

# EN811100 LINEAR CIRCUIT ANALYSIS

---

## Chapter 4 Circuit Theorems

Jan 14, 2020

C. K. Alexander – M. N. O. Sadiku  
Fundamentals of Electric Circuits, 5<sup>th</sup> Edition, The McGraw-Hill Companies 2013  
J. A. Svoboda – R. C. Dorf  
Introduction to Electric Circuits, 9<sup>th</sup> edition, John Wiley & Sons, Inc. 2014

1

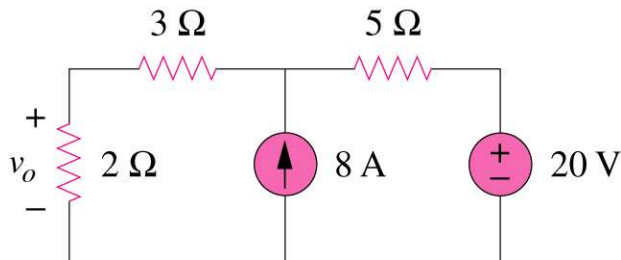
## Circuit Theorems - Chapter 4

- 4.1 Motivation
- 4.2 Linearity Property
- 4.3 Superposition
- 4.4 Source Transformation
- 4.5 Thevenin's Theorem
- 4.6 Norton's Theorem
- 4.7 Maximum Power Transfer

2

## 4.1 Motivation

If you are given the following circuit, are there any other alternative(s) to determine the voltage across  $2\Omega$  resistor?



วงจรนี้มีทั้ง Current Source และ Voltage Source เราจะต้องใช้ Super Node หรือ Super Mesh อย่างไรก็ดี อย่างหนึ่งมาช่วย

เราจะต้องสร้างสมการจากทั้ง KCL และ KVL → ค่อนข้างยุ่งยาก

Can you work it out by inspection?

วิธี Inspection เหมาะกับวงจรที่มี Voltage หรือ Current Source อย่างไรก็ดีอย่างหนึ่งเท่านั้น

3

## 4.2 Linearity Property

It is the property of an element describing a linear relationship between cause and effect.

A linear circuit is one whose output is linearly related (or directly proportional) to its input.

Homogeneity (scaling) property

$$v = iR \rightarrow kv = kiR$$

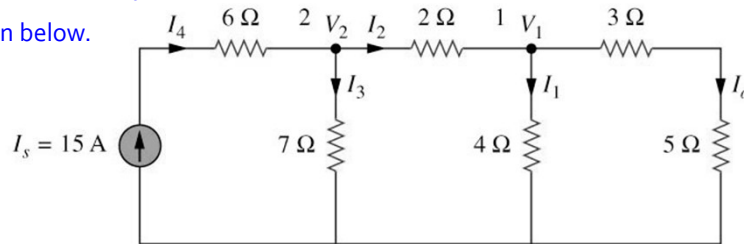
Additive property

$$v_1 = i_1 R \text{ and } v_2 = i_2 R \\ \rightarrow v = (i_1 + i_2) R = v_1 + v_2$$

4

## 4.2 Linearity Property

**Example 1:** By assume  $I_o = 1$  A, use linearity to find the actual value of  $I_o$  in the circuit shown below.



**Solution**

If  $I_o = 1$  A, then  $V_1 = (3 + 5)I_o = 8$  V  $\Rightarrow I_1 = V_1/4 = 2$  A.

**KCL at Node 1**  $I_2 = I_1 + I_o = 3$  A

$$V_2 = V_1 + 2I_2 = 8 + 6 = 14$$
 V  $\Rightarrow I_3 = \frac{V_2}{7} = 2$  A

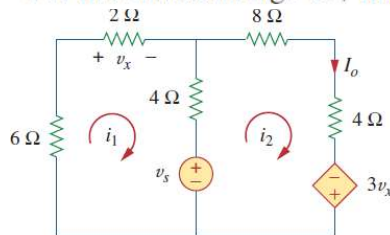
**KCL at Node 2**  $I_4 = I_3 + I_2 = 5$  A  $\Rightarrow I_s = 5$  A.

จะได้ว่า เมื่อ  $I_s = 5$  A ได้  $I_o = 1$  ดังนั้น ถ้า  $I_s = 15$  A จะได้  $I_o = 3$  A

### Example 4.1

### Linearity Property

For the circuit in Fig. 4.2, find  $I_o$  when  $v_s = 12$  V and  $v_s = 24$  V.



**KVL ที่ Mesh 2**

$$-4i_1 + 16i_2 - 3v_x - v_s = 0$$

แทนค่า

$$v_x = 2i_1$$

จะได้

$$-10i_1 + 16i_2 - v_s = 0 \quad (a)$$

**KVL ที่ Mesh 1**

$$12i_1 - 4i_2 + v_s = 0 \quad (b)$$

(a)+(b) ได้

$$2i_1 + 12i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = -6i_2$$

แทนค่าใน (b) ได้

$$-76i_2 + v_s = 0 \Rightarrow i_2 = \frac{v_s}{76}$$

เมื่อ  $v_s = 12$  V

$$\text{จะได้ } I_o = i_2 = \frac{12}{76} \text{ A}$$

เมื่อ  $v_s = 24$  V

$$\text{จะได้ } I_o = i_2 = \frac{24}{76} \text{ A}$$

เมื่อ  $v_s$  เพิ่ม 2 เท่า

จะได้  $I_o$  เพิ่ม 2 เท่าเช่นกัน

## 4.3 Superposition Theorem

It states that the voltage across (or current through) an element in a linear circuit is the algebraic sum of the voltage across (or currents through) that element due to EACH independent source acting alone.

### ทฤษฎี Superposition

แรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมอุปกรณ์ในวงจรเชิงเส้นมีค่าเท่ากับผลรวมของแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมอุปกรณ์ที่เนื่องมาจาก Independent source แต่ละตัวที่ทำงานแยกกัน

The principle of superposition helps us to analyze a linear circuit with more than one independent source by calculating the contribution of each independent source separately.

หลักการนี้ใช้วิเคราะห์วงจรในกรณีที่มี Independent source หลายตัว โดยการใช้การแยกคำนวณผลลัพธ์อันเนื่องมาจาก Source แต่ละตัว แล้วจึงนำผลลัพธ์อันเนื่องมาจาก Source แต่ละตัวมารวมกัน

7

## 4.3 Superposition Theorem

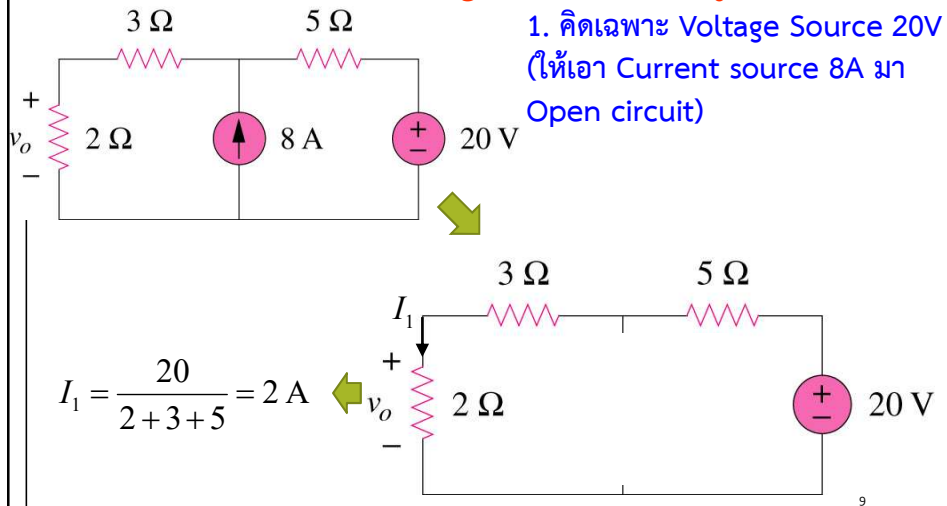
### Steps to apply superposition principle

1. Turn off all independent sources except one source. Find the output (voltage or current) due to that active source using nodal or mesh analysis.  
ให้ Independent source ทำงานทีละตัว Source อื่นๆให้ปิดให้หมด  
วิธีการ Turn Off: ถ้าเป็น Voltage Source ให้ Short Circuit  
ถ้าเป็น Current Source ให้ Open Circuit
2. Repeat step 1 for each of the other independent sources.
3. Find the total contribution by adding algebraically all the contributions due to the independent sources.

8

## Example: Superposition

We consider the effects of 8A and 20V one by one, then add the two effects together for final  $v_o$ .



2. คำนวณเฉพาะ Current Source 8A (ให้เอา Voltage source 20V มา Short circuit)

ใช้สูตร Current Divider

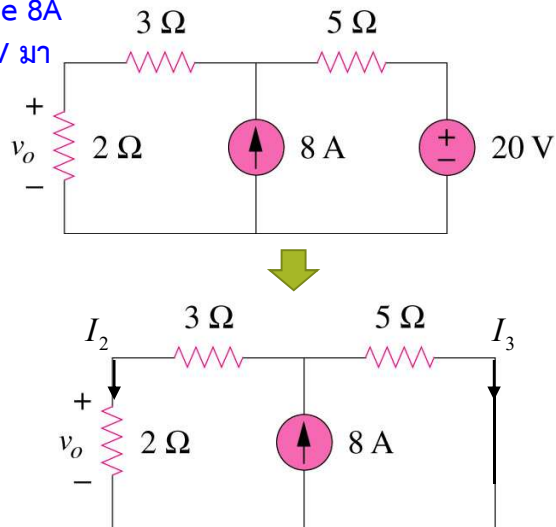
$$I_2 = \frac{5}{(2+3)+5} \times 8 = 4 \text{ A}$$

กระแสรวมที่ผ่าน R 2 Ω

$$I = I_1 + I_2 = 2 + 4 = 6 \text{ A}$$

จะได้แรงดันที่ตกคร่อม R 2 Ω

$$v_o = 2I = 2 \times 6 = 12 \text{ V}$$



## 4.3 Superposition Theorem

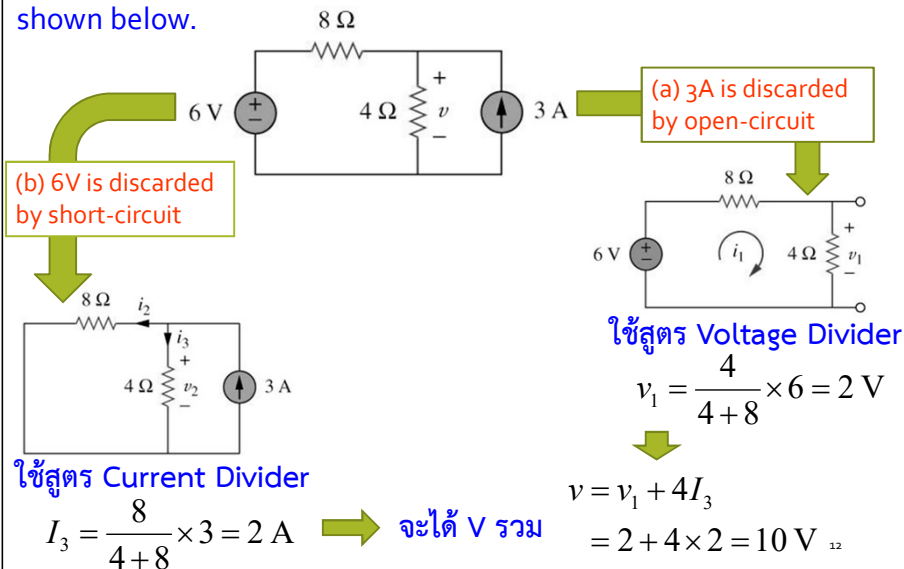
Two things have to be keep in mind:

1. When we say turn off all other independent sources:
  - Independent voltage sources are replaced by 0 V (short circuit) and
  - Independent current sources are replaced by 0 A (open circuit).
2. Dependent sources are left intact because they are controlled by circuit variables.  
Dependent source ให้คงไว้เหมือนเดิม (ไม่ต้องลบออกไป)

11

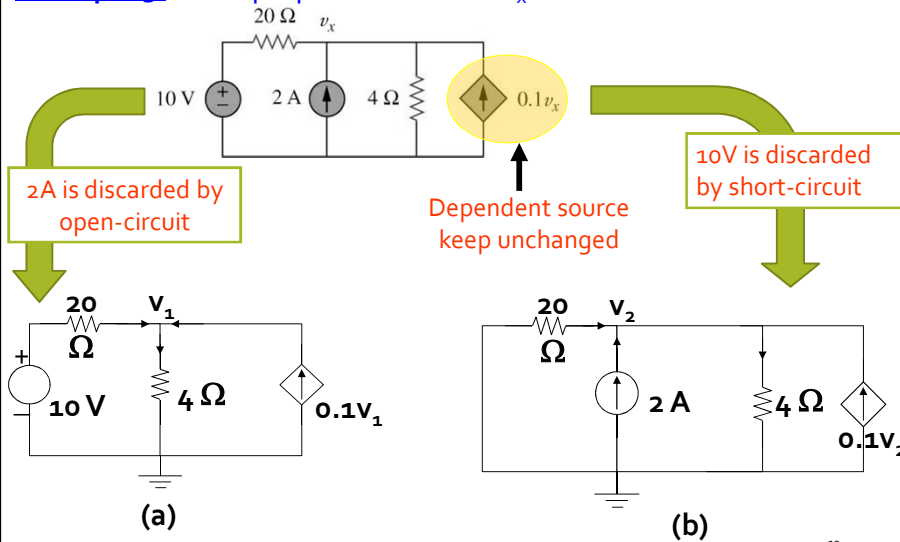
## 4.3 Superposition Theorem

**Example 2** Use the superposition theorem to find  $v$  in the circuit shown below.

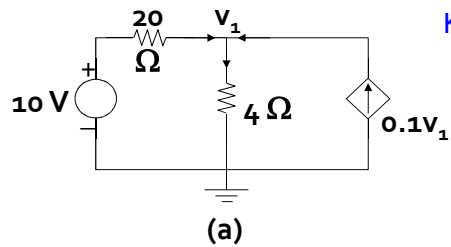


## 4.3 Superposition Theorem

**Example 3** Use superposition to find  $v_x$  in the circuit below.

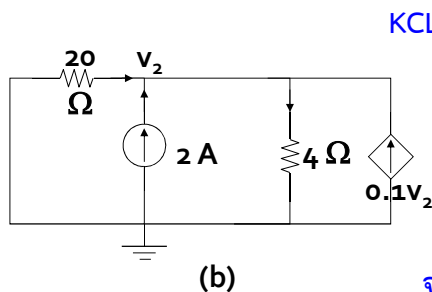


13



KCL at Node 1

$$\begin{aligned}\frac{10 - v_1}{20} + 0.1v_1 &= \frac{v_1 - 0}{4} \\ 0.2v_1 &= 0.5 \\ v_1 &= 2.5 \text{ V}\end{aligned}$$



KCL at Node 2

$$\begin{aligned}2 + 0.1v_2 + \frac{0 - v_2}{20} &= \frac{v_2 - 0}{4} \\ 0.2v_2 &= 2 \\ v_2 &= 10 \text{ V}\end{aligned}$$

จะได้แรงดันรวม

$$v = v_1 + v_2 = 2.5 + 10 = 12.5 \text{ V}$$

14

### Example 4.5

For the circuit in Fig. 4.12, use the superposition theorem to find  $i$ .

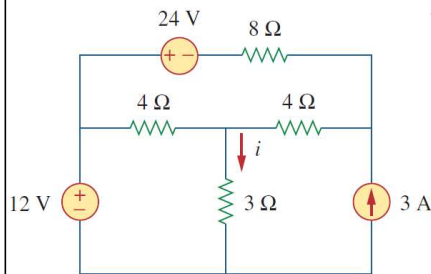
กำหนดให้

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

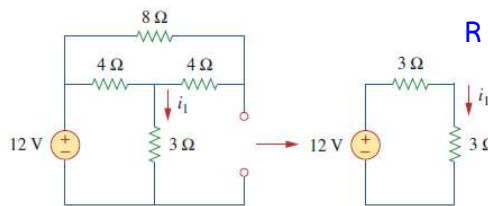
$i_1$  = กระแสที่เนื่องมาจาก 12 V Source

$i_2$  = กระแสที่เนื่องมาจาก 24 V Source

$i_3$  = กระแสที่เนื่องมาจาก 3 A Source



1. หา  $i_1$  ให้ลัดวงจร 24V Source และ Open circuit 3A Source



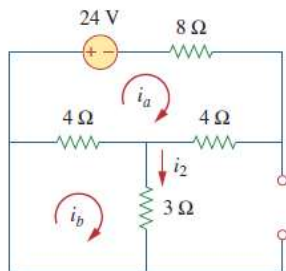
R รวมเท่ากับ

$$R = (4 \parallel (8 + 4)) + 3 = \frac{4 \times 12}{4 + 12} + 3 = 6 \Omega$$

$$i_1 = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}$$

15

2. หา  $i_2$  ให้ลัดวงจร 12V Source และ Open circuit 3A Source



ได้

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.75 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$i_2 = i_b = -1 \text{ A}$$

ใช้ Mesh analysis

Mesh a

$$(8 + 4)i_a + 4(i_a - i_b) + 24 = 0$$

$$16i_a - 4i_b = -24$$

Mesh b

$$3i_b + 4(i_b - i_a) = 0$$

$$-4i_a + 7i_b = 0$$

ได้

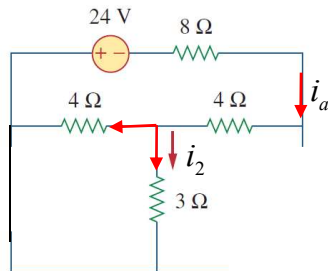
$$\begin{bmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 0 \end{bmatrix}$$

16



2. หา  $i_2$  ให้ลัดวงจร 12V Source  
และ Open circuit 3A Source

วิธีคำนวณอีกวิธี



R รวมเท่ากับ

$$R = 8 + 4 + 4 \parallel 3 = 12 + \frac{4 \times 3}{4 + 3} = 13.714$$

$$i_a = \frac{-24}{13.714} = -1.75 \text{ A}$$

ใช้ Current divider แบ่งระหว่าง  
4 Ω กับ 3 Ω

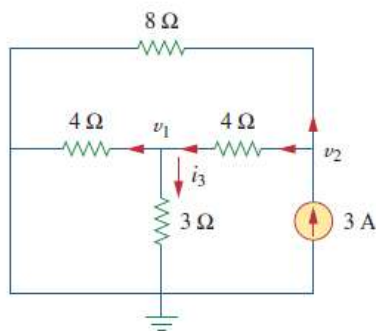
$$i_2 = \frac{4}{4 + 3} (-1.75 \text{ A}) = -1 \text{ A}$$

วิธีนี้ทำได้สะดวก เพราะเวลาที่เรัดัด Source อื่นๆออกไปหมด เราสามารถ  
ยุบ R หลายๆตัวที่ขนานกัน หรือ อนุกรมกัน ได้อย่างสะดวก

17

3. หา  $i_3$  ให้ลัดวงจร 12V Source  
และ 24V Source

ใช้ Nodal analysis



$$3 = \frac{v_2}{8} + \frac{v_2 - v_1}{4}$$

$$24 = 3v_2 - 2v_1$$

$$\frac{v_2 - v_1}{4} = \frac{v_1}{4} + \frac{v_1}{3}$$

$$v_2 = \frac{10}{3} v_1$$

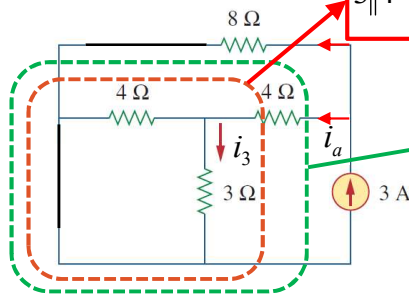
ได้  $v_1 = 3$

$$i_3 = \frac{v_1}{3} = 1 \text{ A}$$

18

3. หา  $i_3$  ให้ลัดวงจร 12V Source  
และ 24V Source

วิธีคำนวณอีกวิธี



$$3 \parallel 4 = \frac{4 \times 3}{4 + 3} = \frac{12}{7}$$

$$\frac{12}{7} + 4 = \frac{40}{7}$$

ใช้ Current divider แบ่งระหว่าง  
8 Ω กับ 40/7 Ω

$$i_a = \frac{8}{40/7 + 8} \times 3 = 1.75 \text{ A}$$

ใช้ Current divider แบ่งระหว่าง  
4 Ω กับ 3 Ω

$$i_3 = \frac{4}{4 + 3} \times 1.75 = 1 \text{ A}$$

รวมกระแสทุกกรณี

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = 2 - 1 + 1 = 2 \text{ A}$$

19

## 4.4 Source Transformation

- An equivalent circuit is one whose  $v$ - $i$  characteristics are identical with the original circuit.

วงจรไฟฟ้าสามารถแทนได้ด้วยวงจรสมมูล (Equivalent circuit)  
ที่มี  $v$ - $i$  characteristic curve เหมือนกัน

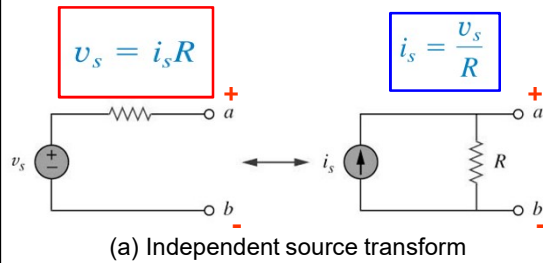
- It is the process of replacing a voltage source  $v_S$  in series with a resistor  $R$  by a current source  $i_S$  in parallel with a resistor  $R$ , or vice versa.

Voltage Source ที่มี  $R$  ต่ออนุกรมอยู่ สามารถแทนที่โดย Current Source ที่มี  $R$  ตัวเดิมต่อขนานอยู่

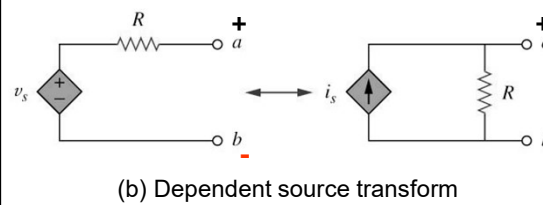
และในทางกลับกัน Current Source ที่มี  $R$  ต่อขนานอยู่ก็สามารถแทนที่โดย Voltage Source ที่มี  $R$  ตัวเดิมต่ออนุกรมอยู่

20

## 4.4 Source Transformation



- The arrow of the current source is directed toward the positive terminal of the voltage source.



- The source transformation is **not possible** when  $R = 0$  for **voltage source** and  $R = \infty$  for **current source**.

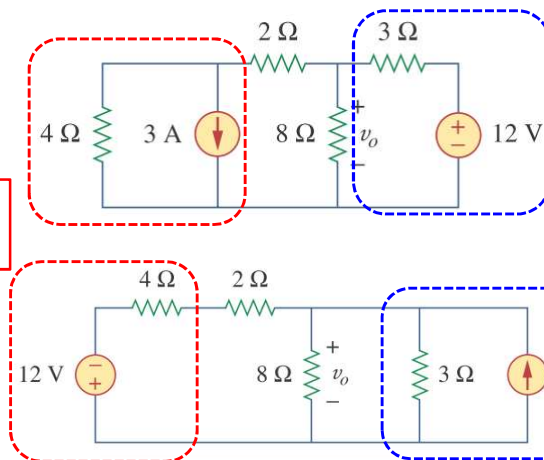
21

## 4.4 Source Transformation

**Example 4** Find  $v_o$  in the circuit shown below using source transformation.

1. แปลงเป็น  
Voltage  
source

$$v_s = i_s R$$

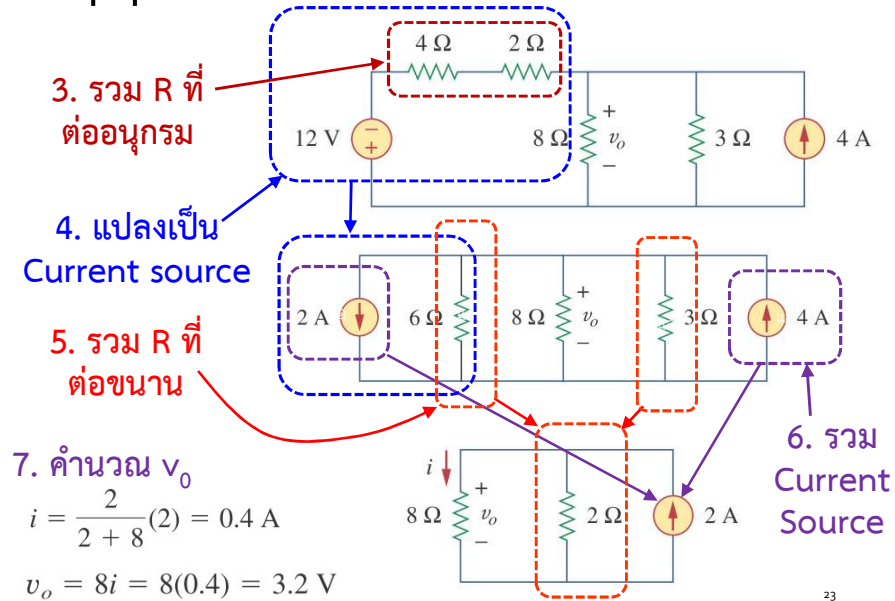


2. แปลงเป็น  
current  
source

$$i_s = \frac{v_s}{R}$$

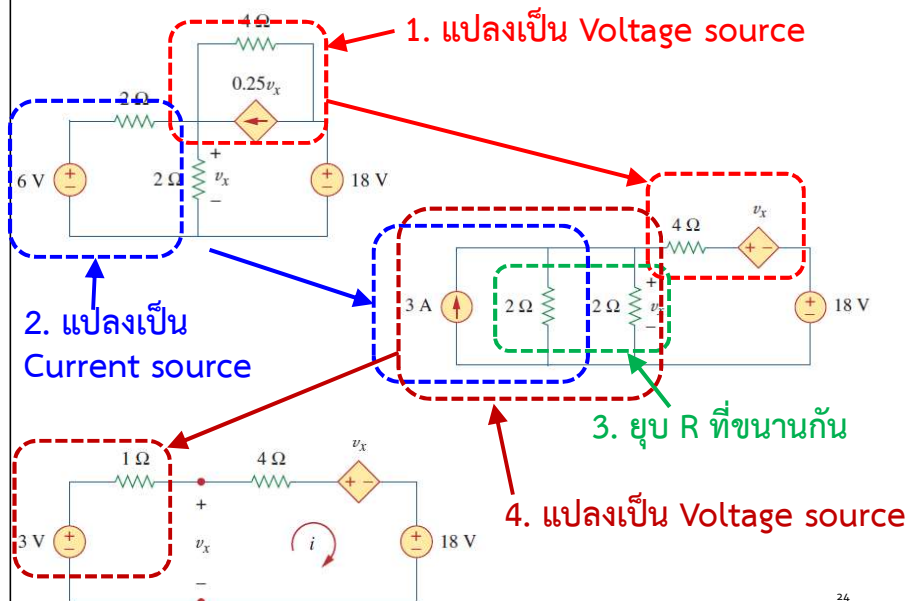
22

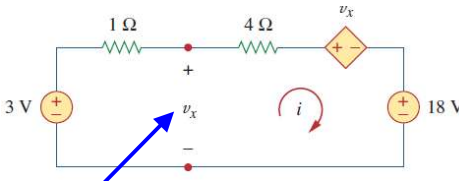
## 4.4 Source Transformation



### Example 4.7

Find  $v_x$  in Fig. 4.20 using source transformation.





5. สร้างสมการ KVL

$$-3 + 5i + v_x + 18 = 0$$

6. หาค่า  $v_x$  →  $-3 + 1i + v_x = 0$  →  $v_x = 3 - i$

แทนค่า  $v_x$


$$15 + 5i + 3 - i = 0$$

จะได้

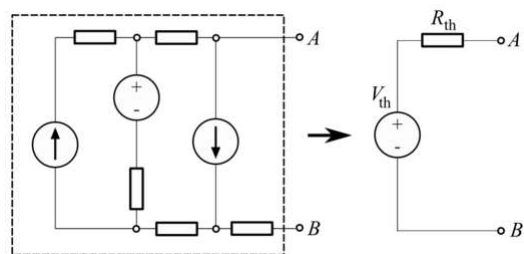
$$i = -4.5 \text{ A}$$

$$v_x = 3 - i = 7.5 \text{ V.}$$

25



Leon Charles Thevenin (1857-1926)  
French telegraph engineer



Thevenin's Theorem : วงจรไฟฟ้าที่มีปลายสาย 2 เส้น สามารถแทนได้ด้วยวงจรสมมูล (Equivalent circuit) ที่ประกอบด้วย Voltage source  $V_{th}$  ต่ออนุกรมกับ  $R_{th}$

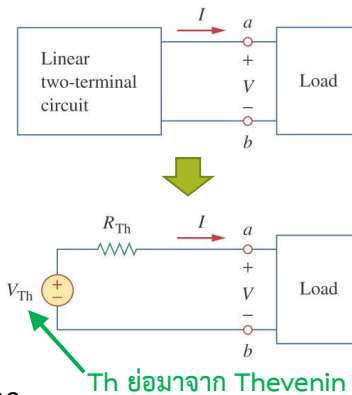
ประโยชน์: ทำให้เราสามารถแทนวงจรไฟฟ้าที่ซับซ้อนด้วยวงจรไฟฟ้าอย่างง่าย ทำให้การวิเคราะห์วงจรทำได้ง่ายขึ้น

26

## 4.5 Thevenin's Theorem

It states that a linear two-terminal circuit (Fig. a) can be replaced by an equivalent circuit (Fig. b) consisting of a voltage source  $V_{TH}$  in series with a resistor  $R_{TH}$ , where

- $V_{TH}$  is the open-circuit voltage at the terminals.
- $R_{TH}$  is the input or equivalent resistance at the terminals when the independent sources are turned off.

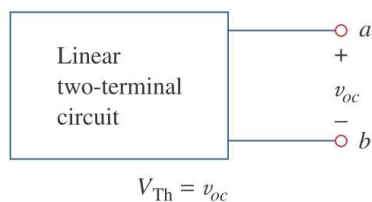


Thevenin's Theorem : วงจรไฟฟ้าที่มีปลายสาย 2 เส้น สามารถแทนได้ด้วยวงจรสมมูล (Equivalent circuit) ที่ประกอบด้วย Voltage source  $V_{th}$  ต่ออนุกรมกับ  $R_{th}$  โดย  $V_{th}$  และ  $R_{th}$  คือ ค่าแรงดันและความต้านทานที่วัดได้ระหว่างปลายสาย 2 เส้น

27

## 4.5 Thevenin's Theorem

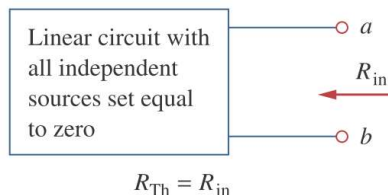
To find  $V_{TH}$



การหาค่า  $V_{th}$  ให้ถอด Load ออก แล้ววัดแรงดันระหว่าง a กับ b (เป็น Open circuit Voltage ระหว่าง a กับ b เมื่อไม่มี Load)

Disconnect the load

To find  $R_{TH}$  For circuits with only independent sources

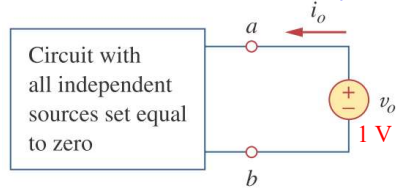


การหาค่า  $R_{th}$  ในกรณีที่ไม่มี Dependent source ให้ short Circuit Voltage source ให้หมด และ Open circuit current Source ให้หมด แล้วหา R รวมระหว่าง Node a กับ b

28

## 4.5 Thevenin's Theorem

To find  $R_{Th}$  for circuits with dependent sources



การหาค่า  $R_{th}$  ในกรณีที่มี Dependent source ให้ทำดังนี้

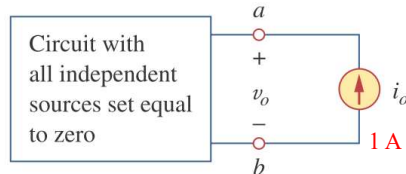
1. Short circuit กับ independent voltage source ทั้งหมด
2. Open circuit กับ independent current Source ทั้งหมด
3. จ่ายแรงดัน 1 V ที่ขั้ว a b แล้วหากระแสที่ไหลเข้าไปจะได้

$$R_{Th} = \frac{v_o}{i_o}$$

29

## 4.5 Thevenin's Theorem

To find  $R_{Th}$  for circuits with dependent sources อีกวิธี



การหาค่า  $R_{th}$  ในกรณีที่มี Dependent source ให้ทำดังนี้

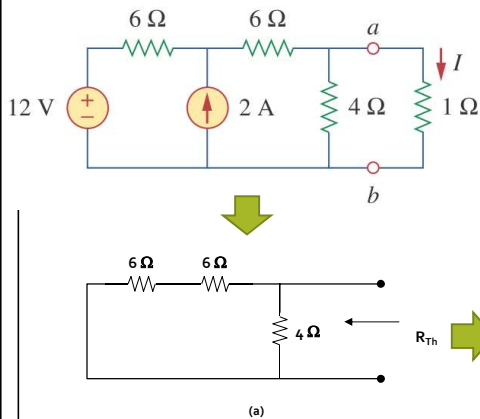
1. Short circuit กับ independent voltage source ทั้งหมด
2. Open circuit กับ independent current Source ทั้งหมด
3. จ่ายกระแส 1 A ที่ขั้ว a b ดังรูป แล้วหาแรงดันระหว่างขั้ว a b จะได้

$$R_{Th} = \frac{v_o}{i_o}$$

30

## 4.5 Thevenin's Theorem

**Example 5** Using Thevenin's theorem, find the equivalent circuit to the left of the terminals in the circuit shown below. Hence find  $I$ .

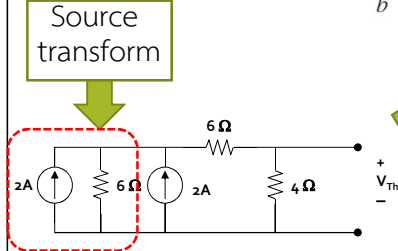
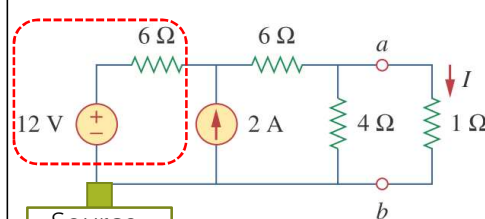


วิธีทำ

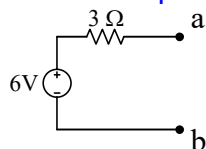
1. หา  $R_{th}$  โดยเอา R 1 Ω ( $R_{Load}$ ) ออกไปก่อน จากนั้น Short circuit Voltage source และ Open Circuit current source แล้วหาค่า R รวมระหว่างขา a - b

$$R_{th} = (6 + 6) \parallel 4 = \frac{12 \times 4}{12 + 4} = 3 \Omega$$

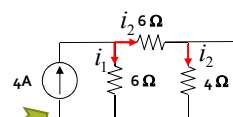
31



ได้ Thevenin equivalent circuit

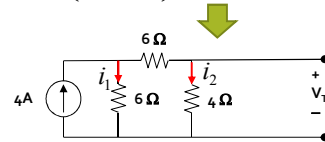


2. หา  $V_{th}$  โดยหาค่าแรงดันระหว่าง a กับ b



Current divider

$$i_2 = \left( \frac{6}{6 + 10} \right) \times 4 = 1.5 \text{ A}$$



$V_{th}$  เท่ากับแรงดันที่ตกคร่อม R 4 Ω

$$V_{th} = 4 \times 1.5 = 6 \text{ V}$$

32



3. คำนวณกระแส  $I$  ให้นำ  $R_{load}$  มาต่อคิน แล้วหากระแสที่ไหลผ่าน  $R_{load}$

$$I = \frac{6}{3+1} = \frac{6}{4} = 1.5 \text{ A}$$

33

### Example 4.8

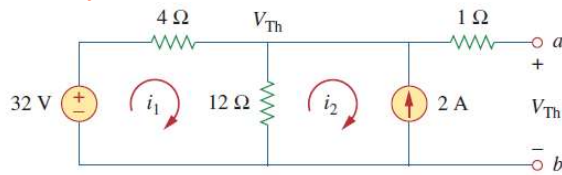
Find the Thevenin equivalent circuit of the circuit shown in Fig. 4.27, to the left of the terminals  $a-b$ . Then find the current through  $R_L = 6, 16$ , and  $36 \Omega$ .

1. หา  $R_{th}$  โดย เอา  $R_L$  ออกไป จากนั้น Short circuit Voltage source และ Open Circuit current source แล้วหาค่า  $R$  รวมระหว่าง ขา  $a - b$

$$R_{Th} = 4 \parallel 12 + 1 = \frac{4 \times 12}{16} + 1 = 4 \Omega$$

34

2. หา  $V_{th}$  โดยหาค่าแรงดันระหว่าง a กับ b



KVL ที่ Mesh 1

$$-32 + 4i_1 + 12(i_1 - i_2) = 0,$$

Current ที่ Mesh 2

$$i_2 = -2 \text{ A}$$

$$i_1 = 0.5 \text{ A.}$$

จะได้

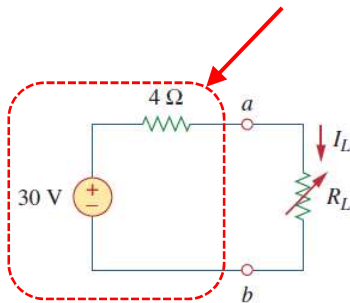
$$V_{Th} = 12(i_1 - i_2) = 12(0.5 + 2.0) = 30 \text{ V}$$

อีกวิธีสำหรับคำนวณ  $V_{th}$  ใช้ KCL

$$\frac{32 - V_{Th}}{4} + 2 = \frac{V_{Th}}{12} \Rightarrow 96 - 3V_{Th} + 24 = V_{Th} \Rightarrow V_{Th} = 30 \text{ V}$$

35

ได้ Thevenin Equivalent Circuit (ไม่รวม  $R_L$ )



$$I_L = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} = \frac{30}{4 + R_L}$$

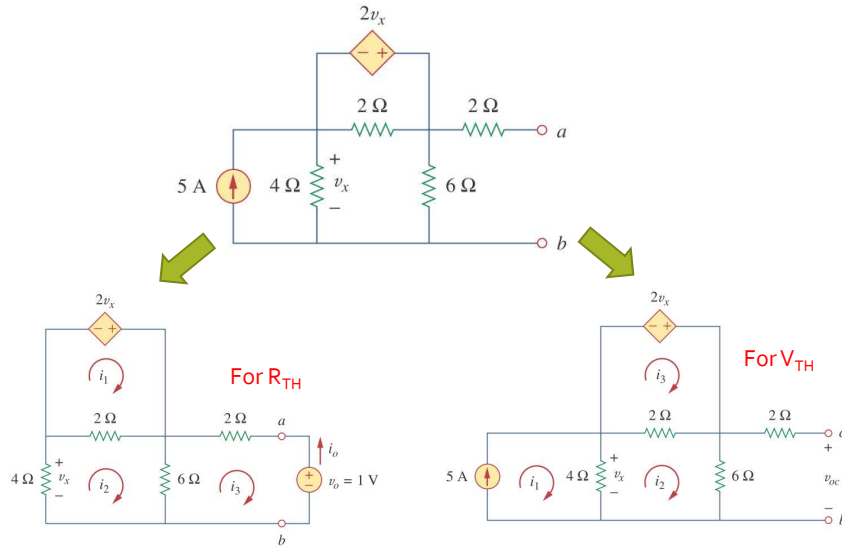
$$\text{When } R_L = 6, \Rightarrow I_L = \frac{30}{10} = 3 \text{ A}$$

$$\text{When } R_L = 16, \Rightarrow I_L = \frac{30}{20} = 1.5 \text{ A}$$

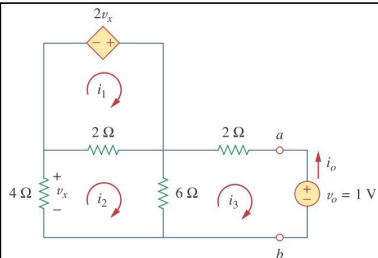
$$\text{When } R_L = 36, \Rightarrow I_L = \frac{30}{40} = 0.75 \text{ A}$$

36

**Example 6** Find the Thevenin equivalent circuit of the circuit shown below to the left of the terminals.



37



1. หา  $R_{th}$  ให้ Short circuit Independent Voltage source และ Open Circuit independent current source ส่วน Dependent source ให้คงไว้ แล้วจ่ายแรงดัน 1 V ที่ขั้ว  $a$ - $b$  แล้วคำนวณกระแส  $i_o$

Mesh 1

$$-2v_x + 2(i_1 - i_2) = 0 \Rightarrow v_x = i_1 - i_2 \Rightarrow i_1 = -3i_2 \quad (a)$$

Mesh 2

$$4i_2 + 2(i_2 - i_1) + 6(i_2 - i_3) = 0 \Rightarrow -2i_1 + 12i_2 - 6i_3 = 0 \quad (b)$$

Mesh 3

$$6(i_3 - i_2) + 2i_3 + 1 = 0 \Rightarrow -6i_2 + 8i_3 = 0 \quad (c)$$

$$\text{Solving (a),(b),(c)} \Rightarrow i_3 = -\frac{1}{6} \text{ A} \Rightarrow i_o = -i_3 = 1/6 \text{ A}$$

$$\text{จะได้ } R_{Th} = \frac{1 \text{ V}}{i_o} = 6 \Omega$$

38

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0; \\ -2 & 12 & -6; \\ 0 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

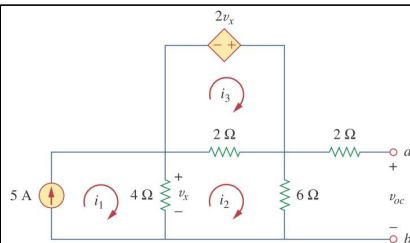
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \text{inv}(\mathbf{a}) * \mathbf{b}$$



$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1667 \\ -0.0556 \\ -0.1667 \end{bmatrix}$$

39



## 2. คำนวณค่า $V_{th}$

Mesh 1

$$i_1 = 5$$

Mesh 2

$$4(i_2 - i_1) + 2(i_2 - i_3) + 6i_2 = 0 \Rightarrow 12i_2 - 4i_1 - 2i_3 = 0$$

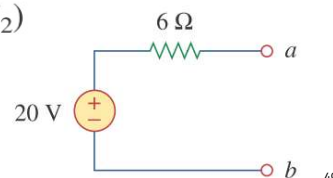
Mesh 3

$$-2v_x + 2(i_3 - i_2) = 0 \Rightarrow v_x = i_3 - i_2 \Rightarrow 4i_1 - 3i_2 - i_3 = 0$$

Solving for  $i_2 \Rightarrow i_2 = 10/3$

$$4(i_1 - i_2)$$

$$V_{Th} = v_{oc} = 6i_2 = 20 \text{ V}$$



40

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0; \\ -4 & 12 & -2; \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \text{inv}(\mathbf{a}) * \mathbf{b}$$

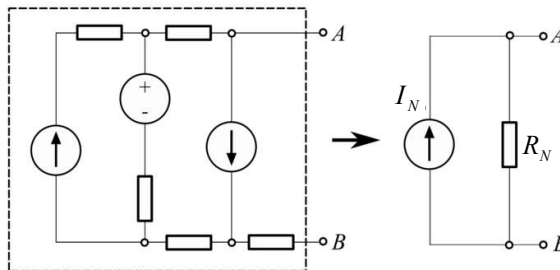


$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3.33 \\ 10 \end{bmatrix}$$

41



Edward Lawry Norton (1898-1983)  
USA Bell Lab engineer



Norton's Theorem : วงจรไฟฟ้าที่มีปลายสาย 2 เส้น สามารถแทนได้ด้วยวงจรสมมูล (Equivalent circuit) ที่ประกอบด้วย Current source  $I_N$  ต่อขนานกับ  $R_N$

ประโยชน์: ทำให้เราสามารถแทนวงจรไฟฟ้าที่ซับซ้อนด้วยวงจรไฟฟ้าอย่างง่าย ทำให้การวิเคราะห์วงจรทำได้ง่ายขึ้น

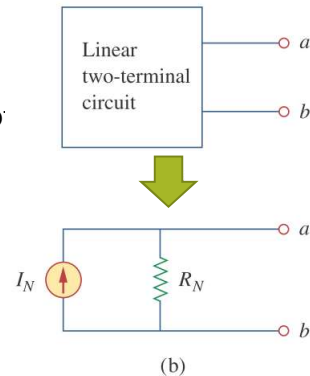
หมายเหตุ: R ของ Norton เท่ากับ R ของ Thevenin  $R_N = R_{Th}$

## 4.6 Norton's Theorem

It states that a linear two-terminal circuit can be replaced by an equivalent circuit of a current source  $I_N$  in parallel with a resistor  $R_N$ .

Where

- $I_N$  is the short circuit current through the terminals.
- $R_N$  is the input or equivalent resistance at the terminals when the independent sources are turned off.



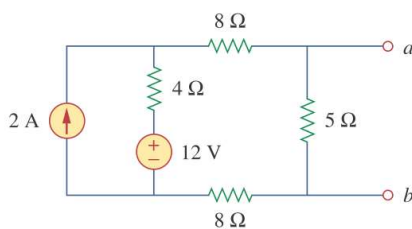
**Norton's Theorem :** วงจรไฟฟ้าที่มีปลายสาย 2 เส้น สามารถแทนได้ด้วยวงจรสมมูล (Equivalent circuit) ที่ประกอบด้วย Current source  $I_N$  ต่อขนานกับ  $R_N$  โดย  $I_N$  คือค่ากระแสที่วัดได้เมื่อลัดวงจรระหว่างปลายสายและ  $R_N$  และความต้านทานระหว่างปลายสาย 2 เส้น

The Thevenin's and Norton equivalent circuits are related by a source transformation.

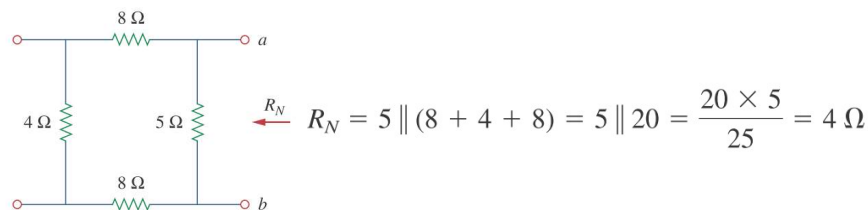
43

## 4.6 Norton's Theorem

**Example 7** Find the Norton equivalent circuit of the circuit shown below.

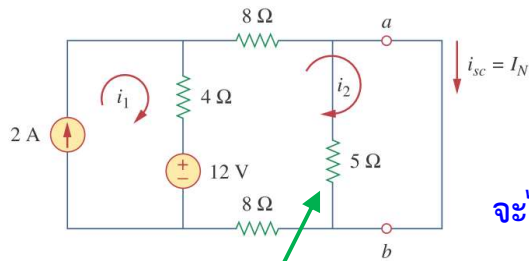


1. หา  $R_N$  โดยใช้หลักการเดียวกับของ Thevenin theorem กล่าวคือ Short circuit Voltage source และ Open Circuit current source แล้วหาค่า R รวมระหว่างขา a - b



44

2. หา  $I_N$  โดยลัดวงจรระหว่าง a กับ b แล้วหากระแสจาก a ไป b



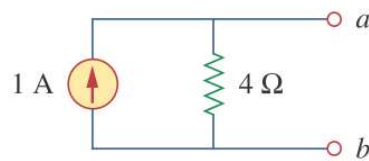
$$i_1 = 2 \text{ A},$$

$$20i_2 - 4i_1 - 12 = 0$$

จะได้

$$i_2 = 1 \text{ A} = i_{sc} = I_N$$

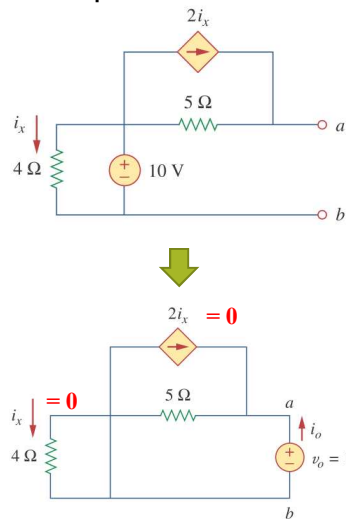
จะได้ Norton equivalent circuit



หมายเหตุ: เมื่อลัดวงจรจาก a ไป b จะไม่มีกระแสไหลผ่าน R 5 Ω

## 4.6 Norton's Theorem

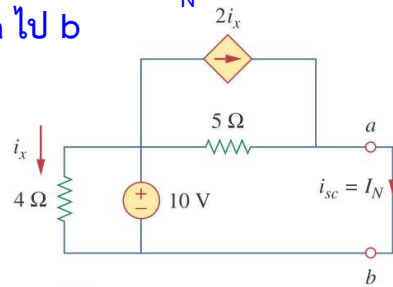
**Example 8** Find the Norton equivalent circuit of the circuit shown below.



1. หา  $R_N$  ให้ Short circuit Independent Voltage source และ Open Circuit independent current source ส่วน Dependent source ให้คงไว้ แล้วจ่ายแรงดัน  $v_o = 1 \text{ V}$  ที่ขั้ว a-b แล้วคำนวณกระแส  $i_o$

$$R_N = \frac{v_o}{i_o} = \frac{1}{0.2} = 5 \Omega$$

2. คำนวณค่า  $I_N$  โดยลัดวงจรที่ขั้ว a - b แล้วหากระแสที่ไหลจาก a ไป b



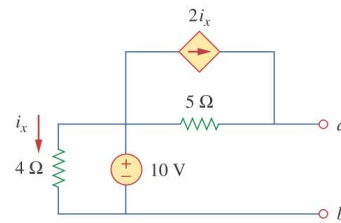
$$i_x = \frac{10}{4} = 2.5 \text{ A}$$

KCL node a

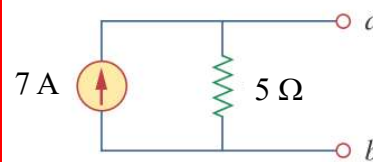
$$i_{sc} = \frac{10}{5} + 2i_x = 2 + 2(2.5) = 7 \text{ A}$$

จะได้

$$I_N = 7 \text{ A}$$



จะได้ Norton equivalent circuit



47

## 4.7 Maximum Power Transfer

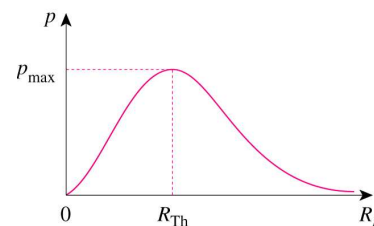
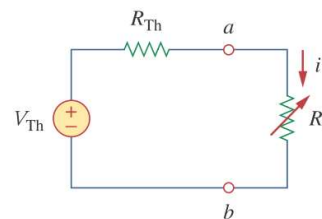
If the entire circuit is replaced by its Thevenin equivalent except for the load, the power delivered to the load is:

$$R_L = R_{Th} \Rightarrow P_{\max} = \frac{V_{Th}^2}{4R_L}$$

$$P = i^2 R_L = \left( \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} \right)^2 R_L$$

For maximum power dissipated in  $R_L$ ,  $P_{\max}$  for a given  $R_{Th}$ , and  $V_{Th}$ ,

$$P_{\max} = \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}}$$



The power transfer profile with different  $R_L$

48



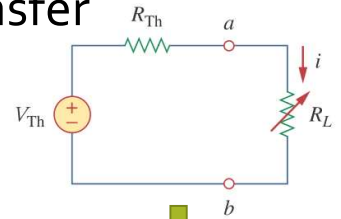
## 4.7 Maximum Power Transfer

กำลังไฟฟ้าสูงสุดที่ Source สามารถ  
จ่ายให้ Load ได้จะเกิดขึ้นเมื่อ

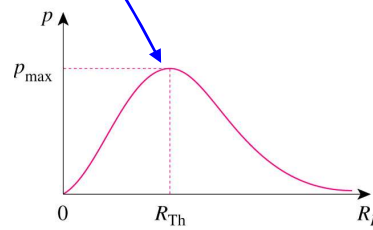
$$R_L = R_{Th}$$

และกำลังไฟฟ้าสูงสุดจะเป็น

$$p_{\max} = \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}}$$



$$P = i^2 R_L = \left( \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} \right)^2 R_L$$



กราฟระหว่าง P กับ  $R_L$

49

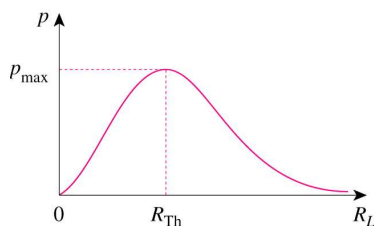
## 4.7 Maximum Power Transfer

การหาจุดสูงสุดของกราฟ คือการหาจุดที่อนุพันธ์อันดับที่ 1 ของกราฟ = 0

To prove the maximum power transfer theorem

$$p = i^2 R_L = \left( \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} \right)^2 R_L$$

Differentiate  $p$



$$\begin{aligned} \frac{dp}{dR_L} &= V_{Th}^2 \left[ \frac{(R_{Th} + R_L)^2 - 2R_L(R_{Th} + R_L)}{(R_{Th} + R_L)^4} \right] \\ &= V_{Th}^2 \left[ \frac{(R_{Th} + R_L - 2R_L)}{(R_{Th} + R_L)^3} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$0 = (R_{Th} + R_L - 2R_L) = (R_{Th} - R_L)$$

Maximum or Minimum ?

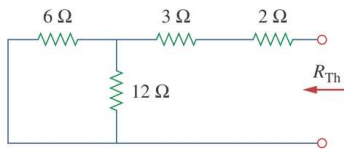
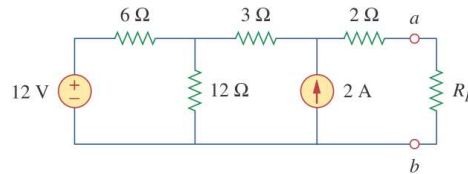
$$d^2p/dR_L^2 < 0 \quad \text{Maximum}$$

$$R_L = R_{Th}$$

## 4.7 Maximum Power Transfer

### Example 9

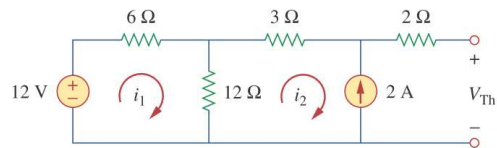
Determine the value of  $R_L$  that will draw the maximum power from the rest of the circuit shown below. Calculate the maximum power.



$$R_{Th} = 2 + 3 + 6 \parallel 12 = 5 + \frac{6 \times 12}{18} = 9 \Omega$$

51

## 4.7 Maximum Power Transfer



$$-12 + 18i_1 - 12i_2 = 0, \quad i_2 = -2 \text{ A}$$

$$i_1 = -2/3$$

KVL around the outer loop

$$-12 + 6i_1 + 3i_2 + 2(0) + V_{Th} = 0$$

$$V_{Th} = 22 \text{ V}$$

$$R_L = R_{Th} = 9 \Omega$$

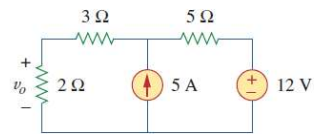
$$p_{\max} = \frac{V_{Th}^2}{4R_L} = \frac{22^2}{4 \times 9} = 13.44 \text{ W}$$

52

## Homework # 2

### 1. Superposition

#### Practice Problem 4.3



**Figure 4.8**

For Practice Prob. 4.3.

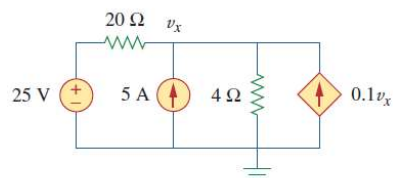
Using the superposition theorem, find  $v_o$  in the circuit of Fig. 4.8.

**Answer:** 7.4 V.

53

### 2. Superposition with dependent source

#### Practice Problem 4.4



**Figure 4.11**

For Practice Prob. 4.4.

Use superposition to find  $v_x$  in the circuit of Fig. 4.11.

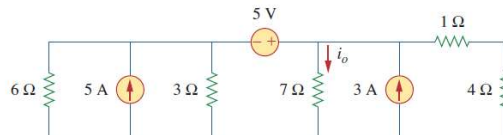
**Answer:**  $v_x = 31.25$  V.

54

### 3. Source transformation

#### Practice Problem 4.6

Find  $i_o$  in the circuit of Fig. 4.19 using source transformation.



**Figure 4.19**

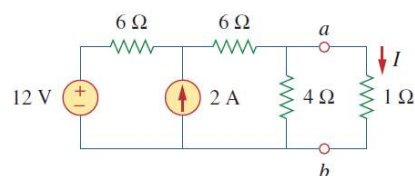
For Practice Prob. 4.6.

**Answer:** 1.78 A.

55

### 4. Thevenin's Theorem

#### Practice Problem 4.8



**Figure 4.30**

For Practice Prob. 4.8.

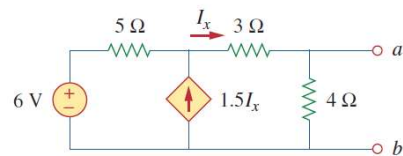
Using Thevenin's theorem, find the equivalent circuit to the left of the terminals in the circuit of Fig. 4.30. Then find  $I$ .

**Answer:**  $V_{Th} = 6 \text{ V}$ ,  $R_{Th} = 3 \Omega$ ,  $I = 1.5 \text{ A}$ .

56

## 5. Thevenin's Theorem with dependent source

### Practice Problem 4.9



**Figure 4.34**

For Practice Prob. 4.9.

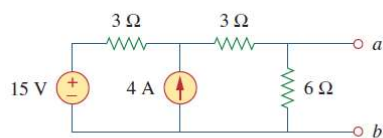
Find the Thevenin equivalent circuit of the circuit in Fig. 4.34 to the left of the terminals.

**Answer:**  $V_{Th} = 5.333 \text{ V}$ ,  $R_{Th} = 444.4 \text{ m}\Omega$ .

57

## 6. Norton's Theorem

### Practice Problem 4.11



**Figure 4.42**

For Practice Prob. 4.11.

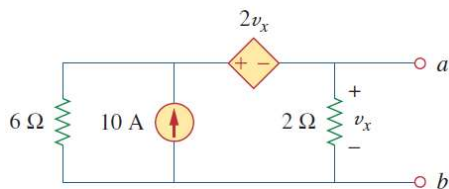
Find the Norton equivalent circuit for the circuit in Fig. 4.42, at terminals  $a$ - $b$ .

**Answer:**  $R_N = 3 \Omega$ ,  $I_N = 4.5 \text{ A}$ .

58

## 7. Norton's Theorem with dependent source

### Practice Problem 4.12



**Figure 4.45**

For Practice Prob. 4.12.

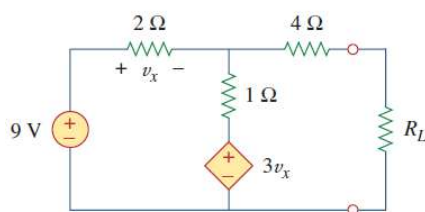
Find the Norton equivalent circuit of the circuit in Fig. 4.45 at terminals  $a$ - $b$ .

**Answer:**  $R_N = 1\ \Omega$ ,  $I_N = 10\ \text{A}$ .

59

## 8. Maximum Power Transfer

### Practice Problem 4.13



**Figure 4.52**

For Practice Prob. 4.13.

Determine the value of  $R_L$  that will draw the maximum power from the rest of the circuit in Fig. 4.52. Calculate the maximum power.

**Answer:**  $4.222\ \Omega$ ,  $2.901\ \text{W}$ .

60

แนวข้อสอบครั้งที่ 2 (Jan 30, 2563)

1. Superposition
2. Source Transformation
3. Thevenin's Theorem
4. Norton's Theorem
5. Norton's or Thevenin's Theorem with dependent source
6. Maximum Power Transfer

61