

# MST (최소 신장 트리)

\* 입력 :  $G=(V, E)$  무방향 그래프

\* 출력 : 최소 신장 트리

\* 신장 트리

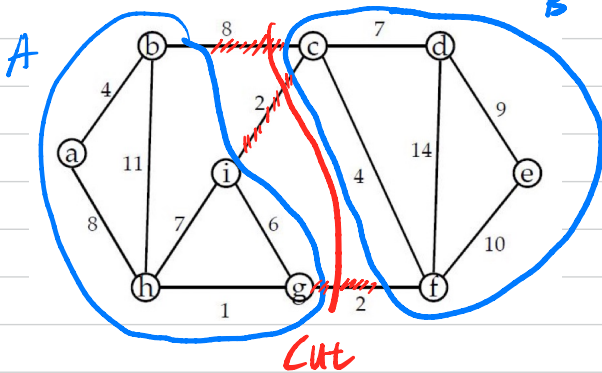
: 사이클이 없이 모든 노드가 연결된 그래프를 트리 구조로 표현.

## MST 성질

$n$ 개의 노드를 연결하기 위해서는  $n-1$ 개의 간선이 필요.  $\rightarrow$  부족하면 사이클 생성됨

1. 트리 성질:  $n$ 개 노드  $-(n-1)$ 개 엣지, 엣지 삭제  $\rightarrow$  2개의 부분리로 분할  
새로 엣지 삽입  $\rightarrow$  엣지는 포함된 사이클 생성.

## 2. Cut Property: Prim 알고리즘



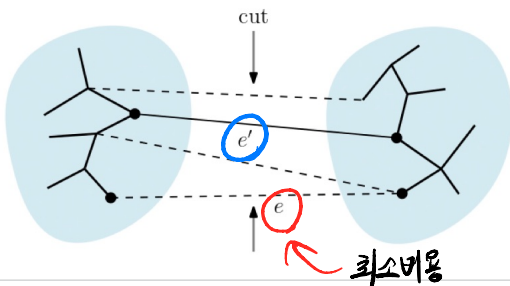
\* A와 B를 연결하기 위해서는 반드시 cut의 edge를 사용해야 한다.

최소  $\Rightarrow$  cost가 가장 작은 것을 선택 하는 것이 최선임.

\*  $\Rightarrow$  cut에서 최소(비용) edge를 포함 하는 MST는 최소 하나 이상 존재 한다.

## < Cut Property 증명 >

$\Rightarrow$  귀류법



$\Rightarrow$  cut 중 가장 작은 한개의 최소 비용으로 도출되지 않는다고 가정

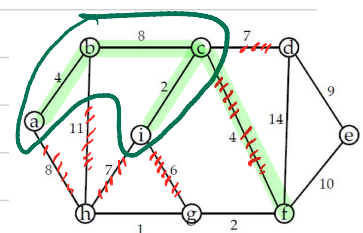
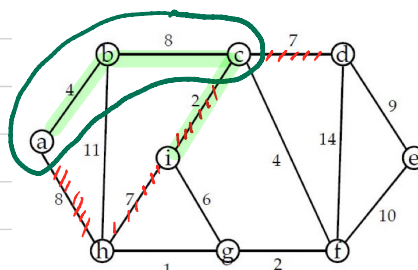
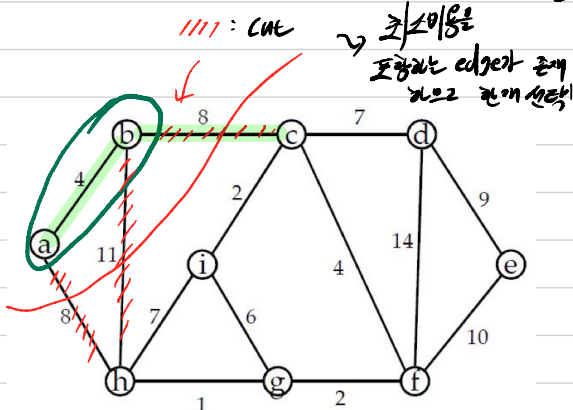
$\Rightarrow$  e가 아니고 e'이 포함된 edge가 MST라고 생각.  $= T(e')$

$\Rightarrow$  e'를 제거하고 e를 새로 연결 해서 새로운 MST 생성.

$$\Rightarrow T' = T - \{e'\} \cup \{e\}$$

cost는  $cost(e) < cost(e')$ 이므로

모순  $\rightarrow cost(T') < cost(T)$  이어야 하지만 모순이 발생 한다.

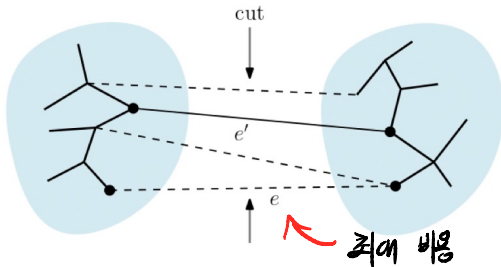


### 3. Cycle property

임의의 cycle의 최대 비용 edge를 포함 하는 MST는 없다. ♪

<증명>

임의의 cycle의 최대 비용 edge를 포함 하는 MST는 ~~없다~~. ♪  
~~있다~~ 라고 가정

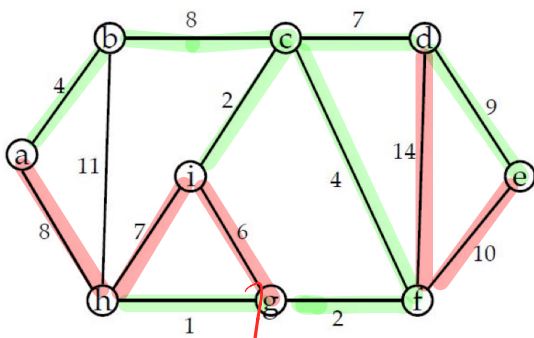


$$\bullet \text{cost}(e') < \text{cost}(e)$$

$$\bullet T' = T - \{e\} \cup \{e'\}$$

$$\bullet \text{cost}(T') < \text{cost}(T) \rightarrow \text{모순 발생}$$

위의 3가지 성질을 이용한 것이 Kruskal 알고리즘



• 2중과순으로 선택 (비용을 기준으로)

• Cycle이 발생하면 해당 노드 선택 X  
 why? : 성질 3 만족 X

성질 3: 임의의 cycle의 최대 비용 edge를 포함 하는 MST는 없다. ♪

6을 뺀 순간 cycle 발생?