บทที่ 4

วิธีวิเคราะห์วงจรตัวต้านทาน

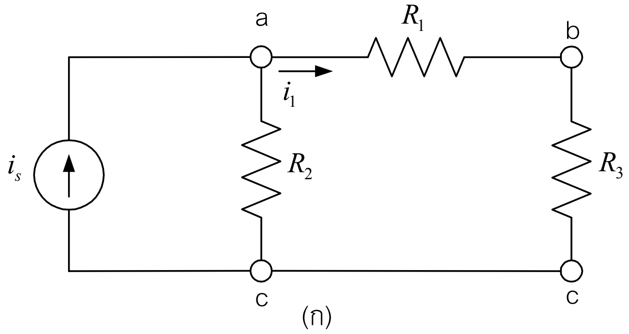
Methods for Analysis of Resistive Circuits

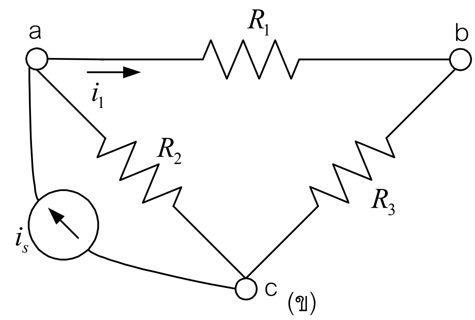
ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการวิเคราะห์วงจรตัวต้านทาน ซึ่งจะมีรูปแบบและระเบียบวิธีที่เป็นระบบมากขึ้น เพื่อให้สามารถวิเคราะห์วงจรที่มีความซับซ้อนขึ้นไปได้ โดยในบทนี้จะแนะนำเทคนิคการวิเคราะห์วงจรสองแบบคือวิธีการวิเคราะห์โนดหรือโนดและวิธีการวิเคราะห์เมชหรือวงมูลฐาน นอกจากนี้ในหัวข้อสุดท้ายจะได้แนะนำการแก้ปัญหาและวิเคราะห์วงจรโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์

4.1 วิธีการวิเคราะห์แบบโนด

ในบทที่ผ่านมาเราได้ศึกษาการวิเคราะห์วงจรอย่างง่ายที่สามารถลดรูปลงจนเหลือจำนวนโนดแค่สองโนด จากนั้นเราจะใช้สมการเพียงสมการเดียวเพื่อหาค่าตัวแปรหนึ่งตัว ซึ่งโดยทั่วไปก็คือแรงดันที่ตกคร่อมโนดทั้งสอง ในหัวข้อนี้เราจะพัฒนาวิธีการนี้เพื่อนำไปสู่การหาคำตอบคือแรงดันโนด (Node Voltage) ของวงจรที่มีจำนวนโนดมากกว่าสองโนดขึ้นไป

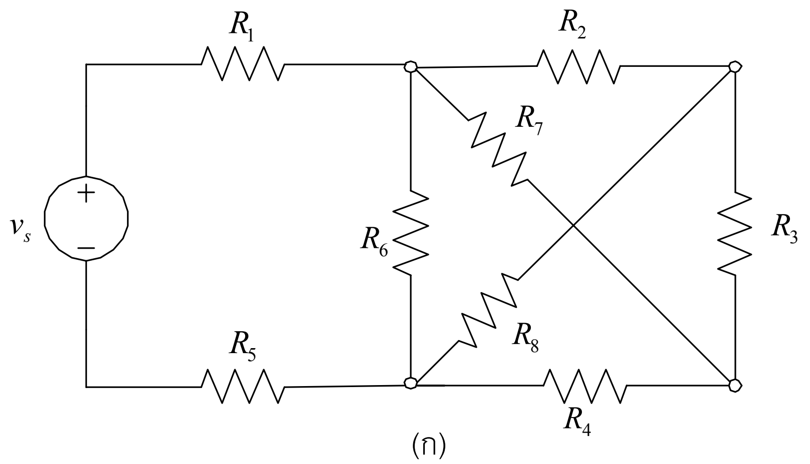
เพื่อจำกัดขอบเขตของวงจรที่จะศึกษา เราจะกล่าวถึงเฉพาะวงจรในระนาบเดียว (Planar Circuit) ซึ่งหมายถึงวงจรที่สามารถเขียนบนระนาบเดียวโดยไม่มีการทับซ้อนกันของสาขา (Branch) คำว่าสาขาหมายถึงเส้นทางที่เชื่อมต่อระหว่างโนดคู่หนึ่ง พิจารณาตัวอย่างในรูปที่ 4.1 (ก) จะเห็นว่าลวดตัวนำในอุดมคติที่ต่อระหว่างโนด c และ c เป็นโนดเดียวกัน ดังนั้นจึงเขียนกำกับด้วยชื่อโนดเดียว และสามารถเขียนใหม่ได้ดังในรูป 4.1 (ข)



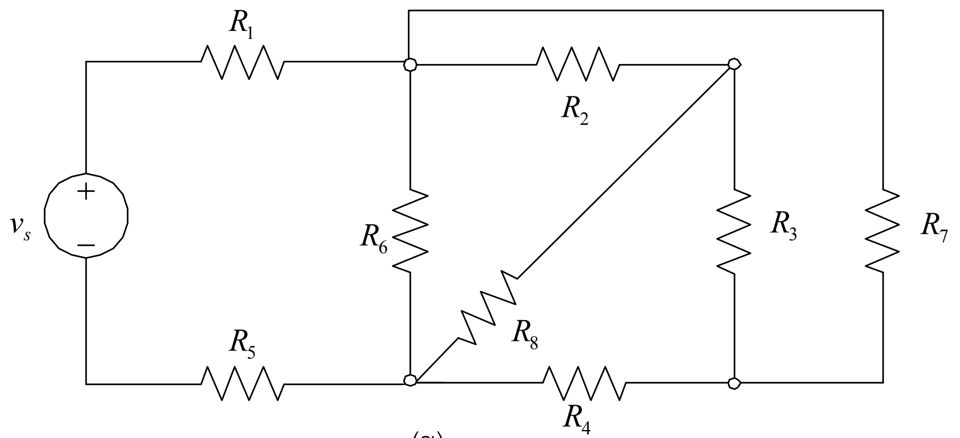


รูปที่ 4.1 ตัวอย่างวงจรในระนาบเดียว (ก) วงจรสามโนด (ข) เขียนใหม่โดยรวมโนด c เข้าด้วยกัน

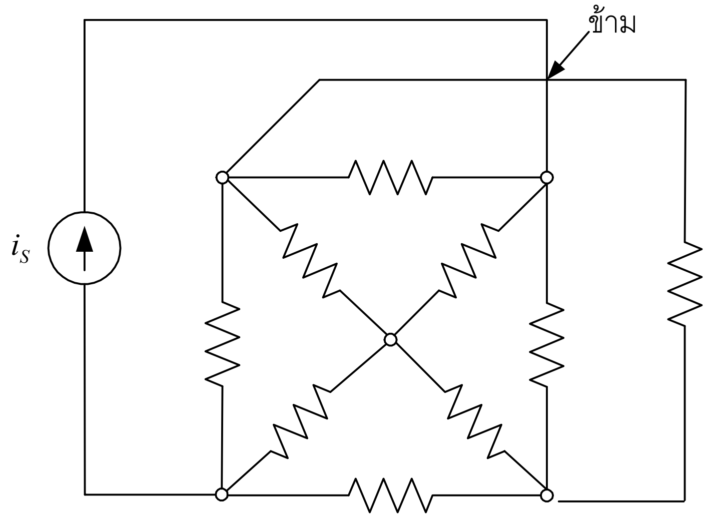
วงจรในระนาบเดียวสามารถเขียนบนระนาบได้โดยไม่มีการข้ามกันของสาขา ในบางครั้งการข้ามกันของสาขาสามารถเขียนใหม่เพื่อกำจัดการข้ามกันได้ ตัวอย่างของวงจรเป็นวงจรในระนาบเดียวที่มีการข้ามกันของสาขา แต่สามารถเขียนใหม่ให้ไม่มีการข้ามกันได้ ดังแสดงในรูปที่ 4.2 (ก) แต่วงจรในรูปที่ 4.2 (ข) ไม่เป็นวงจรในระนาบเดียว ซึ่งจะเห็นว่าการข้ามกันของสาขาไม่อาจกำจัดออกได้โดยการเขียนวงจรใหม่



(ก)



(ข)



(ค)

รูปที่ 4.2 ตัวอย่างวงจร (ก) วงจรในระนาบเดียวมีการข้ามกันของสาขา (ข) เขียนใหม่เป็นวงจรในระนาบเดียวที่ไม่มีการข้ามกันของสาขา (ค) วงจรไม่เป็นระนาบเดียว

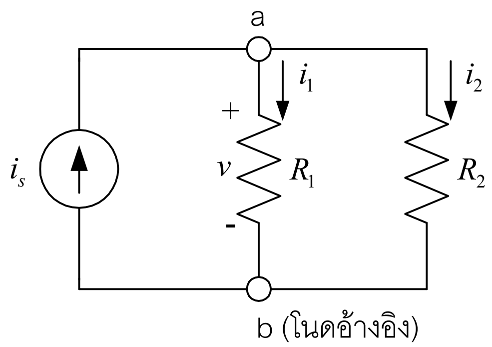
การวิเคราะห์วงจรที่มีจำนวน n โนด จะต้องการสมการ $n-1$ วิธีหนึ่งในการได้มาซึ่งสมการเหล่านี้ คือการเขียนสมการตามกฎกระแสของเคอชชอฟฟ์ที่โนดแต่ละโนดยกเว้นหนึ่งโนด ซึ่งเราจะใช้เป็นโนดอ้างอิง (Reference Node) การเลือกโนดอ้างอิงนั้นสามารถทำได้โดยอิสระ คือจะเลือกโนดใดเป็นโนดอ้างอิงก็

ได้ อย่างไรก็ตามควรเลือกโนดที่มีองค์ประกอบวงจรต่ออยู่มากที่สุด หรือโนดที่อยู่ด้านล่างสุดของวงจร หรือจุดที่เป็นโนดกราวด์ของแหล่งจ่าย

แรงดันที่โนดใดๆ เทียบกับโนดอ้างอิงเรียกว่าแรงดันโนด พิจารณาวงจรในรูปที่ 4.1 อาจกำหนดให้โนด c เป็นโนดอ้างอิง ค่าแรงดัน v_{ac} และ v_{bc} จะเป็นตัวแปรสองตัวที่ต้องการหาคำตอบโดยทั่วไปจะคิดว่าแรงดันที่โนดอ้างอิงนั้นทราบแล้ว ดังนั้นจะเขียนแค่แรงดัน v_a และ v_b จะเป็นที่ทราบกันว่าเป็นการเทียบกับโนดอ้างอิง

ในการหาค่าแรงดันที่โนดใดๆ เราใช้สมการตาม KCL ที่แต่ละโนด ยกเว้นที่โนดอ้างอิง ทำเช่นนี้จะทำให้ได้ชุดของสมการ ซึ่งจะได้ทำการแก้สมการหาคำตอบคือแรงดันโนดต่อไป

4.1.1 วิธีการวิเคราะห์แบบโนดสำหรับวงจรที่มีแหล่งจ่ายกระแส



รูปที่ 4.3 ตัวอย่างวงจรสองโนด

พิจารณาวงจรในรูป 4.3 ซึ่งประกอบด้วยโนดสองโนด เราจะกำหนดให้โนดล่างเป็นโนดอ้างอิง แล้วคำนวณหาค่า v_a โดยใช้ KCL ที่โนด a จะได้

$$i_s = i_1 + i_2 = \frac{v_a - v_b}{R_1} + \frac{v_a - v_b}{R_2} \tag{4.1}$$

เนื่องจากแรงดัน $v_b = 0$ ดังนั้น

$$v_a = \frac{i_s}{G_1 + G_2}$$

เมื่อ $G_n = \dfrac{1}{R_n}$ หลังจำเราได้ค่าแรงดันโนด v_a เราจะสามารถหาค่ากระแสทั้งหมดได้

คราวนี้ลองพิจารณาวงจรในรูปที่ 4.1 ใช้ KCL เพื่อหาค่าแรงดันโนดสองค่าคือ v_a และ v_b โดยเลือกโนด c เป็นโนดอ้างอิง ซึ่งโดยทั่วไปจะถือว่าโนดอ้างอิงมีค่าแรงดันเป็นศูนย์ เขียน KCL ที่โนด a ได้

$$i_s = \frac{v_a}{R_2} + \frac{v_a - v_b}{R_1} \tag{4.2}$$

ในทำนองเดียวกัน เขียน KCL ที่โนด b จะได้

$$i_1 = \frac{v_b}{R_3} \tag{4.3}$$

แต่ $i_1 = \dfrac{v_a - v_b}{R_1}$ ดังนั้น

$$\frac{v_a - v_b}{R_1} = \frac{v_b}{R_3}$$

หรือ

$$0 = \frac{v_b - v_a}{R_1} + \frac{v_b}{R_3} \tag{4.4}$$

สังเกตว่ากระแสที่ออกจากโนด b คือ $\dfrac{v_b - v_a}{R_1}$

ถ้ากำหนดค่า $R_1 = 1\,\Omega \quad R_2 = R_3 = 0.5\,\Omega$ และ $i_s = 4$ A สมการ (4.2) และ (4.4) จะได้เป็น

$$2v_a + \frac{v_a - v_b}{1} = 4 \tag{4.5}$$

$$\frac{v_a - v_b}{1} + 2v_b = 0 \tag{4.6}$$

เรียบเรียงสมการทั้งสองใหม่ในรูปของตัวแปรสองตัวคือ v_a และ v_b จะได้

$$3v_a - v_b = 4 \tag{4.7}$$

$$-v_a + 3v_b = 0 \tag{4.8}$$

คูณสมการ (4.7) ด้วย 3 แล้วนำมาบวกกับสมการ (4.8) ได้

$$8v_a = 12$$

หรือได้ค่า

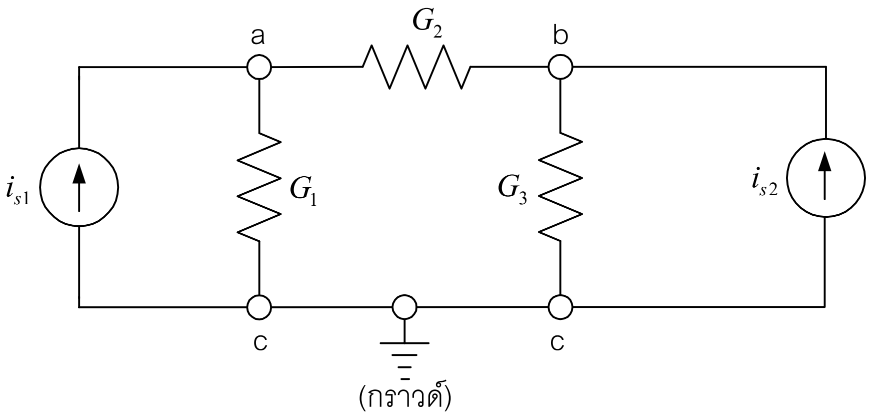
$$v_a = \frac{3}{2} \text{ V}$$

แทนค่า v_a ลงในสมการ (4.7) หรือ (4.8) ได้ค่า

$$v_b = \frac{1}{2} \text{ V}$$

แรงดันระหว่างโนด a เทียบกับโนด b จะมีค่า

$$v_a - v_b = 1 \text{ V}$$



รูปที่ 4.4 ตัวอย่างวงจรสามโนด

รูปที่ 4.4 แสดงวงจรที่มีสามโนด และแหล่งจ่ายกระแสอิสระสองแหล่งจ่าย หากใช้โนด c เป็นโนดอ้างอิง โดยเรานิยมเรียกโนดอ้างอิงว่าโนดกราวด์ (Ground Node) เนื่องจากว่าในทางปฏิบัติทั่วไปมักจะต่อจุดนี้เข้ากับตัวถังเครื่อง (Chassis) หรือต่อลงดิน (Earth)

เขียน KCL ที่โนด a

$$i_{s1} = G_1 v_a + G_2(v_a - v_b) \tag{4.9}$$

เขียน KCL ที่โนด b

$$i_{s2} = G_3 v_b + G_2(v_b - v_a) \tag{4.10}$$

อาจเขียนสมการ (4.9) และ (4.10) ใหม่ได้ดังนี้

$$(G_1 + G_2)v_a - G_2 v_b = i_{s1} \tag{4.11}$$

$$-G_2 v_a + (G_2 + G_3)v_b = i_{s2} \tag{4.12}$$

สังเกตว่าค่าสัมประสิทธิ์ของ v_a ของโนด a ในสมการ (4.11) คือค่าผลรวมของความนำที่ต่อที่โนด a นั่นเอง ค่าสัมประสิทธิ์ของ v_b จะเป็นค่าลบของค่าความนำที่ต่อระหว่างโนด a และโนด b ในทำนองเดียวกันในสมการ (4.12) ค่าสัมประสิทธิ์ของ v_b จะเป็นค่าผลรวมของความนำที่ต่อที่โนด b และค่าสัมประสิทธิ์ของ v_a จะเป็นค่าลบของค่าความนำที่ต่อระหว่างโนด b และโนด a

ในกรณีทั่วไปสำหรับวงจรที่ประกอบด้วยตัวนำ (หรือตัวต้านทาน) และแหล่งจ่ายกระแส การใช้ KCL ที่โนด k ใดๆ จะได้ค่าสัมประสิทธิ์ของ v_k คือผลรวมของความนำที่ต่ออยู่ที่โนด k ส่วนค่าสัมประสิทธิ์ของแรงดันโนดอื่นๆ จะเป็นค่าลบของความนำที่ต่อระหว่างโนดนั้นๆ กับโนด k

สมการ (4.11) และ (4.12) เรียกว่าสมการโนด (Node Equation) หรือเรียกรวมกันว่าชุดของสมการโนด (Set of Node Equation) เราสามารถเขียนสมการโนดให้อยู่ในรูปที่กระทัดรัดโดยใช้เมตริกซ์ สำหรับวงจร N โนด ที่ประกอบด้วยตัวนำและแหล่งจ่ายกระแส เราเขียนเมตริกซ์ตัวนำ (Conductance Matrix) $\mathbf{G}$ ได้ดังนี้

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix} \sum_a G & -G_{ab} & \cdots & \cdots & -G_{aN} \\ -G_{ba} & \sum_b G & & & -G_{bN} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -G_{na} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_N G \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

โดยที่ $\sum_k G$ คือผลรวมของความนำที่ต่อที่โนด k และ G_{ij} คือผลรวมของความนำที่ต่อระหว่างโนด i และโนด j สำหรับวงจรตัวต้านทานที่ไม่มีแหล่งจ่ายแบบขึ้นกับตัวแปรอื่นในวงจรจะได้เมตริกซ์ตัวนำ $\mathbf{G}$ เป็นเมตริกซ์สมมาตร (Symmetric Matrix) ขนาดของเมตริกซ์จะเท่ากับจำนวนโนด เช่นหากวงจรมีสี่โนด จะได้เมตริกตัวนำขนาด 4×4 เป็นต้น

สมการสำหรับแรงดันโนดจะเขียนได้เป็น

$$\mathbf{Gv}=\mathbf{i_s} \tag{4.14}$$

เมื่อ

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \text{ และ } \mathbf{i_s}=\begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ \vdots \\ i_{sN} \end{bmatrix}$$

เรานิยมเรียกเมตริกซ์ที่มีหนึ่งสดมภ์ (Column) ว่าเวกเตอร์สดมภ์ และเมตริกซ์ที่มีหนึ่งแถว (Row) ว่าเวกเตอร์แถว หรือบางครั้งจะเรียกสั้นๆ ว่าเวกเตอร์ ดังนั้นเราจะเรียกเมตริกซ์ของตัวแปรคือแรงดันโนดว่าเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ มีขนาด $N\times 1$ และเมตริกซ์ของแหล่งจ่ายกระแสว่า เวกเตอร์ $\mathbf{i_s}$ มีขนาด $N\times 1$ เช่นเดียวกัน โดยที่ค่า i_{sk} คือผลรวมของกระแสที่ไหลเข้าสู่โนด k

ตัวอย่าง 4.1 พิจารณาวงจรดังแสดงในรูป Ex4.1 จงหาค่าแรงดันโนดทั้งสามคือ v_a v_b และ v_c เมื่อกำหนดให้ค่าความนำทุกตัวคือ 1 S

วิธีทำ ที่โนด a

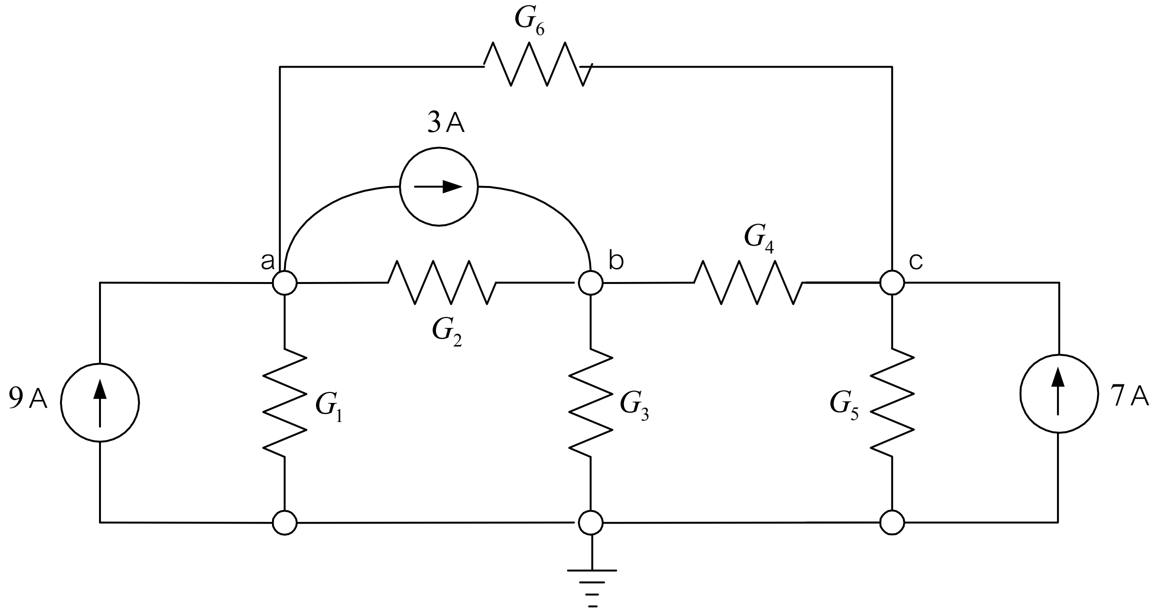
$$(G_1+G_2+G_6)v_a-G_2v_b-G_6v_c=9-3$$

ที่โนด b

$$-G_2v_a+(G_4+G_2+G_3)v_b-G_4v_c=3$$

ที่โนด c

$$-G_6 v_a - G_4 v_b + (G_4 + G_5 + G_6) = 7$$



รูปที่ Ex4.1

แทนค่าความนำลงไปจะได้

$$3v_a - v_b - v_c = 6$$

$$-v_a + 3v_b - v_c = 3$$

$$-v_a - v_b + 3v_c = 7$$

ดังนั้นเมตริกซ์ตัวนำ

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็นเมตริกซ์สมมาตร และเวกเตอร์

$$\mathbf{i_s} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

สามารถเขียนสมการโนดตามสมการ (4.14) ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

แก้สมการโนดจะได้ค่าตัวแปรคือแรงดันโนดตามต้องการ โดยวิธีการแก้สมการนี้มีหลายวิธี เช่นการใช้กฎของเครมเมอร์ (Cramer's Rule) การหาเมตริกซ์ผกผันหรืออินเวิร์สเมตริกซ์ (Inverse Matrix) ของเมตริกซ์ตัวนำ $\mathbf{G}^{-1}$ เป็นต้น ซึ่งจะไม่นำรายละเอียดของวิธีเหล่านี้มากล่าวในที่นี้ อย่างไรก็ตามในกรณีที่ใช้วิธีหา $\mathbf{G}^{-1}$ คำตอบของสมการ $\mathbf{Gv} = \mathbf{i_s}$ คือ $\mathbf{v} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{i_s}$ ในกรณีของตัวอย่างนี้จะได้

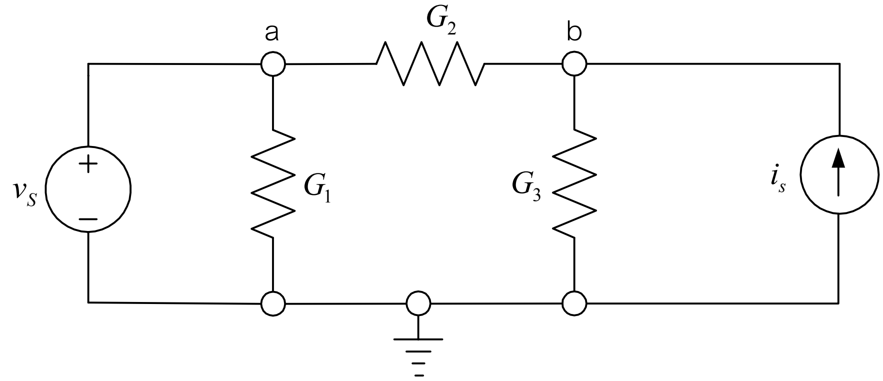
$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

และจะได้คำตอบ

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5.5 \\ 4.75 \\ 5.75 \end{bmatrix}$$

4.1.2 วิธีการวิเคราะห์แบบโนดสำหรับวงจรที่มีแหล่งจ่ายกระแสและแหล่งจ่ายแรงดัน

ในกรณีที่ในวงจรมีทั้งแหล่งจ่ายกระแสและแหล่งจ่ายแรงดัน สิ่งที่เพิ่มเติมจากหัวข้อที่แล้วก็คือการมีแหล่งจ่ายแรงดัน ซึ่งเราจะแยกการพิจารณาออกเป็นสามกรณี



รูปที่ 4.5 วงจรที่มีแหล่งจ่ายกระแสและแหล่งจ่ายแรงดัน

4.2.1.1 แหล่งจ่ายแรงดันที่ต่อระหว่างโนดใดโนดหนึ่งกับกราวด์ ดังแสดงตัวอย่างในรูปที่ 4.5 ซึ่งจะเห็นว่ามีแหล่งจ่ายแรงดันต่อระหว่างโนด a กับกราวด์ ดังนั้น

$$v_a = v_s$$

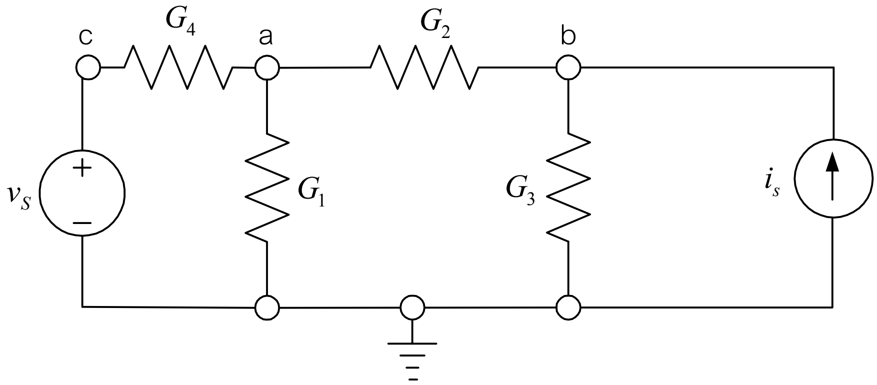
ซึ่งทำให้เราทราบค่าของ v_a และเหลือตัวแปรที่ต้องการหาค่าเพียงตัวเดียวคือ v_b โดยการเขียน KCL ที่โนด b จะได้

$$i_s = v_b(G_2 + G_3) - v_a G_2 \tag{4.15}$$

แทนค่า $v_a = v_s$

$$v_b = \frac{i_s + v_s G_2}{G_2 + G_3} \tag{4.16}$$

4.2.1.2 แหล่งจ่ายแรงดันที่มีตัวต้านทานต่ออนุกรมเข้ากับโนดใดโนดหนึ่งกับกราวด์ ดังแสดงตัวอย่างในรูปที่ 4.6 ซึ่งแหล่งจ่ายแรงดัน v_s มีค่าความนำ G_4 ต่ออนุกรมอยู่ เราจะมีโนดเพิ่มหนึ่งโนดคือ โนด c โดยที่เราทราบค่า $v_c = v_s$



รูปที่ 4.6 วงจรที่มีแหล่งจ่ายแรงดันต่ออนุกรมกับตัวต้านทาน

เขียนสมการโนดที่โนด a และ b ใช้ KCL จะได้

โนด a

$$(v_a - v_b)G_2 + v_a G_1 + (v_a - v_c)G_4 = 0 \tag{4.17}$$

โนด b

$$i_s = v_b(G_2 + G_3) - v_a G_2 \tag{4.18}$$

เขียนสมการ (4.17) ใหม่ โดยแทนค่า $v_c = v_s$

$$v_a(G_1 + G_2 + G_4) - v_b G_2 = v_s G_4 \tag{4.19}$$

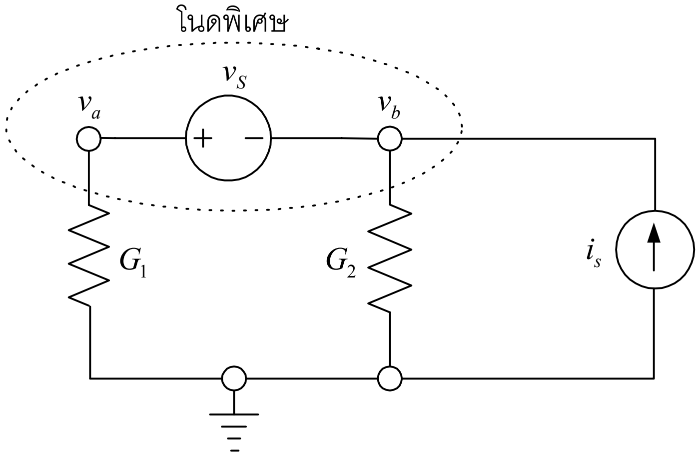
สังเกตว่าที่โนด a เราได้ค่าผลรวมของความนำทั้งหมดปรากฏ อยู่ในสัมประสิทธิ์ของ v_a และค่าลบของ G_2 ในสัมประสิทธิ์ของ v_b เหมือนในหัวข้อที่แล้ว และค่าแหล่งจ่ายแรงดันปรากฏเป็น $v_s G_4$ จากสมการ (4.17) และ (4.19) ซึ่งมีสองตัวแปรจะสามารถแก้สมการเพื่อหาคำตอบได้

4.2.1.3 แหล่งจ่ายแรงดันที่ต่อระหว่างโนดคู่ใดคู่หนึ่ง ตัวอย่างของกรณีนี้คือวงจรในรูปที่ 4.7 เนื่องจากเราทราบค่าแรงดันของแหล่งจ่าย ใช้ KVL จะได้ความสัมพันธ์

$$v_a = v_s + v_b \tag{4.20}$$

หรือ

$$v_a - v_b = v_s \tag{4.21}$$



รูปที่ 4.7 วงจรที่มีแหล่งจ่ายแรงดันต่อระหว่างโนดคู่ใดคู่หนึ่ง

เพื่อใช้ประโยชน์ของการที่เราทราบค่าแรงดันระหว่างโนด a และโนด b เราจะพิจารณาโนดทั้งสองนี้เสมือนเป็นโนดเดียวกันเรียกว่าซุปเปอร์โนดหรือโนดพิเศษ (Super Node) ดังแสดงในรูปวงรี(เส้นประ) ในรูปที่ 4.7 เราต้องการโนดพิเศษนี้เนื่องจากแรงดัน v_a และ v_b ไม่เป็นอิสระต่อกัน หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่ามันขึ้นต่อกันและกัน กฎกระแสของเคอชชอฟฟ์ยังคงใช้ได้กับโนดพิเศษ นั่นคือผลรวมพีชคณิตของกระแสเข้าสู่โนดพิเศษมีค่าเป็นศูนย์ทุกเวลา ดังนั้นเราจะใช้ KCL กับโนดพิเศษเหมือนกับโนดอื่นๆ ทั่วไป จากตัวอย่างนี้ที่โนดพิเศษจะได้

$$v_a G_1 + v_b G_2 = i_s \tag{4.22}$$

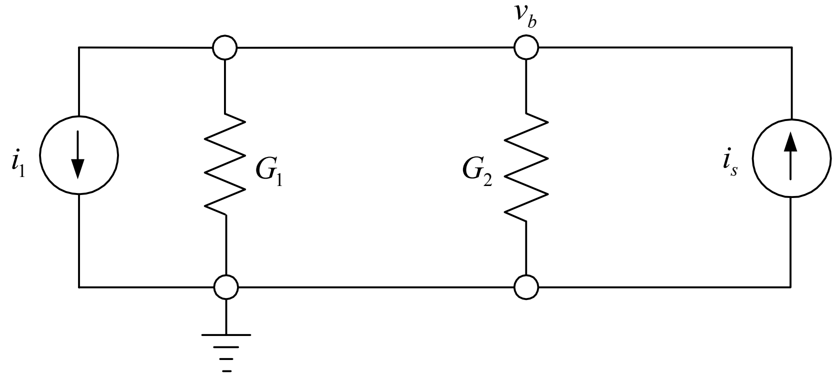
จาก (4.20) $v_a = v_s + v_b$ ดังนั้น

$$v_s G_1 + v_b (G_1 + G_2) = i_s \tag{4.23}$$

หรือ

$$v_b = \frac{i_s - v_s G_1}{G_1 + G_2} \tag{4.24}$$

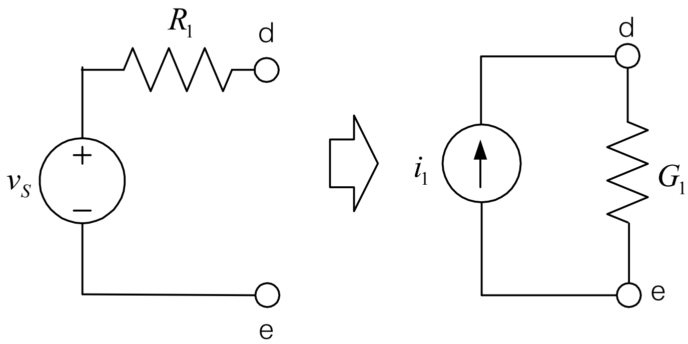
สังเกตว่าสมการ (4.23) สามารถได้มาจากการเขียนวงจรเสมือนของวงจรในรูปที่ 4.7 ดังแสดงในรูปที่ 4.8 ซึ่งเป็นการแปลงแหล่งจ่ายแรงดันอนุกรมกับตัวต้านทานเป็นแหล่งจ่ายกระแสขนานกับตัวต้านทาน โดยที่ค่า $i_1 = v_s G_1$



รูปที่ 4.8 วงจรเสมือนของวงจรในรูปที่ 4.7

ตาราง 4.1 วิธีการวิเคราะห์แบบโนดสำหรับวงจรที่มีแหล่งจ่ายแรงดัน

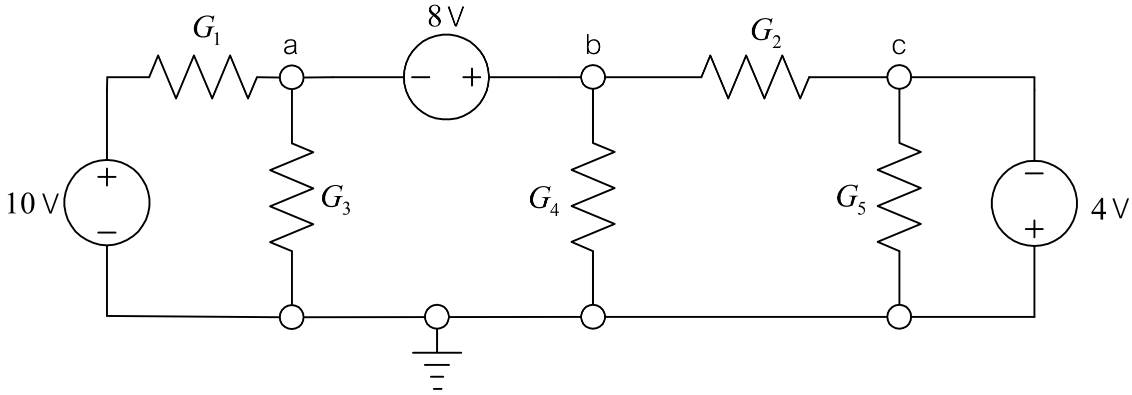
กรณี	**วิธีการ**
1. แหล่งจ่ายแรงดันต่อระหว่างโนดใดๆ c (ดูตัวอย่างในรูปที่ 4.10) และโนดอ้างอิง	กำหนดค่า v_c ให้เท่ากับแรงดันจากแหล่งจ่าย v_s โดยพิจารณาขั้วอ้างอิงด้วยจากนั้นเขียน KCL สำหรับโนดที่เหลือ
2. แหล่งจ่ายแรงดันต่อระหว่างโนดคู่ใดๆ a และ b (ดูตัวอย่างในรูปที่4.10)	สร้างโนดพิเศษที่ประกอบด้วย โนด a และ b แล้วเขียน KCL สำหรับโนดพิเศษและโนดที่เหลือ
3. แหล่งจ่ายแรงดันอนุกรมกับตัวต้านทานต่อระหว่างโนดคู่ใดๆ d และ e (ดูตัวอย่างในรูปที่4.10 ซึ่งจะมีโนด d คือ โนด a และโนด e คือกราวด์)	แทนแหล่งจ่ายแรงดันที่อนุกรมกับตัวต้านทานด้วยแหล่งจ่ายกระแสขนานกับตัวต้านทาน ดังแสดงในรูปที่ 4.9 สังเกตทิศทางของแหล่งจ่ายกระแสว่าจะมีทิศทางออกจากขั้วบวกของแหล่งจ่ายแรงดัน (เข้าสู่โนด d)



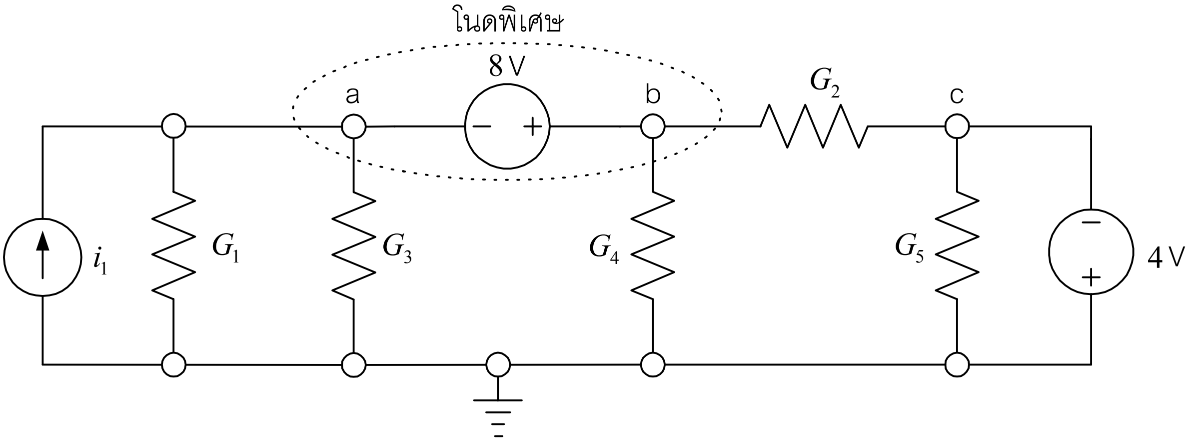
รูปที่ 4.9 การแปลงแหล่งจ่ายแรงดันที่อนุกรมกับตัวต้านทานเป็นแหล่งจ่ายกระแสขนานกับตัวต้านทาน

จากรูปที่ 4.10 กำหนด ค่าความนำเท่ากับ 0.5 S สำหรับตัวต้านทานทุกตัว พิจารณาวงรอบขวาสุดมีแหล่งจ่ายแรงดันต่อในลักษณะของกรณีที่ 1 ดังนั้น $v_c = -4$ V แหล่งจ่ายแรงดัน 8 V จะตรงกับ

กรณีที่ 2 และในวงรอบซ้ายสุดจะตรงกับกรณีที่ 3 ทำการแปลงแหล่งจ่ายแรงดันอนุกรมกับตัวต้านทานเป็นแหล่งจ่ายกระแสขนานกับตัวต้านทานได้ดังในรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.10 วงจรที่มีแหล่งจ่ายแรงดันสามแหล่งจ่าย



รูปที่ 4.11 เขียนวงจรในรูปที่ 4.10 ใหม่โดยที่ $i_1 = 10G_1 = 5$ A

เราต้องการสองสมการ จากโนดพิเศษหนึ่งสมการและจากโนด c อีกหนึ่งสมการ เขียน KCL ที่โนดพิเศษ

$$v_a(G_1 + G_3) + v_b(G_4 + G_2) - G_2 v_c = i_1 \tag{4.25}$$

โดยที่ความสัมพันธ์ระหว่าง v_a และ v_b คือ

$$v_b - v_a = 8 \tag{4.26}$$

ที่โนด c เราได้ $v_c = -4$ V และใช้ $v_b = 8 + v_a$ จากสมการ (4.26) แทนลงในสมการ (4.25)

$$v_a(G_1 + G_3) + (8 + v_a)(G_4 + G_2) = i_1 + G_2 v_c$$

หรือ

$$v_a(G_1 + G_3 + G_4 + G_2) = i_1 + G_2(-4) - 8(G_4 + G_2)$$

เนื่องจาก $i_1 = G_1(10) = 5$ A ดังนั้นเราจะได้

$$v_a = \frac{5 - 4(0.5) - 8(1)}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4} = \frac{-5}{2} \text{ V}$$

และ

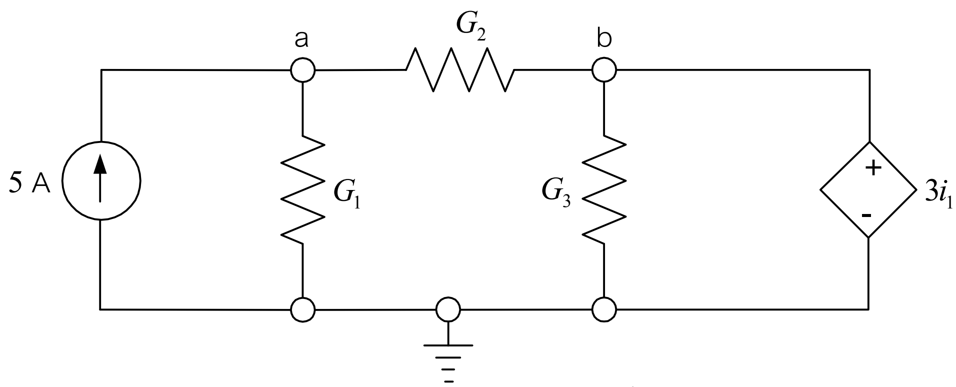
$$v_b = 8 + v_a = \frac{11}{2} \text{ V}$$

สังเกตว่าค่าความนำ G_5 ซึ่งขนานกับแหล่งจ่ายแรงแหล่งจ่ายแรงดัน 4 V ไม่ส่งผลต่อคำตอบที่ได้ อย่างไรก็ตามเราสามารถหาค่ากระแส i_5 ซึ่งไหลลงผ่าน G_5 ได้

$$i_5 = (-4)(1/2) = -2 \text{ A}$$

4.1.3 วิธีการวิเคราะห์แบบโนดสำหรับวงจรที่มีแหล่งจ่ายแบบขึ้นกับตัวแปรอื่น

ถ้าวงจรที่พิจารณามีแหล่งจ่ายแบบขึ้นกับตัวแปรอื่นอยู่ด้วย ในการเขียนสมการแรงดันโนดจะต้องเพิ่มสมการช่วยหนึ่งสมการสำหรับแต่ละแหล่งจ่าย ถ้าแหล่งจ่ายแบบขึ้นกับตัวแปรอื่นเป็นแหล่งจ่ายแรงดันและต่อระหว่างโนดคู่ใดๆ ที่ไม่ใช่โนดอ้างอิง เราจะใช้โนดพิเศษที่แหล่งจ่ายนี้ สำหรับกรณีอื่นๆ จะใช้วิธีเดียวกับที่สรุปไว้ในตารางที่ 4.1 แต่ถ้าแหล่งจ่ายนี้เป็นแหล่งจ่ายกระแสเราจะรวมค่ากระแสเข้ากับโนดที่มันต่ออยู่โนดใดโนดหนึ่ง รูปที่ 4.12 แสดงตัวอย่างของวงจรในลักษณะนี้ซึ่งประกอบด้วยแหล่งจ่ายกระแสอิสระและแหล่งจ่ายแรงดันควบคุมด้วยกระแส กำหนดค่าความนำ $G_1 = G_2 = G_3 = 1$ S



รูปที่ 4.12 วงจรที่มีแหล่งจ่ายแรงดันแบบขึ้นกับตัวแปรอื่น

เขียน KCL ที่โนด a ได้ว่า

$$v_a(G_1 + G_2) - G_2 v_b = 5 \tag{4.27}$$

แหล่งจ่ายแรงดันควบคุมด้วยกระแสกำหนด $v_b = 3i_1$ เนื่องจาก $i_1 = G_1 v_a$ และ $G_1 = 1$ S ดังนั้น

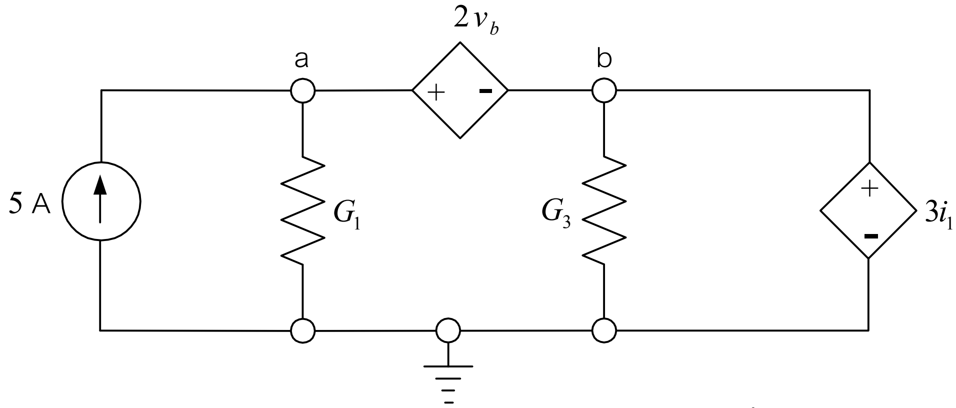
$$v_b = 3i_1 = 3v_a$$

และสมการ (4.27) จะเป็น

$$2v_a - 3v_a = 5$$

หรือ

$$v_a = -5 \text{ V}$$



รูปที่ 4.13 วงจรที่มีแหล่งจ่ายแรงดันและแหล่งจ่ายกระแสแบบขึ้นกับตัวแปรอื่น

ลองพิจารณากรณีที่มีทั้งแหล่งจ่ายกระแสและแรงดันแบบขึ้นกับค่าตัวแปรอื่นอยู่ในวงจรพร้อมกับแหล่งจ่ายกระแสอิสระ ดังแสดงในรูปที่ 4.13 ซึ่งจะเห็นว่าแหล่งจ่ายแรงดันควบคุมด้วยแรงดันเชื่อมระหว่างโนด a และโนด b สร้างโนดพิเศษขึ้นมา เขียน KCL ที่โนดพิเศษได้

$$v_a G_1 + v_b G_2 = 5 - 3i_1 \tag{4.28}$$

สมการเงื่อนไขอีกหนึ่งสมการเนื่องจากแหล่งจ่ายแรงดันคือ

$$v_a - v_b = 2v_b$$

หรือ

$$v_a = 3v_b$$

ส่วนแหล่งจ่ายกระแสควบคุมด้วยกระแสขึ้นกับค่า i_1 ซึ่ง $i_1 = v_a G_1$ ดังนั้นสมการ (4.28) ในรูปของแรงดันโนด v_a จึงเขียนได้ดังนี้

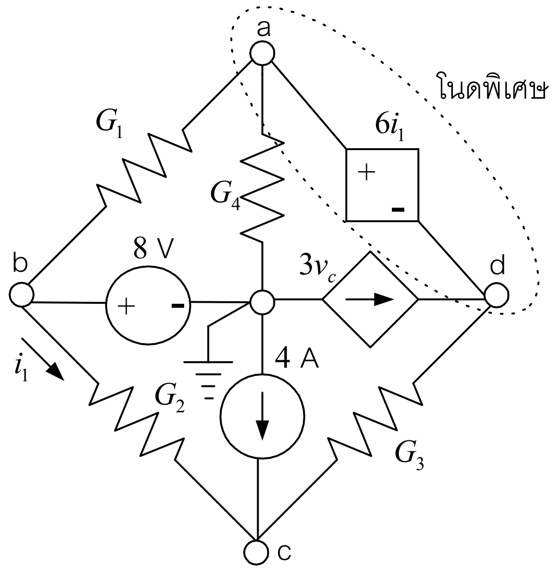
$$v_a G_1 + \frac{1}{3} v_a G_2 = 5 - 3G_1 v_a$$

แก้สมการหาค่า v_a

$$v_a = \frac{5}{G_1 + \frac{G_2}{3} + 3G_1} \tag{4.29}$$

จะสังเกตได้ว่าวิธีการวิเคราะห์ในกรณีที่มีแหล่งจ่ายแรงดันขึ้นกับตัวแปรอื่นจะเหมือนกับกรณีของแหล่งจ่ายแรงดันอิสระที่ได้สรุปไว้ในตารางที่ 4.1 แต่อย่างไรก็ตามจะต้องระมัดระวังในเรื่องเงื่อนไขที่มากับแหล่งจ่ายแรงดันขึ้นกับตัวแปรอื่นเหล่านั้น

ตัวอย่าง 4.2 พิจารณาวงจรในรูป Ex4.2 จงหาค่าแรงดันโนด v_c และ v_d เมื่อกำหนดค่า $G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = 0.5$ S



รูปที่ Ex4.2

วิธีทำ เลือกโนดอ้างอิงเป็นโนดที่อยู่ตรงกลางเนื่องจากมีสาขาขององค์ประกอบต่อมากที่สุด แหล่งจ่ายแรงดันอิสระ 8 V กำหนดให้แรงดันโนด v_b มีค่า $v_b = 8$ V แหล่งจ่ายแรงดันควบคุมด้วยกระแสมีค่าขึ้นกับกระแส i_1 ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$i_1 = G_2(v_b - v_c) \tag{4.30}$$

เกิดโนดพิเศษขึ้นที่โนด a และ d เนื่องจากแหล่งจ่ายแรงดัน $6i_1$ ดังนั้นจึงต้องการสองสมการจากโนดพิเศษและจากโนด c

เขียน KCL ที่โนด c

$$v_c(G_2 + G_3) - G_2 v_b - G_3 v_d = 4 \tag{4.31}$$

และที่โนดพิเศษ

$$v_a(G_1 + G_4) - G_1 v_b + G_3(v_d - v_c) = 3v_c \tag{4.32}$$

เนื่องจากเราทราบค่า $v_b = 8$ V และ $v_a = v_d + 6i_1$ กำจัดตัวแปร v_a และ v_b จากสมการ (4.31) และ (4.32) จะได้

$$v_c(G_2+G_3)-8G_2-G_3v_d=4 \tag{4.33}$$

และ

$$(v_d+6i_1)(G_1+G_4)-8G_1+G_3(v_d-v_c)=3v_c \tag{4.34}$$

แทนค่า $G_1=G_2=G_3=G_4=0.5$ S และ $i_1=G_2(8-v_c)$ จะได้

$$v_c-0.5v_d=8 \tag{4.35}$$

และ

$$-6.5v_c+1.5v_d=-20 \tag{4.36}$$

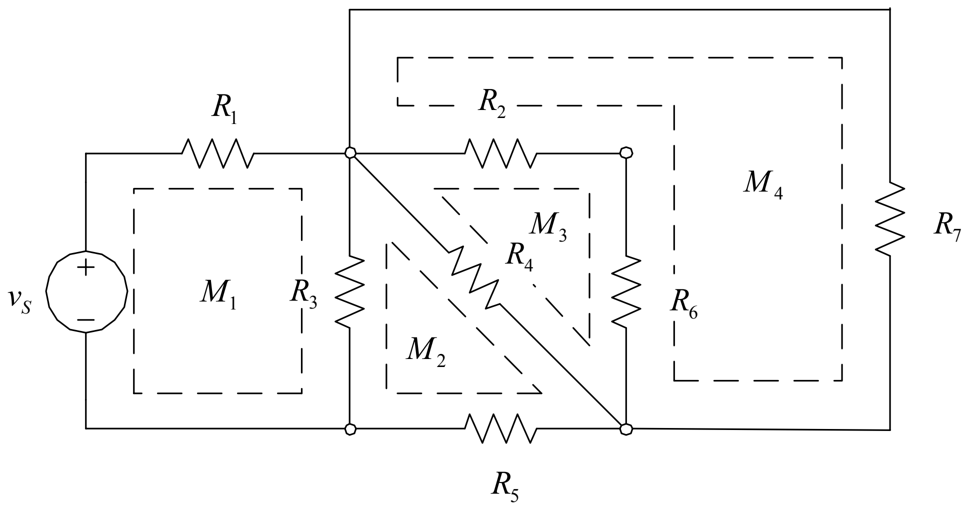
แก้สมการ (4.35) และ (4.36) หาค่า v_c และ v_d ได้

$$v_d=-18.3 \text{ V และ } v_c=-1.14 \text{ V}$$

4.2 วิธีการวิเคราะห์แบบเมช

ในหัวนี้เราจะพิจารณาการวิเคราะห์วงจรโดยอาศัยกฎแรงดันของเคอชชอฟฟ์รอบวงรอบใดๆ เส้นทางปิดหรือวงรอบเกิดจากการเริ่มต้นที่โนดหนึ่งเดินทางผ่านโนดต่างๆ ในวงจรและกลับสู่โนดที่เริ่มต้นโดยต้องไม่ผ่านโนดใดโนดหนึ่งมากกว่าหนึ่งครั้ง

เมชหรือวงมูลฐานคือกรณีพิเศษของวงรอบ กล่าวคือเป็นวงรอบที่ไม่มีวงรอบอื่นอยู่ภายในตัวมัน การวิเคราะห์แบบเมชสามารถใช้กับวงจรในระนาบเดียวเท่านั้น ซึ่งสำหรับวงจรในระนาบเดียวจะเห็นเมชปรากฏเหมือนหน้าต่าง ดังแสดงในรูปที่ 4.14 ซึ่งประกอบด้วยเมชทั้งหมดสี่เมช ใช้สัญลักษณ์ M_i แทนเมชที่ i เช่นเมช M_2 ประกอบด้วยองค์ประกอบคือ R_3 R_4 และ R_5 ส่วนตัวต้านทาน R_3 นั้นปรากฏตัวอยู่ในทั้งเมช M_1 และ M_2



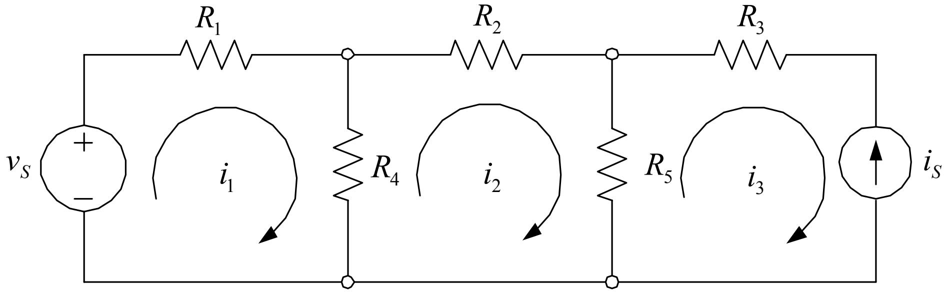
รูปที่ 4.14 วงจรซึ่งประกอบด้วยเมชสี่เมช

4.2.1 การวิเคราะห์แบบเมชสำหรับวงจรที่มีแหล่งจ่ายแรงดันอิสระ

เราให้นิยามของกระแสเมช (Mesh Current) ว่าเป็นกระแสผ่านองค์ประกอบที่ทำให้เกิดเมชนั้น นิยมใช้ทิศทางอ้างอิงกระแสเมชตามเข็มนาฬิกาดังแสดงในรูปที่ 4.15 สังเกตว่ากระแสผ่านองค์ประกอบที่ปรากฏตัวร่วมในหลายเมชคือผลรวมทางพีชคณิตของกระแสเมชในแต่ละเมช ดังตัวอย่างในวงจรในรูปที่ 4.15 จะได้ว่ากระแสผ่านตัวต้านทาน R_4 คือ

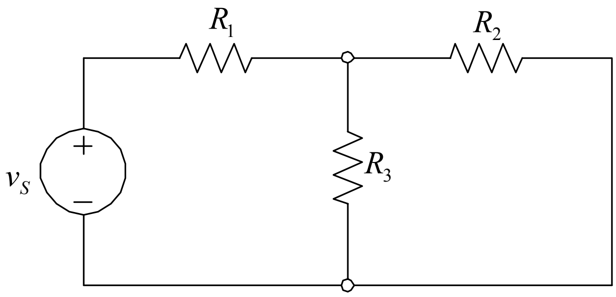
$$i_{R4} = i_1 - i_2$$

ซึ่งจะมีทิศทางไหลลงดังแสดงในรูป

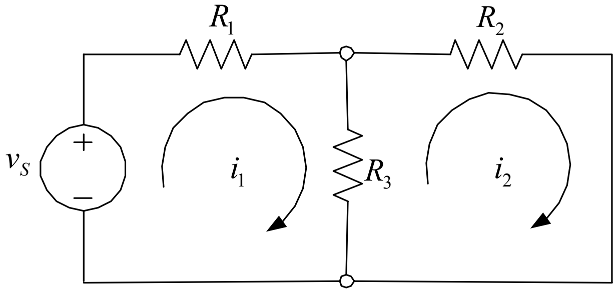


รูปที่ 4.15 วงจรซึ่งประกอบด้วยเมชสามเมช

พิจารณาวงจรที่ประกอบด้วยสองเมชในรูปที่ 4.16 เนื่องจากเมชไม่สามารถมีวงรอบอื่นในตัวมันได้ ดังนั้น เราไม่สามารถเลือกวงรอบนอกสุดคือ $v_s \to R_1 \to R_2 \to v_s$ ให้เป็นเมชหนึ่งได้ เนื่องจากวงรอบนี้มีอีกเมชหนึ่งคือ $v_s \to R_1 \to R_3 \to v_s$ อยู่ภายในตัวมัน เราจึงต้องเลือกเมชและกำหนดกระแสเมชตามรูปที่ 4.17



รูปที่ 4.16 วงจรซึ่งประกอบด้วยเมชสองเมช



รูปที่ 4.17 การกำหนดกระแสเมชสำหรับวงจรในรูปที่ 4.16

เราสามารถใช้กฎแรงดันของเคอชชอฟฟ์รอบแต่ละเมช จากวงจรในรูปที่ 4.17 จะได้

สำหรับ M_1 $$-v_s + R_1 i_1 + R_3(i_1 - i_2) = 0 \tag{4.37}$$

และสำหรับ M_2 $$R_3(i_2 - i_1) + R_2 i_2 = 0 \tag{4.38}$$

สังเกตว่าค่าแรงดันตกคร่อมตัวต้านทาน R_3 ในเมช M_1 ได้จากการใช้กฎของโอห์ม โดยที่ $v = R_3 i_{R3} = R_3(i_1 - i_2)$

แก้สมการ (4.37) และ (4.38) จะได้คำตอบคือกระแสเมช i_1 และ i_2 เขียนสมการทั้งสองใหม่ได้

$$i_1(R_1 + R_3) - i_2 R_3 = v_s$$

และ

$$-i_1 R_3 + i_2(R_3 + R_2) = 0$$

ถ้ากำหนดค่าตัวต้านทาน $R_1 = R_2 = R_3 = 1\,\Omega$ จะได้

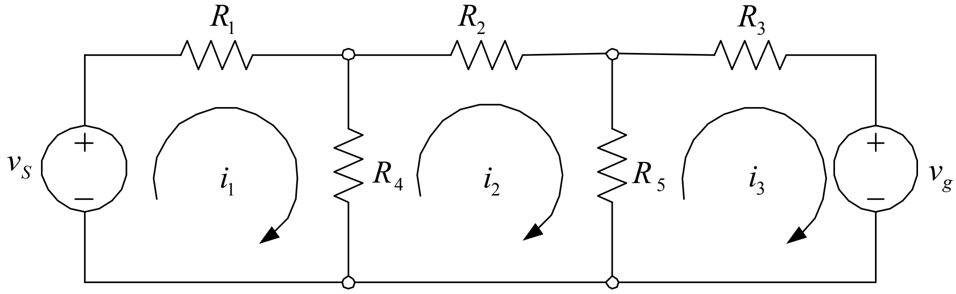
$$2i_1 - i_2 = v_s$$

และ

$$-i_1 + 2i_2 = 0$$

แก้สมการทั้งสองโดยเอา 2 คูณสมการแรกแล้วบวกเข้ากับสมการที่สองจะได้ $3i_1 = 2v_s$ หรือ $i_1 = \frac{2}{3}v_s$ แทนค่าในสมการใดสมการหนึ่งข้างบนจะได้ $i_2 = \frac{v_s}{3}$

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่าเราได้สองสมการจากสองเมชและสามารถแก้สมการหาค่าตัวแปรคือกระแสเมชทั้งสองได้ ในกรณีทั่วไป ถ้าเรามีวงจรที่มี N เมช จะต้องเขียนสมการ N สมการในรูปของตัวแปรกระแสเมชทั้ง N ตัว ซึ่งสมการที่เราได้ทั้ง N สมการนั้นจะเป็นอิสระหรือไม่ขึ้นต่อกัน เนื่องจากแต่ละสมการได้จากแต่ละเมชที่ไม่ขึ้นต่อกัน เมื่อเราได้ชุดของสมการ N สมการที่เป็นอิสระ เราจะสามารถแก้สมการหาคำตอบได้อย่างแน่นอน



รูปที่ 4.18 วงจรซึ่งประกอบด้วยเมชสามเมชและแหล่งจ่ายแรงดันอิสระ

วงจรที่ประกอบด้วยแหล่งจ่ายแรงดันอิสระและตัวต้านทานจะให้ชุดของสมการที่มีรูปแบบเฉพาะดังแสดงในตัวอย่างในรูปที่ 4.18 ซึ่งมีสามเมช ถ้าเราใช้ KVL กับเมชทั้งสามจะได้

สำหรับ M_1

$$-v_s + R_1 i_1 + R_4(i_1 - i_2) = 0$$

สำหรับ M_2

$$R_2 i_2 + R_5(i_2 - i_3) + R_4(i_2 - i_1) = 0$$

และสำหรับ M_3

$$R_5(i_3 - i_2) + R_3 i_3 + v_g = 0$$

เขียนสมการทั้งสามใหม่โดยรวบรวมสัมประสิทธิ์ของตัวแปรคือกระแสเมชไว้ด้วยกัน

สำหรับ M_1

$$(R_1 + R_4) i_1 - R_4 i_2 = v_s$$

สำหรับ M_2

$$-R_4 i_1 + (R_4 + R_2 + R_5) i_2 - R_5 i_3 = 0$$

และสำหรับ M_3

$$-R_5 i_2 + (R_3 + R_5) i_3 = -v_g$$

เราสามารถเขียนชุดสมการข้างต้นได้โดยตรง (ไม่ต้องอาศัย KVL) โดยที่สำหรับเมช M_1 ค่าสัมประสิทธิ์ ของกระแสเมช i_1 คือผลรวมของค่าความต้านทานในเมช M_1 ส่วนค่าสัมประสิทธิ์ ของกระแสเมช i_2 คือค่าลบของผลรวมของค่าความต้านทานที่ร่วมระหว่างเมช M_1 และเมช M_2 สำหรับเมชที่เหลือคือ M_2 และ M_3 ก็จะเขียนค่าสัมประสิทธิ์ได้ในทำนองเดียวกัน โดยทั่วไปกล่าวได้ว่า สำหรับกระแสเมช i_n สมการสำหรับเมช M_n ซึ่งมีแต่ตัวต้านทานและแหล่งจ่ายแรงดันอิสระจะเขียนได้ดังนี้

$$-\sum_{l=1}^{L} R_k i_l + \sum_{m=1}^{M} R_m i_n = \sum_{n=1}^{N} v_{sn} \tag{4.39}$$

โดยที่ สำหรับเมช M_n เราคูณกระแสเมช i_n ด้วยผลรวมของค่าความต้านทานรอบเมช (R_m) และบวกพจน์ของค่าลบของผลคูณของค่าความต้านทานที่ร่วมกับเมชอื่น (R_k) ที่อยู่ใกล้เคียงและกระแสเมชนั้น (i_l) จำนวน L เมช และสุดท้ายแหล่งจ่ายแรงดันอิสระจะปรากฏที่ด้านขวาของสมการเนื่องจากค่าลบของแรงดันจะปรากฏเมื่อเราเดินทางตามเข็มนาฬิการอบเมช ดังนั้นผลที่ได้ตามสมการ (4.39) นี้เกิดจากการใช้ทิศทางกระแสเมชตามเข็มนาฬิกาเท่านั้น

สมการ (4.39) สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ ได้ดังนี้

$$\mathbf{Ri} = \mathbf{v_s} \tag{4.40}$$

เมื่อ $\mathbf{R}$ คือเมตริกซ์ตัวต้านทานในกรณีนี้เป็นเมตริกซ์สมมาตรซึ่งมีค่าสมาชิกตามแกนหลัก คือ ผลรวมของความต้านทานในแต่ละเมช และมีค่าสมาชิกนอกแกนคือค่าลบของความต้านทานที่ต่อระหว่างสองเมช เมตริกซ์หรือเวกเตอร์ $\mathbf{i}$ และ $\mathbf{v_s}$ คือ

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} \text{ และ } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ \vdots \\ v_{sN} \end{bmatrix}$$

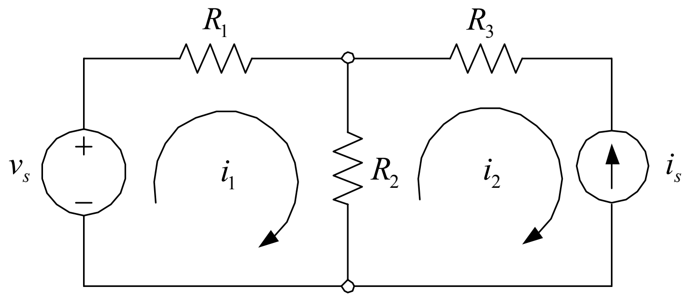
เมื่อ v_{sj} คือผลรวมของแหล่งจ่ายในเมช M_j โดยพิจารณาขั้วของแหล่งจ่ายนั้นด้วย สำหรับตัวอย่างวงจรในรูปที่ 4.18 เมตริกซตัวต้านทานคือ

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} (R_1 + R_4) & -R_4 & 0 \\ -R_4 & (R_2 + R_4 + R_5) & -R_5 \\ 0 & -R_5 & (R_3 + R_{5)} \end{bmatrix}$$

4.2.2 การวิเคราะห์แบบเมชสำหรับวงจรที่มีแหล่งจ่ายกระแสอิสระ

ในหัวข้อที่ผ่านมาเราพิจารณาแต่วงจรที่มีแหล่งจ่ายแรงดันอิสระเท่านั้น ในกรณีที่วงจรประกอบด้วยแหล่งจ่ายกระแสอิสระ ดังตัวอย่างในรูปที่ 4.19 ซึ่งจะเห็นว่ากระแสเมช i_2 ในเมชที่สอง มีค่าเท่ากับค่าลบของกระแสจากแหล่งจ่ายกระแสอิสระ i_s ตามสมการ

$$i_2 = -i_s$$



รูปที่ 4.19 วงจรซึ่งประกอบด้วยแหล่งจ่ายแรงดันและแหล่งจ่ายกระแสแบบอิสระ

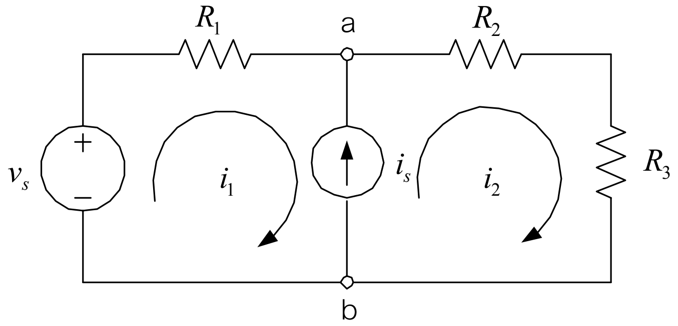
และจะเหลือค่าตัวแปรที่ต้องหาค่าเพียงตัวแปรเดียวคือตัวแปรกระแสเมช i_1 เขียน KVL รอบเมชแรกจะได้

$$(R_1 + R_2)i_1 - R_2 i_2 = v_s$$

เนื่องจาก $i_2 = -i_s$ เราจะได้ว่า

$$i_1 = \frac{v_s - R_2 i_s}{R_1 + R_2} \tag{4.41}$$

สามารถแทนค่าความต้านทานและค่าขนาดของแหล่งจ่ายเพื่อหาค่ากระแสเมชได้ตามต้องการ



รูปที่ 4.20 วงจรซึ่งประกอบด้วยแหล่งจ่ายกระแสแบบอิสระที่ต่อร่วมระหว่างเมชสองเมช

ในกรณีของวงจรในรูปที่ 4.20 แหล่งจ่ายกระแสอิสระ i_s มีค่าแรงดันตกคร่อม v_{ab} ซึ่งไม่ทราบค่า แต่เราทราบโดยเขียน KCL ที่โนด a ว่า

$$i_2 - i_1 = i_s \tag{4.42}$$

สมการเมชทั้งสองของวงจรนี้คือ

สำหรับ M_1

$$R_1 i_1 + v_{ab} = v_s \tag{4.43}$$

สำหรับ M_2

$$(R_2 + R_3) i_2 - v_{ab} = 0 \tag{4.44}$$

กำจัด v_{ab} โดยนำสมการ (4.43) บวกกับ (4.44) ได้

$$R_1 i_1 + (R_2 + R_3) i_2 = v_s$$

และเนื่องจาก $i_2 = i_s + i_1$ เราได้

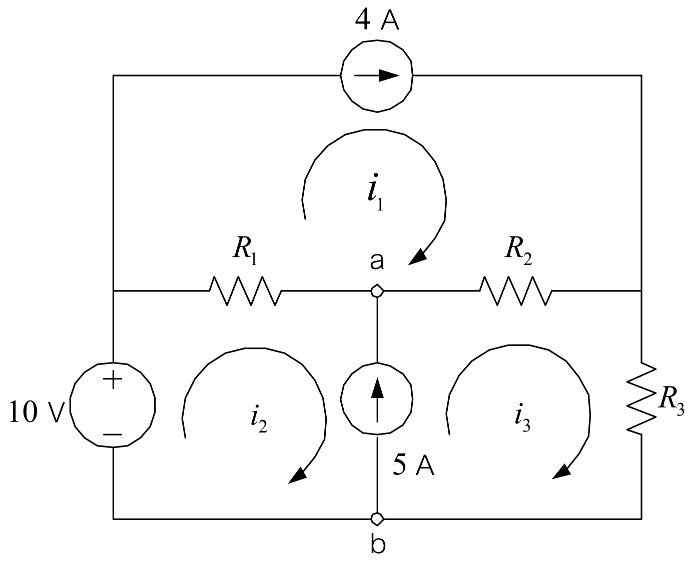
$$R_1 i_1 + (R_2 + R_3)(i_s + i_1) = v_s$$

หรือหาค่า

$$i_1 = \frac{v_s - (R_2 + R_3) i_s}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{4.45}$$

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่าเราจัดการกับแหล่งจ่ายกระแสอิสระโดยการนำความสัมพันธ์กระแสเมชและกระแสจากแหล่งจ่ายอิสระมาใช้ ถ้าแหล่งจ่ายกระแสมีผลต่อกระแสเมชค่าเดียวดังในตัวอย่างแรก เราจะได้ว่ากระแสเมชนั้นก็คือกระแสจากแหล่งจ่ายอิสระนั่นเอง (อย่าลืมคิดเครื่องหมายจากทิศทางด้วย) จากนั้นจะเขียน KVL ในเมชที่เหลือ แต่ในกรณีที่กระแสจากแหล่งจ่ายกระแสอิสระมีผลต่อกระแสเมชสองค่า ดังในตัวอย่างที่แล้ว เราจะเขียน KVL สำหรับทั้งสองเมช โดยกำหนดให้แรงดันตกคร่อมแหล่งจ่ายอิสระมีค่า v_{ab} ทำการบวกสมการทั้งสองเข้าด้วยกันจะกำจัดแรงดัน v_{ab} ที่ไม่ทราบค่าออกไป

ตัวอย่าง 4.3 พิจารณาวงจรในรูป Ex4.3 กำหนดค่า $R_1 = R_2 = 1\,\Omega$ และ $R_3 = 2\,\Omega$ จงหาค่ากระแสเมชทั้งสาม



รูปที่ Ex4.3

วิธีทำ เนื่องจากกระแสจากแหล่งจ่าย 4 A ไหลในเมชที่หนึ่งเท่านั้น ดังนั้น

$$i_1 = 4$$

สำหรับแหล่งจ่ายกระแส 5 A เราได้ความสัมพันธ์

$$i_2 - i_3 = 5 \tag{4.46}$$

เขียน KVL สำหรับเมช M_2 และ M_3 ได้

สำหรับ M_2

$$R_1(i_2 - i_1) + v_{ab} = 10 \tag{4.47}$$

สำหรับ M_3

$$R_1(i_3 - i_1) + R_3\,i_3 - v_{ab} = 0 \tag{4.48}$$

แทนค่า $i_1 = 4$ และทำการบวกสมการ (4.47) กับ (4.48) จะได้

$$R_1(i_2 - 4) + R_2(i_3 - 4) + R_3 i_3 = 10 \tag{4.49}$$

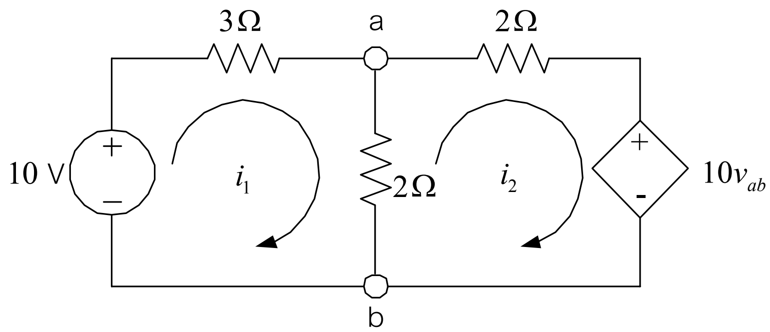
แทนค่า $i_2 = 5 + i_3$ จากสมการ (4.46) ลงในสมการ (4.49)

$$R_1(5 + i_3 - 4) + R_2(i_3 - 4) + R_3 i_3 = 10$$

แทนค่าความต้านทานลงไปจะได้คำตอบ

$$i_2 = \frac{33}{4} \text{ A และ } i_3 = \frac{13}{4} \text{ A}$$

หากวงจรที่พิจารณามีแหล่งจ่ายที่ขึ้นกับตัวแปรอื่นอยู่ด้วย จะต้องเพิ่มสมการเงื่อนไขของแต่ละแหล่งจ่ายเข้าไป ดังในตัวอย่างในรูปที่ 4.21 เขียนสมการโดย KVL ในรูปของกระแสเมชทั้งสองจะได้



รูปที่ 4.21 วงจรซึ่งประกอบด้วยแหล่งจ่ายแรงดันแบบขึ้นกับตัวแปรอื่น

สำหรับ M_1

$$5i_1 - 2i_2 = 10 \tag{4.50}$$

สำหรับ M_2

$$-2i_1 + 4i_2 = -10v_{ab} \tag{4.51}$$

แต่ $v_{ab} = 2(i_1 - i_2)$ ดังนั้นสมการ (4.51) จะเป็น

$$-2i_1 + 4i_2 = -20(i_1 - i_2)$$

หรือ

$$18i_1 - 16i_2 = 0 \tag{4.52}$$

คูณสมการ (4.50) ด้วย 8 แล้วลบออกจากสมการ (4.52) จะได้

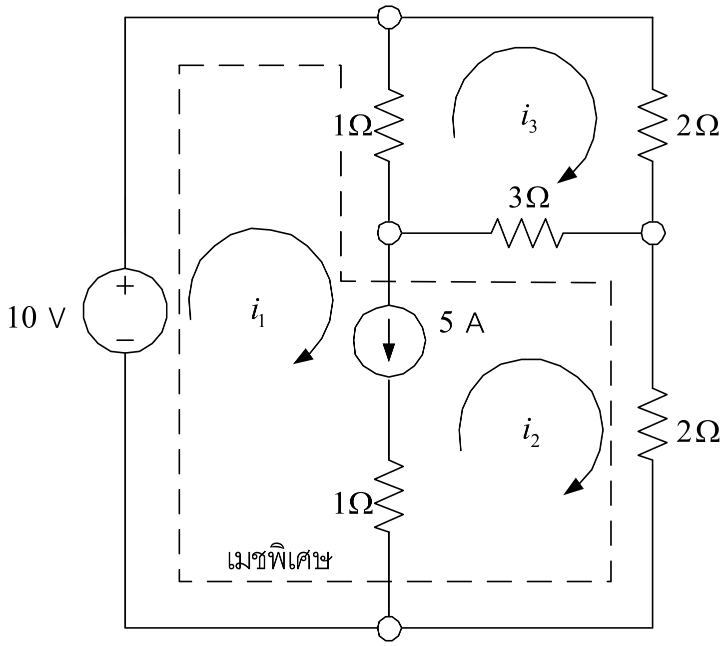
$$22i_1 = 80$$

ดังนั้นคำตอบคือ

$$i_1 = \frac{80}{22} \text{ A และ } i_2 = \frac{90}{22} \text{ A}$$

แนวคิดในการวิเคราะห์วงจรโดยวิธีเมชเมื่อมีแหล่งจ่ายกระแสต่อร่วมระหว่างสองเมชอีกแนวคิดหนึ่งที่ใช้ได้ดีก็คือการใช้เมชพิเศษหรือซุปเปอร์เมช (Super Mesh) ซึ่งก็คือเมชที่เกิดจากการที่มีเมชสองเมชที่มีแหล่งจ่ายกระแสร่วมกัน ดังแสดงในรูปที่ 4.22 ในกรณีนี้เราจะสามารถลดจำนวนเมชได้หนึ่งเมช แหล่งจ่ายกระแส 5 A นั้นต่อร่วมระหว่างเมช M_1 และ M_2 เมชพิเศษจะประกอบด้วยองค์ประกอบของเมช M_1

และ M_2 รวมกัน โดยจะเขียนเส้นทางปิดขึ้นโดยไม่ผ่านสาขาที่มีแหล่งจ่ายกระแสที่ต่อร่วมกันระหว่างสองเมชอยู่ ดังในรูปที่ 4.22 (เส้นประ)



รูปที่ 4.22 วงจรซึ่งประกอบด้วยเมชพิเศษซึ่งเป็นการรวมเมช 1 และเมช 2

เขียน KVL รอบเมชพิเศษจะได้

$$-10 + 1(i_1 - i_3) + 3(i_2 - i_3) + 2i_2 = 0$$

สำหรับเมช M_3 จะได้

$$1(i_3 - i_1) + 2i_3 + 3(i_3 - i_2) = 0$$

และสมการสุดท้ายคือสมการเงื่อนไขของแหล่งจ่ายกระแสที่ร่วมกันระหว่างเมช M_1 และ M_2

$$i_1 - i_2 = 5$$

สมการทั้งสามสามารถลดรูปได้เป็น

เมชพิเศษ

$$1i_1 + 5i_2 - 4i_3 = 10$$

เมช M_3

$$-1i_1 - 3i_2 + 6i_3 = 0$$

แหล่งจ่ายกระแส

$$1i_1 - 1i_2 = 5$$

แก้สมการทั้งสามจะได้คำตอบ $i_1 = 7.5$ A $i_2 = 2.5$ และ $i_3 = 2.5$ A

ตาราง 4.2 สรุปวิธีการในการวิเคราะห์วงจรที่มีแหล่งจ่ายกระแสประกอบอยู่ด้วย ซึ่งจะแบ่งเป็นสองกรณีตามลักษณะการต่อของแหล่งจ่ายกระแส

ตาราง 4.2 วิธีการในการวิเคราะห์วงจรที่มีแหล่งจ่ายกระแสโดยวิธีวิเคราะห์เมช

กรณี	วิธี
1. มีแหล่งจ่ายกระแสต่ออยู่ในเมชใดเมชหนึ่ง M_n เท่านั้น	กำหนดกระแสเมช ให้เท่ากับกระแสจากแหล่งจ่ายกระแส ให้คิดทิศทางด้วย
2. มีแหล่งจ่ายกระแสต่อร่วมระหว่างเมชคู่ใดเมชคู่หนึ่ง	(ก) สมมติค่าแรงดันตกคร่อมแหล่งจ่ายกระแส v_{ab} เขียน KVL สำหรับเมชทั้งสองแล้วทำการบวกสมการทั้งสองเพื่อกำจัด v_{ab} หรือ (ข) สร้างเมชพิเศษจากเมชทั้งสอง เขียนสมการจาก KVL เพียงสมการเดียว และใช้สมการเงื่อนไขความสัมพันธ์ของแหล่งจ่ายกระแสกับกระแสเมชทั้งสองอีกหนึ่งสมการ

ตัวอย่าง 4.4 จากวงจรในรูปที่ Ex4.3 จงหาค่ากระแสเมชทั้งหมด

วิธีทำ จากวงจรซึ่งประกอบด้วยแหล่งจ่ายกระแสที่ต่อร่วมระหว่างเมช M_2 และ M_3 และแหล่งจ่ายแรงดันควบคุมด้วยกระแส เราจะใช้วิธีการเขียนเมชพิเศษดังแสดงเป็นเส้นประในวงจร เขียน KVL จากเมชพิเศษและเมช M_1

จากเมช M_1

$$3i_1 - i_2 - 2i_3 = 8 \tag{4.53}$$

จากเมชพิเศษ

$$-3i_1 + 5i_2 + 2i_3 + 3i_x = 0 \tag{4.54}$$

จากวงจรพบว่า

$$i_x = i_1$$

และสมการเงื่อนไขคือ

$$i_3 - i_2 = 3$$

แทนค่าลงในสมการ (4.53) และ (4.54) จะได้