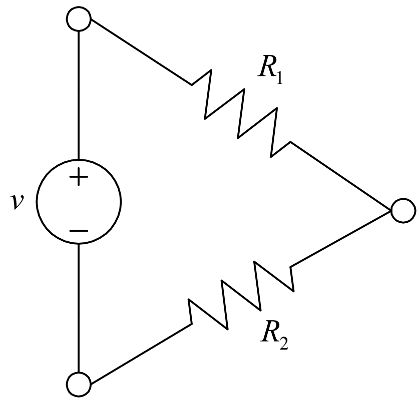
บทที่ 3
วงจรตัวต้านทาน
Resistive Circuits

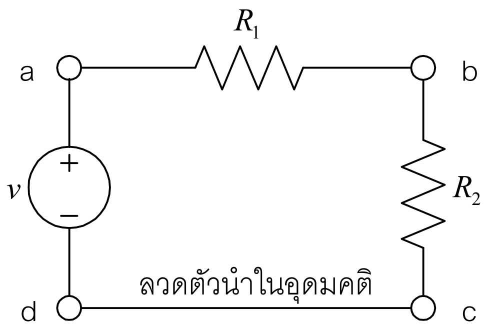
ในบทนี้จะได้กล่าวถึงวงจรที่ประกอบด้วยองค์ประกอบวงจรที่ศึกษาไปในบทที่แล้ว เรียกว่าวงจรตัวต้านทาน โดยจะศึกษาทฤษฎีพื้นฐานที่สำคัญมากทฤษฎีหนึ่งคือกฎของเคอชชอฟฟ์ ซึ่งจะแบ่งเป็นสองส่วนคือส่วนที่กล่าวเกี่ยวกับผลรวมของแรงดันรอบวงรอบ (Loop) ใดๆ ในวงจรจะมีค่าเป็นศูนย์ และอีกส่วนหนึ่งจะกล่าวถึงผลรวมของกระแสที่โนด (Node) ใดๆ ในวงจรจะมีค่าเป็นศูนย์ จากนั้นจะพิจารณาวงจรตัวต้านทานอย่างง่ายคือประกอบด้วยโนดหนึ่งโนด หรือวงรอบหนึ่งวงรอบเท่านั้น และสุดท้ายจะได้กล่าวถึงตัวอย่างการวิเคราะห์วงจรตัวต้านทานอย่างง่าย

3.1 กฎของเคอชชอฟฟ์

ในบทที่แล้วเราได้ศึกษากฎของโอห์มและองค์ประกอบวงจรต่างๆ ในวงจรอย่างง่ายมาบ้างแล้ว ในบทนี้จะได้แนะนำทฤษฎีที่จะนำมาใช้ในกรณีที่นำองค์ประกอบเหล่านี้มากกว่าหนึ่งองค์ประกอบขึ้นไปมาประกอบกันเป็นวงจร กฎของเคอชชอฟฟ์จะช่วยให้เราหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงดันที่ตกคร่อมแต่ละองค์ประกอบ และช่วยหาความสัมพันธ์ของกระแสที่ไหลผ่านแต่ละองค์ประกอบ โดยจะเริ่มจากวงจรที่มีความต้านทานเพียงสองตัว ต่อกับแหล่งจ่ายแรงดันอิสระดังแสดงในรูปที่ 3.1 ซึ่งอาจเขียนใหม่ดังในรูปที่ 3.2 โดยที่จะใช้ลวดตัวนำในอุดมคติ (Ideal Wire) หรือลวดตัวนำสมบูรณ์แบบ (Perfect Conductor) ต่อระหว่างขั้ว c และขั้ว d ลวดตัวนำแบบนี้จะมีค่าความต้านทานเป็นศูนย์ ทำเมื่อมีกระแสไหลผ่านแล้วจะไม่มีแรงดันตกคร่อมหรือแรงดันตกคร่อมเป็นศูนย์ ซึ่งเท่ากับเป็นปิดวงจรนั่นเอง

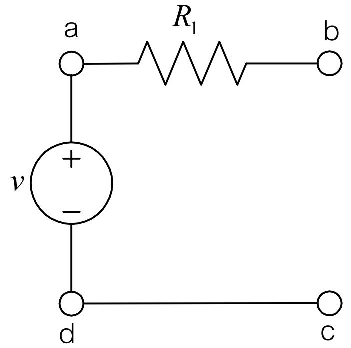


รูปที่ 3.1 วงจรความต้านทานสองตัวต่ออนุกรมและต่อกับแหล่งจ่ายแรงดันอิสระ



รูปที่ 3.2 วงจรในรูปที่ 3.1 เขียนใหม่ โดยใช้ลวดตัวนำในอุดมคติต่อระหว่างโนด c และ d

ถ้าเราถอดตัวต้านทาน R_2 ออกจากวงจร (หรือให้มีค่าเป็นอนันต์) ดังแสดงในรูปที่ 3.3 จะได้ว่าขั้ว b และ c เกิดเปิดวงจรขึ้น กระแสระหว่างขั้วทั้งสองจะไหลเป็นศูนย์ ไม่ว่าแรงดันตกคร่อมขั้วทั้งสองจะเป็นเท่าใดก็ตาม



รูปที่ 3.3 เกิดการเปิดวงจรขึ้นระหว่างโนด b และ c เมื่อถอดความต้านทาน R_2 ออก

จุดต่อระหว่างองค์ประกอบวงจรตั้งแต่สองตัวขึ้นไปมาต่อกันจะเรียกว่า โนด (Node) ถ้าเราเริ่มต้นจากขั้ว a ในรูปที่ 3.2 ไปเส้นทางในวงจร ผ่านโนด b c และ d กลับมายังโนด a อีกครั้งเราจะได้เส้นทางปิด (Closed Path) ที่เรียกว่า วงรอบหรือลูป (Loop)

ตัวอย่าง 3.1 จงหาเส้นทางปิดทั้งหมดในวงจรในรูป Ex3.1

วิธีทำ จากรูปพบว่ามีทั้งหมดสามเส้นทางปิดคือ

1. a-b-c-d-e-f-a
2. a-b-e-f-a
3. b-c-d-e-b

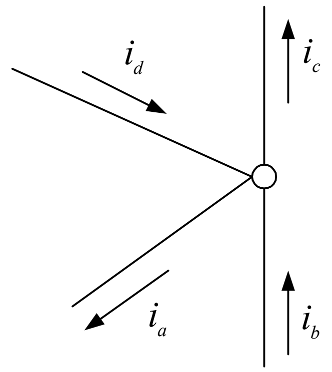
สังเกตว่าลวดตัวนำในอุดมคติทำให้ขั้ว d ขั้ว e และขั้ว f เป็นโนดเดียวกัน

จากบทที่แล้วเราได้ศึกษาแล้วว่ากฎของโอห์มใช้อธิบายความสัมพันธ์ของกระแสและแรงดันสำหรับตัวต้านทานตัวหนึ่ง กุสตาฟ โรเบิร์ต เคอชชอฟฟ์ ศาสตราจารย์แห่งมหาวิทยาลัยเบอลิน ได้พัฒนากฎสองข้อ ในปี ค.ศ. 1847 (พ.ศ. 2390) สำหรับหาความสัมพันธ์ของกระแสและแรงดันสำหรับตัวต้านทานที่ต่อกันเป็นวงจรสองตัวขึ้นไป

กฎกระแสของเคอชชอฟฟ์ (Kirchhoff's Current Law, KCL) กล่าวว่าผลรวมทางพีชคณิตของกระแสที่เข้าสู่โนดใดๆ จะมีค่าเป็นศูนย์ตลอดเวลา นั่นคือประจุไฟฟ้าไม่สามารถสะสมที่โนดใดๆได้เมื่อเข้ามาสู่โนดนั้นจำนวนเท่าใดก็จะต้องออกจากโนดนั้นเท่ากันตลอดเวลา พิจารณาจากโนดตัวอย่างในรูปที่ 3.4 จะได้ว่า

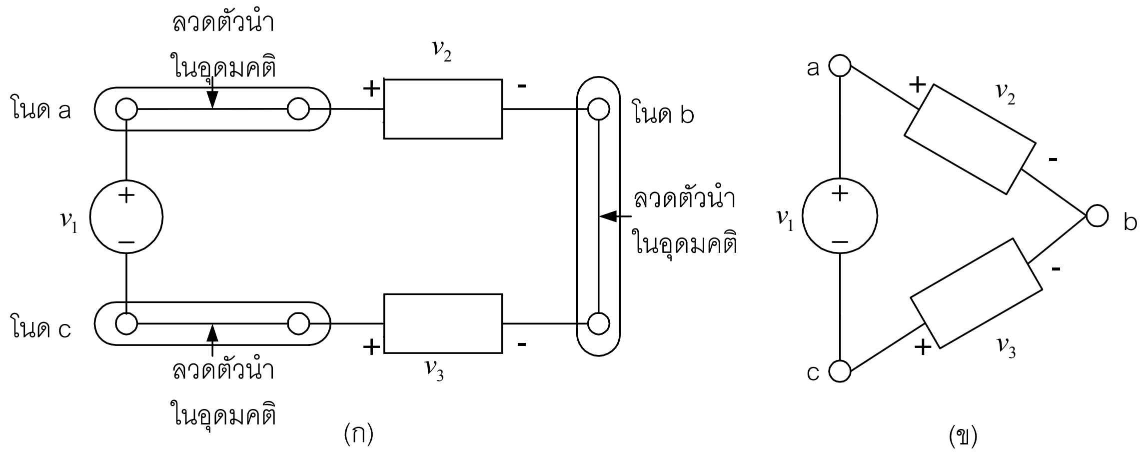
$$-i_a + i_b - i_c + i_d = 0$$

เราใช้กระแส $-i_a$ และ $-i_c$ เพราะว่ากระแสทั้งสองไหลออกจากโนด อีกวิธีหนึ่งในการอธิบายกฎของเคอชชอฟฟ์คือ ผลรวมของกระแสเข้าสู่โนดจะเท่ากับผลรวมของกระแสไหลออกจากโนดนั้น



รูปที่ 3.4 กระแสที่โนดหนึ่งในวงจร (ส่วนอื่นของวงจรไม่ได้แสดง)

กฎแรงดันของเคอชชอฟฟ์ (Kirchhoff's Voltage Law, KVL) กล่าวว่าผลรวมทางพีชคณิตของแรงดันรอบเส้นทางปิดใดๆ จะมีค่าเป็นศูนย์ตลอดเวลา คำว่าผลรวมพีชคณิตหมายความว่าต้องพิจารณาขั้วของแรงดันขณะที่เดินทางรอบเส้นทางปิดใดๆ การที่ผลรวมของแรงดันรอบเส้นทางปิดใดๆ มีค่าเป็นศูนย์หมายความว่าวงรอบในวงจรใดๆ เป็นระบบที่อนุรักษ์พลังงาน คือพลังงานที่ใช้ในการเคลื่อนประจุรอบเส้นทางปิดใดๆ จะเท่ากับศูนย์



รูปที่ 3.5 วงจรที่มีองค์ประกอบสามตัว

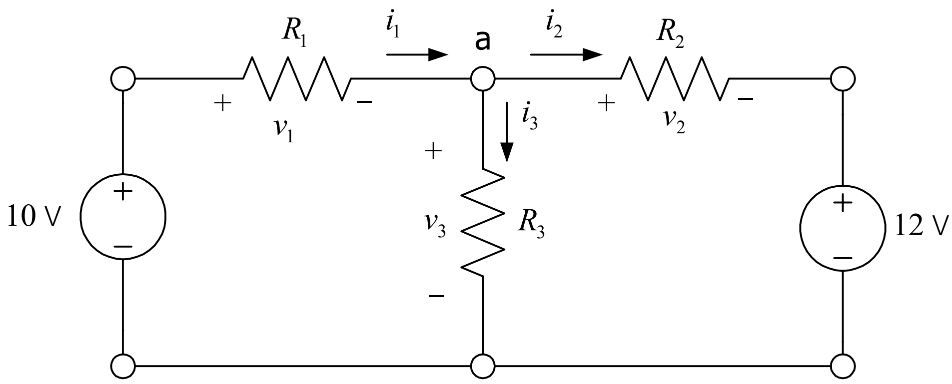
(ก) เขียนลวดตัวนำในอุดมคติด้วย (ข) ไม่เขียนลวดตัวนำในอุดมคติ

พิจารณาวงจรในรูปที่ 3.5 ซึ่งมีการกำหนดขั้วของแรงดันไว้แล้ว เริ่มจากโนด c จะได้ว่า

$$-v_1 + v_2 - v_3 = 0$$

แนวทางทั่วไปที่นิยมใช้กันก็คือ ใช้เครื่องหมายตามขั้วแรกของแรงดันที่เราพบขณะเดินทางรอบเส้นทางปิด เช่นเมื่อออกจากโนด c เราพบเครื่องหมายลบที่ขั้วของ v_1 ก่อนขั้วบวก ดังนั้นจึงได้เครื่องหมายลบสำหรับ v_1

ตัวอย่าง 3.2 พิจารณาวงจรในรูป Ex 3.2 ซึ่งกำหนดทิศทางอ้างอิงตามหลักการสัญนิยมเครื่องหมายพาสซีฟ จงหาค่ากระแสและแรงดันของตัวต้านทานทั้งหมด และหาค่าของ R_2
กำหนดให้ $R_1 = 8\,\Omega$ $v_2 = -10$ V $i_3 = 2$ A และ $R_3 = 1\,\Omega$



รูปที่ Ex 3.2

วิธีทำ ผลรวมของกระแสเข้าสู่โนด a คือ

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

สำหรับ R_3 ใช้กฎของโอห์มหาค่าแรงดัน v_3 ได้ดังนี้

$$v_3 = R_3 i_3 = 1 \times 2 = 2 \text{ V}$$

ใช้กฎแรงดันของเคอชชอฟฟ์สำหรับวงรอบซ้ายมือซึ่งประกอบด้วย v_1 v_3 และ แหล่งจ่ายแรงดัน 10 V จะได้

$$-10 + v_1 + v_3 = 0$$

ดังนั้น

$$v_1 = 10 - v_3 = 8 \text{ V}$$

ใช้กฎของโอห์มหาค่าแรงดัน v_1 สำหรับ R_1 ได้ดังนี้

$$v_1 = R_1 i_1$$

หรือ

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1} = 1 \text{ A}$$

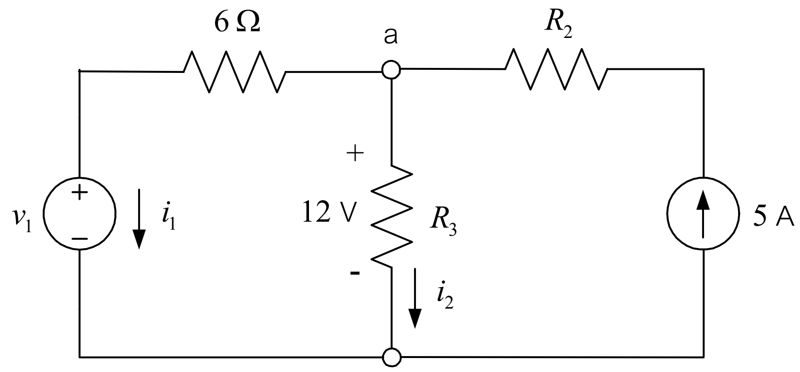
ตอนนี้เราทราบค่ากระแสสองค่าคือ i_1 และ i_3 หาค่ากระแส i_2 จากกฎกระแสของเคอชชอฟฟ์ที่โนด a ได้

$$i_2 = i_1 - i_3 = -1 \text{ A}$$

ดังนั้นค่าความต้านทาน R_2 คือ

$$R_2 = \frac{v_2}{i_2} = \frac{-10}{-1} = 10\,\Omega$$

ตัวอย่าง 3.3 พิจารณาวงจรในรูป Ex 3.3 จงหาค่ากระแส i_1 และแรงดัน v_1 ถ้ากำหนดให้ $R_3 = 6\,\Omega$



รูปที่ Ex 3.3

วิธีทำ จาก KCL ผลรวมของกระแสเข้าสู่โนด a คือ

$$-i_1 - i_2 + 5 = 0$$

ใช้กฎของโอห์มหาค่ากระแส i_2 สำหรับ R_3 ได้ดังนี้

$$i_2 = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}$$

ดังนั้นจะได้

$$i_1 = 5 - i_2 = 3 \text{ A}$$

ต่อมาใช้ KVL ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ของวงรอบซ้ายมือจะได้ค่า v_1

$$-v_1 - 6i_1 + 12 = 0$$

แทนค่า $i_1 = 3$ A จะได้

$$v_1 = 12 - 6i_1 = 12 - 18 = -6 \text{ V}$$

สังเกตว่าค่ากระแส i_1 และแรงดัน v_1 ไม่ขึ้นกับค่า R_2 เนื่องจาก $i_1 + i_2 = 5$ A ไม่ว่าค่า R_2 จะเป็นเท่าใดก็ตาม

3.2 วงจรตัวต้านทานอย่างง่าย

พิจารณาวงจรหนึ่งรอบดังแสดงในรูปที่ 3.6 ซึ่งกำหนดทิศทางอ้างอิงตามหลักการสัญนิยมเครื่องหมายพาสซีฟ ใช้ KCL ที่แต่ละโนดจะได้

โนด a

$$i_s - i_1 = 0 \tag{3.1}$$

โนด b

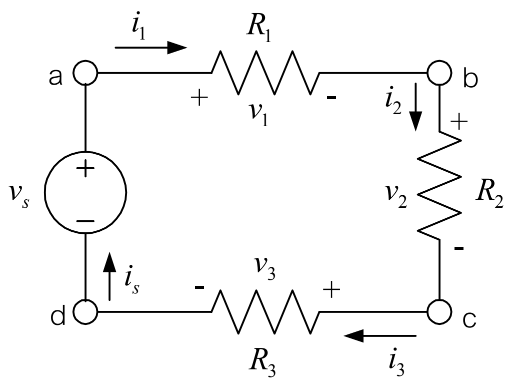
$$i_1 - i_2 = 0 \tag{3.2}$$

โนด c

$$i_2 - i_3 = 0 \tag{3.3}$$

โนด d

$$i_3 - i_s = 0 \tag{3.4}$$



รูปที่ 3.6 วงจรที่มีหนึ่งวงรอบ

เราได้ทั้งหมดสี่สมการ แต่ว่าสมการใดๆ สมการหนึ่งในสี่สมการนี้สามารถหาได้จากอีกสามสมการที่เหลือ เราเรียกกรณีแบบนี้ว่าสมการทั้งสี่นั้นไม่เป็นอิสระต่อกันหรือมันขึ้นต่อกันและกันนั่นเอง ในวงจรทั่วไปที่มีจำนวนโนด n จะมีจำนวนสมการที่เป็นอิสระต่อกันหรือไม่ขึ้นต่อกันที่ได้จากการใช้ KCL จำนวน $n-1$ สมการเท่านั้น และสังเกตว่าค่ากระแส

$$i_s = i_1 = i_2 = i_3$$

หรือกล่าวได้ว่ากระแสเหล่านี้คือกระแสวงรอบ (Loop Current) ที่ไหลต่อเนื่องรอบวงรอบนั้น ในการคำนวณต่อไปจะใช้ค่ากระแส i_1 เป็นกระแสวงรอบ การต่อตัวต้านทานในลักษณะที่มีกระแสไหลผ่านเท่ากันทุกตัวเรียกว่าการต่อแบบอนุกรม

เพื่อหาค่ากระแส i_1 เราใช้ KVL รอบวงรอบจะได้

$$-v_s + v_1 + v_2 + v_3 = 0 \tag{3.5}$$

โดยที่ v_1 คือแรงดันตกคร่อมตัวต้านทาน R_1 ใช้กฎของโอห์มสำหรับตัวต้านทานแต่ละตัวในสมการ (3.5) จะได้

$$-v_s + i_1R_1 + i_1R_2 + i_1R_3 = 0 \tag{3.6}$$

แก้สมการหาค่ากระแสวงรอบ i_1 ได้

$$i_1 = \frac{v_s}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad (3.7$$

และค่าแรงดันตกคร่อมตัวต้านทานที่เหลือคือ

$$v_2 = i_1R_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} v_s \tag{3.8}$$

และ

$$v_3 = i_1R_3 = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} v_s \tag{3.9}$$

ถ้าเราให้ R_s คือผลรวมของตัวต้านทานทั้งหมดที่ต่ออนุกรมกันในวงรอบนี้ โดยที่

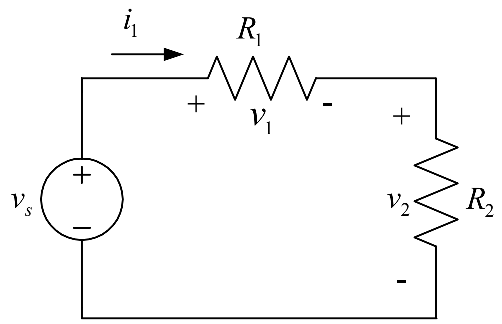
$$R_s = R_1 + R_2 + R_3 \tag{3.10}$$

เราจะสรุปได้ว่าค่าแรงดันตกคร่อมตัวต้านทานตัวใดตัวหนึ่งที่ต่ออนุกรมอยู่ในวงจรคือสัดส่วนของค่าความต้านทานของมันเองต่อความต้านทานรวม คูณด้วยค่าแรงดันของแหล่งจ่าย v_s วงจรนี้แสดงถึงหลักการของการแบ่งแรงดันเป็นส่วนๆ เรียกทั่วไปว่า วงจรแบ่งแรงดัน (Voltage Divider) อาจกล่าวเป็นกรณีทั่วไปได้ว่า

$$v_n = \frac{R_n}{R_1 + R_2 + \ldots + R_N} v_s \tag{3.11}$$

โดยที่ สมการ (3.11) แสดงค่าแรงดันตกคร่อมตัวตานทานตัวที่ n ในวงจรที่มีแหล่งจ่าย v_s และตัวต้านทานต่ออนุกรมกันทั้งสิ้น N ตัว

ตัวอย่าง 3.4 พิจารณาวงจรในรูป Ex 3.4 จงหาค่าความต้านทาน R_2 ที่จำให้ค่าแรงดันตกคร่อมตัวมันมีค่าหนึ่งส่วนสี่ของแรงดันจากแหล่งจ่าย v_s กำหนดค่า $R_1 = 9\,\Omega$ และถ้า กำหนดค่า $v_s = 12$ V จงหาค่ากระแสที่ไหลในวงจร



รูปที่ Ex 3.4

วิธีทำ แรงดันตกคร่อมตัวต้านทาน R_2 คือ

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s$$

เนื่องจากเราต้องการค่า $v_2/v_s = 1/4$ ดังนั้น

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{4}$$

หรือ

$$R_1 = 3R_2$$

จากโจทย์กำหนด $R_1 = 9\,\Omega$ $\therefore$ จะได้ $R_2 = 3\,\Omega$

ใช้ KVL รอบวงรอบ จะได้สมการ

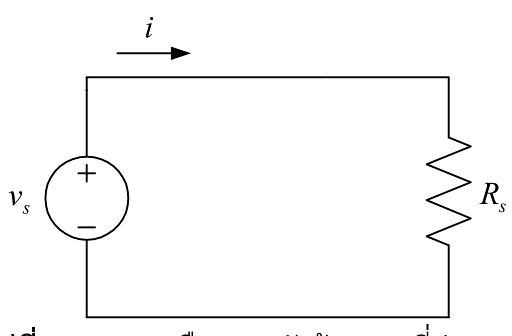
$$-v_s + v_1 + v_2 = 0$$

หรือ

$$v_s = iR_1 + iR_2$$

ดังนั้น

$$i = \frac{v_s}{R_1 + R_2} = \frac{12}{12} = 1 \text{ A}$$



รูปที่ 3.7 วงจรเสมือนของตัวต้านทานที่ต่ออนุกรมกัน

จากตัวอย่างข้างต้น ถ้าเราพิจารณาวงจรอย่างง่ายดังในรูปที่ 3.7 เมื่อมีแหล่งจ่ายแรงดัน v_s ต่ออนุกรมกับ ตัวต้านทาน R_s ซึ่งจะสามารถหาค่ากระแสได้

$$i = \frac{v_s}{R_s} \tag{3.12}$$

เทียบสมการ (3.12) และสมการกระแส i ในตัวอย่างที่ผ่านมา พบว่าการคำนวณเหมือนกันทุกประการหากกำหนดให้ค่า $R_s = R_1 + R_2$ เราเรียกค่าความต้านทาน R_s ว่าเป็นความต้านทานต้านทานเสมือน (Equivalent Resistance) ของตัวต้านทาน R_1 และ R_2 ที่ต่ออนุกรมกันอยู่ ในกรณีทั่วไป ความต้านทานเสมือนของตัวต้านทาน N ตัวที่ต่ออนุกรมกันอยู่สามารถหาได้จาก

$$R_s = R_1 + R_2 + \ldots + R_N \tag{3.13}$$

สำหรับวงจรในตัวอย่างที่ 3.4 จะได้ค่า

$$R_s = R_1 + R_2 = 9 + 3 = 12\,\Omega$$

ตัวต้านทานแต่ละตัวในวงจรนี้จะได้รับกำลังจากแหล่งจ่ายแรงดัน โดยที่ค่ากำลังที่ตัวต้านทาน R_1 ได้รับคือ

$$p_1 = \frac{v_1^2}{R_1}$$

และค่ากำลังที่ตัวต้านทาน R_2 ได้รับคือ

$$p_2 = \frac{v_2^2}{R_2}$$

กำลังทั้งหมดที่ตัวต้านทานทั้งสองได้รับคือ

$$p = p_1 + p_2 = \frac{v_1^2}{R_1} + \frac{v_2^2}{R_2} \tag{3.14}$$

ตามหลักการของการแบ่งแรงดันค่าแรงดันตกคร่อม R_n คือ

$$v_n = \frac{R_n}{R_1 + R_2} v_s$$

เราเขียนสมการ (3.14) ใหม่ได้ดังนี้

$$p = \frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2} v_s^2 + \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} v_s^2$$

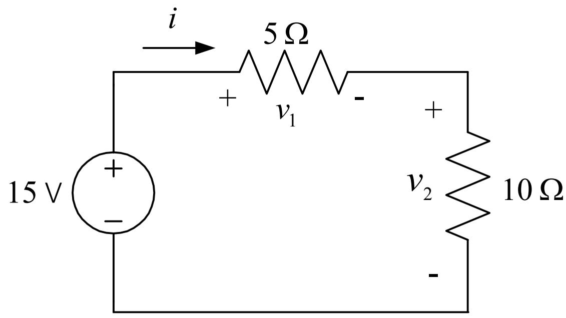
เนื่องจาก $R_1 + R_2 = R_s$ เราจะได้

$$p = \frac{R_1 + R_2}{R_s^2} v_s^2 = \frac{v_s^2}{R_s}$$

สรุปได้ว่ากำลังทั้งหมดที่ตัวต้านทานสองตัวได้รับไปจะมีค่าเท่ากับกำลังที่ตัวต้านทานเสมือนได้รับไป ซึ่งกำลังค่านี้จะต้องเท่ากับกำลังที่จ่ายออกมาจากแหล่งจ่ายแรงดัน v_s

$$p_s = v_s i = v_s \left(\frac{v_s}{R_s} \right) = \frac{v_s^2}{R_s}$$

ตัวอย่าง 3.5 สำหรับวงจรแบ่งแรงดันดังในรูป Ex 3.5 จงหาค่ากระแสวงรอบและค่าแรงดัน จากนั้นให้แสดงว่าค่ากำลังที่ตัวต้านทานทั้งสองได้รับจะเท่ากับกำลังที่จ่ายออกมาจากแหล่งจ่ายแรงดัน



รูปที่ Ex 3.5

วิธีทำ ค่ากระแสวงรอบสามารถคำนวณได้จาก

$$i = \frac{15}{5+10} = 1 \text{ A}$$

ใช้กฎของโอห์ม จะได้ค่าแรงดัน

$$v_1 = 5 \text{ V และ } v_2 = 10 \text{ V}$$

ค่ากำลังที่ตัวต้านทานทั้งสองได้รับคือ

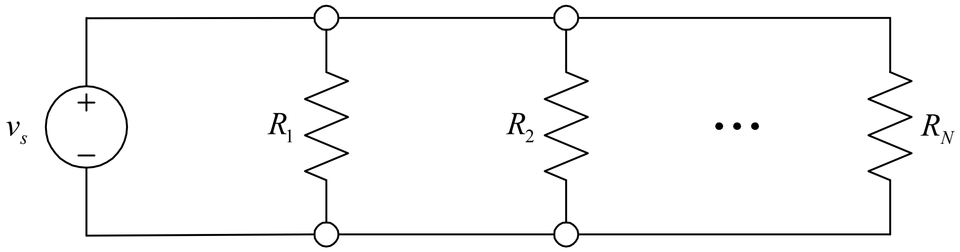
$$p = v_1 i + v_2 i = (v_1 + v_2)\ i = 15 \text{ W}$$

ส่วนกำลังที่จ่ายออกมาจากแหล่งจ่ายแรงดัน v_s คือ

$$p_s = v_s i = 15 \times 1 = 15 \text{ W}$$

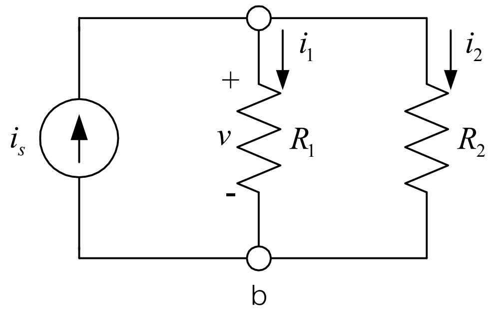
3.3 การต่อตัวต้านทานแบบขนานและวงจรแบ่งกระแส

การต่อตัวต้านทานแบบขนานเป็นการต่อวงจรอีกลักษณะหนึ่งซึ่งพบว่ามีการใช้มากเช่นในการต่ออุปกรณ์ไฟฟ้าเข้าไปในระบบไฟฟ้ากำลัง หรือการต่อหลอดไฟฟ้าในบ้านเรือนทั่วไปเป็นต้น รูปที่ 3.8 แสดงการต่อตัวต้านทานแบบขนานของตัวต้านทาน N ตัวเข้ากับแหล่งจ่ายแรงดัน v_s



รูปที่ 3.8 การต่อตัวต้านทานแบบขนาน N ตัว

จากวงจรจะเห็นว่าแรงดัน v_s จากแหล่งจ่ายแรงดันจะตกคร่อมตัวต้านทานทุกตัวเท่ากัน และจะมีกระแสไหลผ่านตัวต้านทานแต่ละตัว ทำให้กระแสรวมที่ไหลจากแหล่งจ่ายมีค่าเท่ากับผลรวมของกระแสที่ไหลผ่านตัวต้านทานทั้งหมด ซึ่งจะแตกต่างจากกรณีของการต่อแบบอนุกรม



รูปที่ 3.9 การต่อตัวต้านทานแบบขนาน 2 ตัวกับแหล่งจ่ายกระแส i_s

วงจรในรูปที่ 3.9 ประกอบด้วยตัวต้านทานสองตัวต่อแบบขนานเข้ากับแหล่งจ่ายกระแส i_s สังเกตว่าตัวต้านทานทั้งสองถูกต่อเข้าที่ขั้ว a และขั้ว b เหมือนกัน และจะมีแรงดัน v ตกคร่อมตัวต้านทานทั้งสองเท่ากัน และกำหนดให้ใช้ทิศทางอ้างอิงตามหลักการสัญนิยมเครื่องหมายพาสซีฟ เราเขียน KCL ที่โนด a ได้

$$i_s - i_1 - i_2 = 0$$

หรือ

$$i_s = i_1 + i_2$$

และจากกฎของโอห์ม

$$i_1 = \frac{v}{R_1}$$

และ

$$i_2 = \frac{v}{R_2}$$

ดังนั้น

$$i_s = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} \tag{3.15}$$

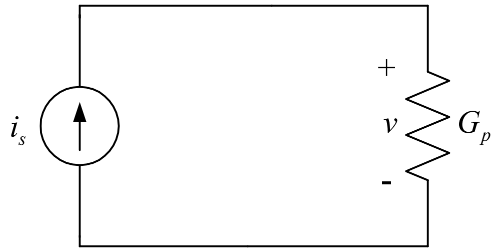
จากนิยามของความนำไฟฟ้า G คือส่วนกลับของความต้านทาน R เราเขียนสมการ (3.15) ใหม่ได้ดังนี้

$$i_s = G_1 v + G_2 v = (G_1 + G_2)\,v \tag{3.16}$$

เราสามารถสรุปได้ว่าความนำเสมือน (Equivalent Conductance) ของตัวต้านทานสองตัวขนานกันคือ

$$G_p = G_1 + G_2$$

รูปที่ 3.10 แสดงวงจรเสมือนของวงจรในรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.10 วงจรเสมือนของวงจรในรูปที่ 3.9

จากค่าความนำเสมือน G_p เราสามารถหาค่าความต้านทานเสมือน $R_p = \dfrac{1}{G_p}$ ได้ดังนี้

$$G_p = \frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

ดังนั้น

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{3.17}$$

สังเกตว่าค่าความนำเสมือนจะเพิ่มขึ้นเมื่อจำนวนตัวต้านทานต่อขนานเพิ่มมากขึ้น แต่ค่าความต้านทานเสมือนจะลดค่าลง

วงจรในรูปที่ 3.9 มีชื่ออีกอย่างหนึ่งว่า วงจรแบ่งกระแส (Current Divider) จากการที่มันแบ่งกระแสจากแหล่งจ่ายกระแสให้กับตัวต้านทานทุกตัวที่ต่อขนานกันอยู่ สามารถหาค่ากระแสที่ไหลผ่านตัวต้านทานแต่ละตัวในรูปของกระแสจากแหล่งจ่ายกระแส i_s ได้ดังนี้

$$i_1 = G_1 v \tag{3.18}$$

และ

$$v = \frac{i_s}{G_1 + G_2} \tag{3.19}$$

แทนสมการ (3.19) ลงในสมการ (3.18) ได้

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i_s \tag{3.20}$$

ในทำนองเดียวกัน

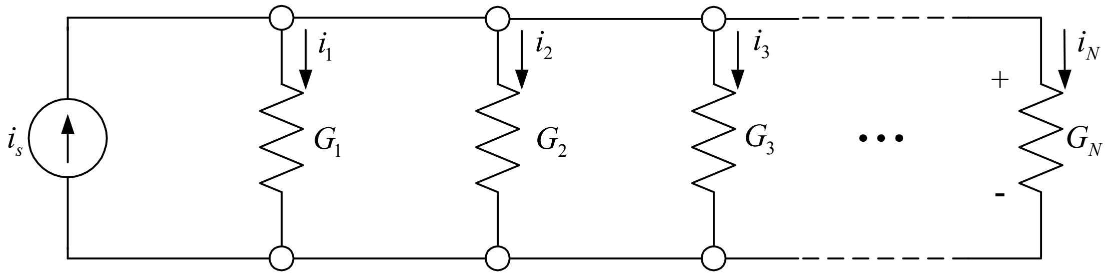
$$i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i_s \tag{3.21}$$

กล่าวได้ว่ากระแสจะแบ่งไหลระหว่าง G_1 และ G_2 ตามสัดส่วนของค่าความนำ เราอาจเขียนสมการ (3.20) และ (3.21) อยู่ในรูปของค่าความต้านทาน $R_1 = \frac{1}{G_1}$ และ $R_2 = \frac{1}{G_2}$

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_s \tag{3.22}$$

และ

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_s \tag{3.23}$$



รูปที่ 3.11 การต่อตัวนำไฟฟ้าแบบขนาน N ตัว

จากผลข้างต้นสามารถสรุปมาใช้ในกรณีทั่วไปสำหรับวงจรในรูปที่ 3.11 ซึ่งประกอบด้วยตัวต้านทาน N ตัวต่อขนานกับแหล่งจ่ายกระแส i_s จาก KCL จะได้

$$i_s = i_1 + i_2 + \ldots + i_N \tag{3.24}$$

โดยที่

$$i_n = G_n v \tag{3.25}$$

สำหรับ $n = 1, 2, \ldots, n$ เราเขียนสมการ (3.24) ใหม่ได้ดังนี้

$$i_s = (G_1 + G_2 + \ldots + G_N)\, v \tag{3.26}$$

ดังนั้น

$$i_s = v \sum_{n=1}^{N} G_n \tag{3.27}$$

และเนื่องจาก $i_n = G_n v$ เราจะสามารถหาค่า i_n ได้โดยใช้ค่า v จากสมการ (3.27)

$$i_n = \frac{G_n i_s}{\sum_{n=1}^{N} G_n} \tag{3.28}$$

จากวงจรเสมือนในรูป 3.10 มีค่าความนำเสมือน

$$G_p = \sum_{n=1}^{N} G_n \tag{3.29}$$

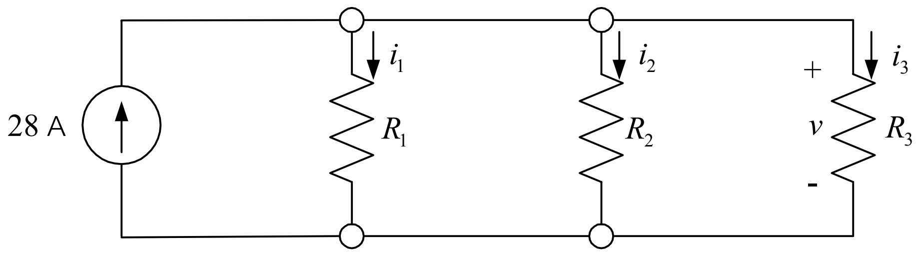
ดังนั้น

$$i_n = \frac{G_n}{G_p} i_s \tag{3.30}$$

ซึ่งก็คือสมการพื้นฐานของการแบ่งกระแสระหว่างตัวนำ N ตัวนั่นเอง นอกจากนี้สมการ (3.30) อาจเขียนในรูปของค่าความต้านทานได้

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{R_n} \tag{3.31}$$

ตัวอย่าง 3.6 จากวงจรในรูป Ex 3.6 จงหา (ก) ค่ากระแสที่ไหลในตัวต้านทานแต่ละตัว (ข) วงจรเสมือนของวงจรนี้ และ (ค) ค่าแรงดัน v กำหนดให้ $R_1 = \frac{1}{2}\Omega \quad R_2 = \frac{1}{4}\Omega \quad R_3 = \frac{1}{8}\Omega$



รูปที่ Ex 3.6

วิธีทำ สมการสำหรับหาค่าการแบ่งกระแสคือ สมการ (3.30)

$$i_n = \frac{G_n}{G_p} i_s$$

โดยที่

$$G_p = \sum_{n=1}^{3} G_n = 2 + 4 + 8 = 14 \text{ S}$$

เขียนวงจรเสมือนได้ดังรูป และหาค่ากระแสได้ดังต่อไปนี้

$$i_1 = \frac{G_1}{G_p} i_s = \frac{2}{14}(28) = 4 \text{ A}$$

$$i_2 = \frac{G_2}{G_p} i_s = \frac{4}{14}(28) = 8 \text{ A}$$

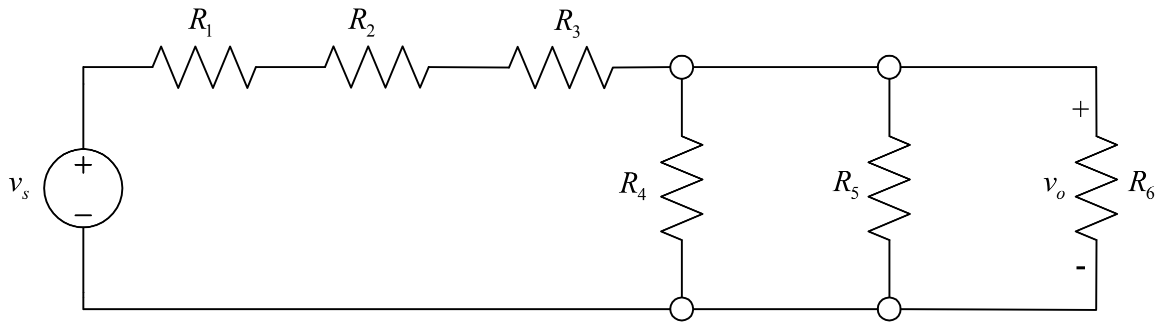
$$i_3 = \frac{G_3}{G_p} i_s = \frac{8}{14}(28) = 16 \text{ A}$$

และหาค่าแรงดัน v ได้คือ

$$v = \frac{i_1}{G_1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ V}$$

3.4 ตัวอย่างการวิเคราะห์วงจรตัวต้านทานอย่างง่าย

ในหัวข้อนี้จะยกตัวอย่างการวิเคราะห์วงจรตัวต้านทานอย่างง่าย ซึ่งจะใช้ทฤษฎีที่เรียนมาในบทนี้และบทที่แล้วมาแก้ปัญหา เช่นการหาค่าความต้านทานเสมือน เพื่อลดรูปวงจรให้ง่าย นอกจากนี้ยังพิจารณาวงจรที่มีแหล่งจ่ายแบบขึ้นกับตัวแปรอื่นในวงจรด้วย ในบทถัดไปจะได้เรียนรู้เทคนิคการวิเคราะห์วงจรที่เป็นระบบมากขึ้น



รูปที่ 3.12 วงจรประกอบด้วยชุดตัวต้านทานต่ออนุกรมและชุดตัวต้านทานที่ต่อขนาน

หลักการของการแทนวงจรด้วยวงจรอีกวงจรหนึ่งซึ่งมีคุณสมบัติเหมือนกันทุกประการ เราเรียกว่าการแทนด้วยวงจรเสมือน (Equivalent Circuit) พิจารณาวงจรในรูปที่ 3.12 ซึ่งประกอบด้วยชุดของความต้านทานที่ต่ออนุกรมและชุดของความต้านทานที่ต่อขนานต่อกับแหล่งจ่ายแรงดัน v_s ต้องการหาค่าแรงดันออก v_o ใช้วิธีการหาวงจรเสมือนได้โดยหาค่าความต้านทานเสมือนของตัวต้านทานที่ต่ออนุกรมได้

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3$$

และค่าความต้านทานเสมือนของตัวต้านทานที่ต่อขนานได้

$$R_p = \frac{1}{G_p}$$

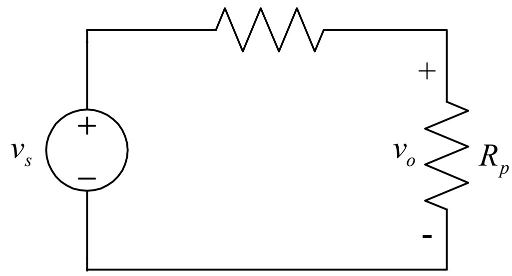
โดยที่

$$G_p = G_4 + G_5 + G_6$$

จะได้วงจรเสมือนดังในรูปที่ 3.13 และจากนั้นใช้หลักการของการแบ่งแรงดันจะได้

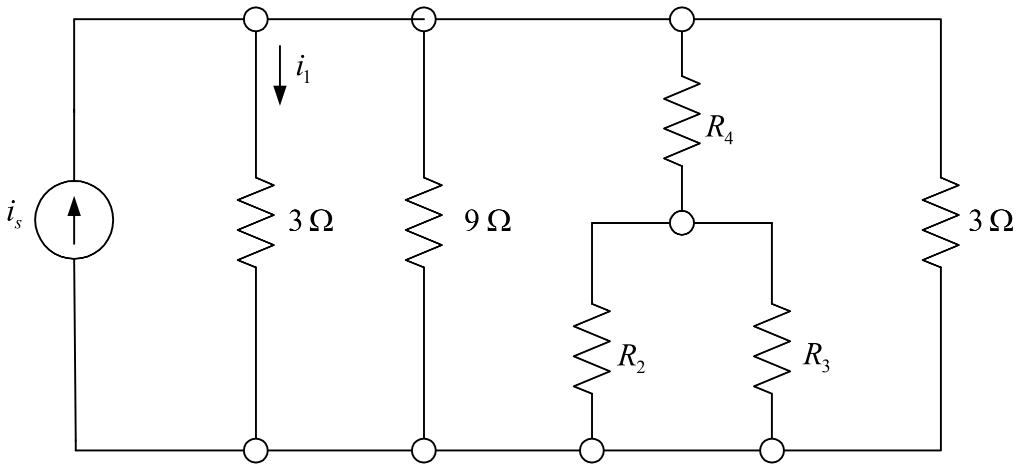
$$v_o = \frac{R_p}{R_s + R_p} v_s$$

สามารถใช้หลักการเดียวกันนี้กับวงจรที่มีความต้านทานหลายชุดต่อกันแบบต่างๆ ได้ โดยอาจมีจำนวนขั้นตอนเพิ่มขึ้นเท่านั้น

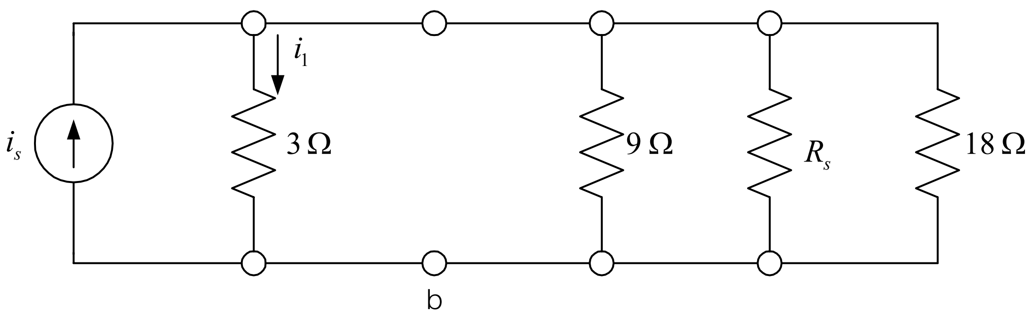


รูปที่ 3.13 วงจรเสมือนของรูป 3.12

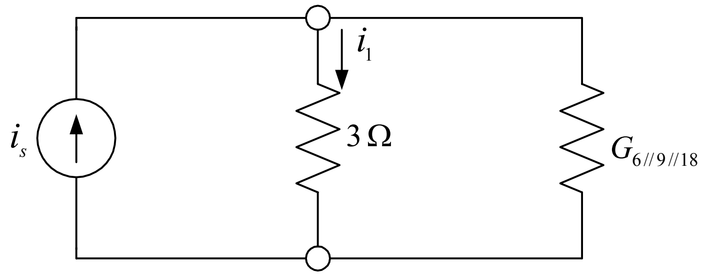
ตัวอย่าง 3.7 พิจารณาวงจรในรูป Ex 3.7 (ก) จงหาค่ากระแส i_1 เมื่อกำหนด $R_4 = 2\,\Omega$ และ $R_2 = R_3 = 8\,\Omega$



(ก)



(ข)



(ค)

รูปที่ Ex 3.7

วิธีทำ จากวงจร เนื่องจากต้องการหาค่ากระแส i_1 ดังนั้นเราจะพยายามลดรูปวงจรให้เหลือตัวต้านทาน $3\,\Omega$ ต่อขนานอยู่กับตัวต้านทานเสมือนตัวหนึ่ง จากนั้นจะสามารถใช้หลักการแบ่งกระแสหาค่ากระแสที่ต้องการได้

เนื่องจาก R_2 ขนานกับ R_3 เราหาค่าความต้านทานเสมือนของตัวต้านทานสองตัวนี้ได้

$$R_{R_2//R_3} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 4\,\Omega$$

นำค่านี้ไปบวกกับค่าความต้านทาน R_4 เนื่องจากต่ออนุกรมกันได้

$$R_s = R_4 + R_{R_2//R_3} = 2 + 4 = 6\,\Omega$$

จะได้วงจรที่ลดรูปแล้วบางส่วนดังในรูป Ex 3.7 (ข) ความต้านทาน R_s นี้ต่อขนานกับตัวต้านทาน $9\,\Omega$ และ $18\,\Omega$ ดังนั้นเราจะหาความต้านทานเสมือน $G_{6//9//18}$ ของความต้านทานที่ขนานกันสามตัวนี้

$$G_{6//9//18} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{3}\ \text{S}$$

จะได้วงจรเสมือน ดังในรูป Ex 3.7 (ค) ใช้หลักการแบ่งกระแสหาค่ากระแส

$$i_1 = \frac{G_1}{G_p} i_s$$

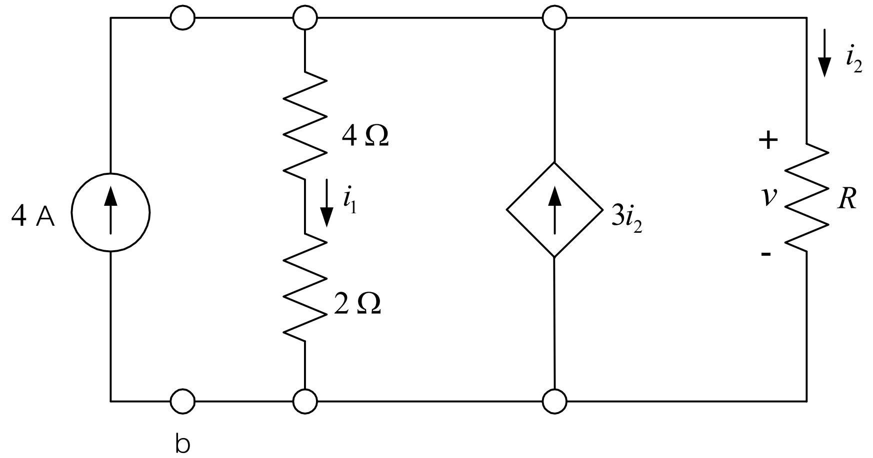
เมื่อ

$$G_p = G_1 + G_{6//9//18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\ \text{S}$$

เพราะฉะนั้นจะได้ค่ากระแส

$$i_1 = \frac{1/3}{2/3} i_s = \frac{1}{2} i_s$$

ตัวอย่าง 3.8 จงหาค่ากระแส i_2 และแรงดัน v สำหรับตัวต้านทาน R ในรูป Ex 3.8 เมื่อกำหนดค่า $R = 16\,\Omega$



รูปที่ Ex 3.8

วิธีทำ สังเกตว่าแหล่งจ่ายกระแสควบคุมด้วยกระแสนั้นขึ้นอยู่กับตัวคุมคือกระแส i_2 ดังนั้นเขียน KCL ที่โนด a จะได้

$$4 - i_1 + 3i_2 - i_2 = 0 \quad (3.32)$$

และจากกฎของโอห์ม

$$i_1 = \frac{v}{4+2} = \frac{v}{6}$$

และ

$$i_2 = \frac{v}{R} = \frac{v}{16}$$

แทนลงในสมการ (3.32) ได้

$$4 - \frac{v}{6} + 2\left(\frac{v}{16}\right) = 0$$

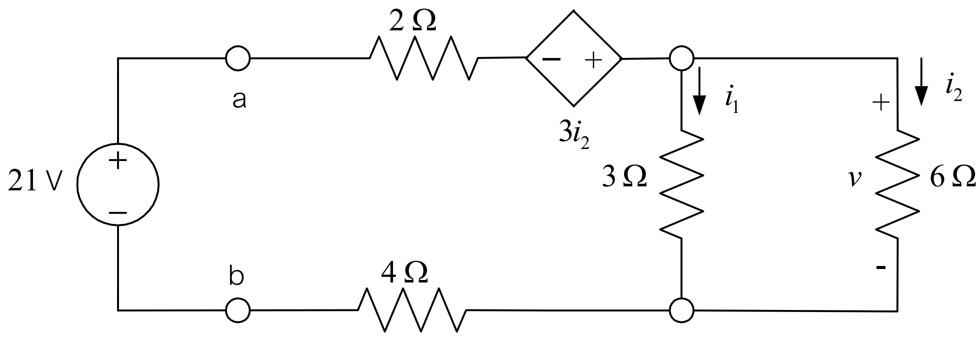
แก้สมการหาค่าแรงดัน

$$v = 96 \text{ V}$$

และ

$$i_2 = \frac{v}{16} = 6 \text{ A}$$

ตัวอย่าง 3.9 จงหาค่ากระแส i_2 และแรงดัน v สำหรับวงจรในรูป Ex 3.9



รูปที่ Ex 3.9

วิธีทำ สังเกตว่าแหล่งจ่ายแรงดันควบคุมด้วยกระแสนั้นมีค่าขึ้นอยู่กับตัวคุมคือกระแส i_2 ดังนั้นก่อนลดรูปตัวต้านทานที่ขนานกันอยู่เราเขียน สมการสำหรับ i_2 ก่อน

$$i_2 = \frac{v}{6}$$

จากนั้นจึงลดรูปตัวต้านทานที่ขนานกัน

$$R_{3//6} = \frac{3 \times 6}{3+6} = 2\ \Omega$$

ดังนั้นตัวต้านทานทั้งหมดที่ต่ออนุกรมกันรอบวงรอบคือ

$$R_s = 2 + R_{3//6} + 4 = 8\ \Omega$$

เขียน KVL รอบวงรอบจะได้

$$-21 + 8i - 3i_2 = 0 \tag{3.33}$$

ใช้หลักการแบ่งกระแสสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่าง i_2 และ i ได้

$$i_2 = \frac{G_2}{G_p} i$$

เมื่อ $G_2 = \frac{1}{6}$ S และ $G_p = \frac{1}{R_{3//6}} = \frac{1}{2}$ S ดังนั้นจะได้

$$i_2 = \frac{i}{3}$$

หรือ $i = 3i_2$ แทนลงในสมการ (3.33)

$$i_2 = 1 \text{ A และ } v = 6i_2 = 6 \text{ V}$$

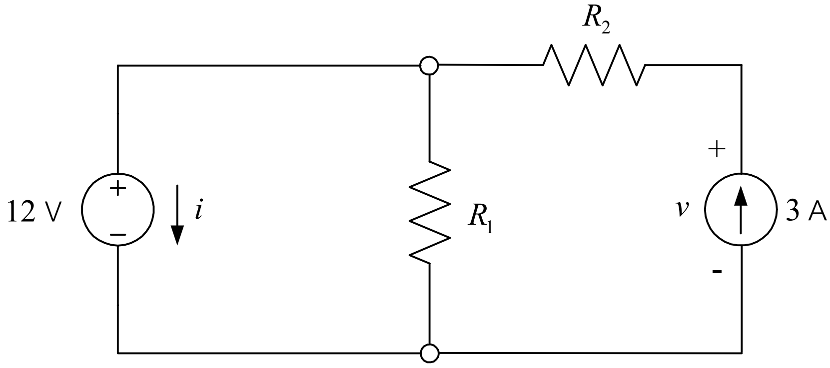
3.5 แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จากวงจรในรูป P3.1

   (ก) กำหนด $R_1 = 6\,\Omega$ และ $R_2 = 3\,\Omega$ จงหาค่ากระแส i และแรงดัน v

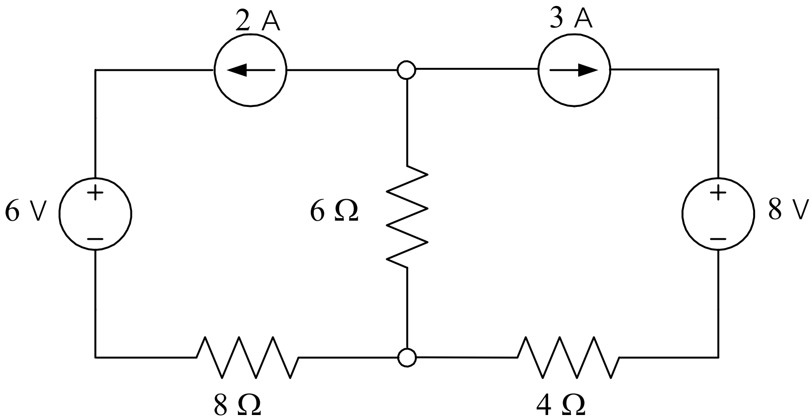
   (ข) กำหนด $i = 1.5$ A และ $v = 2$ A จงหาค่าความต้านทาน R_1 และ R_2

   (ค) ถ้าแหล่งจ่ายแรงดันจ่ายกำลัง 24 W และแหล่งจ่ายกระแสจ่ายกำลัง 9 W จงหาค่ากระแส i และแรงดัน v และหาค่าความต้านทาน R_1 และ R_2



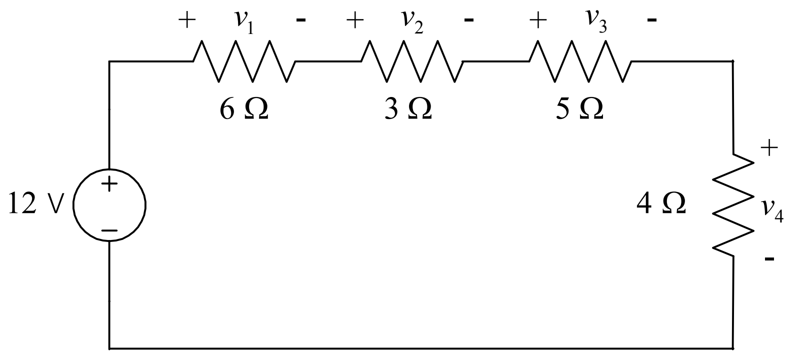
รูปที่ P 3.1

2. จากวงจรในรูป P3.2 จงหาค่ากำลังที่ตัวต้านทานแต่ละตัวได้รับ



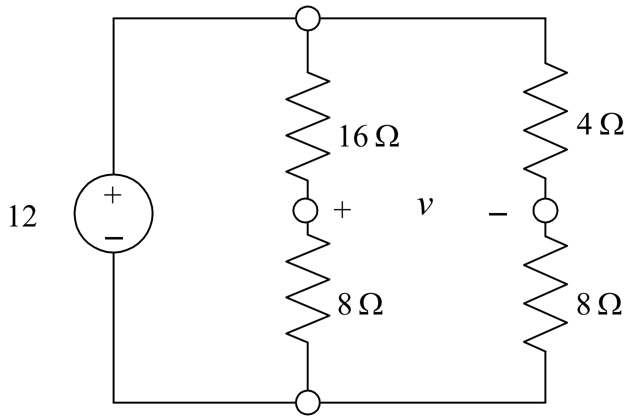
รูปที่ P 3.2

3. จงใช้หลักการแบ่งแรงดันหาค่าแรงดัน v_1 v_2 v_3 และ v_4 ในวงจรในรูป P3.3



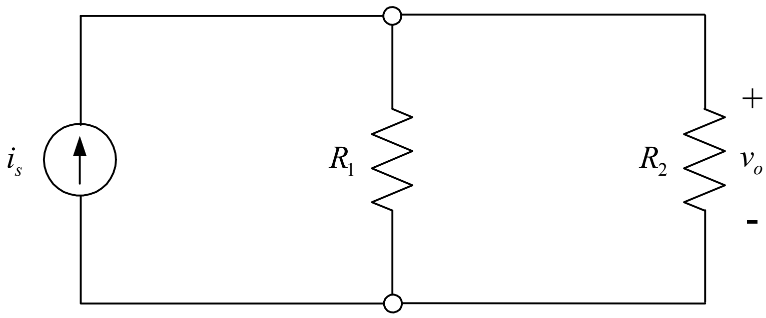
รูปที่ P 3.3

4. จงหาค่าแรงดัน v ของวงจรในรูป P3.4



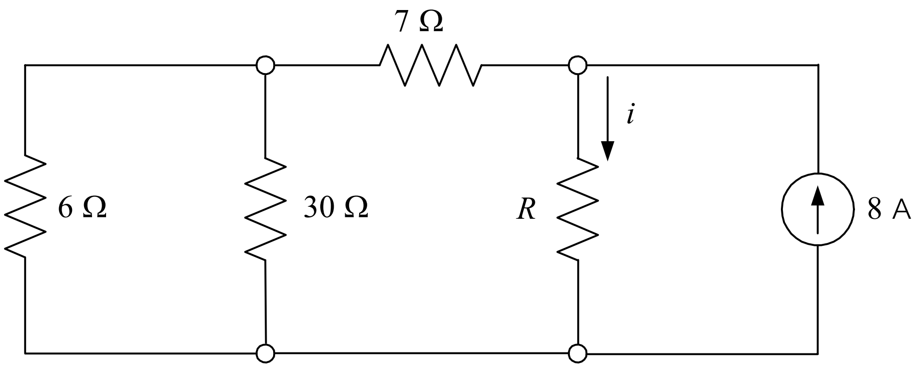
รูปที่ P 3.4

5. พิจารณาวงจรในรูป P3.5 ถ้า $4\,\Omega \le R_1 \le 6\,\Omega$ และ $R_2 = 10\,\Omega$ จงเลือกค่าแหล่งจ่ายกระแส i_s เพื่อทำให้แรงดัน v_o มีค่าอยู่ระหว่าง 9 ถึง 13 V



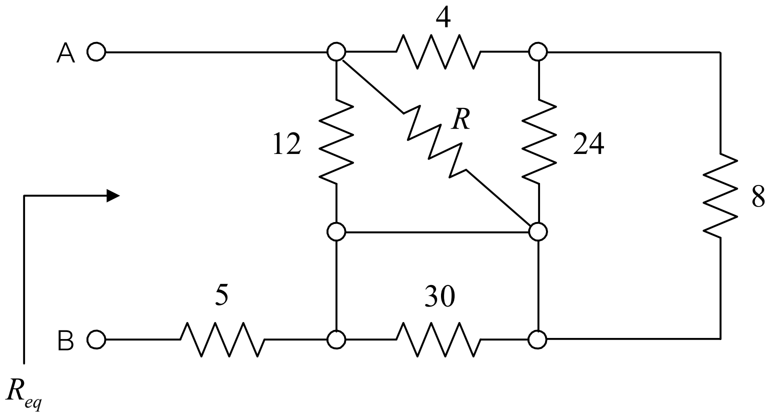
รูปที่ P 3.5

6. จากวงจรในรูป P3.6 จงหาค่าความต้านทาน R และค่ากำลังที่จ่ายให้กับตัวต้านทาน $6\,\Omega$ เมื่อกระแสมีค่า $i = 2$ A



รูปที่ P 3.6

7. จากวงจรในรูป P3.7 จงหาค่าความต้านทาน R เมื่อกำหนด $R_{eq} = 9\,\Omega$



รูปที่ P 3.7