滞环继电器特性。

7.2 描述函数

非线性系统的描述函数表示，是线性部分频率特性表示法的一种推广。该方法首先通过描述函数将非线性特性线性化，然后应用线性系统的频率法对系统进行分析。

一、描述函数的定义



(1) 描述函数的基本概念

设非线性环节的输入信号为正弦信号 $x(t) = A \sin \omega t$

其输出 $y(t)$ 一般为非周期正弦信号，可以展开为傅氏级数

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

若非线性环节的输入输出部分的静态特性曲线是奇对称的，即 $y(x) = -y(-x)$ ，于是输出中将不会出现直流分量，从而 $A_0 = 0$ 。

$$\text{式中： } A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos n\omega t d(\omega t), \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin n\omega t d(\omega t)$$

同时，若线性部分的 $G(s)$ 具有低通滤波器的特性，从而非线性输出中的高频分量部分被线性部分大大削弱，可以近似认为非线性环节的稳态输出中只包含有基波分量，即 $y(t) = A_1 \cos n\omega t + B_1 \sin n\omega t = Y_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$

$$\text{式中: } A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos \omega t d(\omega t) , \quad B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t) ,$$

$$Y_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} , \quad \varphi_1 = \arctg \frac{A_1}{B_1}$$

(2) 描述函数的定义

类似于线性系统中的频率特性定义：非线性元件稳态输出的基波分量与输入正弦信号的复数之比称为非线性环节的描述函数，用 $N(A)$ 来表示。

$$N(A) = \frac{Y_1}{A} e^{j\varphi_1} = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} \angle \arctg \frac{A_1}{B_1}$$

显然， $\varphi_1 \neq 0$ 时， $N(A)$ 为复数。

(3) 描述函数的应用条件

非线性系统的结构图可以简化为只有一个非线性环节 N 和一个线性环节 $G(s)$ 串联的闭环结构。

非线性特性的静态输入输出关系是奇对称的，即 $y(x) = -y(-x)$ ，以保证非线性环节在正弦信号作用下的输出中不包含直流分量。

系统的线性部分 $G(s)$ 具有良好的低通滤波特性，以保证非线性环节在正弦输入作用下的输出中的高频分量被大大削弱。

第 31 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第七章 非线性系统分析（2 节）
主要内容	描述函数
目的与要求	掌握描述函数（继电特性、饱和特性描述函数求法、常用非线性特性描述函数表） 掌握组合非线性特性的描述函数（并联、串联）
重点与难点	重点：继电特性、饱和特性描述函数求法、常用非线性特性描述函数 难点：组合非线性特性的描述函数
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	7-2

二、描述函数的求法

描述函数求解的一般步骤是：

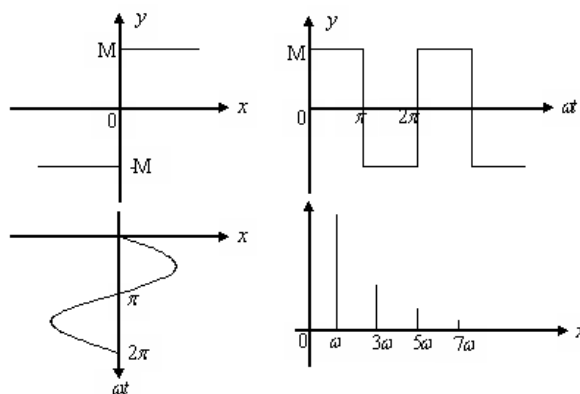
首先由非线性特性曲线，画出正弦信号输入下的输出波形，并写出输出波形的 $y(t)$ 的数学表达式。

利用傅氏级数求出 $y(t)$ 的基波分量。

将基波分量代入描述函数定义，即可求得相应的描述函数 $N(A)$ 。

以继电器非线性特性为例，说明描述函数的求解方法。

由于非线性为双位继电器，即在输入大于零时，输出等于定值 M ，而输入小于零时，输出为定值 $-M$ ，故而，在正弦输入信号的作用下，非线性部分的输出波形为方波周期信号，且周期同输入的正弦信号 2π 。其波形如下图所示。



由波形图可见，输出的方波周期信号为奇函数，则其傅氏级数中的直流分量与基波的偶函数分量系数均为零，即

$$A_0 = 0, A_n = 0 (n = 1, 2, 3, \dots), B_n = 0 (n = 2, 4, 6, \dots)$$

于是，输出信号 $y(t)$ 可表示为

$$y(t) = \frac{4M}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right) = \frac{4M}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\omega t}{2n+1}$$

取输出的基波分量，即 $y_1(t) = \frac{4M}{\pi} \sin \omega t$

于是，继电器非线性特性的描述函数为 $N(A) = \frac{Y_1}{A} \angle \varphi_1 = \frac{4M}{\pi A}$

显然， $N(A)$ 的相位角为零度，其幅值是输入正弦信号幅值 A 的函数。

常见非线性特性的描述函数：

继电器非线性描述函数

$$N(A) = \frac{Y_1}{A} \angle \varphi_1 = \frac{4M}{\pi A}$$

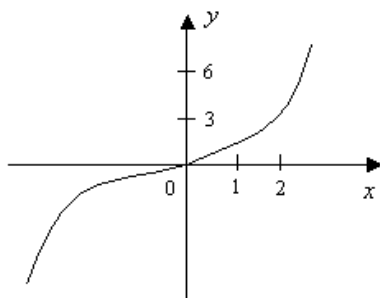
饱和非线性特性的描述函数

$$N(A) = \frac{B_1}{A} = \frac{2k}{\pi} \left[\arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right] \quad (A \geq a)$$

其它常见非线性特性的描述函数，见 Page291 表 7-1

例：研究非线性函数 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^3$ 的描述函数。

解：画出给定非线性特性曲线。



显然，非线性特性为单值奇函数，所以 $A_0 = A_1 = 0$ ，

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^3 \right) \sin \omega t d(\omega t)$$

将 $x = A \sin \omega t$ 代入上式，得到

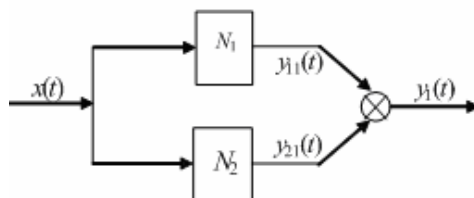
$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^3 \right) \sin \omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}A \sin \omega t + \frac{1}{4}A^3 \sin^3 \omega t \right) \sin \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{1}{2}A + \frac{3}{16}A^3 \end{aligned}$$

于是，描述函数为 $N(A) = \frac{B_1}{A} = \frac{1}{2} + \frac{3}{16}A^2$

三、组合非线性特性的描述函数

简单非线性基本连接形式有串联、并联。

(1) 非线性特性的并联计算

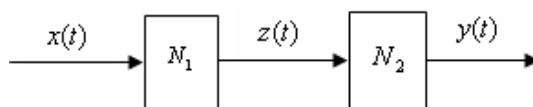


总的描述函数为

$$N(A) = N_1(A) + N_2(A)$$

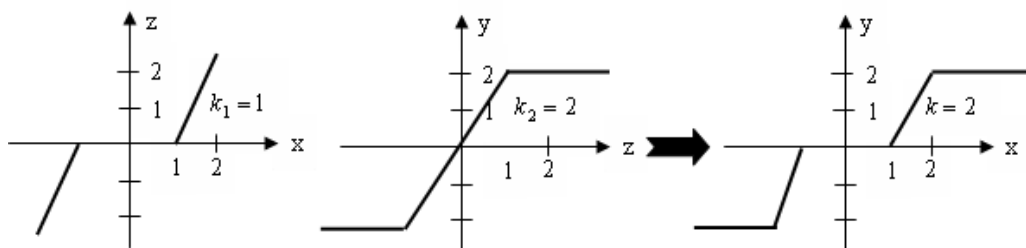
由此可见，若干个非线性环节并联后总的描述函数，等于个并联环节描述函数之和。

(2) 非线性环节的串联



两个非线性环节相串联，串联后总的非线性特性的描述函数并不等于个串联环节描述函数的乘积。而是应该先求出这两个串联非线性特性的等效非线性特性，然后再求这个等效非线性特性的描述函数。

例：如下两个非线性特性相串联



由串联后的等效非线性特性，对照表 7-1 的死区加饱和非线性特性，可见， $k=2, a=2, \Delta=1$ ，于是，等效非线性特性的描述函数为

$$N(A) = \frac{2k}{\pi} \left[\arcsin \frac{a}{A} - \arcsin \frac{\Delta}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} - \frac{\Delta}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{A}\right)^2} \right]$$

$$= \frac{4}{\pi} \left[\arcsin \frac{2}{A} - \arcsin \frac{1}{A} + \frac{2}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{2}{A}\right)^2} - \frac{1}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{A}\right)^2} \right]$$

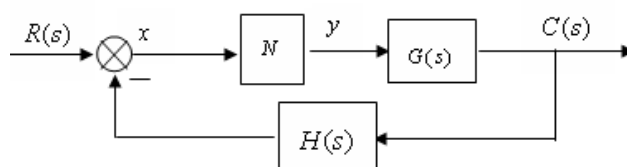
第 32 次课

授课时间 2 学时

授课题目（章、节）	第七章 非线性系统分析（3 节）
主要内容	描述函数分析法
目的与要求	掌握非线性系统稳定性分析（负倒描述函数，描述函数判别非线性系统稳定性的奈奎斯特判据） 掌握自激振荡分析（自激振荡条件、自激振荡稳定性） 掌握自激振荡计算方法
重点与难点	重点：非线性系统稳定性分析、自激振荡分析 难点：自激振荡分析
教学手段	授课、例题讲解
思考题或作业题	7-6、7-7、7-8

7.3 非线性系统的描述函数法

采用描述函数法研究的非线性系统应该是如下结构。



一、非线性系统的稳定性

在上述所示的非线性系统结构中，非线性部分 N 可以用描述函数 $N(A)$ 表示，线性部分 $G(s)$ 则用频率特性 $G(j\omega)$ 表示。

由闭环系统的结构图，可得到系统的闭环频率特性 $\Phi(j\omega)$ 如下

$$\Phi(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{N(A)G(j\omega)}{1 + N(A)G(j\omega)}$$

其闭环特征方程为 $1 + N(A)G(j\omega) = 0$ ，从而有 $G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$

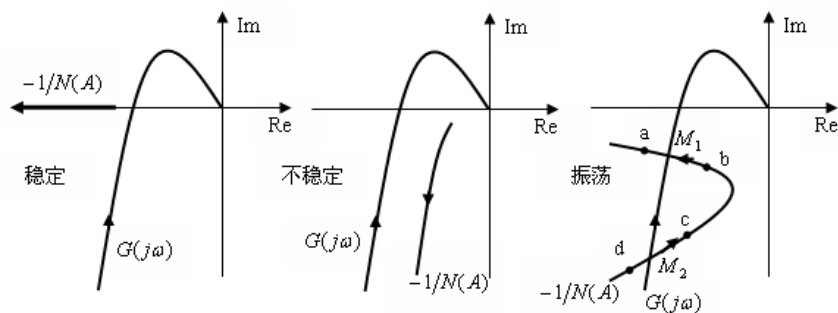
上式 $-1/N(A)$ 称为非线性特性的负倒描述函数。

利用描述函数判别非线性系统稳定性的奈奎斯特判据是：

若 $G(j\omega)$ 曲线不包围 $-1/N(A)$ 曲线，则非线性系统是稳定的；

若 $G(j\omega)$ 曲线包围 $-1/N(A)$ 曲线，则非线性系统是不稳定的；

若 $G(j\omega)$ 曲线与 $-1/N(A)$ 曲线相交，理论上将产生振荡，或称为自激振荡。



二、自激振荡的分析与计算

由上述分析可知，当线性部分的频率特性 $G(j\omega)$ 与负倒描述函数曲线 $-1/N(A)$ 相交时，非线性系统产生自激振荡。下面进一步分析自激振荡的条件和自激振荡的稳定性。

自激振荡条件

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}, \text{ 即 } \begin{cases} |G(j\omega)N(A)| = 1 \\ \angle G(j\omega) + \angle N(A) = -\pi \end{cases}$$

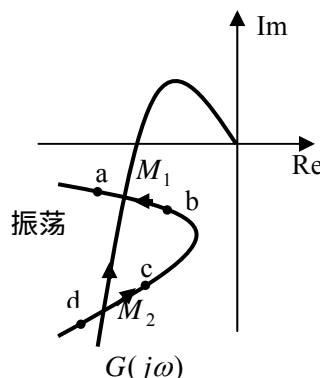
自激振荡的稳定性

所谓自激振荡的稳定性是指，当非线性系统受到扰动作用而偏离原来的周期运动状态，当扰动消失后，系统能够回到原来的等幅振荡状态的，称为稳定的自激振荡。反之，称为不稳定的自激振荡。

如右图所示，线性部分的频率特性 $G(j\omega)$ 与负倒描述函数曲线 $-1/N(A)$ 有两个相交点 M_1 、 M_2 ，这说明系统有两个自激振荡点。

对于 M_1 点，若受到扰动使幅值 A 增大，则工作点将由 M_1 点移至 a 点。由于 a 点不被 $G(j\omega)$ 包围，系统是稳定的，故振荡衰减，振幅 A 自动减小，工作点将沿 $-1/N(A)$ 曲线又回到 M_1 点。反之亦然。所以 M_1 点是稳定的自激振荡。

同理分析可知， M_2 点是不稳定的自激振荡。

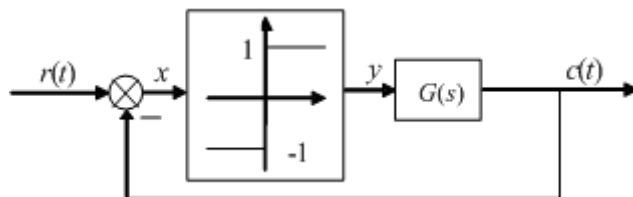


判别自激振荡稳定的方法是：在复平面自激振荡附近，当按幅值 A 增大的方向沿 $-1/N(A)$ 曲线移动时，若系统从不稳定区域进入稳定区域的，则该交点代表的自激振荡是稳定的。反之，当按幅值 A 增大的方向沿 $-1/N(A)$ 曲线移动是从稳定区域进入不稳定区域的，则该交点代表的自激振荡是不稳定的。

自激振荡的计算

对于稳定的自激振荡，其振幅和频率是确定并且是可以测量的，具体的计算方法是：振幅可由 $-1/N(A)$ 曲线的自变量 A 来确定，振荡频率 ω 由 $G(j\omega)$ 曲线的自变量 ω 来确定。需要注意的是，计算得到的振幅和频率，是非线性环节的输入信号 $x(t) = A \sin \omega t$ 的振幅和频率，而不是系统的输出信号 $c(t)$ 。

例：具有理想继电器特性的非线性系统如下所示，其中线性部分的传递函数为 $G(s) = 10/s(s+1)(s+2)$ ，试确定其自激振荡的幅值和频率。



解：继电器非线性的描述函数为

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} = \frac{4}{\pi A}$$

负倒描述函数为

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4}$$

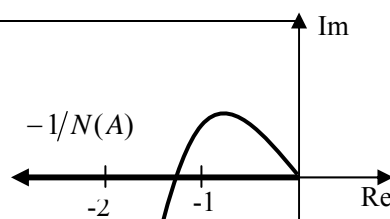
当 $A = 0 \rightarrow \infty$ 时， $-1/N(A)$ 曲线为整个负实轴。

线性部分的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} = -\frac{30}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4} - j\frac{10(2-\omega^2)}{\omega(\omega^4 + 5\omega^2 + 4)}$$

画出 $G(j\omega)$ 和 $-1/N(A)$ 曲线如下，由图可知，两曲线在负实轴上有一个交点，且该自激振荡点是稳定的。

令 $\text{Im}[G(j\omega)] = 0$ ，即



$$\frac{10(2 - \omega^2)}{\omega(\omega^4 + 5\omega^2 + 4)} = 0 \Rightarrow 2 - \omega^2 = 0$$

将 $\omega = \sqrt{2}$ 代入 $G(j\omega)$ 的实部，得到

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)]\Big|_{\omega=\sqrt{2}} = -\frac{30}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}\Big|_{\omega=\sqrt{2}} = -1.66$$

由 $G(j\omega)N(A) = -1$ ，可得到 $-\frac{1}{N(A)} = G(j\omega)$

$$\text{即有 } -\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4} = -1.66$$

于是求得自激振荡的幅值为 $A = 2.1$ ；自激振荡频率为 $\omega = \sqrt{2}(\text{rad/s})$ 。