

EN811100

LINEAR CIRCUIT

ANALYSIS

Chapter 11 (with Sound)
AC Power Analysis
April 14, 2563

C. K. Alexander – M. N. O. Sadiku
Fundamentals of Electric Circuits, 5th Edition, The McGraw-Hill Companies 2013
J. A. Svoboda – R. C. Dorf
Introduction to Electric Circuits, 9th edition, John Wiley & Sons, Inc. 2014



2

AC Power Analysis - Chapter 11

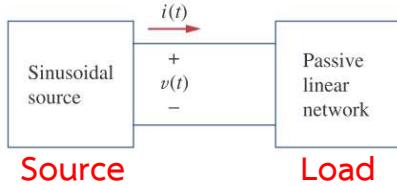
- 11.1 Instantaneous and Average Power**
- 11.2 Maximum Average Power Transfer**
- 11.3 Effective or RMS Value**
- 11.4 Apparent Power and Power Factor**
- 11.5 Complex Power**
- 11.6 Conservation of AC Power**
- 11.7 Power Factor Correction**
- 11.8 Power Measurement**



11.1 Instantaneous and Average Power

Instantaneous power = กำลังไฟฟ้า ณ ขณะหนึ่งๆ

$$p(t) = v(t) i(t)$$



ถ้า $p(t) > 0$ แสดงว่า Source จ่าย Power ให้ Load

ถ้า $p(t) < 0$ แสดงว่า Load จ่าย Power กลับคืนให้ Source

3



11.1 Instantaneous and Average Power

Instantaneous Power ในกรณีไฟฟ้ากระแสสลับ

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$p(t) = v(t) i(t)$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} (\cos(A - B) + \cos(A + B))$$

$$= V_m \cos(\omega t + \theta_v) I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$= V_m I_m \cos(\omega t + \theta_v) \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$= \frac{V_m I_m}{2} (\cos(\omega t + \theta_v - \omega t - \theta_i) + \cos(\omega t + \theta_v + \omega t + \theta_i))$$

$$= \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$$

ส่วนที่คงที่
ไม่ขึ้นกับเวลา

ส่วนที่เปลี่ยนตามเวลา
เป็น Sinusoid ความถี่ 2ω

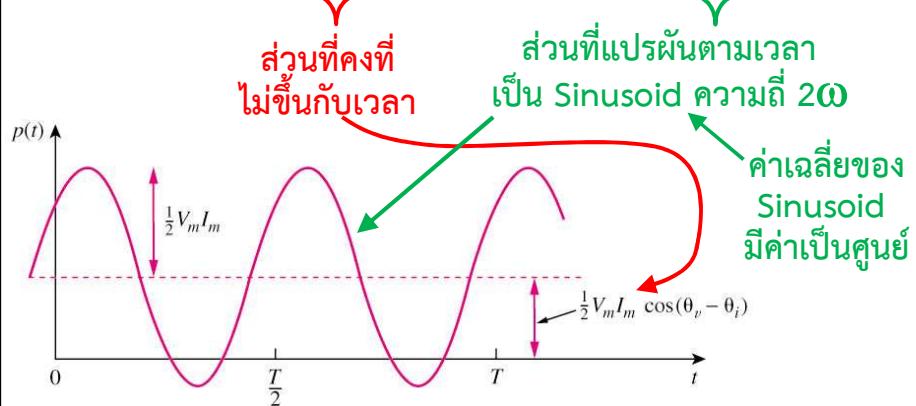
4



11.1 Instantaneous and Average Power

Instantaneous Power

$$p(t) = v(t) i(t) = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$$

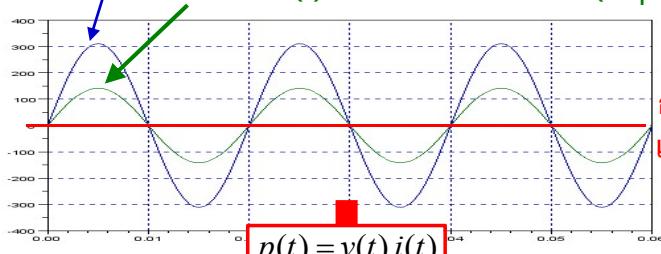


Instantaneous Power ของ Resistive Load

$$\text{Instantaneous Power } p(t) = v(t) i(t)$$

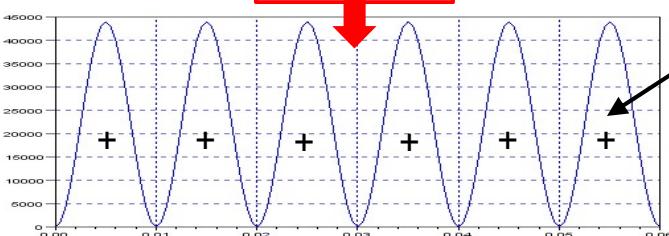
แรงดัน $v(t)$

กระแส $i(t)$ ของ Resistive Load (In phase=เฟสตรงกัน)

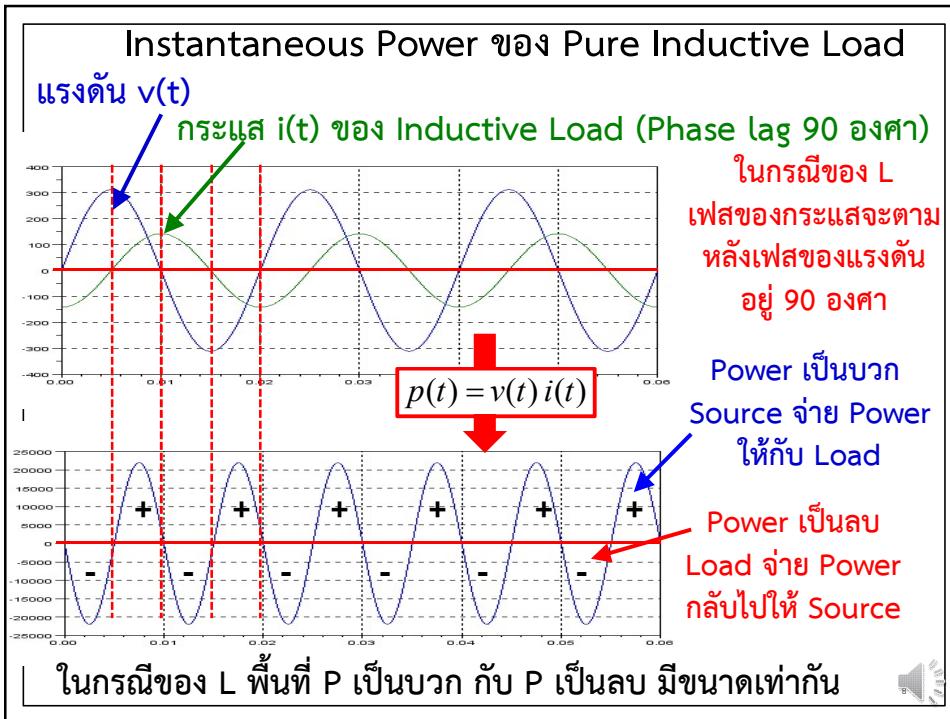
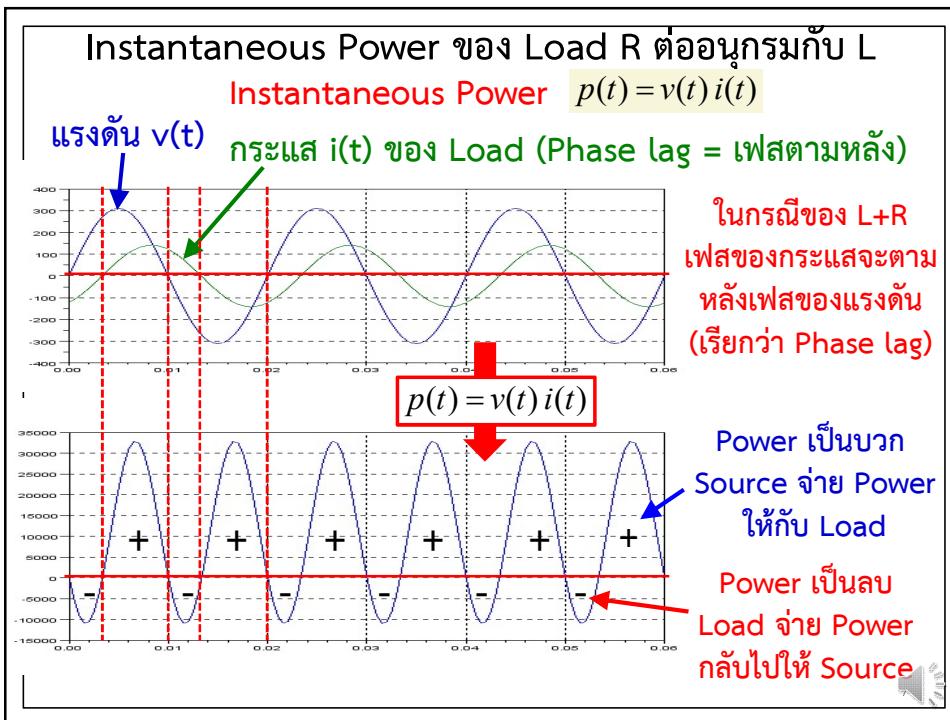


ในกรณีของ R
กระแสจะมีเฟสตรงกับ
แรงดัน ดังนั้น Power
จึงเป็นบวกเสมอ

$$p(t) = v(t) i(t)$$



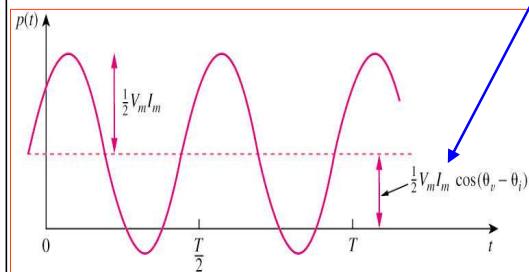
Power เป็นบวก
แปลว่า Source
จ่าย Power ให้
Load



11.1 Instantaneous and Average Power

- The average power, P , is the average of the instantaneous power over one period.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)$$



- P is not time dependent.
- When $\theta_v = \theta_i$, it is a purely resistive load case.
- When $\theta_v - \theta_i = \pm 90^\circ$, it is a purely reactive load case.
- $P = 0$ means that the circuit absorbs no average power.



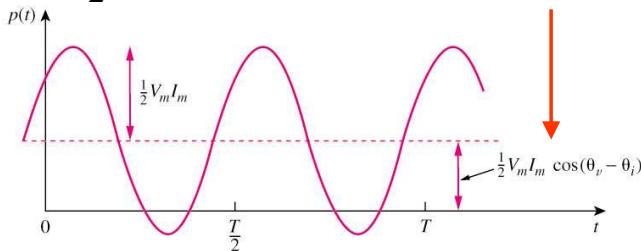
11.1 Instantaneous and Average Power

Average Power (กำลังไฟฟ้าเฉลี่ย) คือค่าเฉลี่ยในหนึ่งรอบของ Instantaneous Power

ค่าเฉลี่ยของ
Sinusoid
มีค่าเป็นคูณ

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) dt \\ &= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) \end{aligned}$$

Average Power
ไม่ขึ้นกับเวลา



Average Power กรณี Load เป็นตัวต้านทาน

กรณี Load เป็นตัวต้านทาน จะได้ $\theta_v = \theta_i$

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(0) = \frac{1}{2} V_m I_m$$

สำหรับ Resistor จะได้ $P = \frac{1}{2}V_mI_m = \frac{1}{2}I_m^2R = \frac{1}{2}|I|^2R$

ตัวต้านทานรับพลังงานทั้งหมดจาก Source และเปล่งเป็นความร้อน
ตัวอย่าง Load ประเภทตัวต้านทานได้แก่ อุปกรณ์ทำความร้อนต่างๆ เช่น Heater เตาเริด หม้อนุ่งข้าว เครื่องทำน้ำอุ่น



Average Power กรณี Load เป็น L หรือ C

กรณี Load เป็น L จะได้ $\theta_v - \theta_i = 90^\circ$ } สองกรณีนี้จัดเป็น
 กรณี Load เป็น C จะได้ $\theta_v - \theta_i = -90^\circ$ } Reactive load

$$\text{จะได้ } P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\pm 90^\circ) = 0$$

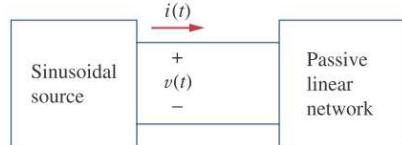
กรณีจะได้กำลังไฟฟ้าเฉลี่ย $P=0$ แสดงว่าไม่มีการรับพลังงานจาก Source ไปใช้งานเลย กล่าวคือในแต่ละรอบของไฟฟ้ากระแสสลับ Reactive load ในอุดมคติจะมีการรับพลังงานจาก Source และก็จ่ายพลังงานคืนให้ Source ในปริมาณที่เท่ากัน จึงทำให้ $P=0$



Given that

Example 11.1

$$v(t) = 120 \cos(377t + 45^\circ) \text{ V} \quad \text{and} \quad i(t) = 10 \cos(377t - 10^\circ) \text{ A}$$



find the instantaneous power and the average power absorbed by the passive linear network

วิธีทำ

$$\begin{aligned} p &= vi = 1200 \cos(377t + 45^\circ) \cos(377t - 10^\circ) \\ &\quad \cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A + B) + \cos(A - B)] \\ p &= 600[\cos(754t + 35^\circ) + \cos 55^\circ] \end{aligned}$$



$$p = 600[\cos(754t + 35^\circ) + \cos 55^\circ]$$

ได้ Instantaneous Power

$$p(t) = 344.2 + 600 \cos(754t + 35^\circ) \text{ W}$$

ได้ Average Power

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{1}{2} 120(10) \cos[45^\circ - (-10^\circ)] \\ &= 600 \cos 55^\circ = 344.2 \text{ W} \end{aligned}$$



การคำนวณ Average Power จาก Phasor

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \Rightarrow \mathbf{V} = V_m \angle \theta_v$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i) \Rightarrow \mathbf{I} = I_m \angle \theta_i$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \mathbf{VI}^* &= \frac{1}{2} V_m I_m \angle \theta_v - \theta_i \\ &= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + j \frac{1}{2} V_m I_m \sin(\theta_v - \theta_i)\end{aligned}$$

ได้สูตรการคำนวณ Average Power จาก Phasor

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{VI}^*]$$

35



Example 11.2

Calculate the average power absorbed by an impedance $\mathbf{Z} = 30 - j70 \Omega$ when a voltage $\mathbf{V} = 120 \angle 0^\circ$ is applied across it.

วิธีทำ

The current through the impedance is

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{120 \angle 0^\circ}{30 - j70} = \frac{120 \angle 0^\circ}{76.16 \angle -66.8^\circ} = 1.576 \angle 66.8^\circ \text{ A}$$

The average power is

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{1}{2} (120)(1.576) \cos(0 - 66.8^\circ) = 37.24 \text{ W}$$

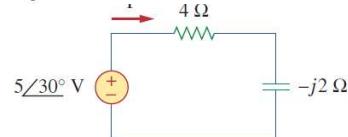


Example 11.3

For the circuit shown in Fig. 11.3, find the average power supplied by the source and the average power absorbed by the resistor.

วิธีทำ

กระแสที่ Voltage source จ่าย



$$\mathbf{I} = \frac{5\angle 30^\circ}{4 - j2} = \frac{5\angle 30^\circ}{4.472\angle -26.57^\circ} = 1.118\angle 56.57^\circ \text{ A}$$

Power ที่ Voltage source จ่าย

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)$$

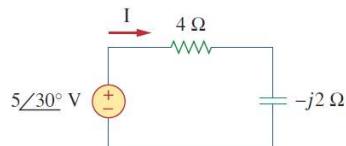
$$P = \frac{1}{2}(5)(1.118) \cos(30^\circ - 56.57^\circ) = 2.5 \text{ W}$$

17



กระแสที่โหลดผ่าน Resistor

$$\mathbf{I}_R = \mathbf{I} = 1.118\angle 56.57^\circ \text{ A}$$



แรงดันที่ตกคร่อม Resistor

$$\mathbf{V}_R = 4\mathbf{I}_R = 4.472\angle 56.57^\circ \text{ V}$$

Power ที่ Resistor รับ

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{4.472 \times 1.118}{2} \cos(56.57 - 56.57)$$

$$P = \frac{1}{2}(4.472)(1.118) = 2.5 \text{ W}$$

ในตัวอย่างข้อนี้จะพบว่า

Power ที่ Voltage source จ่าย = Power ที่ Resistor รับ

18

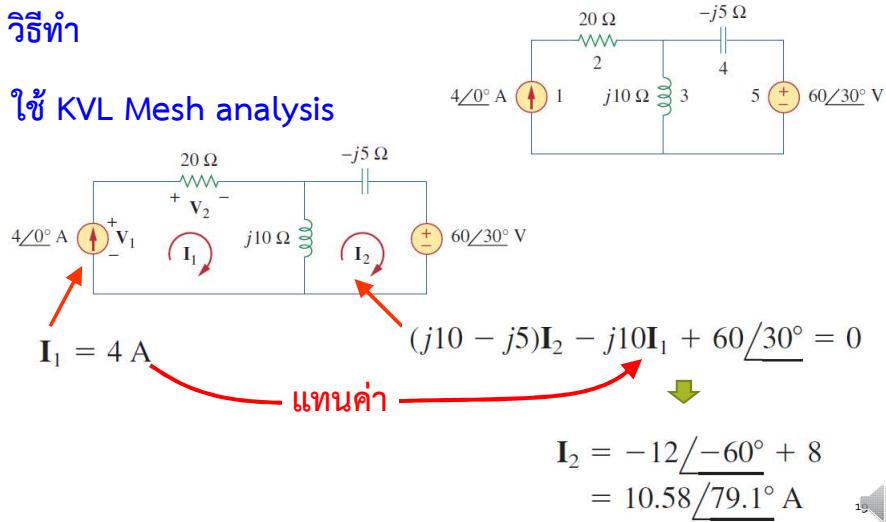


Example 11.4

Determine the average power generated by each source and the average power absorbed by each passive element in the circuit of Fig. 11.5(a).

วิธีทำ

ใช้ KVL Mesh analysis



Average Power ที่ Voltage source จ่าย

$$P_5 = \frac{1}{2}(60)(10.58) \cos(30^\circ - 79.1^\circ) = 207.8 \text{ W}$$

หา Voltage ที่ตกคร่อม Current source

$$\begin{aligned} V_1 &= 20I_1 + j10(I_1 - I_2) = 80 + j10(4 - 2 - j10.39) \\ &= 183.9 + j20 = 184.984\angle 6.21^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Average Power ที่ Current source จ่าย

$$P_1 = -\frac{1}{2}(184.984)(4) \cos(6.21^\circ - 0) = -367.8 \text{ W}$$

ถ้ากระแสส่วงออกจากขั้วบวกของ Source เราจะให้ Power เป็นลบ

กระแสที่ผ่าน R

$$\mathbf{I}_1 = 4 \angle 0^\circ$$

แรงดันที่ตกคร่อม R

$$20\mathbf{I}_1 = 80 \angle 0^\circ$$

Power ที่ R รับ

$$P_2 = \frac{1}{2}(80)(4) = 160 \text{ W}$$

กระแสที่ผ่าน C

$$\mathbf{I}_2 = 10.58 \angle 79.1^\circ$$

แรงดันที่ตกคร่อม C $-j5\mathbf{I}_2 = (5 \angle -90^\circ)(10.58 \angle 79.1^\circ)$

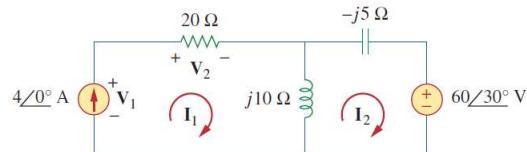
$$= 52.9 \angle 79.1^\circ - 90^\circ$$

Power ที่ C รับ

$$P_4 = \frac{1}{2}(52.9)(10.58) \cos(-90^\circ) = 0$$

จะเห็นได้ว่า C ไม่ได้รับ Power ไปใช้งาน เพราะ P=0

21



กระแสที่ผ่าน L $\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 = 2 - j10.39 = 10.58 \angle -79.1^\circ$

แรงดันที่ตกคร่อม L $j10(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = 10 \times 10.58 \angle -79.1^\circ + 90^\circ$

Power ที่ L รับ $P_3 = \frac{1}{2}(105.8)(10.58) \cos 90^\circ = 0$

จะเห็นได้ว่า L ไม่ได้รับ Power ไปใช้งาน เพราะ P=0

จะได้ Power รวมทั้งหมด

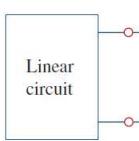
$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = -367.8 + 160 + 0 + 0 + 207.8 = 0$$

ซึ่งเป็นไปตามกฎอนุรักษ์ Power

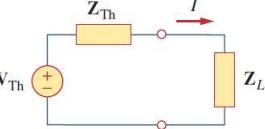
22



11.2 Maximum Average Power Transfer



วงจรไฟฟ้าสามารถ
แทนได้ด้วย Thevenin
Equivalent circuit



เราต้องการทราบว่า Z_L มีค่าเป็นเท่าไรจะได้ P สูงที่สุด

ให้ $\mathbf{Z}_{\text{Th}} = R_{\text{Th}} + jX_{\text{Th}}$ $\mathbf{Z}_L = R_L + jX_L$

จะได้กระแส $\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_{\text{Th}}}{\mathbf{Z}_{\text{Th}} + \mathbf{Z}_L} = \frac{\mathbf{V}_{\text{Th}}}{(R_{\text{Th}} + jX_{\text{Th}}) + (R_L + jX_L)}$

จะได้ Average Power เป็น

$$P = \frac{1}{2} |\mathbf{I}|^2 R_L = \frac{|\mathbf{V}_{\text{Th}}|^2 R_L / 2}{(R_{\text{Th}} + R_L)^2 + (X_{\text{Th}} + X_L)^2}$$

23



เราต้องการหาค่า R_L และ X_L ที่ทำให้ Power สูงที่สุด

$$\frac{\partial P}{\partial X_L} = -\frac{|\mathbf{V}_{\text{Th}}|^2 R_L (X_{\text{Th}} + X_L)}{[(R_{\text{Th}} + R_L)^2 + (X_{\text{Th}} + X_L)^2]^2} = 0 \quad (\text{a})$$

$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = \frac{|\mathbf{V}_{\text{Th}}|^2 [(R_{\text{Th}} + R_L)^2 + (X_{\text{Th}} + X_L)^2 - 2R_L(R_{\text{Th}} + R_L)]}{2[(R_{\text{Th}} + R_L)^2 + (X_{\text{Th}} + X_L)^2]^2} = 0 \quad (\text{b})$$

แก้สมการ (a) และ (b) จะได้ R_L และ X_L ที่ทำให้ Power สูงที่สุดเป็น

$$X_L = -X_{\text{Th}} \quad R_L = \sqrt{R_{\text{Th}}^2 + (X_{\text{Th}} + X_L)^2}$$

จะได้ Load impedance ที่ทำให้เกิดการถ่ายเท Power ได้สูงที่สุดเป็น

$$\mathbf{Z}_L = R_L + jX_L = R_{\text{Th}} - jX_{\text{Th}} = \mathbf{Z}_{\text{Th}}^*$$

24



Load impedance ที่ทำให้เกิดการถ่ายเท Power ได้สูงที่สุดคือ

$$\mathbf{Z}_L = R_L + jX_L = R_{\text{Th}} - jX_{\text{Th}} = \mathbf{Z}_{\text{Th}}^*$$

จะได้ Power ที่สูงที่สุดคือ

$$P = \frac{1}{2}|\mathbf{I}|^2 R_L = \frac{|\mathbf{V}_{\text{Th}}|^2 R_L / 2}{(R_{\text{Th}} + R_L)^2 + (X_{\text{Th}} + X_L)^2} = \frac{|\mathbf{V}_{\text{Th}}|^2}{8R_{\text{Th}}} \quad \boxed{|\mathbf{V}_{\text{Th}}|^2}$$

$R_L = R_{\text{Th}}$

$X_L = -X_{\text{Th}}$

ในการนี้ที่ Load เป็น Resistor อย่างเดียว จะได้ค่า R ที่ทำให้เกิด การถ่ายเทพลังงานสูงที่สุดคือ $R_L = \sqrt{R_{\text{Th}}^2 + X_{\text{Th}}^2} = |\mathbf{Z}_{\text{Th}}|$

25

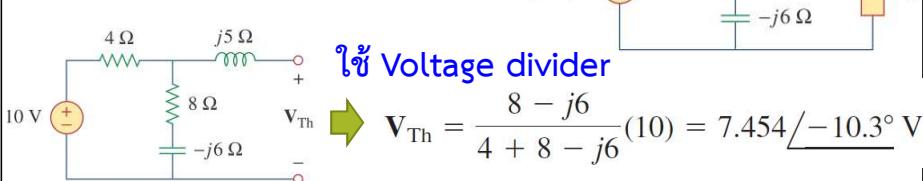


Example 11.5

Determine the load impedance \mathbf{Z}_L that maximizes the average power drawn from the circuit of Fig. 11.8. What is the maximum average power?

วิธีทำ

หา Thevenin equivalent circuit



$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{\text{Th}} &= j5 + 4 \parallel (8 - j6) \\ &= j5 + \frac{4(8 - j6)}{4 + 8 - j6} = 2.933 + j4.467 \Omega \end{aligned}$$

26



Load impedance ที่ทำให้เกิดการถ่ายเท Power ได้สูงที่สุดคือ

$$\mathbf{Z}_L = R_L + jX_L = R_{\text{Th}} - jX_{\text{Th}} = \mathbf{Z}_{\text{Th}}^*$$

$$\mathbf{Z}_{\text{th}} = 2.933 + j4.467 \Omega$$

จะได้

$$\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{\text{Th}}^* = 2.933 - j4.467 \Omega$$

และได้

$$P_{\max} = \frac{|\mathbf{V}_{\text{Th}}|^2}{8R_{\text{Th}}} = \frac{(7.454)^2}{8(2.933)} = 2.368 \text{ W}$$

27

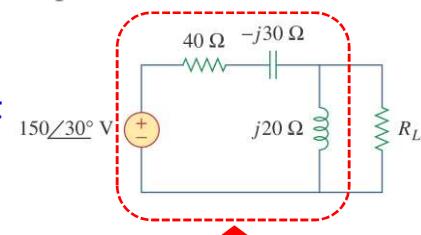


Example 11.6

In the circuit in Fig. 11.11, find the value of R_L that will absorb the maximum average power. Calculate that power.

วิธีทำ

หา Thevenin equivalent circuit



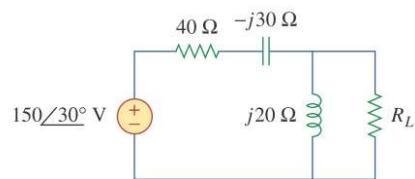
$$\mathbf{Z}_{\text{Th}} = (40 - j30) \parallel j20 = \frac{j20(40 - j30)}{j20 + 40 - j30} = 9.412 + j22.35 \Omega$$

$$\mathbf{V}_{\text{Th}} = \frac{j20}{j20 + 40 - j30} (150 \angle 30^\circ) = 72.76 \angle 134^\circ \text{ V}$$

28



$$\mathbf{Z}_{th} = 9.412 + j22.35 \Omega$$



ในกรณีนี้ Load เป็น Resistor อย่างเดียวจะได้ค่า R ที่ทำให้เกิดการถ่ายเทพลังงานสูงที่สุดคือ $R_L = \sqrt{R_{Th}^2 + X_{Th}^2} = |\mathbf{Z}_{Th}|$

$$R_L = |\mathbf{Z}_{Th}| = \sqrt{9.412^2 + 22.35^2} = 24.25 \Omega$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_{Th}}{\mathbf{Z}_{Th} + R_L} = \frac{72.76\angle 134^\circ}{33.66 + j22.35} = 1.8\angle 100.42^\circ \text{ A}$$

จะได้

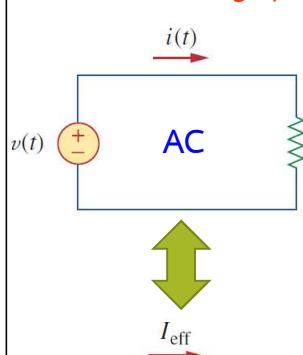
$$P_{max} = \frac{1}{2}|\mathbf{I}|^2 R_L = \frac{1}{2}(1.8)^2(24.25) = 39.29 \text{ W}$$

29



11.3 Effective or RMS Value

The effective of a periodic current is the dc current that delivers the same average power to a resistor as the periodic current.



ในการคำนวณ Average Power ของไฟฟ้ากระแสสลับที่ Resistor ใช้ไป จะต้องใช้สูตร

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt = \frac{R}{T} \int_0^T i^2 dt \rightarrow \text{คำนวณยาก!}$$

ถ้าเป็นไฟฟ้ากระแสตรง Power คำนวณจาก

$$P = I_{eff}^2 R = \frac{V_{eff}^2}{R} \rightarrow \text{คำนวณง่ายกว่า}$$

ซึ่ง I_{eff} ก็คือ Effective current ของไฟฟ้ากระแสตรงที่ให้ Power เท่ากับ Power ของไฟฟ้ากระแสสลับ

30



11.3 Effective or RMS Value

$$P = \frac{R}{T} \int_0^T i^2 dt = I_{\text{eff}}^2 R \rightarrow \text{แก้สมการ จะได้ว่า } I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

Average power Power ของ
ของวงจร AC วงจร DC

$$\text{ในท่านองเดียวกัน จะได้ } V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2 dt}$$

Effective Value มีชื่อเรียกอีกชื่อว่า Root-Mean-Square Value (RMS) เพราะเป็นการหาค่าเฉลี่ยของกำลังสองแล้วถอด Root

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = I_{\text{rms}} \quad V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2 dt} = V_{\text{rms}}$$

31



11.3 Effective or RMS Value

สูตร RMS Value สำหรับสัญญาณทั่วไป

$$X_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2 dt}$$

RMS Value ของ Sinusoid

กำหนดให้ $i(t) = I_m \cos \omega t$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } I_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t) dt} \\ &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\text{ในท่านองเดียวกัน } v(t) = V_m \cos \omega t \text{ จะได้ } V_{\text{rms}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

32



สูตรคำนวณ Power ของไฟฟ้ากระแสสลับจาก RMS Value

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = \left(\frac{V_m}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}} \right) \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$= V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

*** ข้อดีของการใช้ค่า RMS คือ จะใช้คำนวณ Power ได้ง่าย ***

หมายเหตุ: ค่าแรงดันไฟฟ้าและกระแสไฟฟ้าของไฟฟ้ากระแสสลับ

เรานิยมบอกค่าเป็น RMS Value เช่น แรงดันไฟฟ้า 220V 50Hz

หมายความว่า $V_{rms} = 220 \text{ V}$

จาก $V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$ จะได้ว่า $V_m = \sqrt{2}V_{rms} = 220\sqrt{2} = 311.12 \text{ V}$

แสดงว่าแรงดันไฟฟ้าตามบ้านเรือนมีค่า Peak สูงสุดคือ 311.12 V

33

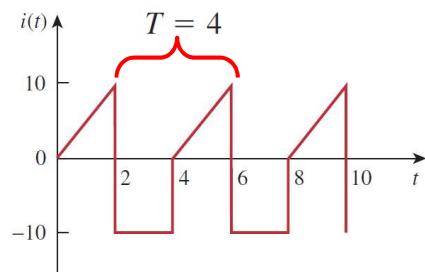


Example 11.7

Determine the rms value of the current waveform in Fig. 11.14. If the current is passed through a $2-\Omega$ resistor, find the average power absorbed by the resistor.

วิธีทำ

$$i(t) = \begin{cases} 5t, & 0 < t < 2 \\ -10, & 2 < t < 4 \end{cases}$$



$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{4} \left[\int_0^2 (5t)^2 dt + \int_2^4 (-10)^2 dt \right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} \left[25 \frac{t^3}{3} \Big|_0^2 + 100t \Big|_2^4 \right]} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{200}{3} + 200 \right)} = 8.165 \text{ A}$$

$$P = I_{rms}^2 R = (8.165)^2 (2) = 133.3 \text{ W}$$

34

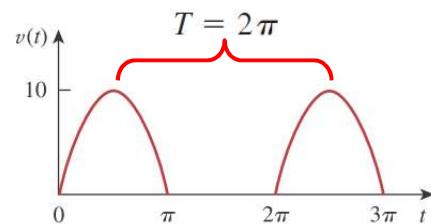


Example 11.8

The waveform shown in Fig. 11.16 is a half-wave rectified sine wave. Find the rms value and the amount of average power dissipated in a $10\text{-}\Omega$ resistor.

วิธีทำ

$$v(t) = \begin{cases} 10 \sin t, & 0 < t < \pi \\ 0, & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$



$$V_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\pi (10 \sin t)^2 dt + \int_\pi^{2\pi} 0^2 dt \right]$$

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$$

$$V_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{100}{2} (1 - \cos 2t) dt = \frac{50}{2\pi} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^\pi$$

35



$$V_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{100}{2} (1 - \cos 2t) dt = \frac{50}{2\pi} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^\pi$$

$$= \frac{50}{2\pi} \left(\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi - 0 \right) = 25, \quad V_{\text{rms}} = 5 \text{ V}$$

จะได้

$$P = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} = \frac{5^2}{10} = 2.5 \text{ W}$$

36

18

11.4 Apparent Power and Power Factor

เมื่อกำหนดให้ $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$ $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$

ได้ Average Power $P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i)$

ผลคูณระหว่างค่า V_{rms} กับ I_{rms} เรียกว่า Apparent Power
เรียกว่า Power Factor (pf)

Apparent Power (S) มีหน่วยเป็น Volt-Amp (VA)

$$S = V_{rms} I_{rms}$$

จะได้ค่า Average Power (P) มีหน่วยเป็น (Watts)

$$P = S \cos(\theta_v - \theta_i) = S \cdot pf$$

$\theta_v - \theta_i$ เรียกว่า Power Factor Angle



Power Factor Angle

จากสูตร $S = V_{rms} I_{rms}$ และ $P = S \cos(\theta_v - \theta_i) = S \cdot pf$

โดยมี Power Factor Angle = $\theta_v - \theta_i$
ในการวิเคราะห์ Impedance
เนื่องจาก

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{V_m \angle \theta_v}{I_m \angle \theta_i} = \frac{V_m}{I_m} \angle \theta_v - \theta_i$$

โดยที่ $\mathbf{V}_{rms} = \frac{\mathbf{V}}{\sqrt{2}} = V_{rms} \angle \theta_v$ $\mathbf{I}_{rms} = \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{2}} = I_{rms} \angle \theta_i$

จะได้ว่า $\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{V}_{rms}}{\mathbf{I}_{rms}} = \frac{V_{rms}}{I_{rms}} \angle \theta_v - \theta_i$

เราจะพบว่า

Power Factor Angle = Angle of Load Impedance = $\theta_v - \theta_i$



11.4 Apparent Power and Power Factor

Purely resistive load (R)	$\theta_v - \theta_i = 0$, Power factor = 1	P/S = 1, all power are consumed
Purely reactive load (L or C)	$\theta_v - \theta_i = \pm 90^\circ$, Power factor = 0	P = 0, no real power consumption
Resistive and reactive load (R and L/C)	$\theta_v - \theta_i > 0$ $\theta_v - \theta_i < 0$	<ul style="list-style-type: none"> <u>Lagging</u> - inductive load <u>Leading</u> - capacitive load

Example 11.9

A series-connected load draws a current $i(t) = 4 \cos(100\pi t + 10^\circ)$ A when the applied voltage is $v(t) = 120 \cos(100\pi t - 20^\circ)$ V. Find the apparent power and the power factor of the load. Determine the element values that form the series-connected load.

วิธีทำ $i(t) = 4 \cos(100\pi t + 10^\circ)$ A $\Rightarrow I_{rms} = I_m / \sqrt{2} = 4 / \sqrt{2}$
 $v(t) = 120 \cos(100\pi t - 20^\circ)$ V $\Rightarrow V_{rms} = V_m / \sqrt{2} = 120 / \sqrt{2}$

Apparent Power $S = V_{rms} I_{rms} = \frac{120}{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{2}} = 240$ VA

Power factor

$$pf = \cos(\theta_v - \theta_i) = \cos(-20^\circ - 10^\circ) = 0.866 \quad (\text{leading})$$

Load Impedance

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{120 \angle -20^\circ}{4 \angle 10^\circ} = 30 \angle -30^\circ = 25.98 - j15 \Omega$$

$$pf = \cos(-30^\circ) = 0.866 \quad (\text{leading})$$

40



Determine the element values that form the series-connected load

$$Z = 25.98 - j15 \Omega = R + jX$$

$$R = 25.98$$

Reactance เป็นลบ
แสดงว่าเป็น Capacitor

$$X_C = -15 = -\frac{1}{\omega C}$$

$$C = \frac{1}{15\omega} = \frac{1}{15 \times 100\pi} = 212.2 \mu\text{F}$$

ได้ Load เป็น R 25.98 Ω ต่ออนุกรมกับ C 212.2 μF

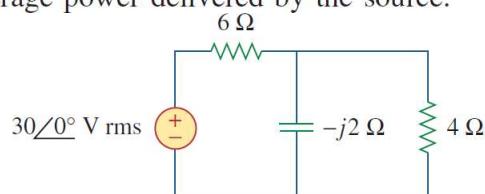
41



Example 11.10

Determine the power factor of the entire circuit of Fig. 11.18 as seen by the source. Calculate the average power delivered by the source.

วิธีทำ



คำนวณ Impedance รวม

$$Z = 6 + 4 \parallel (-j2) = 6 + \frac{-j2 \times 4}{4 - j2} = 6.8 - j1.6 = 7 \angle -13.24^\circ \Omega$$

$$\text{จะได้ } I_{\text{rms}} = \frac{V_{\text{rms}}}{Z} = \frac{30 \angle 0^\circ}{7 \angle -13.24^\circ} = 4.286 \angle 13.24^\circ \text{ A}$$

$$\text{Power factor pf} = \cos(-13.24) = 0.9734 \quad (\text{leading})$$

$$\text{จะได้ Power } P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \text{ pf} = (30)(4.286)0.9734 = 125 \text{ W}$$

หรือ

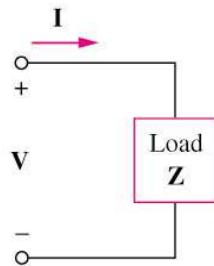
$$P = I_{\text{rms}}^2 R = (4.286)^2(6.8) = 125 \text{ W}$$

42



11.5 Complex Power

Complex power \mathbf{S} is the product of the voltage and the complex conjugate of the current:



$$\text{ให้ } \mathbf{V} = V_m \angle \theta_v \quad \mathbf{I} = I_m \angle \theta_i$$

$$\mathbf{V}_{rms} = V_{rms} \angle \theta_v \quad \mathbf{I}_{rms} = I_{rms} \angle \theta_i$$

จะได้ Apparent Power หรือ Complex Power

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{2} \mathbf{V} \mathbf{I}^* = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle \theta_v - \theta_i \\ &= V_{rms} I_{rms} \angle \theta_v - \theta_i \end{aligned}$$

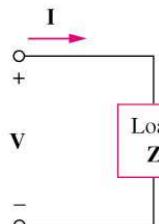
จะได้สูตร

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{rms} \mathbf{I}_{rms}^*$$

** หมายเหตุ: การคูณ Phasor กับ Phasor จะได้จำนวนเชิงซ้อน **

11.5 Complex Power

Complex Power = Power ในรูปจำนวนเชิงซ้อน



$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{V}_{rms} \mathbf{I}_{rms}^* = P + jQ \\ &= V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i) + j V_{rms} I_{rms} \sin(\theta_v - \theta_i) \end{aligned}$$

Real Part (P) คือ
Average Power
หรือ Real Power
(หน่วยเป็น Watts)

เป็นส่วนที่เอาไปใช้งานได้จริง

$$P = \operatorname{Re}[\mathbf{S}]$$

$$= V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

Imaginary Part (Q)
คือ Reactive Power
(หน่วยเป็น VAR)
เป็นส่วนที่ใช้งานไม่ได้

$$Q = \operatorname{Im}[\mathbf{S}]$$

$$= V_{rms} I_{rms} \sin(\theta_v - \theta_i)$$

44

11.5 Complex Power

Complex Power

$$\mathbf{S} = P + jQ = \mathbf{V}_{rms} \mathbf{I}_{rms}^* \\ = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i) + j V_{rms} I_{rms} \sin(\theta_v - \theta_i)$$

Real Power (P) Reactive Power (Q)

Apparent Power (VA) $S = |\mathbf{S}| = V_{rms} I_{rms} = \sqrt{P^2 + Q^2}$

Real power (Watt), $P = \text{Re}[\mathbf{S}] = S \cdot \cos(\theta_v - \theta_i)$

Reactive Power (VAR), $Q = \text{Im}[\mathbf{S}] = S \cdot \sin(\theta_v - \theta_i)$

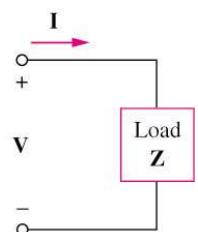
Power factor, $PF = \cos(\theta_v - \theta_i)$

45



11.5 Complex Power

Complex Power = Power ในรูปจำนวนเชิงซ้อน



$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{rms} \mathbf{I}_{rms}^* \\ = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i) + j V_{rms} I_{rms} \sin(\theta_v - \theta_i)$$

Real Power Reactive Power

P: is the average power in watts delivered to a load and it is the only useful power.

Q: is the reactive power exchange between the source and the reactive part of the load. It is measured in VAR.

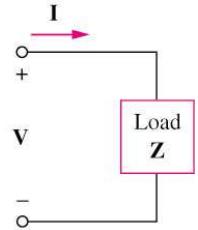
- Q = 0 for resistive loads (unity pf).
- Q < 0 for capacitive loads (leading pf).
- Q > 0 for inductive loads (lagging pf).

46



11.5 Complex Power

Complex Power = Power ในรูปจำนวนเชิงซ้อน



$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{V}_{rms} \mathbf{I}_{rms}^* \\ &= V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i) + j V_{rms} I_{rms} \sin(\theta_v - \theta_i) \end{aligned}$$

P

Q

P: เป็น Average Power (หน่วย Watt) ที่ส่งไปยัง Load แล้ว Load เอกำลังงานต่อได้

Q: เป็น Reactive Power (หน่วย VAR) ที่ส่งไปกลับระหว่าง Load กับ Source ในปริมาณที่เท่ากัน Power ส่วนนี้จึงนำไปใช้งานไม่ได้

$Q = 0$ for *resistive loads* (unity pf).

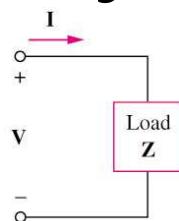
$Q < 0$ for *capacitive loads* (leading pf).

$Q > 0$ for *inductive loads* (lagging pf).

47



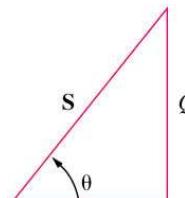
11.5 Complex Power



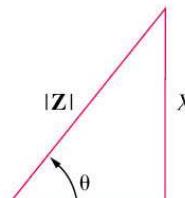
$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{V}_{rms} \mathbf{I}_{rms}^* = P + jQ \\ &= V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i) + j V_{rms} I_{rms} \sin(\theta_v - \theta_i) \end{aligned}$$

P

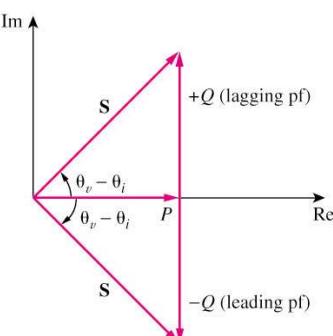
Q



Power
Triangle



Impedance
Triangle



Example 11.11

The voltage across a load is $v(t) = 60 \cos(\omega t - 10^\circ)$ V and the current through the element in the direction of the voltage drop is $i(t) = 1.5 \cos(\omega t + 50^\circ)$ A. Find: (a) the complex and apparent powers, (b) the real and reactive powers, and (c) the power factor and the load impedance.

วิธีทำ (a) For the rms values of the voltage and current, we write

$$\mathbf{V}_{\text{rms}} = \frac{60}{\sqrt{2}} \angle -10^\circ, \quad \mathbf{I}_{\text{rms}} = \frac{1.5}{\sqrt{2}} \angle +50^\circ$$

The complex power is

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}_{\text{rms}} \mathbf{I}_{\text{rms}}^* = \left(\frac{60}{\sqrt{2}} \angle -10^\circ \right) \left(\frac{1.5}{\sqrt{2}} \angle -50^\circ \right) = 45 \angle -60^\circ \text{ VA}$$

The apparent power is

$$S = |\mathbf{S}| = 45 \text{ VA}$$



(b) We can express the complex power in rectangular form as

$$\mathbf{S} = 45 \angle -60^\circ = 45[\cos(-60^\circ) + j \sin(-60^\circ)] = 22.5 - j38.97$$

Since $\mathbf{S} = P + jQ$, the real power is

$$P = 22.5 \text{ W}$$

while the reactive power is

$$Q = -38.97 \text{ VAR}$$

(c) The power factor is

$$\text{pf} = \cos(-60^\circ) = 0.5 \text{ (leading)}$$

It is leading, because the reactive power is negative. The load impedance is

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{60 \angle -10^\circ}{1.5 \angle +50^\circ} = 40 \angle -60^\circ \Omega$$

which is a capacitive impedance.



Example 11.12

A load \mathbf{Z} draws 12 kVA at a power factor of 0.856 lagging from a 120-V rms sinusoidal source. Calculate: (a) the average and reactive powers delivered to the load, (b) the peak current, and (c) the load impedance.

วิธีทำ

(a) Given that $\text{pf} = \cos\theta = 0.856$, we obtain the power angle as $\theta = \cos^{-1} 0.856 = 31.13^\circ$. If the apparent power is $S = 12,000 \text{ VA}$, then the average or real power is

$$P = S \cos\theta = 12,000 \times 0.856 = 10.272 \text{ kW}$$

while the reactive power is

$$Q = S \sin\theta = 12,000 \times 0.517 = 6.204 \text{ kVA}$$

(b) Since the pf is lagging, the complex power is

$$\mathbf{S} = P + jQ = 10.272 + j6.204 \text{ kVA}$$

51



From $\mathbf{S} = \mathbf{V}_{\text{rms}} \mathbf{I}_{\text{rms}}^*$, we obtain

$$\mathbf{I}_{\text{rms}}^* = \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{V}_{\text{rms}}} = \frac{10,272 + j6204}{120 \angle 0^\circ} = 85.6 + j51.7 \text{ A} = 100 \angle 31.13^\circ \text{ A}$$

Thus $\mathbf{I}_{\text{rms}} = 100 \angle -31.13^\circ$ and the peak current is

$$I_m = \sqrt{2} I_{\text{rms}} = \sqrt{2}(100) = 141.4 \text{ A}$$

(c) The load impedance

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}_{\text{rms}}}{\mathbf{I}_{\text{rms}}} = \frac{120 \angle 0^\circ}{100 \angle -31.13^\circ} = 1.2 \angle 31.13^\circ \Omega$$

which is an inductive impedance.

52



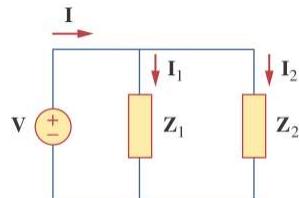
11.6 Conservation of AC Power

The **complex real**, and **reactive powers** of the sources **equal** the respective **sums of** the complex, real, and reactive powers of the **individual loads**.

กฎการอนุรักษ์กำลังไฟฟ้า

Complex, Real, Reactive Power ที่จ่ายโดย Source มีค่าเท่ากับ ผลรวมของ Complex, Real, Reactive Power ของ Load ทุกตัว รวมกัน

ในกรณี Load ต่อขนาน



$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$$

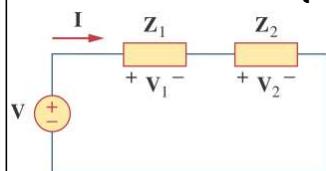
$$\mathbf{S} = \mathbf{VI}^* = \mathbf{V}(\mathbf{I}_1^* + \mathbf{I}_2^*)$$

$$= \mathbf{VI}_1^* + \mathbf{VI}_2^* = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$$

53



ในกรณี Load ต่ออนุกรม



$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{VI}^* = (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)\mathbf{I}^*$$

$$= \mathbf{V}_1\mathbf{I}^* + \mathbf{V}_2\mathbf{I}^* = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$$

โดยสรุป

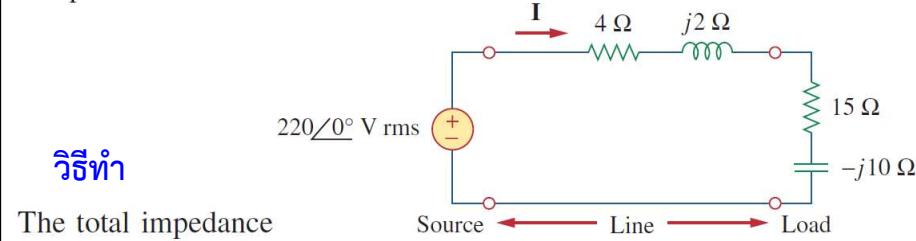
$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \cdots + \mathbf{S}_N$$

54



Example 11.13

Figure 11.24 shows a load being fed by a voltage source through a transmission line. The impedance of the line is represented by the $(4 + j2) \Omega$ impedance and a return path. Find the real power and reactive power absorbed by: (a) the source, (b) the line, and (c) the load.



$$\mathbf{Z} = (4 + j2) + (15 - j10) = 19 - j8 = 20.62 \angle -22.83^\circ \Omega$$

The current through the circuit is

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}} = \frac{220 \angle 0^\circ}{20.62 \angle -22.83^\circ} = 10.67 \angle 22.83^\circ \text{ A rms}$$

55



(a) For the source, the complex power is

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_s &= \mathbf{V}_s \mathbf{I}^* = (220 \angle 0^\circ)(10.67 \angle -22.83^\circ) \\ &= 2347.4 \angle -22.83^\circ = (2163.5 - j910.8) \text{ VA} \end{aligned}$$

From this, we obtain the real power as 2163.5 W and the reactive power as 910.8 VAR (leading).

(b) For the line, the voltage is

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\text{line}} &= (4 + j2)\mathbf{I} = (4.472 \angle 26.57^\circ)(10.67 \angle 22.83^\circ) \\ &= 47.72 \angle 49.4^\circ \text{ V rms} \end{aligned}$$

The complex power absorbed by the line is

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\text{line}} &= \mathbf{V}_{\text{line}} \mathbf{I}^* = (47.72 \angle 49.4^\circ)(10.67 \angle -22.83^\circ) \\ \text{or} \quad &= 509.2 \angle 26.57^\circ = 455.4 + j227.7 \text{ VA} \end{aligned}$$

$$\mathbf{S}_{\text{line}} = |\mathbf{I}|^2 \mathbf{Z}_{\text{line}} = (10.67)^2 (4 + j2) = 455.4 + j227.7 \text{ VA}$$



$$\mathbf{S}_{\text{line}} = |\mathbf{I}|^2 \mathbf{Z}_{\text{line}} = (10.67)^2 (4 + j2) = 455.4 + j227.7 \text{ VA}$$

That is, the real power is 455.4 W and the reactive power is 227.76 VAR (lagging).

(c) For the load, the voltage is

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_L &= (15 - j10)\mathbf{I} = (18.03 \angle -33.7^\circ)(10.67 \angle 22.83^\circ) \\ &= 192.38 \angle -10.87^\circ \text{ V rms}\end{aligned}$$

The complex power absorbed by the load is

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_L &= \mathbf{V}_L \mathbf{I}^* = (192.38 \angle -10.87^\circ)(10.67 \angle -22.83^\circ) \\ &= 2053 \angle -33.7^\circ = (1708 - j1139) \text{ VA}\end{aligned}$$

The real power is 1708 W and the reactive power is 1139 VAR (leading). Note that $\mathbf{S}_s = \mathbf{S}_{\text{line}} + \mathbf{S}_L$, as expected. We have used the rms values of voltages and currents.

57



Example 11.14

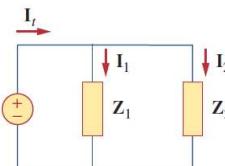
In the circuit of Fig. 11.26, $\mathbf{Z}_1 = 60 \angle -30^\circ \Omega$ and $\mathbf{Z}_2 = 40 \angle 45^\circ \Omega$. Calculate the total: (a) apparent power, (b) real power, (c) reactive power, and (d) pf, supplied by the source and seen by the source.

วิธีทำ

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_1} = \frac{120 \angle 10^\circ}{60 \angle -30^\circ} = 2 \angle 40^\circ \text{ A rms}$$

$$120 \angle 10^\circ \text{ V rms}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_2} = \frac{120 \angle 10^\circ}{40 \angle 45^\circ} = 3 \angle -35^\circ \text{ A rms}$$



$$\mathbf{S}_1 = \frac{V_{\text{rms}}^2}{\mathbf{Z}_1^*} = \frac{(120)^2}{60 \angle 30^\circ} = 240 \angle -30^\circ = 207.85 - j120 \text{ VA}$$

$$\mathbf{S}_2 = \frac{V_{\text{rms}}^2}{\mathbf{Z}_2^*} = \frac{(120)^2}{40 \angle -45^\circ} = 360 \angle 45^\circ = 254.6 + j254.6 \text{ VA}$$

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = 462.4 + j134.6 \text{ VA}$$

58



(a) The total apparent power is

$$|\mathbf{S}_t| = \sqrt{462.4^2 + 134.6^2} = 481.6 \text{ VA.}$$

(b) The total real power is

$$P_t = \text{Re}(\mathbf{S}_t) = 462.4 \text{ W or } P_t = P_1 + P_2.$$

(c) The total reactive power is

$$Q_t = \text{Im}(\mathbf{S}_t) = 134.6 \text{ VAR or } Q_t = Q_1 + Q_2.$$

(d) The pf = $P_t/|\mathbf{S}_t| = 462.4/481.6 = 0.96$ (lagging).

หา Power ที่ Source จ่าย

$$\mathbf{I}_t = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = (1.532 + j1.286) + (2.457 - j1.721)$$

$$= 4 - j0.435 = 4.024 \angle -6.21^\circ \text{ A rms}$$

$$\mathbf{S}_s = \mathbf{V}\mathbf{I}_t^* = (120 \angle 10^\circ)(4.024 \angle 6.21^\circ)$$

$$= 482.88 \angle 16.21^\circ = 463 + j135 \text{ VA}$$

59



11.7 Power Factor Correction

Power factor correction is the process of increasing the power factor without altering the voltage or current to the original load.

❖ การปรับปรุง Power Factor เป็นการเพิ่มค่า Power factor โดยไม่ไปกระทบค่าแรงดันหรือกระแสดังเดิมของ Load

❖ เราปรับ Power factor เพราะว่า PF ที่ดีควรจะมีค่าเข้าใกล้ 1 (โดยปกติ Load ที่มี L เป็นส่วนประกอบจะมี PF ต่ำกว่า 1)

❖ ถ้า PF ต่ำมากๆ Source จะต้องจ่ายๆ S มากๆ เพื่อให้ได้ P ที่ต้องการ ซึ่งไม่เหมาะสม

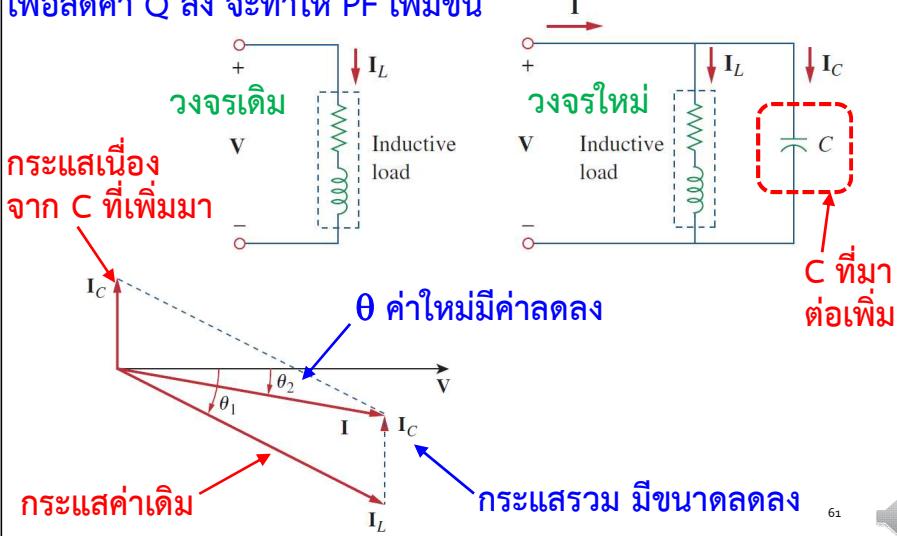


60



11.7 Power Factor Correction

การปรับ PF ของ Inductive Load ทำได้โดยต่อ C ขนานกับ Load เพื่อลดค่า Q ลง จะทำให้ PF เพิ่มขึ้น



11.7 Power Factor Correction



ก่อนปรับ PF เรา มี $P = S_1 \cos \theta_1$, $Q_1 = S_1 \sin \theta_1 = P \tan \theta_1$

ถ้าเราต้องการปรับให้ PF จาก $\cos \theta_1$ เป็น $\cos \theta_2$

จะได้ Q ค่าใหม่เป็น $Q_2 = P \tan \theta_2$

เราจะต้องหา C ที่มีค่า Q เป็น $Q_C = Q_1 - Q_2$ มาต่อเพิ่ม

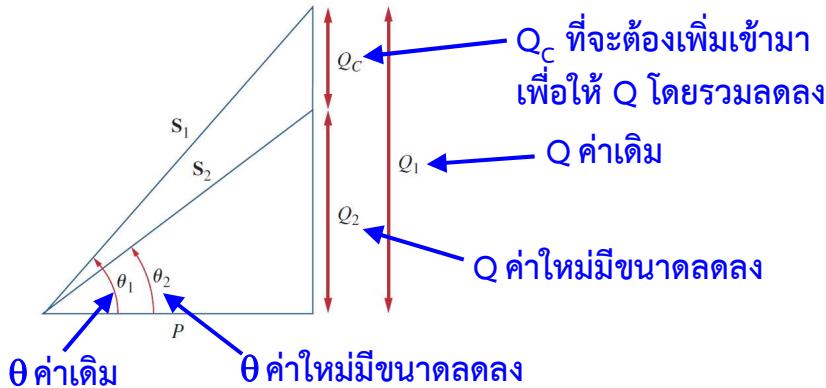
โดยที่ $Q_C = V_{\text{rms}}^2/X_C = \omega C V_{\text{rms}}^2$.

$$\text{จะได้ } C = \frac{Q_C}{\omega V_{\text{rms}}^2} = \frac{P(\tan \theta_1 - \tan \theta_2)}{\omega V_{\text{rms}}^2}$$

62



11.7 Power Factor Correction



หมายเหตุ: Q ของ L มีค่าเป็นบวก ขณะที่ Q ของ C มีค่าเป็นลบ
ค่า Q ของ C จึงใช้หักล้างกับ Q ของ L ได้

63



Example 11.15

When connected to a 120-V (rms), 60-Hz power line, a load absorbs 4 kW at a lagging power factor of 0.8. Find the value of capacitance necessary to raise the pf to 0.95.

วิธีทำ If the pf = 0.8, then $\cos \theta_1 = 0.8 \Rightarrow \theta_1 = 36.87^\circ$

$$S_1 = \frac{P}{\cos \theta_1} = \frac{4000}{0.8} = 5000 \text{ VA}$$

$$Q_1 = S_1 \sin \theta = 5000 \sin 36.87 = 3000 \text{ VAR}$$

PF ค่าใหม่ที่ต้องการ $\cos \theta_2 = 0.95 \Rightarrow \theta_2 = 18.19^\circ$

$$S_2 = \frac{P}{\cos \theta_2} = \frac{4000}{0.95} = 4210.5 \text{ VA} \quad \Rightarrow \quad Q_2 = S_2 \sin \theta_2 = 1314.4 \text{ VAR}$$

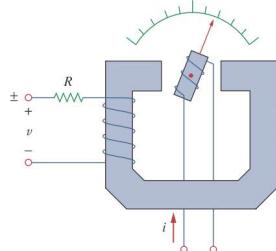
$$Q_C = Q_1 - Q_2 = 3000 - 1314.4 = 1685.6 \text{ VAR}$$

$$\text{จะได้ } C = \frac{Q_C}{\omega V_{\text{rms}}^2} = \frac{1685.6}{2\pi \times 60 \times 120^2} = 310.5 \mu\text{F}$$

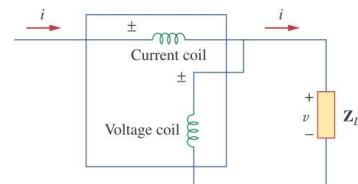


11.8 Power Measurement

The **wattmeter** is the instrument used for measuring the average power.



The basic structure



Equivalent Circuit with load

$$\text{If } v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \text{ and } i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$P = |V_{rms}| |I_{rms}| \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)$$



Calculate the instantaneous power and average power absorbed by the passive linear network of Fig. 11.1 if

$$v(t) = 330 \cos(10t + 20^\circ) \text{ V} \quad \text{and} \quad i(t) = 33 \sin(10t + 60^\circ) \text{ A}$$

Answer: $3.5 + 5.445 \cos(20t - 10^\circ) \text{ kW}$, 3.5 kW .

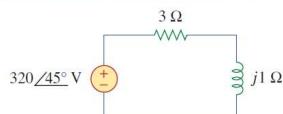
Practice Problem 11.1

Practice Problem 11.2

A current $I = 33\angle 30^\circ \text{ A}$ flows through an impedance $Z = 40\angle -22^\circ \Omega$. Find the average power delivered to the impedance.

Answer: 20.19 kW .

Practice Problem 11.3

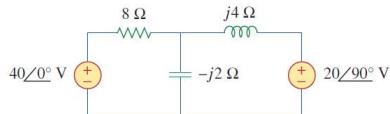


In the circuit of Fig. 11.4, calculate the average power absorbed by the resistor and inductor. Find the average power supplied by the voltage source.

Answer: 15.361 kW , 0 W , 15.361 kW .

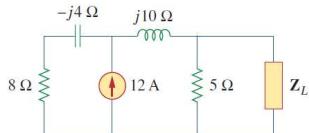
Practice Problem 11.4

Calculate the average power absorbed by each of the five elements in the circuit of Fig. 11.6.

**Figure 11.6**

For Practice Prob. 11.4.

Answer: 40-V Voltage source: -60 W ; $j20\text{-V}$ Voltage source: -40 W ; resistor: 100 W ; others: 0 W .

Practice Problem 11.5

For the circuit shown in Fig. 11.10, find the load impedance Z_L that absorbs the maximum average power. Calculate that maximum average power.

Answer: $3.415 - j0.7317\text{ } \Omega$, 51.47 W .

67

In Fig. 11.12, the resistor R_L is adjusted until it absorbs the maximum average power. Calculate R_L and the maximum average power absorbed by it.

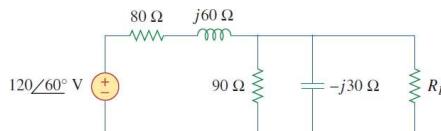
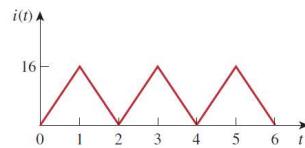


Figure 11.12
For Practice Prob. 11.6.

Answer: $30\text{ } \Omega$, 6.863 W .

Find the rms value of the current waveform of Fig. 11.15. If the current flows through a $9\text{-}\Omega$ resistor, calculate the average power absorbed by the resistor.

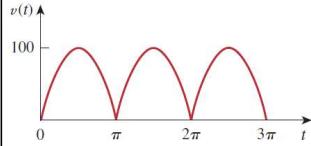
Answer: 9.238 A , 768 W .

Practice Problem 11.6**Practice Problem 11.7**

68

Practice Problem 11.8

Find the rms value of the full-wave rectified sine wave in Fig. 11.17. Calculate the average power dissipated in a 6Ω resistor.



Answer: 70.71 V, 833.3 W.

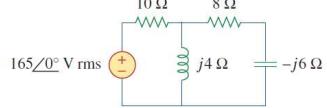
Practice Problem 11.9

Obtain the power factor and the apparent power of a load whose impedance is $Z = 60 + j40 \Omega$ when the applied voltage is $v(t) = 320 \cos(377t + 10^\circ)$ V.

Answer: 0.8321 lagging, $710 \angle 33.69^\circ$ VA.

Calculate the power factor of the entire circuit of Fig. 11.19 as seen by the source. What is the average power supplied by the source?

Answer: 0.936 lagging, 2.008 kW.

Practice Problem 11.10

69

Practice Problem 11.11

For a load, $V_{rms} = 110 \angle 85^\circ$ V, $I_{rms} = 0.4 \angle 15^\circ$ A. Determine: (a) the complex and apparent powers, (b) the real and reactive powers, and (c) the power factor and the load impedance.

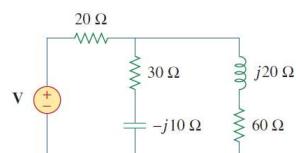
Answer: (a) $44 \angle 70^\circ$ VA, 44 VA, (b) 15.05 W, 41.35 VAR, (c) 0.342 lagging, $94.06 + j258.4 \Omega$.

A sinusoidal source supplies 100 kVAR reactive power to load $Z = 250 \angle -75^\circ \Omega$. Determine: (a) the power factor, (b) the apparent power delivered to the load, and (c) the rms voltage.

Answer: (a) 0.2588 leading, (b) 103.53 kVA, (c) 5.087 kV.

In the circuit in Fig. 11.25, the 60Ω resistor absorbs an average power of 240 W. Find \mathbf{V} and the complex power of each branch of the circuit. What is the overall complex power of the circuit? (Assume the current through the 60Ω resistor has no phase shift.)

Answer: $240.7 \angle 21.45^\circ$ V (rms); the 20Ω resistor: 656 VA; the $(30 - j10)\Omega$ impedance: $480 - j160$ VA; the $(60 + j20)\Omega$ impedance: $240 + j80$ VA; overall: $1376 - j80$ VA.

Practice Problem 11.12**Practice Problem 11.13**

70

Practice Problem 11.14

Two loads connected in parallel are respectively 2 kW at a pf of 0.75 leading and 4 kW at a pf of 0.95 lagging. Calculate the pf of the two loads. Find the complex power supplied by the source.

Answer: 0.9972 (leading), $6 - j0.4495$ kVA.

Find the value of parallel capacitance needed to correct a load of 140 kVAR at 0.85 lagging pf to unity pf. Assume that the load is supplied by a 110-V (rms), 60-Hz line.

Answer: 30.69 mF.

Practice Problem 11.15