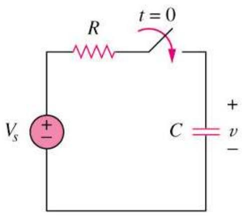
EN811100 LINEAR CIRCUIT ANALYSIS

Chapter 8
Second-Order Circuits
Feb 20, 2563

C. K. Alexander – M. N. O. Sadiku
Fundamentals of Electric Circuits, 5th Edition, The McGraw-Hill Companies 2013
J. A. Svoboda – R. C. Dorf
Introduction to Electric Circuits, 9th edition, John Wiley & Sons, Inc. 2014

Chapter 8 Second-Order Circuits

ทบทวน: ความหมายของ เวลา t=0$^-$ กับ t=0$^+$



เรื่องนี้เกี่ยวข้องกับวงจรทุกวงจรที่มี Switch อยู่ด้วย

สมมุติให้ Switch เปลี่ยนสถานะ ณ เวลา t = 0

เวลา t=0$^-$ หมายถึงเวลาก่อนที่สวิตซ์จะเปลี่ยนสถานะเพียงเล็กน้อย

เวลา t=0$^+$ หมายถึงเวลาหลังจากสวิตซ์เปลี่ยนสถานะแล้วเพียงเล็กน้อย

เรื่องนี้สำคัญเพราะแม้ว่าเวลา t=0$^-$ และเวลา t=0$^+$ จะต่างกันเพียงเล็กน้อย แต่วงจร ณ เวลา t=0$^-$ กับวงจร ณ เวลา t=0$^+$ จะแตกต่างกันมาก

3

ทบทวน: Summary from Chapter 6

Important characteristics of the basic elements.[†]

Relation	**Resistor (R)**	**Capacitor (C)**	**Inductor (L)**
ที่ DC Condition	ปกติ	Open circuit	Short circuit
คุณสมบัติ	ปกติ	แรงดันของ C ไม่สามารถเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน $v(0^+) = v(0^-)$	กระแสของ L ไม่สามารถเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน $i(0^+) = i(0^-)$

(DC Condition เกิดขึ้นเมื่อต่ออุปกรณ์นี้กับ DC Source เป็นเวลานานๆ)

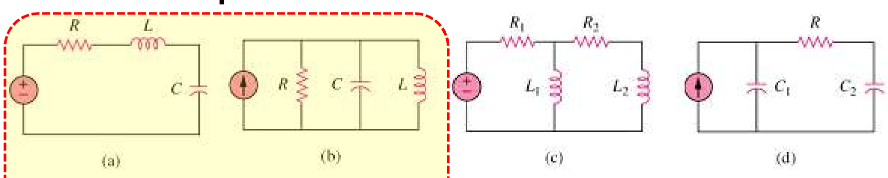
4

8.1 What is a 2^{nd} order circuit?

A second-order circuit is characterized by a second-order differential equation. It consists of resistors and the equivalent of two energy storage elements.

- วงจร Second order หมายถึงวงจรที่อธิบายโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2
- วงจรนี้ประกอบด้วย Resistor และ Energy storage element อีก 2 ตัว (L หรือ C)

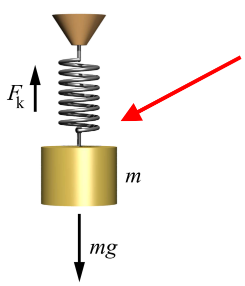
Examples of 2^{nd} order RCL circuits



RLC Series | RLC Parallel | RL T-config | RC Pi-config

ข้อสังเกตุ: Second Order Systems

- ในทางไฟฟ้า วงจรที่เป็น Second order ประกอบด้วย Energy Storage element 2 ตัว (L หรือ C ก็ได้)
- ในทางเครื่องกลก็มีระบบที่เป็น Second order เช่นกัน ตัวอย่างง่ายๆ เช่น ระบบที่ประกอบด้วยสปริงและมวลยึดติดกัน



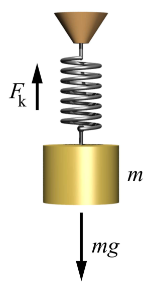
ระบบนี้มี Energy storage element 2 ตัวคือ
- สปริง (เก็บสะสมพลังงานได้ในรูปการยืดหด ของสปริง Elastic Potential Energy)
- มวล (เก็บสะสมพลังงานได้ในรูปพลังงานจลน์ Kinetic energy และพลังงานศักย์ Potential Energy)
- นอกจากนี้ระบบยังมีแรงเสียดทานในอากาศ

ตำแหน่งของมวลสามารถอธิบายได้โดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2

ข้อสังเกตุ: Second Order Systems

❖ พลังงานที่สะสมในสปริง, พลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของมวล สามารถแลกเปลี่ยนกลับไปกลับมาได้

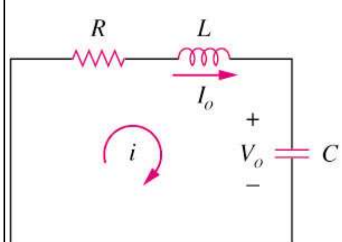
❖ ถ้าเราดึงมวลลงแล้วปล่อยมือ มวลจะเคลื่อนแบบ แกว่งขึ้น แกว่งลง (Oscillate) และจะค่อยๆแกว่งน้อยลงๆจนหยุดเนื่องจาก ระบบนี้มีแรงเสียดทานจากอากาศ ทำให้ระบบสูญเสียพลังงานไปเรื่อยๆ



ในทางไฟฟ้า วงจร Second order ก็มีลักษณะคล้ายกัน กล่าวคือพลังงานที่สะสมใน Energy Storage element ทั้ง 2 ตัว สามารถแลกเปลี่ยนกลับไปกลับมาได้ และอาจเกิดการแกว่งของค่าแรงดันหรือกระแสได้ คล้ายกับปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในระบบสปริงกับมวล

7

8.2 Source-Free Series RLC Circuits



- The solution of the source-free series RLC circuit is called as the natural response of the circuit.
- The circuit is excited by the energy initially stored in the capacitor and inductor.

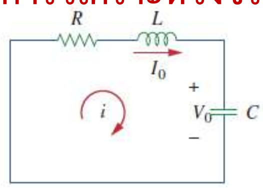
วงจรอนุกรม RLC แบบ Source free ทำงานได้โดยใช้พลังงานที่สะสมในอุปกรณ์เท่านั้น ผลตอบสนองลักษณะนี้เรียกว่า Natural response (ไม่มีแหล่งพลังงานอื่นๆมาจ่ายพลังงานให้)

ตอนเริ่มต้นในวงจรนี้จะมีพลังงานสะสมใน L คือ $W = \frac{1}{2}LI_0^2$

และจะมีพลังงานสะสมใน C คือ $W = \frac{1}{2}CV_0^2$

8

การวิเคราะห์วงจรอนุกรม RLC แบบ Source free



ใช้ KVL จะได้ $v_R + v_L + v_c = 0$

$$v_R = Ri, \quad v_L = L\frac{di}{dt}, \quad v_c = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = 0$$

เพื่อจะกำจัดตัวดำเนินการอินทีเกรท ให้ Differentiate สมการนี้ จะได้

$$R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C}i = 0$$

*** ได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2 ***

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

9

Finding Initial and Final Values

❖ จากเนื้อหาในบทที่ 7 จะพบว่า การแก้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1 เช่นสมการของวงจร RC คือ $C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$ เราจำเป็นจะต้องทราบค่าเริ่มต้นของสมการ เช่นค่า $v(0^+)$ ของ C และค่า $i(0^+)$ ของ L

❖ ในบทที่ 8 นี้ เราจะต้องแก้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2 ซึ่งค่าเริ่มต้นที่เกี่ยวข้องจะประกอบด้วย 4 ค่าได้แก่

- ค่าแรงดันเริ่มต้น $v(0^+)$ ของ C
- ค่าอนุพันธ์ของแรงดันของ C ณ เวลา $t=0^+$ ➡ $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{dv(0^+)}{dt}$
- ค่ากระแสเริ่มต้น $i(0^+)$ ของ L
- ค่าอนุพันธ์ของกระแสของ L ณ เวลา $t=0^+$ ➡ $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{di(0^+)}{dt}$

10

Finding Initial and Final Values

ตัวอย่างการหาค่าเริ่มต้น

The switch in Fig. 8.2 has been closed for a long time. It is open at $t = 0$. Find: (a) $i(0^+)$, $v(0^+)$, (b) $di(0^+)/dt$, $dv(0^+)/dt$, (c) $i(\infty)$, $v(\infty)$.

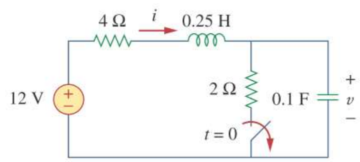


Figure 8.2

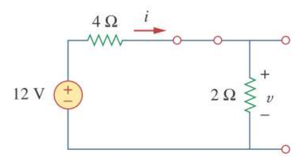
วิธีทำ 1. หาค่า $i(0^+)$ ของ L

ช่วงเวลา $t=0^-$ สวิตซ์ Close Circuit เป็นเวลานาน

C เสมือน Open circuit

L เสมือน Short circuit

วงจรจะอยู่ในสถานะดังรูป



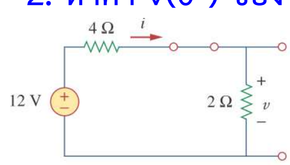
จะได้กระแส

$$i(0^-) = \frac{12}{4+2} = 2\ \text{A}$$

และ

$$i(0^+) = i(0^-) = 2\ \text{A}$$

2. หาค่า $v(0^+)$ ของ C



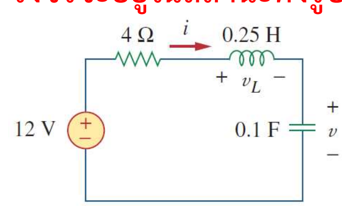
ใช้ Voltage divider จะได้

$$v(0^-) = \frac{2}{4+2} \times 12 = 4\ \text{V}$$

และ $v(0^+) = v(0^-) = 4\ \text{V}$

3. หาค่า $\dfrac{dv(0^+)}{dt}$ ของ C

ช่วงเวลา $t=0^+$ สวิตซ์เปลี่ยนสถานะเป็น Open circuit วงจรจะอยู่ในสถานะดังรูป



สูตรกระแสของ C คือ $i_C = C\dfrac{dv}{dt}$

จะได้ $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{i_C}{C}$

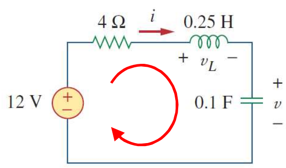
และ

$i_C(0^+) = i(0^+) = 2\ \text{A}$ จะได้ $\dfrac{dv(0^+)}{dt} = \dfrac{i_C(0^+)}{C} = \dfrac{2}{0.1} = 20$

4. หาค่า $\dfrac{di(0^+)}{dt}$ ของ L

สูตรแรงดันของ L คือ $v_L = L\dfrac{di}{dt}$

จะได้ $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{v_L}{L}$



จากวงจรนี้ ใช้ KVL ณเวลา $t=0^+$ จะได้

$$v_R(0^+) + v_L(0^+) + v_C(0^+) - 12 = 0$$

$$Ri(0^+) + L\frac{di(0^+)}{dt} + v_C(0^+) - 12 = 0$$

$$\boxed{i(0^+) = 2} \qquad \boxed{v_C(0^+) = 4}$$

จะได้

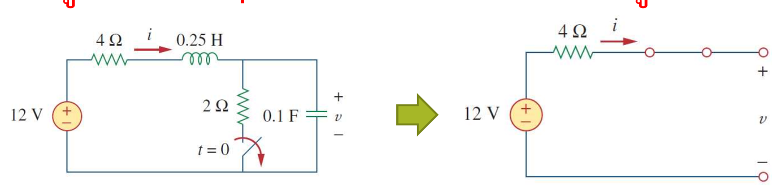
$$4 \times 2 + 0.25\frac{di(0^+)}{dt} + 4 - 12 = 0$$

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{1}{0.25}(12 - 8 - 4) = 0$$

13

5. หาค่า $i(\infty), v(\infty)$

ช่วงเวลา $t=\infty$ จะได้ว่า L อยู่ในสถานะ Short circuit และ C อยู่ในสถานะ Open circuit จะได้วงจรเป็นดังรูป

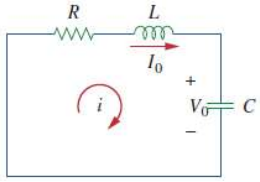


จะได้

$$i(\infty) = 0 \quad \text{และ} \quad v(\infty) = 12\ \text{V}$$

14

การวิเคราะห์วงจรอนุกรม RLC แบบ Source free



ใช้ KVL จะได้ $v_R + v_L + v_c = 0$

$$v_R = Ri,\quad v_L = L\frac{di}{dt},\quad v_c = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = 0$$

เพื่อจะกำจัดตัวดำเนินการอินทีเกรท ให้ Differentiate สมการนี้ จะได้

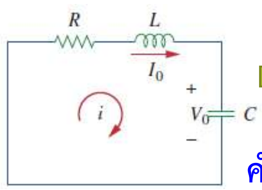
$$R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C}i = 0$$

*** ได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2 ***

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

15

การหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2



$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบนี้

จากการสังเกตุในบทที่ 7 จะพบว่าคำตอบจะอยู่ในรูป $i = Ae^{st}$

เมื่อแทนค่าลงในสมการจะได้ $\frac{d^2i}{dt^2} = As^2e^{st}$ $\frac{di}{dt} = Ase^{st}$ $i = Ae^{st}$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

$$As^2e^{st} + \frac{RA}{L}se^{st} + \frac{A}{LC}e^{st} = 0 \quad \Rightarrow \quad Ae^{st}\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right) = 0$$

$$Ae^{st}\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}\right)=0 \Rightarrow s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0$$

สมการนี้เรียกว่า

Characteristic equation

$$ax^2+bx+c=0$$

มีรากเป็น

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

จะได้รากของสมการนี้เป็น

$$s_1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

$$s_2=-\frac{R}{2L}-\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

17

Characteristic equation $s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0$

มีรากเป็น

$$s_1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}} \qquad s_2=-\frac{R}{2L}-\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

จัดรูปให้อธิบายง่ายขึ้น

$$s_1=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \qquad s_2=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

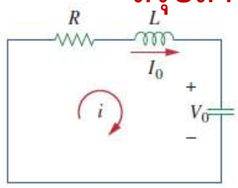
โดย $\alpha=\frac{R}{2L}$ $\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$

ถ้า $s_1 \neq s_2$ เราจะได้คำตอบของสมการ $\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{i}{LC}=0$ เป็น

$$i=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}$$

18

สรุปสำหรับ Source Free Series RLC circuit



มีสมการเชิงอนุพันธ์เป็น

$$\frac{d^2 i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{i}{LC}=0$$

หรือ

$$\frac{d^2 i}{dt^2}+2\alpha\frac{di}{dt}+\omega_0^2 i=0$$

$$\alpha=\frac{R}{2L}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

ถ้า $s_1 \neq s_2$ คำตอบของกระแสที่ไหลในวงจรจะเป็น

$$i=A_1e^{s_1 t}+A_2e^{s_2 t}$$

โดย

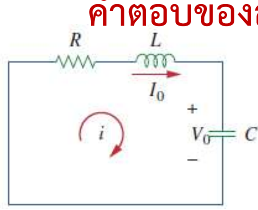
$$s_1=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \qquad s_2=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

s_1 และ s_2 เรียกว่า Natural frequency (Damp = ชื้นแฉะ)

ω_0 เรียกว่า Resonant frequency หรือ undamped natural frequency

α เรียกว่า Damping factor หรือ Neper frequency

คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ของวงจรอนุกรม RLC



$$\frac{d^2 i}{dt^2}+2\alpha\frac{di}{dt}+\omega_0^2 i=0$$

$$\alpha=\frac{R}{2L}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Damping ratio $=\zeta=\dfrac{\alpha}{\omega_0}$

คำตอบที่เป็นไปได้จะมี 3 กรณี

1. ถ้า $\alpha > \omega_0$ จะเป็น Over-damped case
2. ถ้า $\alpha = \omega_0$ จะเป็น Critically damped case
3. ถ้า $\alpha < \omega_0$ จะเป็น Under-damped case

1. Overdamped Case ($\alpha > \omega_0$)

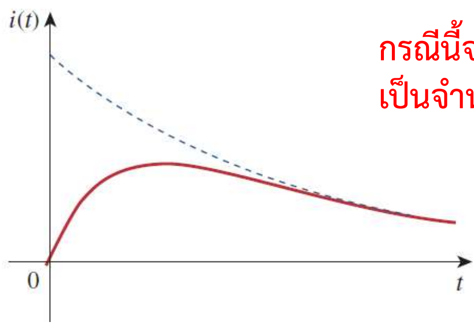
$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$$

ในกรณีนี้ $\alpha > \omega_0$ หรือ $C > \dfrac{4L}{R^2}$

จะได้

$$i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$



กรณีนี้จะได้ s_1 และ s_2
เป็นจำนวนจริงลบ

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

21

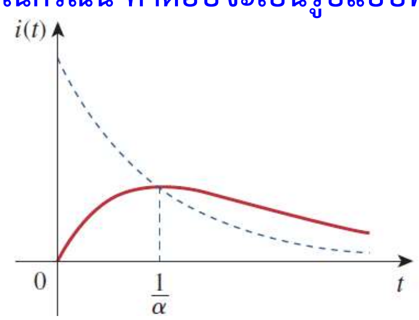
2. Critically damped Case ($\alpha = \omega_0$)

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$$

ในกรณีนี้ $\alpha = \omega_0$ หรือ $C = \dfrac{4L}{R^2}$

จะได้
$$\left.\begin{aligned} s_1 &= -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \\ s_2 &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \end{aligned}\right\} \; s_1 = s_2 = -\alpha = -\frac{R}{2L}$$

ในกรณีนี้ คำตอบจะเป็นรูปแบบพิเศษ คือ $i = \left(A_2 + A_1 t\right)e^{-\alpha t}$



กรณีนี้จะได้ $s_1 = s_2$
เป็นจำนวนจริงลบ

22

พิสูจน์คำตอบของกรณี Critically damped

$$\frac{d^2i}{dt^2}+2\alpha\frac{di}{dt}+\omega_0^2 i=0$$ เมื่อ $\alpha=\omega_0$ จะได้ $$\frac{d^2i}{dt^2}+2\alpha\frac{di}{dt}+\alpha^2 i=0$$

จัดรูปใหม่ได้

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{di}{dt}+\alpha i\right)+\alpha\left(\frac{di}{dt}+\alpha i\right)=0 \quad (1)$$

ให้

$$f=\frac{di}{dt}+\alpha i$$

แทนลงในสมการ (1) จะได้ $\frac{df}{dt}+\alpha f=0$

23

เนื่องจาก $f=\frac{di}{dt}+\alpha i$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 1

ซึ่งมีคำตอบเป็น $\frac{di}{dt}+\alpha i=A_1e^{-\alpha t}$ จะได้ $e^{\alpha t}\frac{di}{dt}+e^{\alpha t}\alpha i=A_1$

เขียนใหม่ได้เป็น $\frac{d}{dt}(e^{\alpha t}i)=A_1$

Integrate ทั้งสองด้านจะได้ $e^{\alpha t}i=A_1t+A_2$

นั่นคือ

$$i=(A_1t+A_2)e^{-\alpha t}$$

24

3. Underdamped Case ($\alpha < \omega_0$)

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$$

ในกรณีนี้ $\alpha < \omega_0$ หรือ $C < \frac{4L}{R^2}$

$s_1, s_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm j\omega_d$ โดย $j = \sqrt{-1}$ $\quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

กรณีนี้จะได้ s_1 และ s_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน

จะได้

$$i(t) = A_1 e^{-(\alpha - j\omega_d)t} + A_2 e^{-(\alpha + j\omega_d)t} \longleftrightarrow i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$= e^{-\alpha t}(A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t})$$

ใช้ Euler formula

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta, \qquad e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

จะได้

$$i(t) = e^{-\alpha t}[A_1(\cos\omega_d t + j\sin\omega_d t) + A_2(\cos\omega_d t - j\sin\omega_d t)]$$

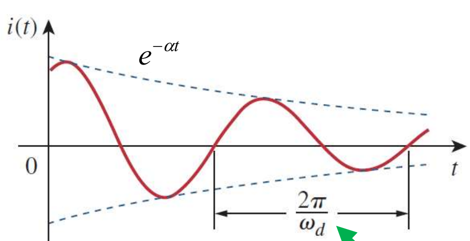
$$= e^{-\alpha t}[(A_1 + A_2)\cos\omega_d t + j(A_1 - A_2)\sin\omega_d t]$$

3. Underdamped Case ($\alpha < \omega_0$)

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$$ โดย $\alpha < \omega_0$

จะได้ $$i(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega_d t + B_2 \sin\omega_d t)$$

โดย $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$



ω_d เรียกว่า Damping frequency หรือ Damped natural frequency

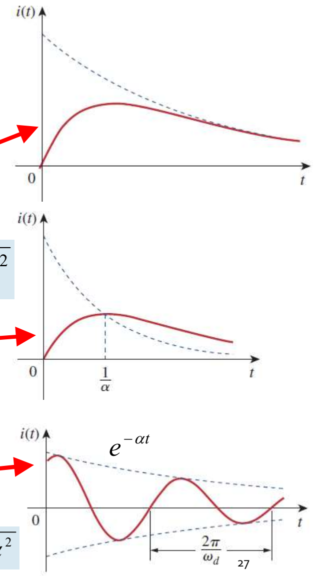
ความถี่ของการสั่น เท่ากับ ω_d

26

8.2 Source-Free Series RLC Circuits

สรุป สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 \qquad \alpha = \frac{R}{2L} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$



1. If $\alpha > \omega_0$ over-damped case

$$i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad \text{where} \quad s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

2. If $\alpha = \omega_0$ critical damped case

$$i = (A_2 + A_1 t) e^{-\alpha t} \quad \text{where} \quad s_{1,2} = -\alpha$$

3. If $\alpha < \omega_0$ under-damped case

$$i(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) \quad \text{where} \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

27

ทำไมใช้คำว่า Damp ที่แปลว่า เปียกแฉะ

ตอบ: ที่ใช้คำว่า Damp นี้ก็เพราะว่าคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 นี้ ตรงกับ การเคลื่อนที่ของวัตถุแบบแกว่งในของเหลว

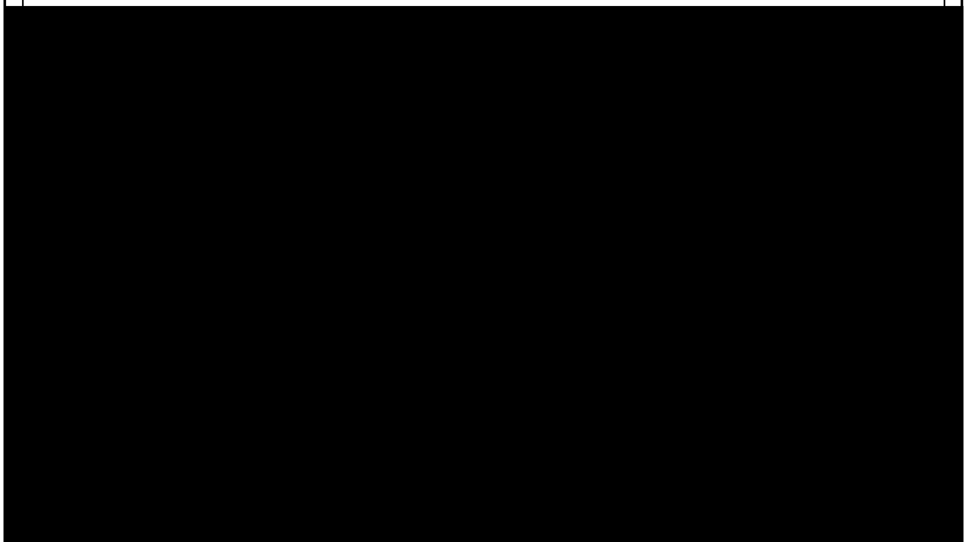
❖ Overdamped = ของเหลวหนืดมาก เมื่อเราแกว่งลูกตุ้มผ่านของเหลวนี้ ลูกตุ้มเกือบจะหยุดทันทีที่ลูกตุ้มจมในของเหลว (เหมือนโช๊ครถยนต์ที่แข็งมากๆ เมื่อเหยียบเบรก รถจะหยุดเกือบทันที)

❖ Critically damped = ของเหลวหนืดปานกลาง เมื่อเราแกว่งลูกตุ้มผ่านของเหลวนี้ ลูกตุ้มจะหยุดแบบเนิบๆเมื่อลูกตุ้มจมในของเหลว (เหมือนโช๊ครถยนต์ที่พอดีๆ เมื่อเหยียบเบรก รถจะหยุดแบบเนิบๆ)

❖ Underdamped = ของเหลวหนืดน้อย เมื่อเราแกว่งลูกตุ้มผ่านของเหลวนี้ ลูกตุ้มจะแกว่งไปแกว่งมาและจะหยุดในที่สุด แต่ใช้เวลามากที่สุดในการหยุด (เหมือนโช๊ครถยนต์ที่อ่อนมากๆ เมื่อเหยียบเบรก รถจะหยุดช้าและแกว่งขึ้นแกว่งลง)

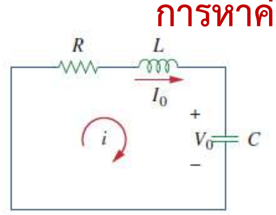
28

ตัวอย่าง Damped Oscillatory Motion



29

การหาค่าเริ่มต้นของวงจรอนุกรม RLC



$\Rightarrow$ $$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

ค่าเริ่มต้น ณ เวลา *t*=0 ได้แก่ V_0 ของ C และ I_0 ของ L และค่า $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}$

จาก KVL ณ เวลา t=0

$$v_R(0) + v_L(0) + v_C(0) = 0$$

จะได้

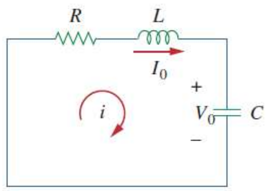
$$RI_0 + L\frac{di(0)}{dt} + V_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{di(0)}{dt} = -\frac{1}{L}\left(V_0 + RI_0\right)$$

*** ค่าเหล่านี้จะใช้หาค่า A_1 และ A_2 ต่อไป ***

30

Example 8.3

In Fig. 8.8, $R = 40\ \Omega$, $L = 4$ H, and $C = 1/4$ F. Calculate the characteristic roots of the circuit. Is the natural response overdamped, underdamped, or critically damped?



$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{40}{2(4)} = 5,$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4 \times \frac{1}{4}}} = 1$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -5 \pm \sqrt{25 - 1}$$

$$s_1 = -0.101, \qquad s_2 = -9.899$$

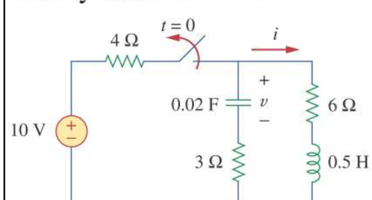
กรณีนี้ได้ s_1 และ s_2 เป็นจำนวนจริงลบ

เนื่องจาก $\alpha > \omega_0$ กรณีนี้จะเป็น Overdamped

31

Example 8.4

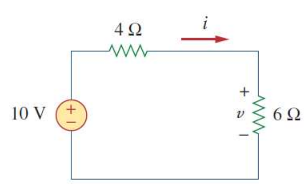
Find $i(t)$ in the circuit of Fig. 8.10. Assume that the circuit has reached steady state at $t = 0^-$.



วิธีทำ 1. หาค่าเริ่มต้น ตอนที่ $t<0$

C เสมือน Open circuit และ

L เสมือน Short circuit จะได้วงจร

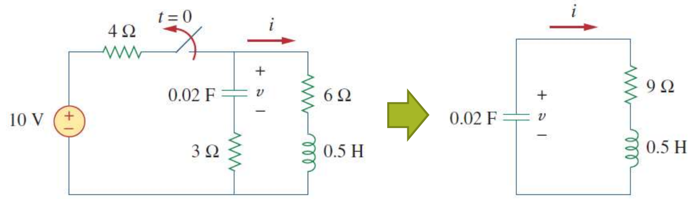


จะได้

$$i(0) = \frac{10}{4 + 6} = 1\ \text{A}, \qquad v(0) = 6i(0) = 6\ \text{V}$$

32

ต่อมา เมื่อ *t*>0 วงจรจะเป็น



จะได้

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{9}{2(\frac{1}{2})} = 9, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{50}}} = 10$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -9 \pm \sqrt{81 - 100}$$

$$s_{1,2} = -9 \pm j4.359$$

Hence, the response is underdamped ($\alpha < \omega$); that is,

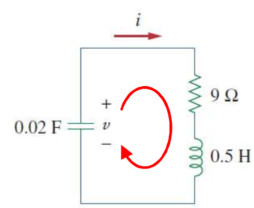
$$i(t) = e^{-9t}(A_1 \cos 4.359t + A_2 \sin 4.359t)$$

ขั้นตอนต่อไปคือการหาค่า A_1 และ A_2

33

ตอนนี้เรามีค่าเริ่มต้นคือ $\quad i(0) = 1\text{ A} \qquad v(0) = 6\text{ V}$

จาก KVL ที่เวลา *t*=0



$$v_R(0) + v_L(0) + v_C(0) = 0$$

$$Ri(0) + L\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} + v(0) = 0$$

$$9 \times 1 + 0.5\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} - 6 = 0$$

จะได้

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \frac{(-9 \times 1 + 6)}{0.5} = -6\text{ A/s}$$

34

ได้ค่าเริ่มต้นคือ $v(0) = 6\text{ V}$ $\quad i(0) = 1\text{ A}$ $\quad \left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=0} = -6\text{ A/s}$

หาค่า A_1

จากสูตร $i(t) = e^{-9t}\left(A_1 \cos 4.359t + A_2 \sin 4.359t\right)$

แทนค่า t=0

จะได้

$$i(0) = e^{-9(0)}\left(A_1 \cos(4.359\times 0) + A_2 \sin(4.359\times 0)\right) = \boxed{A_1}$$

จากค่าเริ่มต้น $i(0) = \boxed{1\text{ A}}$ เป็นค่า i(0) ทั้งคู่

จะได้ $i(0) = A_1 = 1\text{ A}$ ได้ $A_1 = 1\text{ A}$

35

หาค่า A_2 $\quad i(t) = e^{-9t}\left(A_1 \cos 4.359t + A_2 \sin 4.359t\right)$

Differentiate

$$\frac{di}{dt} = -9e^{-9t}(A_1 \cos 4.359t + A_2 \sin 4.359t) + e^{-9t}(4.359)(-A_1 \sin 4.359t + A_2 \cos 4.359t)$$

$\left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=0} = -6\text{ A/s}$ $\quad A_1 = 1$ $\quad$ แทนค่า t=0

$$-6 = -9(A_1 + 0) + 4.359(-0 + A_2)$$

$$-6 = -9 + 4.359A_2 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 0.6882$$

จะได้คำตอบเป็น

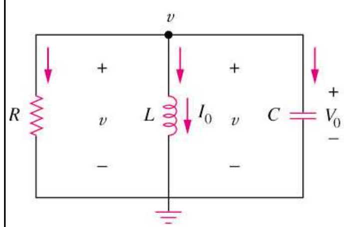
$$i(t) = e^{-9t}(\cos 4.359t + 0.6882 \sin 4.359t)\text{ A}$$

36

8.3 Source-Free Parallel RLC Circuits

การวิเคราะห์วงจรขนาน RLC แบบ Source free

วงจรนี้ทำงานได้จากพลังงานที่สะสมใน L และ C



ให้ค่าเริ่มต้นของวงจรเป็น

$i(0) = I_0 = \frac{1}{L}\int_{\infty}^{0} v(t)dt$ และ $v(0) = V_0$

ใช้ KCL ที่ Node บน

$$i_R + i_L + i_C = 0 \;\Rightarrow\; \frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v dt + C\frac{dv}{dt} = 0$$

Taking the derivative with respect to *t* and dividing by C

ได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = 0$$

8.3 Source-Free Parallel RLC Circuits

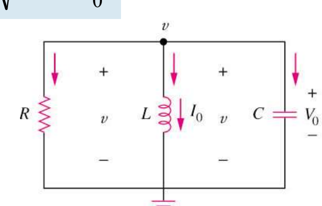
สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2 ในรูปแบบนี้

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\alpha\frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = 0$$ โดย $\alpha = \frac{1}{2RC}$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

มีคำตอบที่เป็นไปได้ของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ 3 รูปแบบ

1. If $\alpha > \omega_0$ over-damped case

$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$ where $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$



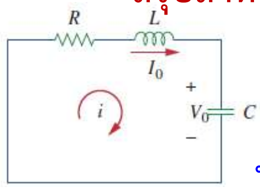
2. If $\alpha = \omega_0$ critical damped case

$v(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t}$ where $s_{1,2} = -\alpha$

3. If $\alpha < \omega_0$ under-damped case

$v(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$ where $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

สรุปสำหรับ Source Free Series RLC circuit



มีสมการเชิงอนุพันธ์เป็น

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{i}{LC}=0$$

หรือ

$$\frac{d^2i}{dt^2}+2\alpha\frac{di}{dt}+\omega_0^2 i=0$$

$$\alpha=\frac{R}{2L}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

ถ้า $s_1 \neq s_2$ คำตอบของกระแสที่ไหลในวงจรจะเป็น

$$i = A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}$$

โดย

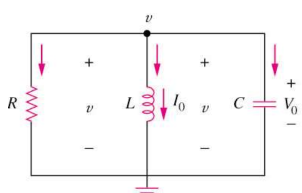
$$s_1=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \qquad s_2=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

s_1 และ s_2 เรียกว่า Natural frequency (Damp = ชื้นแฉะ)

ω_0 เรียกว่า Resonant frequency หรือ undamped natural frequency

α เรียกว่า Damping factor หรือ Neper frequency

การหาค่าเริ่มต้นของวงจรขนาน RLC



$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{dv}{dt}+\frac{1}{LC}v=0$$

ค่าเริ่มต้น ณ เวลา *t*=0 ได้แก่ V_0 ของ C และ I_0 ของ L และค่า $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0}$

KCL ที่ Node บน ณ เวลา *t*=0

$$i_R(0)+i_L(0)+i_C(0)=0$$

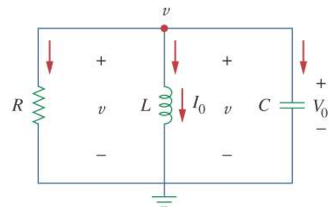
จะได้

$$\frac{V_0}{R}+I_0+C\frac{dv(0)}{dt}=0 \Rightarrow \frac{dv(0)}{dt}=-\frac{1}{RC}(V_0+RI_0)$$

*** ค่าเหล่านี้จะใช้หาค่า A_1 และ A_2 ต่อไป ***

Example 8.5

In the parallel circuit of Fig. 8.13, find $v(t)$ for $t > 0$, assuming $v(0) = 5$ V, $i(0) = 0$, $L = 1$ H, and $C = 10$ mF. Consider these cases: $R = 1.923\ \Omega$, $R = 5\ \Omega$, and $R = 6.25\ \Omega$.



กรณีที่ (1) R = 1.923 Ω

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2\times 1.923\times 10\times 10^{-3}} = 26$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{1\times 10\times 10^{-3}}} = 10$$

จะได้ว่า $\alpha > \omega_0$ กรณีนี้ จึงเป็น Over-damped

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^{\ 2}} = -26 \pm \sqrt{26^2 - 10^2} = -2,\ -50$$

จะได้ $v(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-50t}$

ขั้นตอนต่อไป หาค่า A_1, A_2

41

จากสมการ $v(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-50t}$

แทนค่า t=0 ได้ $v(0) = A_1 e^{-2(0)} + A_2 e^{-50(0)} = A_1 + A_2$

แต่โจทย์กำหนดให้ $v(0) = 5$ เท่ากัน จะได้ $A_1 + A_2 = 5$

หาค่า

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{1}{RC}(V_0 + RI_0) = -\frac{1}{1.923\times 0.01}(5 + 1.923\times 0) = -260$$

จากสมการ

$v(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-50t}$ Diff $\dfrac{dv(t)}{dt} = -2A_1 e^{-2t} - 50A_2 e^{-50t}$

เท่ากัน

แทนค่า t=0 จะได้

$$\frac{dv(0)}{dt} = -2A_1 e^{-2(0)} - 50A_2 e^{-50(0)} = -2A_1 - 50A_2$$

จะได้ $-2A_1 - 50A_2 = -260$

42

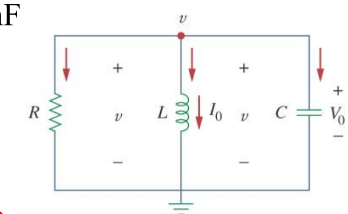
แก้สมการ

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 5 \\ -2A_1 - 50A_2 &= -260 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A_1 &= -0.2083 \\ A_2 &= 5.208 \end{aligned}$$

จะได้

$$v(t) = -0.2083e^{-2t} + 5.208e^{-50t}$$

กรณีที่ (2) R = 5 Ω $\mathrm{L = 1H} \quad \mathrm{C = 10mF}$



$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2\times5\times10\times10^{-3}} = 10 \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{1\times10\times10^{-3}}} = 10 \end{aligned}\right\}$$

จะได้ว่า $\alpha = \omega_0$ กรณีนี้
จึงเป็น Critically damped

จะได้ $s_{1,2} = -\alpha = -10$

$$v(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-10t}$$

ขั้นตอนต่อไปหาค่า A_1, A_2

43

จากสมการ $v(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-10t}$

แทนค่า t=0 ได้ $v(0) = (A_1 + A_2 \times 0)e^{-10\times0} = A_1$

แต่โจทย์กำหนดให้ $v(0) = 5$ เท่ากัน จะได้ $A_1 = 5$

หาค่า

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{1}{RC}(V_0 + RI_0) = -\frac{1}{5\times0.01}(5+5\times0) = \boxed{-100}$$

จากสมการ

$$v(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-10t} \Rightarrow \frac{dv(t)}{dt} = -10A_1e^{-10t} - 10A_2te^{-10t} + A_2e^{-10t}$$

เท่ากัน

แทนค่า t=0 และ A_1=5 จะได้

$$\frac{dv(0)}{dt} = -10\times5\times e^{-10(0)} - 10A_2\times0\times e^{-10(0)} + A_2e^{-10\times0} = \boxed{-50 + A_2}$$

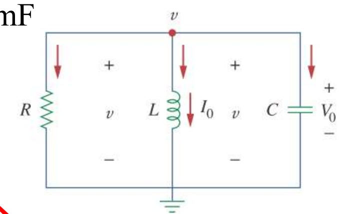
จะได้ $-50 + A_2 = -100 \Rightarrow A_2 = -50$

44

จะได้

$$v(t) = (5 - 50t)e^{-10t}$$

กรณีที่ (3) R = 6.25 Ω $L = 1\text{H} \quad C = 10\text{mF}$



$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2\times 6.25\times 10\times 10^{-3}} = 8$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{1\times 10\times 10^{-3}}} = 10$$

จะได้ว่า $\alpha < \omega_0$ กรณีนี้

จึงเป็น Under-damped

จะได้

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -8 \pm j6$$

$$v(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$v(t) = e^{-8t}(A_1 \cos 6t + A_2 \sin 6t)$$

ขั้นตอนต่อไปหาค่า A_1, A_2

45

จากสมการ $v(t) = e^{-8t}(A_1 \cos 6t + A_2 \sin 6t)$

แทนค่า *t*=0 ได้ $v(0) = e^{-0\times t}\left(A_1 \cos(0) + A_2 \sin(0)\right) = A_1$

แต่โจทย์กำหนดให้ $v(0) = 5$ เท่ากัน จะได้ $A_1 = 5$

จากสมการ $v(t) = e^{-8t}(A_1 \cos 6t + A_2 \sin 6t)$ จะได้

$$\frac{dv(t)}{dt} = -8e^{-8t}(A_1 \cos 6t + A_2 \sin 6t) + 6e^{-8t}(-A_1 \sin 6t + A_2 \cos 6t)$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -8e^{-8(0)}(A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0) + 6e^{-8(0)}(-A_1 \sin 0 + A_2 \cos 0)$$

$$= \boxed{-8A_1 + 6A_2}$$

เท่ากัน จะได้ $-8A_1 + 6A_2 = -80$

และ

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{1}{RC}(V_0 + RI_0) = -\frac{1}{6.25\times 0.01}(5 + 6.25\times 0) = \boxed{-80}$$

46

$$A_1 = 5$$
$$-8A_1 + 6A_2 = -80$$
$$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \quad A_1 = 5, \quad A_2 = -6.667$$

จะได้

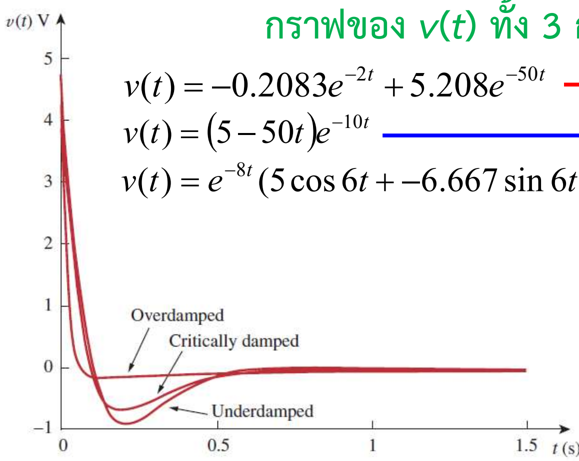
$$v(t) = e^{-8t}(5\cos 6t + 6.667\sin 6t)$$

กราฟของ $v(t)$ ทั้ง 3 กรณี

$$v(t) = -0.2083e^{-2t} + 5.208e^{-50t} \longrightarrow \text{Over-damped}$$

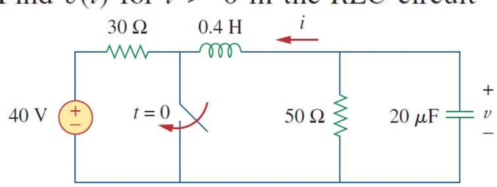
$$v(t) = (5 - 50t)e^{-10t} \longrightarrow \text{Critically damped}$$

$$v(t) = e^{-8t}(5\cos 6t + -6.667\sin 6t) \longrightarrow \text{Under-damped}$$

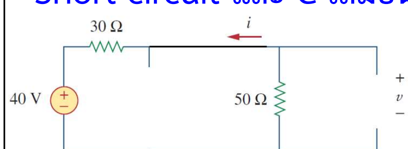


47

Example 8.6 Find $v(t)$ for $t > 0$ in the RLC circuit



วิธีทำ 1. หาค่าเริ่มต้น ตอน t<0 สวิตซ์ Open circuit, L เสมือน Short circuit และ C เสมือน Open circuit



ใช้ Voltage divider จะได้

$$v(0) = \frac{50}{30+50} \times 40 = 25\text{ V}$$

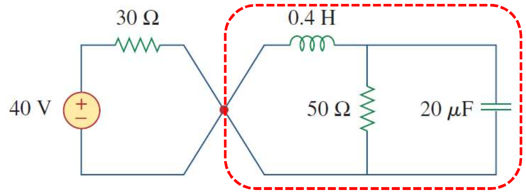
และ

$$i(0) = -\frac{40}{30+50} = -0.5\text{ A}$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{v(0) + Ri(0)}{RC} = -\frac{25 - 50 \times 0.5}{50 \times 20 \times 10^{-6}} = 0$$

48

ต่อมา เมื่อ t=0 สวิตซ์ Close circuit วงจรจะกลายเป็น



วงจร RLC แบบขนาน

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 50 \times 20 \times 10^{-6}} = 500$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.4 \times 20 \times 10^{-6}}} = 354$$

$\alpha > \omega_0$ Over-damped

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$
$$= -500 \pm \sqrt{250{,}000 - 124{,}997.6} = -500 \pm 354$$

จะได้

$s_1 = -854, s_2 = -146$ $\Rightarrow$ $v(t) = A_1 e^{-854t} + A_2 e^{-146t}$

49

หาค่า A_1, A_2

$$v(t) = A_1 e^{-854t} + A_2 e^{-146t}$$

ค่าเริ่มต้น

$$v(0) = A_1 e^{-854(0)} + A_2 e^{-146(0)} = A_1 + A_2$$ เท่ากับ $v(0) = 25\text{ V}$

จะได้ $A_1 + A_2 = 25$

แก้สมการหาค่า A_1, A_2

$$\frac{dv(t)}{dt} = -854 A_1 e^{-854t} - 146 A_2 e^{-146t}$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -854 A_1 e^{-854(0)} - 146 A_2 e^{-146(0)}$$

$$= -854 A_1 - 146 A_2$$ เท่ากับ ค่าเริ่มต้น $\frac{dv(0)}{dt} = 0$

จะได้ $-854 A_1 - 146 A_2 = 0$

50

แก้สมการ

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 25 \\ 854A_1 + 146A_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A_1 &= -5.156 \\ A_2 &= 30.16 \end{aligned}$$

จะได้

$$v(t) = -5.156e^{-854t} + 30.16e^{-146t}$$

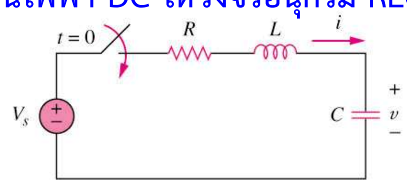
51

8.4 Step-Response Series RLC Circuits

ผลตอบสนองของวงจรอนุกรม RLC ที่มีต่อ DC Step Source

(เกิดขึ้นเมื่อเราสับสวิตซ์จ่ายแรงดันไฟฟ้า DC ให้วงจรอนุกรม RLC)

- The step response is obtained by the sudden application of a dc source.



The 2nd order of expression

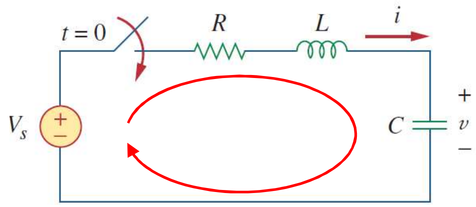
$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = \frac{V_s}{LC}$$

The above equation has the same form as the equation for source-free series RLC circuit.

- The same coefficients (important in determining the frequency parameters).
- Different circuit variable in the equation.

52

ที่มา



ใช้ KVL ที่เวลา $t > 0$

$$v_R + v_L + v_C - V_s = 0$$

ให้ $v_C = v$

จะได้ $Ri + L\dfrac{di}{dt} + v = V_s$

เนื่องจากกระแสที่ไหลผ่าน C คือ $i = C\dfrac{dv}{dt}$ จะได้ $\dfrac{di}{dt} = C\dfrac{d^2v}{dt^2}$

จะได้ $RC\dfrac{dv}{dt} + LC\dfrac{d^2v}{dt^2} + v = V_s$

จัดรูปใหม่จะได้ $$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = \frac{V_s}{LC}$$

53

8.4 Step-Response Series RLC Circuits

The solution of the equation should have two components: the transient response $v_t(t)$ & the steady-state response $v_{ss}(t)$

คำตอบของสมการนี้มี 2 ส่วนคือ

$$v(t) = v_t(t) + v_{ss}(t)$$

*** หมายเหตุ v ในที่นี้ คือ v ที่ตกคร่อม C ***

The transient response is the same as that for source-free case

Transient response เหมือนกับคำตอบของกรณี Source-free

$v_t(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$ (over-damped)

$v_t(t) = (A_1 + A_2t)e^{-\alpha t}$ (critically damped)

$v_t(t) = e^{-\alpha t}(A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t)$ (under-damped)

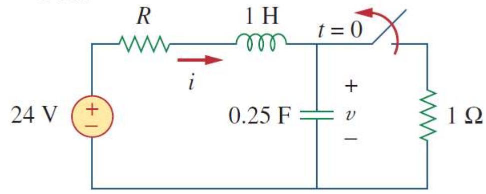
The steady-state response is the final value of $v(t)$. $v_{ss}(t) = v(\infty)$

The values of A_1 and A_2 are obtained from the initial conditions: $v(0)$ and $dv(0)/dt$

54

Example 8.7

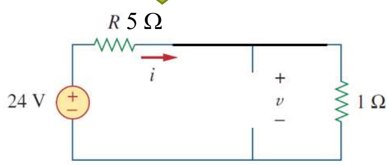
For the circuit in Fig. 8.19, find $v(t)$ and $i(t)$ for $t > 0$. Consider these cases: $R = 5\ \Omega$, $R = 4\ \Omega$, and $R = 1\ \Omega$.



กรณีที่ (1) R = 5 Ω

หาค่าเริ่มต้นเมื่อ $t<0$

สวิตซ์ Close และ L เสมือน Short circuit และ C เสมือน Open circuit



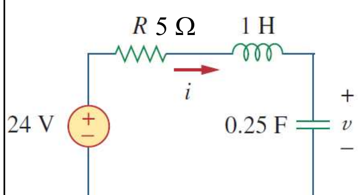
จะได้ $i(0) = \dfrac{24}{5+1} = 4\text{ A}$

ใช้ Voltage divider จะได้

$$v(0) = \frac{1}{5+1} \times 24 = 4\text{ V}$$

55

เมื่อ $t \geq 0$ สวิตซ์ Open circuit จะได้วงจรเป็นวงจรอนุกรม RLC



จะได้

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{R}{2L} = \frac{5}{2 \times 1} = 2.5 \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \times 0.25}} = 2 \end{aligned}\right\} \alpha > \omega_0$$

Over-damped

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1, -4$$

Transient response

จะได้

$$v(t) = v_{ss} + \overbrace{(A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t})}^{\text{Transient response}}$$

Steady state response หาจาก v(∞) ➡ ที่เวลา $t=\infty$, C ถูกชาร์จจนเต็ม เสมือนเป็น Open circuit ➡ $v_{ss} = v(\infty) = 24\text{ V}$

56

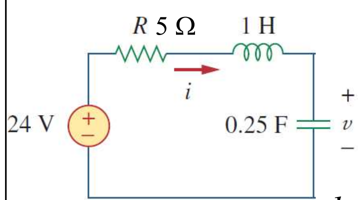
หาค่า A_1, A_2

$$v(t) = 24 + A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t}$$

แทนค่า t=0 $v(0) = 24 + A_1 e^{-(0)} + A_2 e^{-4(0)} = \boxed{24 + A_1 + A_2}$

ค่าเริ่มต้น $v(0) = \boxed{4\text{ V}}$ เท่ากัน $\Rightarrow$ $A_1 + A_2 = -20$

ค่าเริ่มต้น $i(0) = 4\text{ A} = C\frac{dv(0)}{dt} \Rightarrow \frac{dv(0)}{dt} = \frac{4}{C} = \frac{4}{0.25} = \boxed{16}$



$$v(t) = 24 + A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -A_1 e^{-t} - 4A_2 e^{-4t}$$

เท่ากัน

$$\frac{dv(0)}{dt} = -A_1 e^{-0} - 4A_2 e^{-4(0)} = \boxed{-A_1 - 4A_2}$$

จะได้ $A_1 + 4A_2 = -16$

57

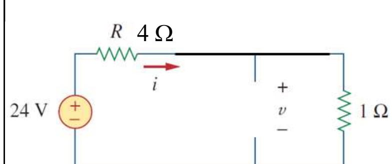
แก้สมการ

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 &= -20 \\ A_1 + 4A_2 &= -16 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A_1 &= -64/3 \\ A_2 &= 4/3 \end{aligned}$$

จะได้

$$v(t) = 24 - \frac{64}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{-4t} \qquad i(t) = C\frac{dv}{dt} = \frac{16}{3}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{-4t}$$

กรณีที่ (2) R = 4 Ω หาค่าเริ่มต้นเมื่อ t<0 สวิตซ์ Close,
L เสมือน Short circuit และ C เสมือน Open circuit



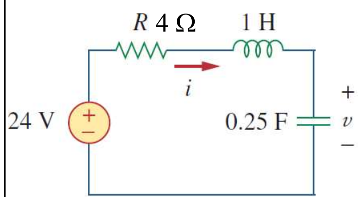
จะได้ $i(0) = \frac{24}{4+1} = 4.8\text{ A}$

ใช้ Voltage divider จะได้

$$v(0) = \frac{1}{4+1} \times 24 = 4.8\text{ V}$$

58

เมื่อ $t \geq 0$ สวิตซ์ Open circuit จะได้วงจรเป็นวงจรอนุกรม RLC



$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \frac{R}{2L} = \frac{4}{2\times 1} = 2\\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.25}} = 2\end{aligned}\right\} \alpha = \omega_0$$

Critically damped

Transient response

จะได้

$$v(t) = v_{ss} + \underbrace{(A_1 + A_2 t)e^{-2t}}$$

Steady state response หาจาก v(∞) ➡ ที่เวลา t=∞, C ถูกชาร์จจนเต็ม เสมือนเป็น Open circuit ➡ $v_{ss} = v(\infty) = 24\ \text{V}$

59

หาค่า A_1, A_2

$$v(t) = 24 + (A_1 + A_2 t)e^{-2t}$$

แทนค่า t=0 $v(0) = 24 + (A_1 + A_2 \times 0)e^{-2(0)} = \boxed{24 + A_1}$

ค่าเริ่มต้น $v(0) = \boxed{4.8\ \text{V}}$ เท่ากัน

$$A_1 + 24 = 4.8$$

$$A_1 = -19.2$$

จาก $i(0) = 4.8\ \text{A} = C\dfrac{dv(0)}{dt}$ จะได้ $\dfrac{dv(0)}{dt} = \dfrac{4.8}{C} = \dfrac{4.8}{0.25} = \boxed{19.2}$

$$v(t) = 24 + (A_1 + A_2 t)e^{-2t}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -2(A_1 + A_2 t)e^{-2t} + A_2 e^{-2t}$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -2(A_1 + A_2 \times 0)e^{-2(0)} + A_2 e^{-2(0)} = \boxed{-2A_1 + A_2}$$

เท่ากัน

$$-2A_1 + A_2 = 19.2$$

60

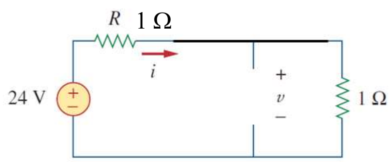
แก้สมการ

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -19.2 \\ -2A_1 + A_2 &= 19.2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A_1 &= -19.2 \\ A_2 &= -19.2 \end{aligned}$$

จะได้

$$v(t) = 24 - 19.2(1+t)e^{-2t} \qquad i(t) = C\frac{dv}{dt} = (4.8 + 9.6t)e^{-2t}$$

กรณีที่ (3) R = 1 Ω หาค่าเริ่มต้นเมื่อ $t<0$ สวิตซ์ Close,
L เสมือน Short circuit และ C เสมือน Open circuit



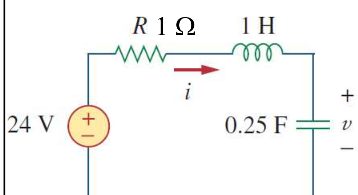
จะได้ $i(0) = \dfrac{24}{1+1} = 12\ \text{A}$

ใช้ Voltage divider จะได้

$$v(0) = \frac{1}{1+1} \times 24 = 12\ \text{V}$$

61

เมื่อ $t \geq 0$ สวิตซ์ Open circuit จะได้วงจรเป็นวงจรอนุกรม RLC



$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{R}{2L} = \frac{1}{2\times 1} = 0.5 \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.25}} = 2 \end{aligned}\right\} \alpha < \omega_0$$

Under-damped

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -0.5 \pm j1.936$$

จะได้

$$v(t) = v_{ss} + \underbrace{e^{-0.5t}\left(A_1 \cos 1.936t + A_2 \sin 1.936t\right)}_{\text{Transient response}}$$

Steady state response หาจาก v(∞) ➡ ที่เวลา $t=\infty$, C ถูกชาร์จจนเต็ม เสมือนเป็น Open circuit ➡ $v_{ss} = v(\infty) = 24\ \text{V}$

62

จะได้ $v(t) = 24 + e^{-0.5t}\left(A_1\cos 1.936t + A_2 \sin 1.936t\right)$

แทนค่า $t=0$ $v(0) = 24 + e^{-0.5(0)}\left(A_1\cos(0) + A_2\sin(0)\right) = \boxed{24 + A_1}$

ค่าเริ่มต้น $v(0) = \boxed{12 \text{ V}}$

เท่ากัน

$A_1 + 24 = 12$

$A_1 = -12$

$$v(t) = 24 + e^{-0.5t}\left(A_1\cos 1.936t + A_2 \sin 1.936t\right)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -0.5e^{-0.5t}\left(A_1\cos 1.936t + A_2\sin 1.936t\right) + e^{-0.5t}\left(-1.936A_1\sin 1.936t + 1.936A_2\cos 1.936t\right)$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -0.5e^{-0.5(0)}\left(A_1\cos(0) + A_2\sin(0)\right) + e^{-0.5t}\left(-1.936A_1\sin(0) + 1.936A_2\cos(0)\right) = \boxed{-0.5A_1 + 1.936A_2}$$

63

จาก $i(0) = 12 \text{ A} = C\dfrac{dv(0)}{dt}$ จะได้ $\dfrac{dv(0)}{dt} = \dfrac{12}{C} = \dfrac{12}{0.25} = \boxed{48}$

จากสไลด์ก่อนหน้า $\dfrac{dv(0)}{dt} = \boxed{-0.5A_1 + 1.936A_2}$

เท่ากัน

$-0.5A_1 + 1.936A_2 = 48$

$A_2 = 21.694$

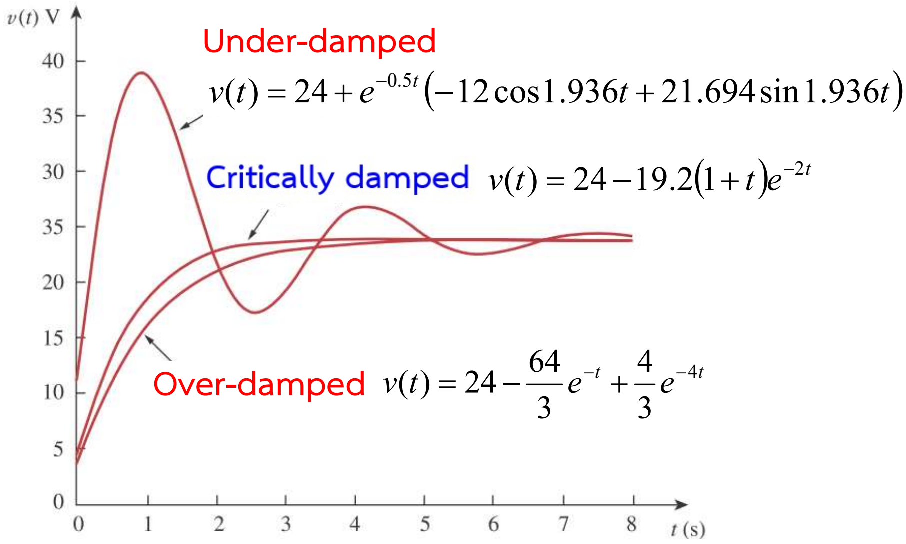
จะได้

$$v(t) = 24 + e^{-0.5t}\left(-12\cos 1.936t + 21.694\sin 1.936t\right)$$

$$i(t) = C\frac{dv}{dt} = (3.1\ \sin 1.936t\ +\ 12\ \cos 1.936t)e^{-0.5t}\ \text{A}$$

64

กราฟของ $v(t)$ ทั้ง 3 กรณี



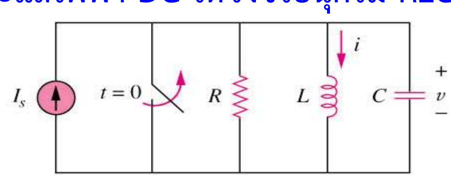
65

8.5 Step-Response Parallel RLC Circuits

ผลตอบสนองของวงจร RLC ขนานที่มีต่อ DC Step Source

(เกิดขึ้นเมื่อเราสับสวิตซ์จ่ายกระแสไฟฟ้า DC ให้วงจรอนุกรม RLC)

The step response is obtained by the sudden application of a dc source.



The 2nd order of expression

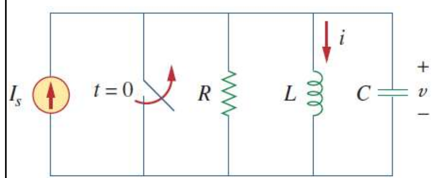
$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{I_s}{LC}$$

It has the same form as the equation for source-free parallel RLC circuit.

- The same coefficients (important in determining the frequency parameters).
- Different circuit variable in the equation.

66

ที่มา



ใช้ KCL ที่เวลา $t > 0$

$$i_R + i_L + i_C - I_s = 0$$

โดย $\boxed{i_R = \frac{v}{R}}$ $\boxed{i_L = i}$ $\boxed{i_C = C\frac{dv}{dt}}$

จะได้ $\frac{v}{R} + i + C\frac{dv}{dt} = I_s$

เนื่องจากแรงดันตกคร่อม L คือ $v = L\frac{di}{dt}$ จะได้ $\frac{dv}{dt} = L\frac{d^2 i}{dt^2}$

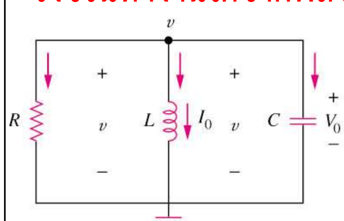
จะได้ $\frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i + LC\frac{d^2 i}{dt^2} = I_s$

จัดรูปใหม่จะได้ $$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{I_s}{LC}$$

8.3 Source-Free Parallel RLC Circuits

การวิเคราะห์วงจรขนาน RLC แบบ Source free

วงจรนี้ทำงานได้จากพลังงานที่สะสมใน L และ C



ให้ค่าเริ่มต้นของวงจรเป็น

$i(0) = I_0 = \frac{1}{L}\int_{\infty}^{0} v(t)dt$ และ $v(0) = V_0$

ใช้ KCL ที่ Node บน

$$i_R + i_L + i_C = 0 \Rightarrow \frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v dt + C\frac{dv}{dt} = 0$$

Taking the derivative with respect to *t* and dividing by C

ได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = 0$$

8.5 Step-Response Parallel RLC Circuits

The solution of the equation should have two components:
the transient response $i_t(t)$ & the steady-state response i_{ss}

คำตอบของสมการนี้มี 2 ส่วนคือ

$$i(t) = i_{ss} + i_t(t)$$

*** หมายเหตุ i ในที่นี้ คือ i ที่ไหลผ่าน L ***

The transient response is the same as that for source-free case
Transient response เหมือนกับคำตอบของกรณี Source-free

$$i_t(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad \text{(over-damped)}$$

$$i_t(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t} \quad \text{(critical damped)}$$

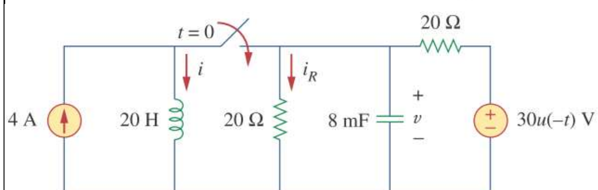
$$i_t(t) = e^{-\alpha t}(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) \quad \text{(under-damped)}$$

The steady-state response is the final value of $i(t)$. $i_{ss} = i(\infty) = I_s$

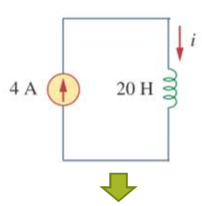
The values of A_1 and A_2 are obtained from the initial conditions:
$i(0)$ and $di(0)/dt$.

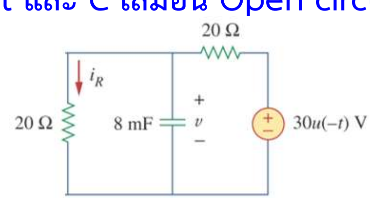
69

Example 8.8 In the circuit of Fig. 8.23, find $i(t)$ and $i_R(t)$ for $t > 0$.



วิธีทำ หาค่าเริ่มต้นเมื่อ t<0 สวิตซ์ Open circuit วงจรนี้เสมือนแยกเป็น 2 ส่วน, L เสมือน Short circuit และ C เสมือน Open circuit





ใช้ Voltage divider

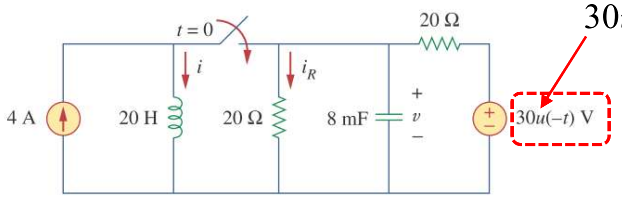
$$i(0) = 4 \text{ A}$$

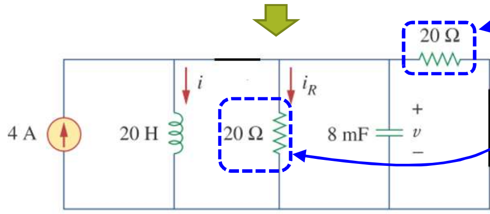
$$v(0) = \frac{20}{20+20} \times 30 = 15 \text{ V}$$

70

ต่อมาเมื่อ $t \geq 0$ สวิตซ์ Close circuit ในขณะที่ Voltage source $30u(-t)$ หยุดทำงาน = Short circuit

$$30u(-t) = \begin{cases} 30 & t < 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$





R 2 ตัวนี้ขนานกัน

$$R_{eq} = \frac{20 \times 20}{20 + 20} = 10\,\Omega$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{20 \times 8 \times 10^{-3}}} = 2.5$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 10 \times 8 \times 10^{-3}} = 6.25 \Rightarrow \alpha > \omega_0$$ =Over-damped

71

$$\omega_0 = 2.5 \qquad \alpha = 6.25$$

จะได้

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -6.25 \pm \sqrt{6.25^2 - 2.5^2} = -6.25 \pm 5.7282$$

หรือ $s_1 = -11.978$ และ $s_2 = -0.5218$

จะได้คำตอบ

$$\boxed{I_s = 4\text{ A}}$$

$$i(t) = I_s + A_1 e^{-11.978t} + A_2 e^{-0.5128t} = 4 + A_1 e^{-11.978t} + A_2 e^{-0.5128t}$$

แทนค่า $t=0$

$$i(0) = 4 + A_1 e^{-11.978(0)} + A_2 e^{-0.5128(0)} = \boxed{4 + A_1 + A_2}$$

เท่ากัน

จากค่าเริ่มต้น $i(0) = \boxed{4\text{ A}}$

$$4 + A_1 + A_2 = 4$$
$$A_2 = -A_1$$

72

$$i(t) = 4 + A_1 e^{-11.978t} + A_2 e^{-0.5128t}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -11.978 A_1 e^{-11.978t} - 0.5128 e^{-0.5128t}$$

$$\frac{di(0)}{dt} = -11.978 A_1 e^{-11.978(0)} - 0.5128 A_2 e^{-0.5128(0)}$$

$$= \boxed{-11.978 A_1 - 0.5128 A_2}$$

เท่ากัน

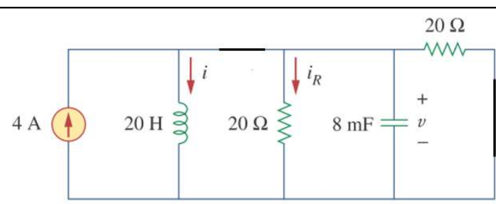
เนื่องจากแรงดันตกคร่อม L คือ $v(0) = L\frac{di(0)}{dt}$ จะได้ $\frac{di(0)}{dt} = \frac{v(0)}{L} = \frac{15}{20} = \boxed{0.75}$

แก้สมการได้

จะได้ $\left.\begin{array}{r} -11.978 A_1 - 0.5128 A_2 = 0.75 \\ A_2 = -A_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A_1 = -0.0655 \\ A_2 = 0.0655 \end{array}$

จะได้

$$i(t) = 4 + 0.0655\left(e^{-0.5128t} - e^{-11.978t}\right)$$



$$\boxed{i(t) = 4 + 0.0655\left(e^{-0.5128t} - e^{-11.978t}\right)}$$

โจทย์ให้หา $i_R(t)$ ➡ $i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{v(t)}{20}$

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} = 20 \times 0.0655\left(-0.5128e^{-0.5128t} + 11.978e^{-11.978t}\right)$$

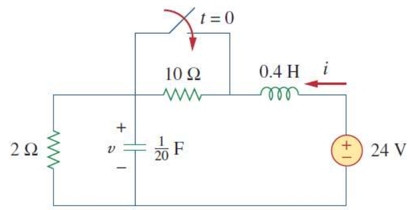
จะได้

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{20} = 0.0655\left(-0.5128e^{-0.5128t} + 11.978e^{-11.978t}\right)$$

$$\boxed{= 0.785e^{-11.978t} - 0.0342e^{-0.5128t}}$$

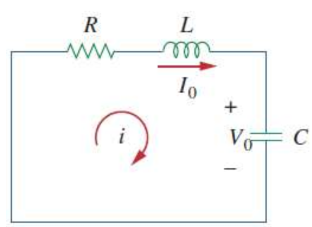
Practice Problem 8.1

The switch in Fig. 8.4 was open for a long time but closed at $t = 0$. Determine: (a) $i(0^+)$, $v(0^+)$, (b) $di(0^+)/dt$, $dv(0^+)/dt$, (c) $i(\infty)$, $v(\infty)$.



Answer: (a) 2 A, 4 V, (b) 50 A/s, 0 V/s, (c) 12 A, 24 V.

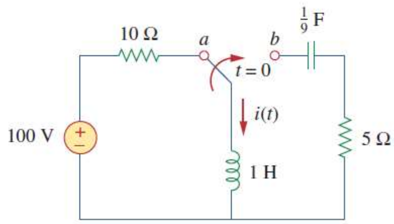
Practice Problem 8.3



If $R = 10\ \Omega$, $L = 5$ H, and $C = 2$ mF in Fig. 8.8, find α, ω_0, s_1, and s_2. What type of natural response will the circuit have?

Answer: 1, 10, $-1 \pm j9.95$, underdamped.

Practice Problem 8.4



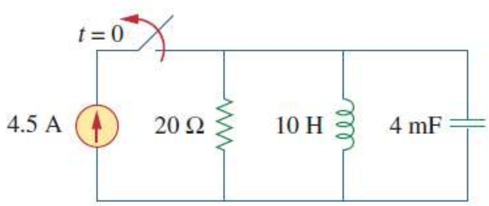
The circuit in Fig. 8.12 has reached steady state at $t = 0^-$. If the make-before-break switch moves to position b at $t = 0$, calculate $i(t)$ for $t > 0$.

Answer: $e^{-2.5t}(10\cos 1.6583t - 15.076\sin 1.6583t)$ A.

Practice Problem 8.6

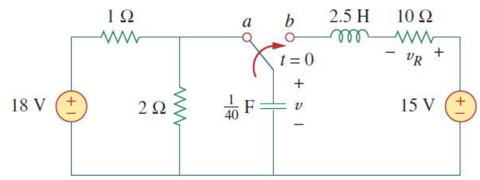
Refer to the circuit in Fig. 8.17. Find $v(t)$ for $t > 0$.

Answer: $150(e^{-10t} - e^{-2.5t})$ V.



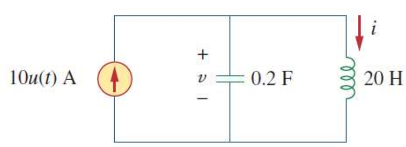
Practice Problem 8.7

Having been in position a for a long time, the switch in Fig. 8.21 is moved to position b at $t = 0$. Find $v(t)$ and $v_R(t)$ for $t > 0$.



Answer: $15 - (1.7321 \sin 3.464t + 3 \cos 3.464t)e^{-2t}$ V, $3.464e^{-2t} \sin 3.464t$ V.

Practice Problem 8.8



Find $i(t)$ and $v(t)$ for $t > 0$ in the circuit of Fig. 8.24.

Answer: $10(1 - \cos(0.25t))$ A, $50 \sin(0.25t)$ V.