EN811100
LINEAR CIRCUIT ANALYSIS

Chapter 7

First-Order Circuits

Feb 15, 2563

C. K. Alexander – M. N. O. Sadiku

Fundamentals of Electric Circuits, 5th Edition, The McGraw-Hill Companies 2013

J. A. Svoboda – R. C. Dorf

Introduction to Electric Circuits, 9th edition, John Wiley & Sons, Inc. 2014

Chapter 7 First-Order Circuits

Circuits that contain only one inductor and no capacitors or only one capacitor and no inductors can be represented by a first-order differential equation. These circuits are called **first-order circuits**.

RC Circuits　　RL Circuits

7.1 The Source-Free RC Circuit

7.2 The Source-Free RL Circuit

7.3 Unit-step Function

7.4 Step Response of an RC Circuit

7.5 Step Response of an RL Circuit

หมายเหตุ: Source Free หมายถึงกรณีที่วงจรไม่มี Source อยู่ในวงจร โดยวงจรจะทำงานได้โดยใช้พลังงานที่สะสมใน C หรือ L เท่านั้น

Summary from Chapter 6

Important characteristics of the basic elements.†

Relation	Resistor (R)	Capacitor (C)	Inductor (L)
v-i:	$v = iR$	$v = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + v(t_0)$	$v = L\frac{di}{dt}$
i-v:	$i = v/R$	$i = C\frac{dv}{dt}$	$i = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + i(t_0)$
p or w:	$p = i^2R = \frac{v^2}{R}$	$w = \frac{1}{2}Cv^2$	$w = \frac{1}{2}Li^2$
Series:	$R_{eq} = R_1 + R_2$	$C_{eq} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$	$L_{eq} = L_1 + L_2$
Parallel:	$R_{eq} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$	$C_{eq} = C_1 + C_2$	$L_{eq} = \frac{L_1L_2}{L_1 + L_2}$

3

Summary from Chapter 6

Important characteristics of the basic elements.†

Relation	Resistor (R)	Capacitor (C)	Inductor (L)
ที่ DC Condition	ปกติ	Open circuit	Short circuit

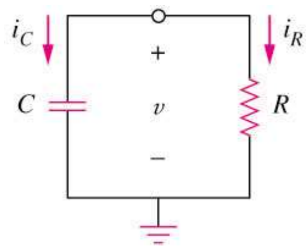
(DC Condition เกิดขึ้นเมื่อต่ออุปกรณ์นี้กับ DC Source เป็นเวลานานๆ)

คุณสมบัติ	ปกติ	แรงดันของ C ไม่สามารถเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน	กระแสของ L ไม่สามารถเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน

4

7.1 The Source-Free RC Circuit

- A **first-order circuit** is characterized by a first-order differential equation.



By KCL

$$i_R + i_C = 0 \rightarrow \frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} = 0$$

Ohms law   Capacitor law

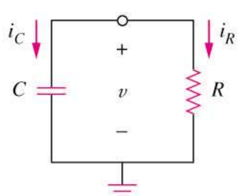
- Apply Kirchhoff's laws to purely resistive circuit results in algebraic equations.
- Apply the laws to RC and RL circuits produces differential equations.

5

7.1 The Source-Free RC Circuit

ตอนเริ่มต้น สมมุติว่า แรงดันของ C คือ V_0

พลังงานสะสมใน C คือ $W = \frac{1}{2}CV_0^2$



To solve for v(t)

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0$$

rearrange

ได้สมการเชิงอนุพันธ์ → $\frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC}dt$

Integrate both sides

Integration constant

$$\ln v = -\frac{t}{RC} + \ln A$$

$$\ln\frac{v}{A} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow v(t) = Ae^{-t/RC}$$

$$v(0) = A = V_0 \Rightarrow v(t) = V_0 e^{-t/RC}$$ Natural Response

6

อธิบาย ขยายความ

Integration constant

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC}dt \Rightarrow \text{Integrate both sides} \Rightarrow \ln v = -\frac{t}{RC} \boxed{+k} = -\frac{t}{RC} + \boxed{\ln A}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln(x)$$

$$\ln v - \ln A = -\frac{t}{RC}$$

$$\ln \frac{v}{A} = -\frac{t}{RC}$$

$$\frac{v}{A} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

ถ้า $y = e^x$

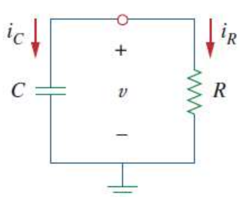
จะได้ $\ln(y) = \ln(e^x) = x$

ดังนั้น $y = e^x \Leftrightarrow \ln(y) = x$

เขียน v ในรูปฟังก์ชันของตัวแปรเวลา t ได้เป็น

$$v(t) = Ae^{-t/RC}$$

7



$$v(t) = V_0 e^{-t/RC} \qquad i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0}{R}e^{-t/\tau}$$

กำลังไฟฟ้าที่สูญเสียที่ Resistor

$$p(t) = vi_R = \frac{V_0^2}{R}e^{-2t/\tau}$$

พลังงานไฟฟ้าที่สูญเสียที่ Resistor

$$w_R(t) = \int_0^t p(\lambda)d\lambda = \int_0^t \frac{V_0^2}{R}e^{-2\lambda/\tau}d\lambda$$

$$= -\frac{\tau V_0^2}{2R}e^{-2\lambda/\tau}\Big|_0^t = \frac{1}{2}CV_0^2(1 - e^{-2t/\tau}), \qquad \tau = RC$$

วงจร Source free RC ทำงานได้โดยพลังงานที่สะสมใน C จะถูกเปลี่ยนรูปเป็นพลังงานที่จ่ายให้ R ทำให้แรงดันของ C ตกลงไปเรื่อยๆ ในขณะที่ R จะร้อนขึ้นเรื่อยๆ (พลังงานที่สะสมใน C ถูกเปลี่ยนเป็นพลังงานความร้อนที่ R)

8

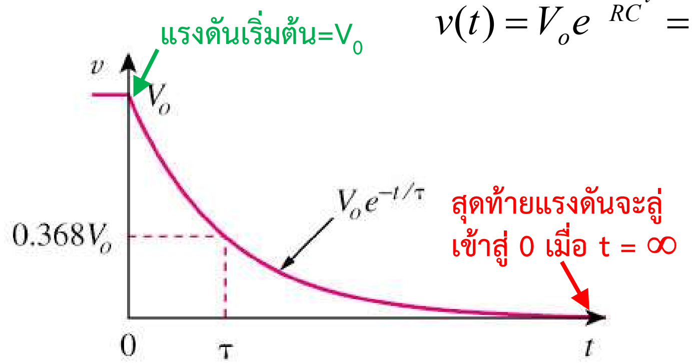
7.1 The Source-Free RC Circuit

- The **natural response** of a circuit refers to the behavior (in terms of voltages and currents) of the circuit itself, with no external sources of excitation.

$$v(t) = V_o e^{-\frac{1}{RC}t} = V_o e^{-\frac{t}{\tau}}$$

τ=Time constant

$\tau = RC$

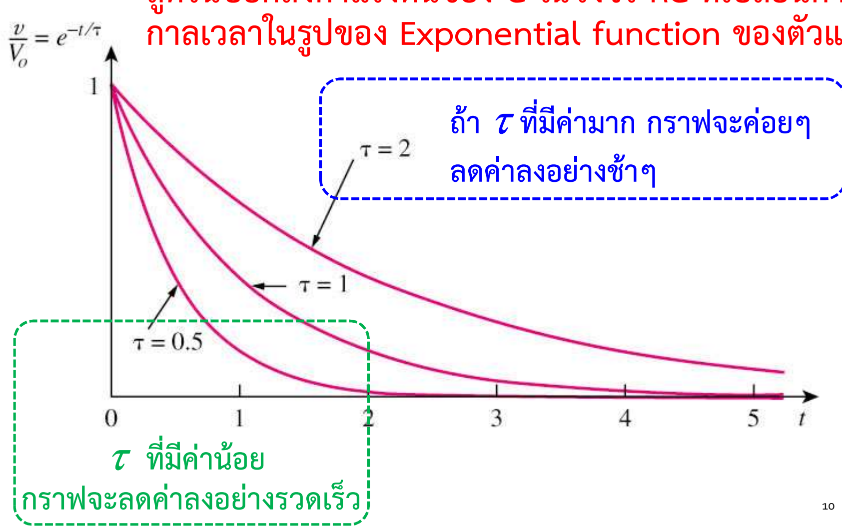


- The **time constant** τ of a circuit is the time required for the response to decay by a factor of 1/e or 36.8% of its initial value.
- v decays faster for small τ and slower for large τ.

9

$$\boxed{v(t) = V_o e^{-\frac{1}{RC}t} = V_o e^{-\frac{t}{\tau}}} \qquad \tau = RC$$

สูตรนี้บอกถึงค่าแรงดันของ C ในวงจร RC ที่เปลี่ยนค่าตามกาลเวลาในรูปของ Exponential function ของตัวแปร t

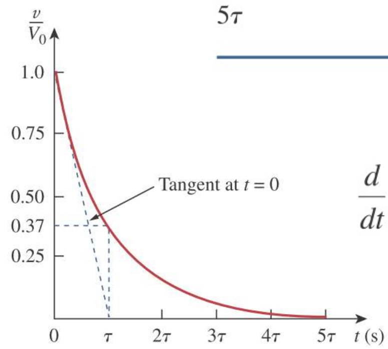


10

7.1 The Source-Free RC Circuit

Values of $v(t)/V_0 = e^{-t/\tau}$.

t	$v(t)/V_0$
τ	0.36788
2τ	0.13534
3τ	0.04979
4τ	0.01832
5τ	0.00674



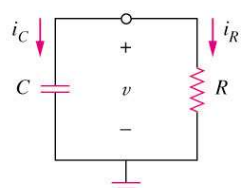
$$\left.\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{V_0}\right)\right|_{t=0} = -\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\Big|_{t=0} = -\frac{1}{\tau}$$

11

7.1 The Source-Free RC Circuit

The key to working with a source-free RC circuit is finding:

$v(t) = V_0\, e^{-t/\tau}$ where $\tau = R\,C$



1. The initial voltage $v(0) = V_0$ across the capacitor.
2. The time constant τ = RC.

หลักการสำคัญในการวิเคราะห์วงจร Source free RC คือจะต้องหา

1. ค่าแรงดันเริ่มต้นของ C หรือค่า V_0
2. ค่า Time constant τ

นำไปหาสมการของ $v(t)$ ต่อไป

12

$$v(t) = V_0\, e^{-t/\tau} \quad \text{where} \quad \tau = R\,C$$

หมายเหตุ : Time constant

τ = RC มีหน่วยเป็นวินาทีเพราะว่าพจน์ $v(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ นี้ เลขยกกำลังของ e จะต้องไม่มีหน่วย

แต่ t มีหน่วยเป็นวินาที

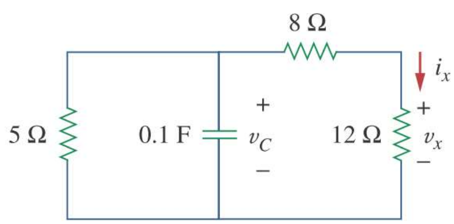
$$v(t) = Ae^{\boxed{-\frac{t}{\tau}}}$$

ดังนั้น τ จะต้องมีหน่วยเป็นวินาทีด้วย เพื่อจะให้หน่วยของ t และหน่วยของ τ หักล้างกัน

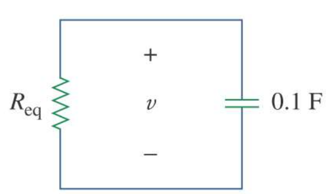
13

7.1 The Source-Free RC Circuit

Example 1 $v_C(0) = 15$ V. Find v_C, v_x, and i_x for $t > 0$.



Equivalent circuit



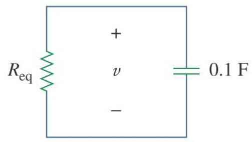
$$R_{eq} = \frac{20 \times 5}{20 + 5} = 4\ \Omega$$

จะได้ค่า Time constant

$$\tau = R_{eq}C = 4(0.1) = 0.4\ \text{s}$$

14

7.1 The Source-Free RC Circuit

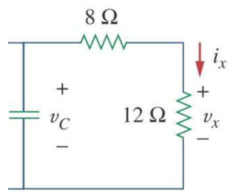


ได้สูตร v(t)

$$v = v(0)e^{-t/\tau} = 15e^{-t/0.4}\ \text{V}$$

$$v_C = v = 15e^{-2.5t}\ \text{V}$$

Voltage divider



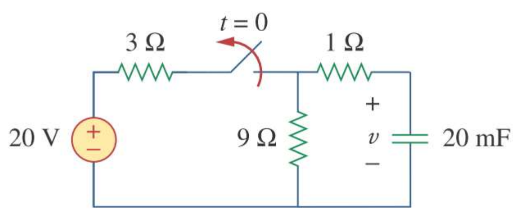
$$v_x = \frac{12}{12+8}v = 0.6(15e^{-2.5t}) = 9e^{-2.5t}\ \text{V}$$

Ohm's law

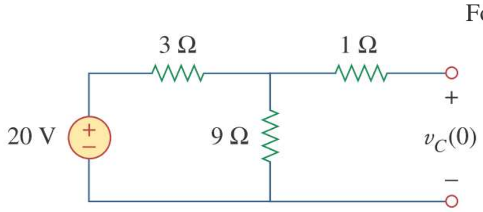
$$i_x = \frac{v_x}{12} = 0.75e^{-2.5t}\ \text{A}$$

Example 2

The switch in the circuit has been closed for a long time, and it is opened at $t = 0$.



Find $v(t)$ for $t \geq 0$. Calculate the initial energy stored in the capacitor.



For $t < 0$,

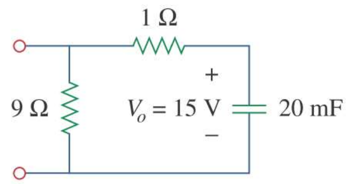
$$v_C(t) = \frac{9}{9+3}(20) = 15\ \text{V},$$

จะได้ค่าแรงดันเริ่มต้น

$$v_C(0) = V_0 = 15\ \text{V}$$

Example 2

For $t > 0$,



$$R_{eq} = 1 + 9 = 10\ \Omega$$

จะได้ค่า Time constant

$$\tau = R_{eq}C = 10 \times 20 \times 10^{-3} = 0.2\ \text{s}$$

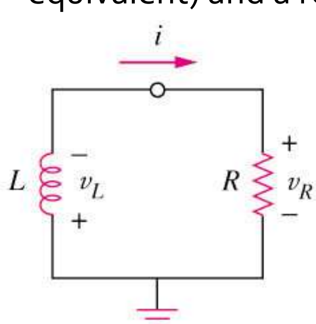
ได้สูตร v(t)

$$v(t) = v_C(0)e^{-t/\tau} = 15e^{-t/0.2}\ \text{V} = 15e^{-5t}\ \text{V}$$

$$w_C(0) = \frac{1}{2}Cv_C^2(0) = \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-3} \times 15^2 = 2.25\ \text{J}$$

7.2 The Source-Free RL Circuit

- A **first-order RL circuit** consists of a inductor L (or its equivalent) and a resistor (or its equivalent)



By KVL $v_L + v_R = 0$

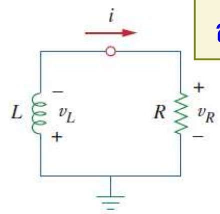
→ $L\dfrac{di}{dt} + iR = 0$

Inductors law

Ohms law

→ $\dfrac{di}{i} = -\dfrac{R}{L}dt$ → $i(t) = I_0\, e^{-Rt/L}$

ที่มา



ตอนเริ่มต้นสมมุติว่า

กระแสผ่าน L คือ $i(0) = I_0$

พลังงานสะสมใน L คือ $w(0) = \frac{1}{2} L I_0^2$

KVL $v_L + v_R = 0$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$$

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{di}{i} = -\int_0^t \frac{R}{L} dt \Rightarrow \ln i \Big|_{I_0}^{i(t)} = -\frac{Rt}{L}\Big|_0^t$$

$$\ln i(t) - \ln I_0 = -\frac{Rt}{L} + 0$$

$$\ln \frac{i(t)}{I_0} = -\frac{Rt}{L} \Rightarrow \boxed{i(t) = I_0 e^{-Rt/L}}$$

อธิบาย ขยายความ

Integration constant

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt$$ Integrate both sides $$\ln(i) = -\frac{R}{L}t + \boxed{k} = -\frac{R}{L}t + \boxed{\ln(I_0)}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$$

$$\ln i - \ln I_0 = -\frac{R}{L}t$$

$$\ln\left(\frac{i}{I_0}\right) = -\frac{R}{L}t$$

$$\frac{i}{I_0} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

ถ้า $y = e^x$

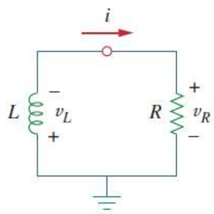
จะได้ $\ln(y) = \ln(e^x) = x$

ดังนั้น $\ln(y) = x \Leftrightarrow y = e^x$

เขียน i ในรูปฟังก์ชันของตัวแปรเวลา t ได้เป็น

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

20



$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

$$v_R(t) = iR = I_0 R e^{-t/\tau}$$

กำลังไฟฟ้าที่สูญเสียที่ Resistor

$$p = v_R i = I_0^2 R e^{-2t/\tau}$$

พลังงานไฟฟ้าที่สูญเสียที่ Resistor

$$w_R(t) = \int_0^t p(\lambda)d\lambda = \int_0^t I_0^2 e^{-2\lambda/\tau}\, d\lambda = -\frac{\tau}{2} I_0^2 R e^{-2\lambda/\tau}\Big|_0^t, \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

$$w_R(t) = \frac{1}{2} L I_0^2 (1 - e^{-2t/\tau})$$

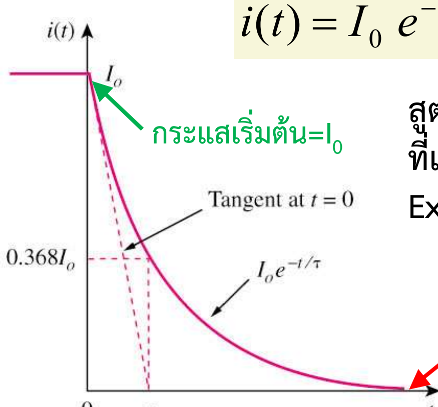
วงจร Source free RL ทำงานได้โดยพลังงานที่สะสมใน L จะถูกเปลี่ยนรูปเป็นพลังงานที่จ่ายให้ R ทำให้กระแสของ L ตกลงไปเรื่อยๆ ในขณะที่ R จะร้อนขึ้นเรื่อยๆ (พลังงานที่สะสมใน L ถูกเปลี่ยนเป็นพลังงานความร้อนที่ R)

21

7.2 The Source-Free RL Circuit

A general form representing a RL

$$i(t) = I_0\, e^{-t/\tau} \quad \textbf{where} \quad \tau = \frac{L}{R}$$



สูตรนี้บอกถึงกระแสของ L ในวงจร RL ที่เปลี่ยนค่าตามกาลเวลาในรูปของ Exponential function ของตัวแปร t

สุดท้ายกระแสจะลู่เข้าสู่ 0 เมื่อ t = ∞

- The **time constant** τ of a circuit is the time required for the response to decay by a factor of 1/*e* or 36.8% of its initial value.
- *i(t)* decays faster for small τ and slower for large τ.
- The general form is very similar to a RC source-free circuit.

22

7.2 The Source-Free RL Circuit

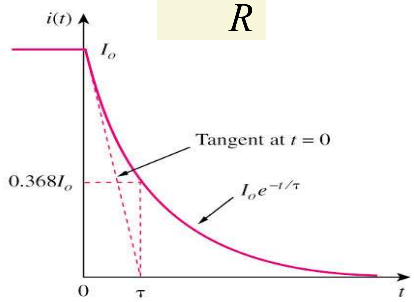
Comparison between a RL and RC circuit

An RL source-free circuit

$$i(t) = I_0 \, e^{-t/\tau}$$

where

$$\tau = \frac{L}{R}$$

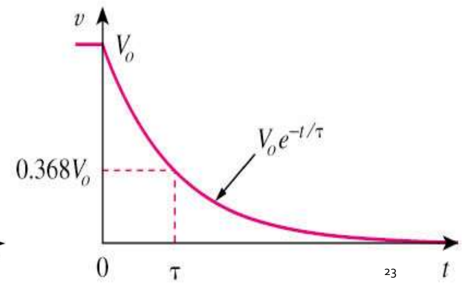


An RC source-free circuit

$$v(t) = V_0 \, e^{-t/\tau}$$

where

$$\tau = RC$$

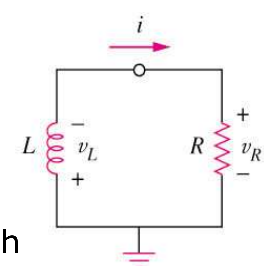


23

7.2 The Source-Free RL Circuit

The key to working with a source-free RL circuit is finding:

$$i(t) = I_0 \, e^{-t/\tau} \quad \text{where} \quad \tau = \frac{L}{R}$$



1. The initial voltage $i(0) = I_0$ through the inductor.
2. The time constant τ = L/R.

หลักการสำคัญในการวิเคราะห์วงจร Source free RL คือจะต้องหา

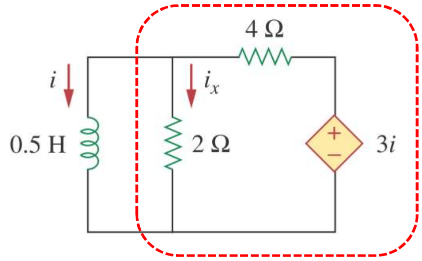
1. ค่ากระแสเริ่มต้นของ L หรือค่า I_0
2. ค่า Time constant τ

นำไปหาสมการของ $i(t)$ ต่อไป

24

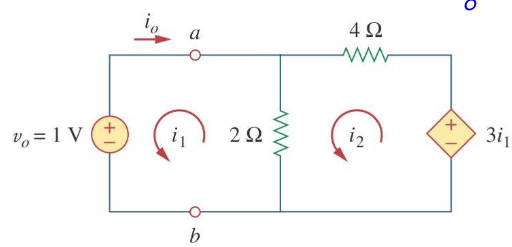
7.2 The Source-Free RL Circuit

Example 3 Assuming that $i(0) = 10$ A, calculate $i(t)$ and $i_x(t)$

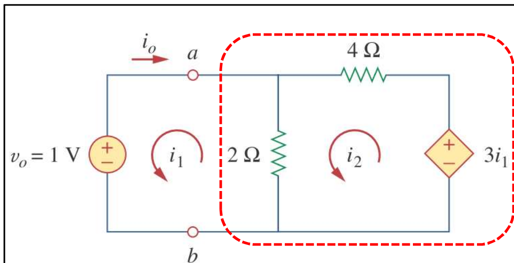


หา Equivalent Resistance R_{eq}
ใช้หลักการในบทที่ 4

ตัด L ออกไป แล้วนำ Voltage Source 1 V มาต่อเพื่อหา i_o



$$R_{eq} = \frac{v_o}{i_o}$$



Mesh 1

$$2(i_1 - i_2) + 1 = 0$$

$$i_1 - i_2 = -\frac{1}{2}$$

Mesh 2

$$6i_2 - 2i_1 - 3i_1 = 0$$

$$i_2 = \frac{5}{6}i_1$$

จะได้

$$i_1 = -3 \text{ A},$$

ค่ากระแสเริ่มต้น

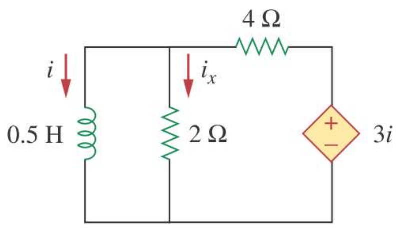
$$i_o = -i_1 = 3 \text{ A}$$

$$R_{eq} = R_{Th} = \frac{v_o}{i_o} = \frac{1}{3}\,\Omega$$

ค่า Time constant

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\text{ s}$$

26



$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\ \text{s}$$

ได้สูตร i(t)

$$i(t) = i(0)e^{-t/\tau} = 10e^{-(2/3)t}\ \text{A}, \qquad t > 0$$

$$v = L\frac{di}{dt} = 0.5(10)\left(-\frac{2}{3}\right)e^{-(2/3)t} = -\frac{10}{3}e^{-(2/3)t}\ \text{V}$$

$$i_x(t) = \frac{v}{2} = -1.6667e^{-(2/3)t}\ \text{A}, \qquad t > 0$$

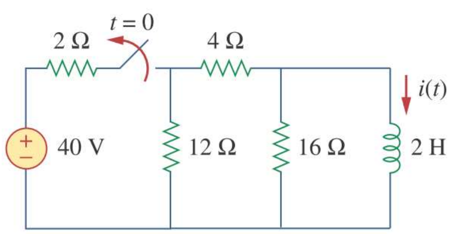
หมายเหตุ

$$\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$$

27

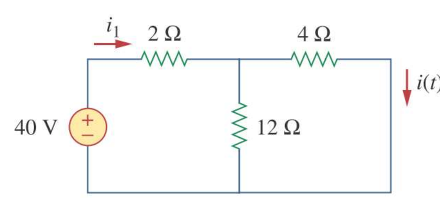
7.2 The Source-Free RL Circuit

Example 4 The switch in the circuit has been closed for a long time. At t= 0 the switch is opened. Calculate $i(t)$ for $t > 0$.



ตอน t < 0 นั้น Switch close เป็นเวลานาน แสดงว่า L เสมือนเป็น Short circuit

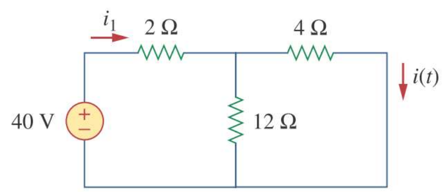
$$i_1 = \frac{40}{2+4\|12} = \frac{40}{2+3} = 8\ \text{A}$$



For t < 0

28

For t < 0



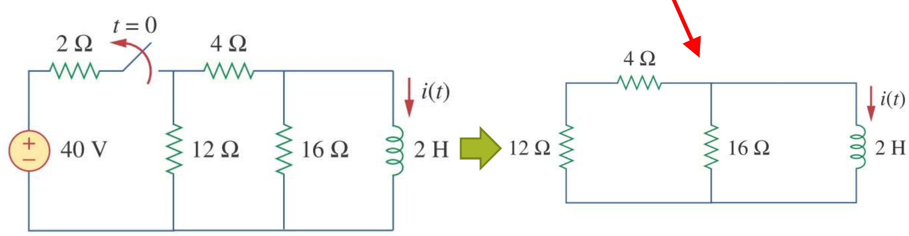
$$i_1 = \frac{40}{2+3} = 8\text{ A}$$

Using current divider

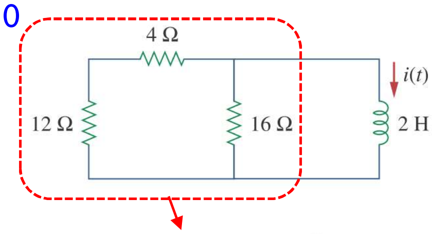
$$i(t) = \frac{12}{12+4} i_1 = 6\text{ A}, \qquad t < 0$$

จะได้ $i(0) = i(0^-) = 6\text{ A}$

ต่อมา เมื่อ t > 0 Switch ถูก Open วงจรจะกลายเป็น



For t < 0



$$R_{eq} = (12+4) \parallel 16 = 8\ \Omega$$

จะได้

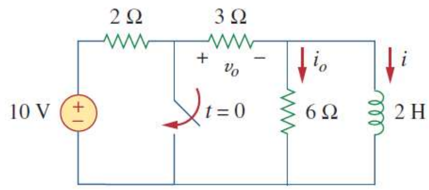
$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}\text{ s}$$

ดังนั้นจะได้สูตรของ i(t)

$$i(t) = i(0)e^{-t/\tau} = 6e^{-4t}\text{ A}$$

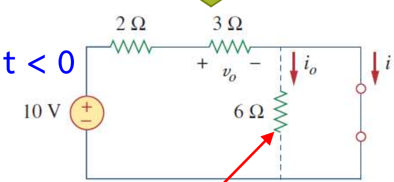
Example 7.5

In the circuit shown in Fig. 7.19, find i_o, v_o, and i for all time, assuming that the switch was open for a long time.



ตอน t < 0 นั้น Switch นั้น open เป็นเวลานาน แสดงว่า L เสมือนเป็น Short circuit

For t < 0



ไม่มีกระแสไหลผ่าน R 6 Ω เพราะถูก Short circuit อยู่

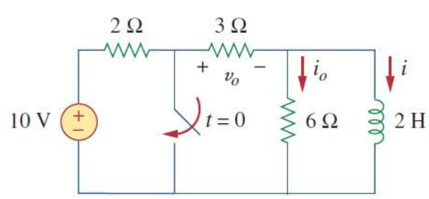
ตอนที่ t < 0 จะได้

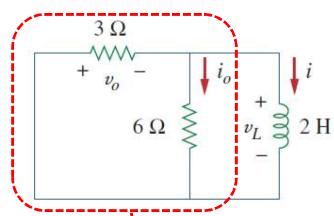
$$i_o = 0$$

$$i(t) = \frac{10}{2+3} = 2\text{ A},$$

$$v_o(t) = 3i(t) = 6\text{ V},$$

ต่อมา ตอนที่ t > 0 Switch จะ Close จะได้วงจร





$$R_{\text{Th}} = 3 \parallel 6 = 2\ \Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R_{\text{Th}}} = 1\text{ s}$$

$$i(t) = i(0)e^{-t/\tau} = 2e^{-t}\text{ A}, \qquad t > 0$$

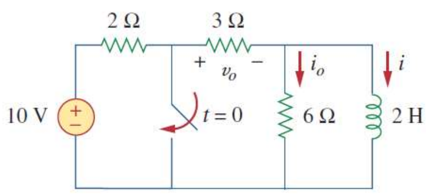
$$v_o(t) = -v_L = -L\frac{di}{dt} = -2(-2e^{-t}) = 4e^{-t}\text{ V}, \qquad t > 0$$

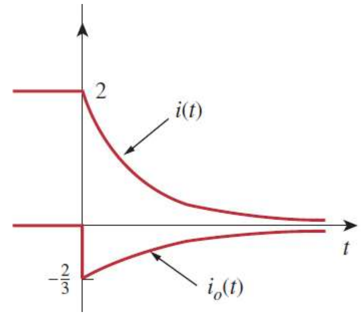
$$i_o(t) = \frac{v_L}{6} = -\frac{2}{3}e^{-t}\text{ A}, \qquad t > 0$$

สรุป ข้อนี้ จะได้

$$i_o(t) = \begin{cases} 0\text{ A}, & t < 0 \\ -\frac{2}{3}e^{-t}\text{ A}, & t > 0 \end{cases}, \qquad v_o(t) = \begin{cases} 6\text{ V}, & t < 0 \\ 4e^{-t}\text{ V}, & t > 0 \end{cases}$$

$$i(t) = \begin{cases} 2\text{ A}, & t < 0 \\ 2e^{-t}\text{ A}, & t \geq 0 \end{cases}$$





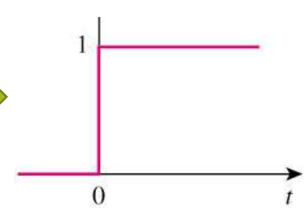
7.3 Unit-Step Function

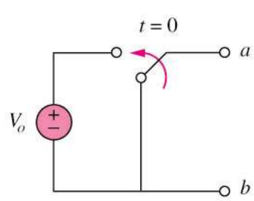
- The **unit step function** $u(t)$ is 0 for negative values of t and 1 for positive values of t.

Unit step function = สัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย

❖ สัญญาณนี้มีลักษณะเหมือนขั้นบันได 1 ขั้นที่มีความสูง = 1

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$





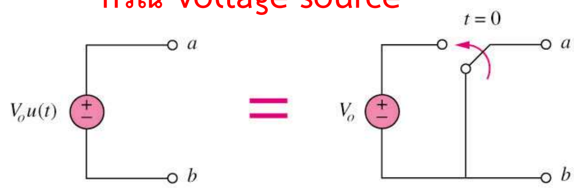
สัญญาณลักษณะนี้เกิดขึ้นตอนที่เรา
สับสวิตซ์เพื่อจ่ายแรงดัน DC
(สวิตซ์เปลี่ยนจาก Open เป็น Close)

7.3 Unit-Step Function

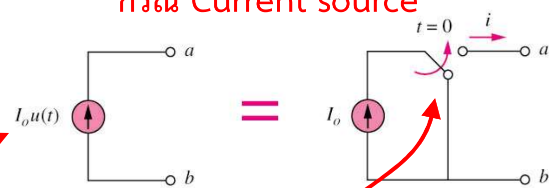
Step function เกิดขึ้นได้จากการที่เราสับสวิตซ์จ่ายแรงดัน DC หรือกระแส DC ดังรูป

*** สิ่งที่เราสนใจคือ ถ้าเราจ่าย Step function ให้กับวงจร RC หรือ RL จะเกิดอะไรขึ้น? ***

กรณี Voltage source



กรณี Current source



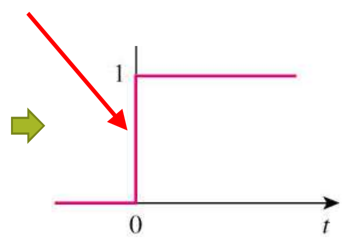
u(t) สามารถใช้แทนวงจรที่มี Switch ที่ยุ่งยากได้

35

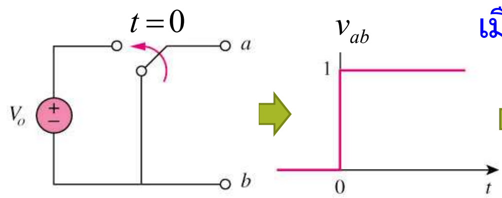
- Unit step function จัดเป็น Singularity function ชนิดหนึ่ง
- Singularity function หมายถึง function ที่ไม่ต่อเนื่อง หรือมีอนุพันธ์ที่ไม่ต่อเนื่อง

จุดที่ u(t) เปลี่ยนจาก 0 เป็น 1 เป็นจุดที่ไม่ต่อเนื่อง

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

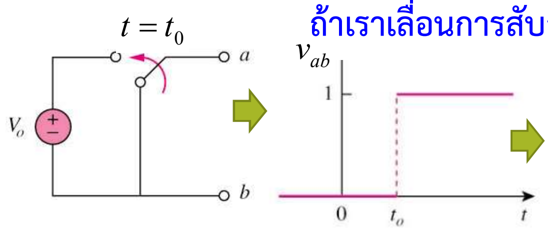


36



เมื่อเราสับสวิตซ์ตอน t=0

$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$



ถ้าเราเลื่อนการสับสวิตซ์ไปเป็นขณะเวลา t=t_0

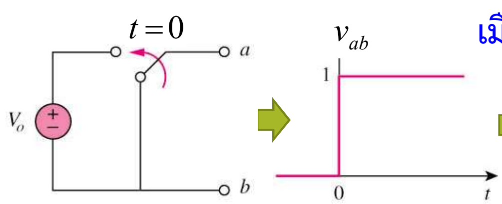
จะได้

$$u(t-t_o)=\begin{cases}0, & t<t_o\\ 1, & t>t_o\end{cases}$$

$u(t)$ แทน *t* ด้วย *t*-t_0 $u(t-t_0)$

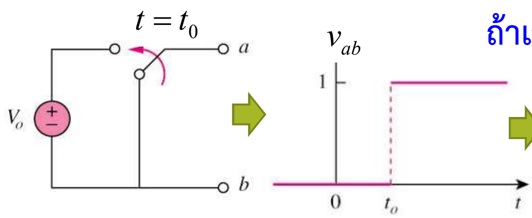
ในทางคณิตศาสตร์ เราสามารถเลื่อนกราฟในแกนเวลาเป็นระยะทาง t_0 ได้โดยการแทน *t* ด้วย *t*-t_0 ลงใน Function

37



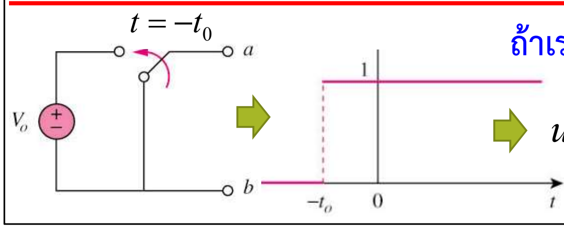
เมื่อเราสับสวิตซ์ตอน t=0

$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$



ถ้าเราสับสวิตซ์ตอน t=t_0

$$u(t-t_o)=\begin{cases}0, & t<t_o\\ 1, & t>t_o\end{cases}$$



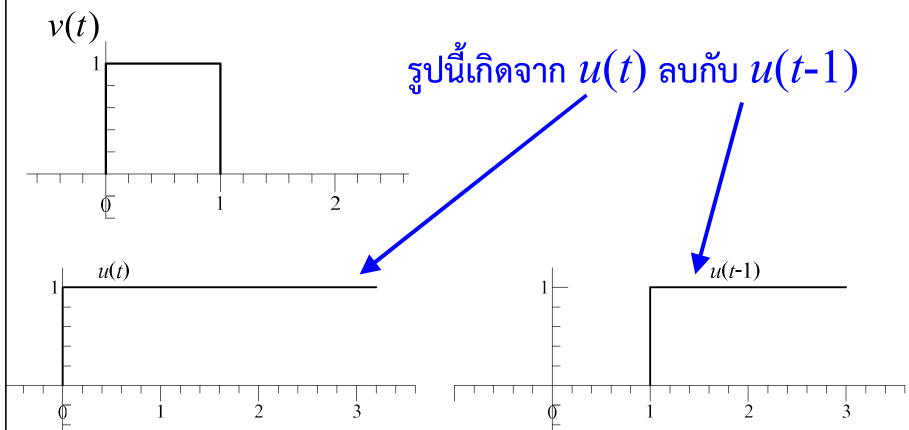
ถ้าเราสับสวิตซ์ตอน t=-t_0

$$u(t+t_o)=\begin{cases}0, & t<-t_o\\ 1, & t>-t_o\end{cases}$$

38

ประโยชน์ของ Unit step function และการทำ Time shift

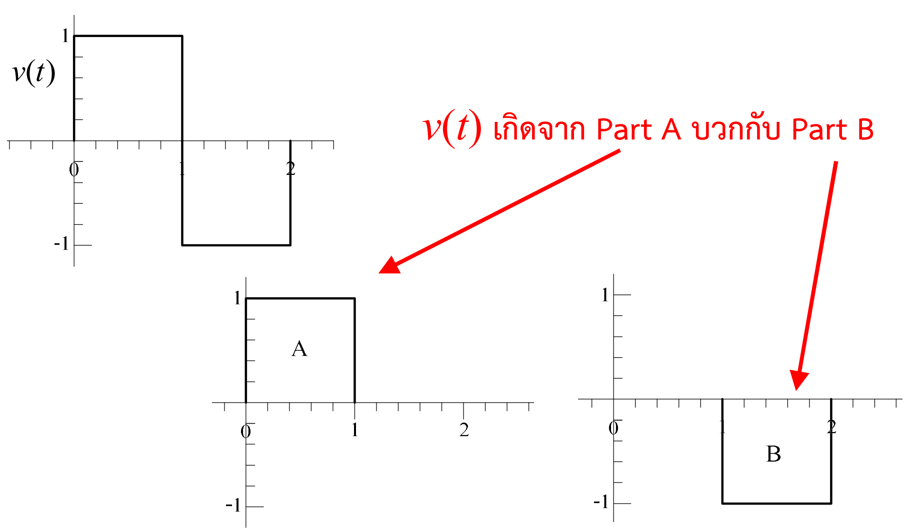
สมมุติว่าเราต้องการสร้าง Voltage pulse ที่เป็นคลื่นรูปสี่เหลี่ยมดังรูป



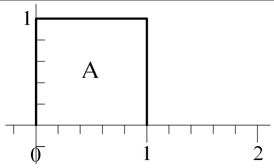
จะได้ $v(t) = u(t) - u(t-1)$

สัญญาณลักษณะแบบนี้พบได้ในสัญญาณ Digital ทั่วไป

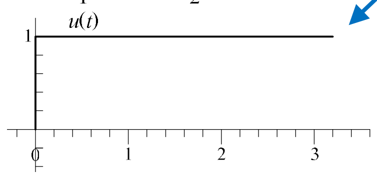
ตัวอย่าง จงสร้าง Bipolar Voltage Pulse ดังรูป

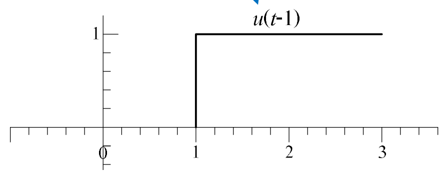


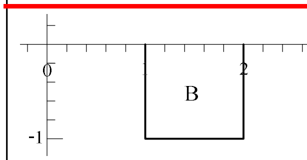
$$v(t) = \text{Part A} + \text{Part B}$$



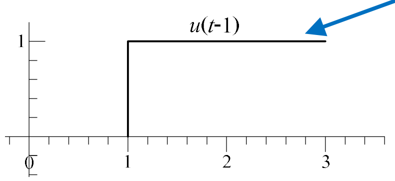
$$\text{Part A} = u(t) - u(t-1)$$

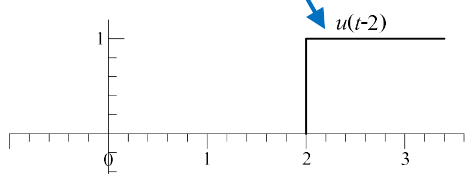






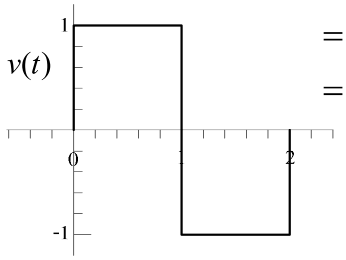
$$\text{Part B} = -(u(t-1) - u(t-2))$$

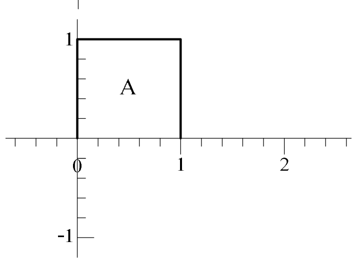


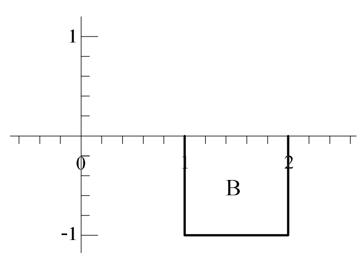


จะได้

$$\begin{aligned} v(t) &= \text{Part A} + \text{Part B} \\ &= \big(u(t) - u(t-1)\big) - \big(u(t-1) - u(t-2)\big) \\ &= u(t) - 2u(t-1) + u(t-2) \end{aligned}$$

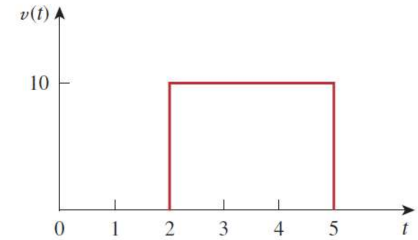






สัญญาณลักษณะแบบนี้เป็นรูปแบบหนึ่งของสัญญาณดิจิทัล

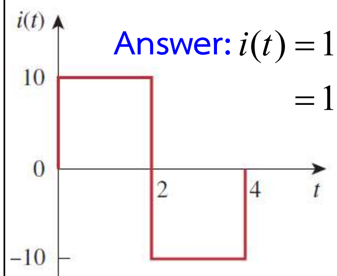
Example: จงอธิบาย Voltage pulse ต่อไปนี้ในรูป Unit step func.



Answer:

$$v(t) = 10u(t-2) - 10u(t-5)$$
$$= 10(u(t-2) - u(t-5))$$

Example: จงอธิบาย Current pulse ต่อไปนี้ในรูป Unit step func.



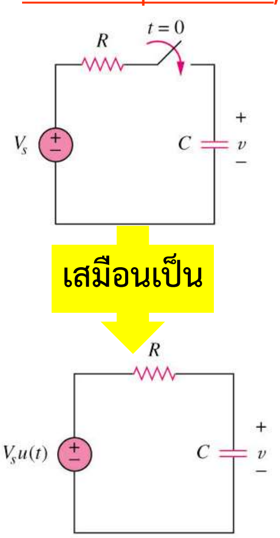
Answer: $i(t) = 10(u(t) - u(t-2)) - 10(u(t-2) - u(t-4))$

$$= 10(u(t) - 2u(t-2) + u(t-4))$$

43

7.4 The Step-Response of an RC Circuit

- The **step response** of a circuit is its behavior when the excitation is the step function, which may be a voltage or a current source.



- Initial condition: $v(0^-) = v(0^+) = V_0$

(มาจากที่แรงดันของ C จะเปลี่ยนฉับพลันไม่ได้)

- Applying KCL,

$$c\frac{dv}{dt} + \frac{v - V_s u(t)}{R} = 0$$

แรงดันที่จ่ายให้ C ตอนสับสวิตซ์จะเป็น Step function

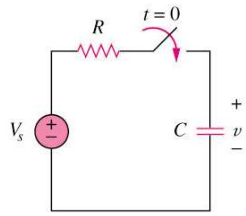
or

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v - V_s}{RC}u(t)$$

- Where u(t) is the unit-step function

44

หมายเหตุ: ความหมายของ เวลา $t=0^-$ กับ $t=0^+$



เรื่องนี้เกี่ยวข้องกับวงจรทุกวงจรที่มี Switch อยู่ด้วย

สมมุติให้ Switch เปลี่ยนสถานะ ณ เวลา t = 0

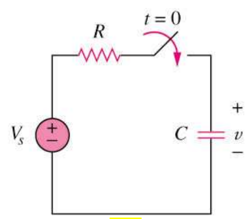
เวลา $t=0^-$ หมายถึงเวลาก่อนที่สวิตซ์จะเปลี่ยนสถานะเพียงเล็กน้อย

เวลา $t=0^+$ หมายถึงเวลาหลังจากสวิตซ์เปลี่ยนสถานะแล้วเพียงเล็กน้อย

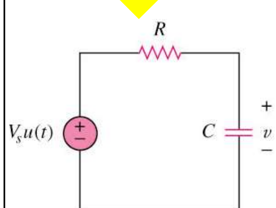
เรื่องนี้สำคัญเพราะแม้ว่าเวลา $t=0^-$ และเวลา $t=0^+$ จะต่างกันเพียงเล็กน้อย แต่วงจร ณ เวลา $t=0^-$ กับวงจร ณ เวลา $t=0^+$ จะแตกต่างกันมาก

45

ผลตอบสนองของวงจร RC เมื่อเราป้อน Step function voltage ให้ (เหตุการณ์แบบนี้เกิดขึ้นเมื่อเราสับสวิตซ์จ่ายแรงดัน DC ให้วงจร RC)



เสมือนเป็น



$$C\frac{dv}{dt}+\frac{v-V_s u(t)}{R}=0$$

$$\frac{dv}{dt}+\frac{v}{RC}=\frac{V_s}{RC}u(t)$$

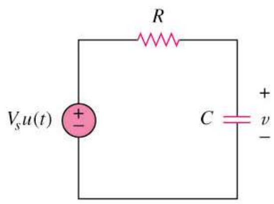
เมื่อ t > 0 จะได้ u(t)=1, สมการจะกลายเป็น

$$\frac{dv}{dt}+\frac{v}{RC}=\frac{V_s}{RC}$$

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{v-V_s}{RC}$$

$$\frac{dv}{v-V_s}=-\frac{dt}{RC}$$

46



$$\frac{dv}{v - V_s} = -\frac{dt}{RC}$$

Integrate both sides

$$\ln(v - V_s)\Big|_{V_0}^{v(t)} = -\frac{t}{RC}\Big|_0^t$$

$$\ln(v(t) - V_s) - \ln(V_0 - V_s) = -\frac{t}{RC} + 0$$

$$\ln\frac{v - V_s}{V_0 - V_s} = -\frac{t}{RC}$$

$$\frac{v - V_s}{V_0 - V_s} = e^{-t/\tau}, \qquad \tau = RC$$

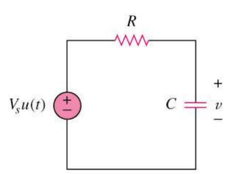
$$v - V_s = (V_0 - V_s)e^{-t/\tau}$$

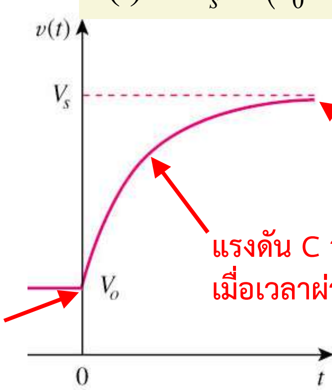
ได้แรงดันของ C ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา

$$\boxed{v(t) = V_s + (V_0 - V_s)e^{-t/\tau}, \qquad t > 0}$$

สรุป: สูตรแรงดันของ C เมื่อจ่ายแรงดัน DC แบบ Step Function ให้กับวงจร RC ในรูป

$$v(t) = V_s + (V_0 - V_s)e^{-t/\tau}, \qquad t > 0$$





แรงดัน C จะไปหยุดที่ค่า V_S เมื่อเวลาเป็น ∞

แรงดัน C จะค่อยๆเพิ่มขึ้น เมื่อเวลาผ่านไป (C ถูกชาร์จ)

แรงดัน C เริ่มต้นจะเท่ากับ V_0

จะได้สูตรของกระแสที่ไหลผ่าน C เป็น

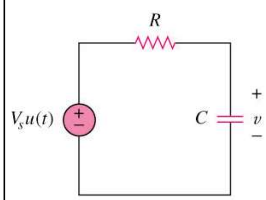
$$i(t) = C\frac{dv}{dt} = -\frac{C}{\tau}(V_0 - V_s)e^{-t/\tau}, \qquad t > 0$$

48

จากสูตร

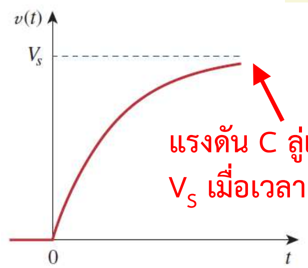
$$v(t)=\begin{cases} V_0 & t<0 \\ V_s+(V_0-V_s)e^{-t/\tau} & t>0 \end{cases} \qquad \tau = RC$$

กรณีที่ C เริ่มต้นไม่มีการชาร์จประจุเลย (V_0=0) จะได้

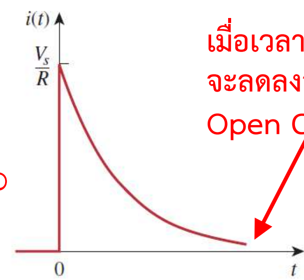


$$v(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ V_s(1-e^{-t/\tau}) & t>0 \end{cases}$$

$$i(t)=C\frac{dv}{dt}=\frac{C}{\tau}V_s e^{-t/\tau}=\frac{V_s}{R}e^{-t/\tau} \qquad t>0$$



แรงดัน C ลู่เข้าสู่ V_S เมื่อเวลาเป็น ∞



เมื่อเวลาผ่านไป ∞ กระแสจะลดลงจนเป็น 0 (เท่ากับ Open Circuit นั่นเอง)

49

ส่วนประกอบของแรงดันของ C ในแง่ฟังก์ชันของเวลา

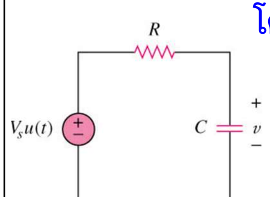
แรงดันของ C ➡

$$v(t)=\begin{cases} V_0 & t<0 \\ V_s+\underbrace{(V_0-V_s)e^{-t/\tau}} & t>0 \end{cases}$$

Complete Response ผลตอบสนองโดยรวม

Steady state Response เป็นส่วนที่คงที่ไม่ขึ้นกับเวลา

Transient Response เป็นส่วนที่เกิดขึ้นชั่วคราว ซึ่งจะสลายไปในที่สุด



ส่วนประกอบของแรงดันของ C แยกตามแหล่งพลังงาน

จากสูตรแรงดันของ C
$$v(t) = \begin{cases} V_0 & t < 0 \\ V_s + (V_0 - V_s)e^{-t/\tau} & t > 0 \end{cases}$$

เมื่อจัดรูปใหม่ จะได้

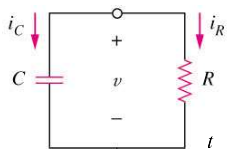
$$\underbrace{v(t)}_{\text{Complete Response}} = \underbrace{V_0 e^{-t/\tau}}_{\text{Natural Response}} + \underbrace{V_s(1 - e^{-t/\tau})}_{\text{Forced Response}}$$

Complete Response

Natural Response มาจากพลังงานสะสมใน C ตอน t<0

ส่วนนี้ตรงกับสูตรของวงจร Source Free RC

Forced Response มาจาก Voltage Source ภายนอก (Forced=ถูกบังคับ)



$$v(t) = V_o e^{-\frac{t}{\tau}}$$

สูตรลัดในการวิเคราะห์ผลตอบสนองของวงจร RC ต่อ Step Function Voltage Source

แรงดันของ C ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาคือ
$$v(t) = \begin{cases} V_0 & t < 0 \\ V_s + (V_0 - V_s)e^{-t/\tau} & t > 0 \end{cases}$$

เมื่อ $t \le 0$ จะได้ $v(0) = V_0$ = Initial value

เมื่อ $t = \infty$ จะได้ $v(\infty) = V_s$ = Final value

จะได้

$$v(t) = v(\infty) + (v(0^+) - v(\infty))e^{-t/\tau}$$

ในสูตรนี้ เราจะต้องทราบค่าต่อไปนี้คือ

$$v(0), \quad v(\infty), \quad \tau$$

7.4 The Step-Response of an RC Circuit

จากสูตร $$v(t) = v(\infty) + [v(0+) - v(\infty)]e^{-t/\tau}$$

Three steps to find out the step response of an RC circuit:

1. The initial capacitor voltage v(0).
2. The final capacitor voltage v(∞) — DC voltage across C.
3. The time constant τ.

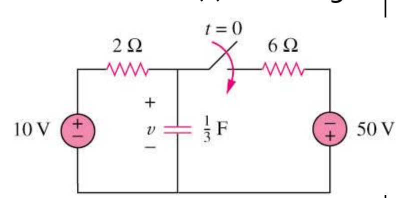
วิธีการวิเคราะห์ผลตอบสนองของวงจร RC ต่อ Step Voltage นั้น เราจะต้องหาค่าต่อไปนี้

1. ค่าแรงดันเริ่มต้น v(0) ของ C
2. ค่าแรงดันสุดท้าย v(∞) ของ C
3. Time constant τ ของวงจร RC

Note: This is a short-cut method. You may also determine the solution by setting up the circuit formula directly using KCL, KVL , ohms law, capacitor and inductor VI laws.

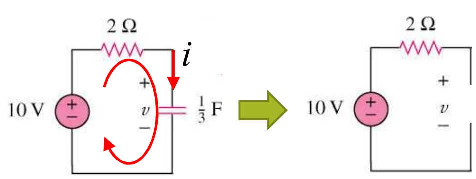
7.4 The Step-Response of an RC Circuit

Example 5 Find v(t) for t > 0 in the circuit. Assume the switch has been open for a long time and is closed at t = 0. Calculate v(t) at t = 0.5.



วิธีทำ 1. หาค่า v(0)

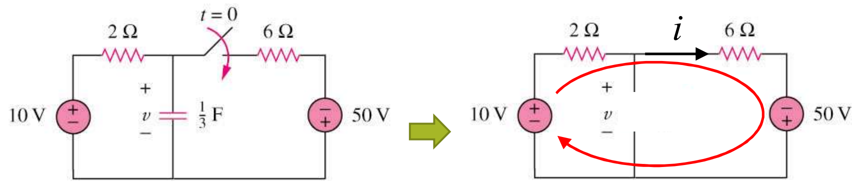
ช่วง t < 0 วงจรอยู่ในสถานะดังวงจรข้างล่างเป็นเวลานาน C ถูกชาร์จจนเต็ม จะได้ C = Open Circuit, i = 0



ใช้ KVL $-10 + 2i + v = 0, \qquad i = 0$

จะได้ $v = 10 = v(0)$

2. หาค่า v(∞) ภายหลังที่ Switch close circuit เป็นเวลานาน, จน C ถูกชาร์จจนเต็ม(อีกครั้ง) จะได้ C = Open circuit



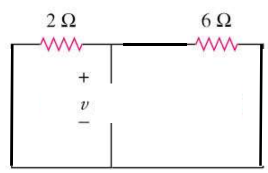
ใช้ KVL $\quad -50-10+8i=0$

$$i=60/8=7.5\text{A}$$

จะได้ $\; v-10+2i=0$

$$v=10-2(7.5)=-5\text{ V}$$

ได้ $\; v(\infty)=-5\text{ V}$



3. หาค่า Thevenin Resistance ที่ขั้วของ C

$$R_{eq}=2\|6=\frac{2\times 6}{2+6}=1.5\,\Omega$$

ได้ Time constant $\quad \tau=CR_{eq}=\frac{1}{3}\times 1.5=0.5\ \text{ Sec}$

จะได้

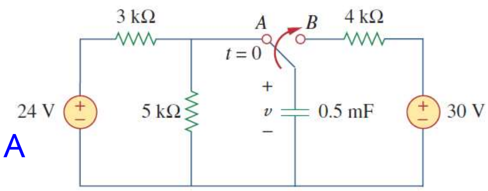
$$v(t)=v(\infty)+(v(0^+)-v(\infty))e^{-t/\tau}$$
$$=-5+(10-(-5))e^{-t/0.5}$$
$$=-5+15e^{-2t}$$

หาค่า v(0.5)

$$v(0.5)=-5+15e^{-2(0.5)}=0.5182\text{ V}$$

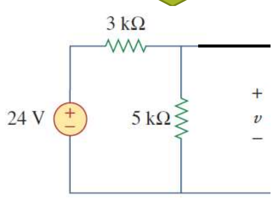
Example 7.10

The switch in Fig. 7.43 has been in position A for a long time. At $t = 0$, the switch moves to B. Determine $v(t)$ for $t > 0$ and calculate its value at $t = 1$ s and 4 s.



วิธีทำ 1. หาค่า v(0)

ช่วง t < 0 Switch อยู่ตำแหน่ง A
เป็นเวลานาน C ถูกชาร์จจนเต็ม
จะได้ C = Open Circuit

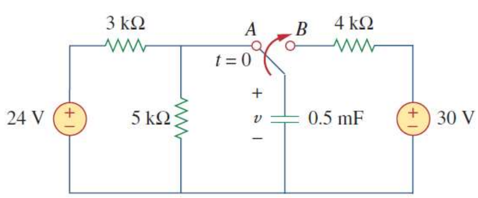


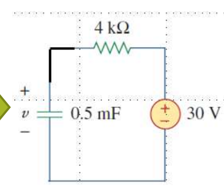
ใช้ Voltage divider

$$v = \frac{5k}{3k+5k} \times 24 = 15 \text{ V}$$

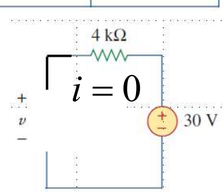
ได้ $v(0) = 15$ V

2. หาค่า v(∞) ช่วง t ≥ 0 Switch จะไปอยู่ตำแหน่ง B





C ถูกชาร์จจนเต็ม (อีกครั้ง)
จะได้ C = Open Circuit



ได้ $v = 30 + 4k \times i = 30$ V $\quad v(\infty) = 30$ V

3. หาค่า Time constant

$$\tau = CR = 0.5 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^{3} = 2 \quad \text{Sec}$$

จะได้

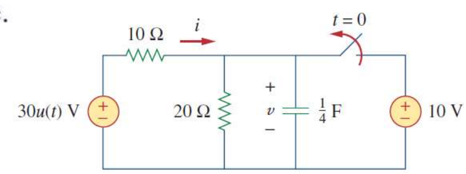
$$v(t) = v(\infty) + (v(0^+) - v(\infty))e^{-t/\tau}$$
$$= 30 + (15 - 30)e^{-t/2}$$
$$= 30 - 15e^{-0.5t}$$

จะได้

$$v(1) = 30 - 15e^{-0.5} = 20.9 \text{ V}$$
$$v(2) = 30 - 15e^{-0.5\times 2} = 27.97 \text{ V}$$

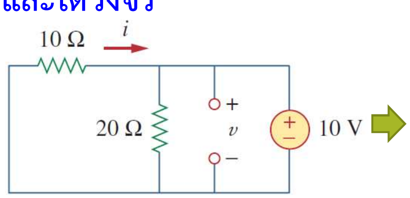
Example 7.11

In Fig. 7.45, the switch has been closed for a long time and is opened at $t = 0$. Find i and v for all time.



วิธีทำ 1. หาค่า v(0)

ช่วง t < 0 Switch อยู่ตำแหน่ง Close เป็นเวลานาน
C ถูกชาร์จจนเต็ม จะได้ C = Open Circuit
และได้วงจร



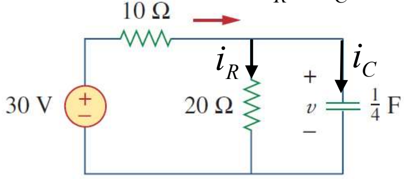
$$v = 10 \text{ V}$$
$$i = \frac{-v}{10} = -1 \text{ A}$$

เมื่อ t < 0

และเมื่อ t = 0 จะได้ $v(0) = 10 \text{ V}$

2. เมื่อ t > 0, Voltage source 30u(t) ทำงาน และ Switch open circuit จะได้วงจรข้างล่าง

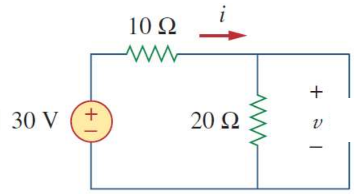
$$i = i_R + i_C$$



เมื่อเวลาผ่านไป $t = \infty$
C จะถูกชาร์จจนเต็ม (อีกครั้ง)
จะได้ C = Open Circuit

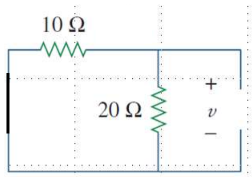
ใช้ Voltage divider

$$v(\infty) = \frac{20}{10+20} \times 30 = 20 \text{ V}$$



61

3. หา Thevenin resistance ระหว่างขั้วของ C ทั้ง 2 ขั้ว



$$R_{eq} = 10 \| 20 = \frac{10 \times 20}{10+20} = \frac{20}{3} \, \Omega$$

ได้ Time constant

$$\tau = CR_{eq} = \frac{1}{4} \times \frac{20}{3} = \frac{5}{3} \quad \text{Sec}$$

จะได้ $v(t) = v(\infty) + (v(0^+) - v(\infty))e^{-t/\tau}$

$$= 20 + (10 - 20)e^{-3t/5}$$

$$= 20 - 10e^{-0.6t}$$

และ $i = i_R + i_C$

$$= \frac{v}{20} + C\frac{dv}{dt}$$

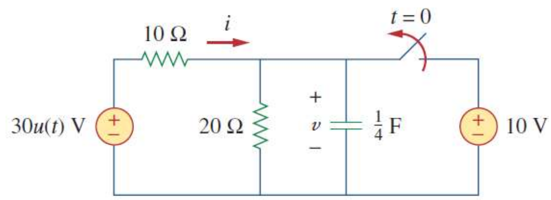
$$= 1 - 0.5e^{-0.6t} + 0.25(-0.6)(-10)e^{-0.6t}$$

$$= (1 + e^{-0.6t}) \text{ A}$$

จะได้

$$v = \begin{cases} 10\text{ V}, & t < 0 \\ (20 - 10e^{-0.6t})\text{ V}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$i = \begin{cases} -1\text{ A}, & t < 0 \\ (1 + e^{-0.6t})\text{ A}, & t > 0 \end{cases}$$

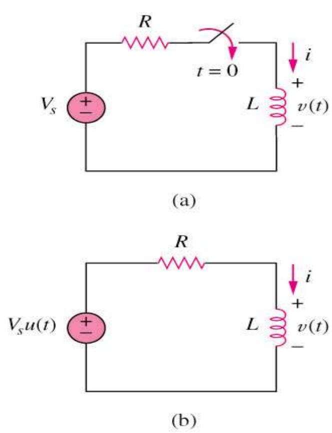


63

7.5 The Step-response of an RL Circuit

ผลตอบสนองของวงจร RL เมื่อเราป้อน Step function voltage ให้

- The **step response** of a circuit is its behavior when the excitation is the step function, which may be a voltage or a current source.



(a)

(b)

- **Initial current**
  $i(0-) = i(0+) = I_o$
- **Final inductor current**
  $i(\infty) = Vs/R$
- Time constant $\tau = L/R$

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + (I_o - \frac{V_s}{R})e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)$$

64

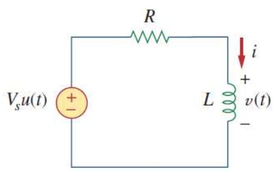
ที่มาของสูตร

กระแสรวม = Transient current + Steady State Current

$$i = i_t + i_{ss}$$

Transient current เป็นกระแสที่เกิดจากพลังงานสะสมใน L ซึ่งจะมีลักษณะเป็น Exponential function แบบลดค่าลง (เหมือนกรณีของ Source free RL circuit)

$$i_t = Ae^{-t/\tau}, \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

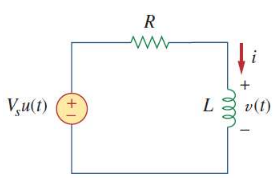


ส่วน Steady state current เป็นกระแสเมื่อเวลาผ่านไปนาน (t=∞) ซึ่ง L จะเสมือน Short circuit จะได้

$$i_{ss} = \frac{V_s}{R}$$

65

เมื่อแทนค่าลงไปจะได้



$$i_t = Ae^{-t/\tau} \qquad i_{ss} = \frac{V_s}{R}$$

$$i = i_t + i_{ss}$$

$$i = Ae^{-t/\tau} + \frac{V_s}{R} \qquad (1)$$

เนื่องจากกระแสที่ไหลผ่าน L ไม่สามารถเปลี่ยนแปลงได้อย่างฉับพลัน จะได้ว่า ที่เวลา t = 0

$$i(0^+) = i(0^-) = I_0$$

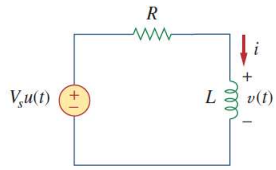
แทนค่า t = 0 ลงในสมการ (1)

เท่ากัน

$$i = Ae^{-t/\tau} + \frac{V_s}{R} = A + \frac{V_s}{R} \Rightarrow A = I_0 - \frac{V_s}{R}$$

66

แทนค่า A ลงไปจะได้สูตร



$$A = I_0 - \frac{V_s}{R}$$

$$i = Ae^{-t/\tau} + \frac{V_s}{R}$$

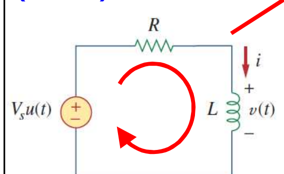
$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \underbrace{\left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right)e^{-t/\tau}}$$

Complete response ผลตอบสนองโดยรวม

Steady State Current เป็นส่วนที่คงที่ ไม่เปลี่ยนตามกาลเวลา

Transient Current เป็นส่วนที่เกิดขึ้นชั่วคราวและจะสลายไปในที่สุด

พิสูจน์ที่มาของสูตร (อีกวิธี)



ใช้ KVL $V_R + V_L - V_s u(t) = 0$

แทนค่า $\boxed{V_R = Ri}$ $\boxed{V_L = L\frac{di}{dt}}$

$$Ri + L\frac{di}{dt} - V_s u(t) = 0$$

For t>0 $Ri + L\frac{di}{dt} = V_s$ $\Rightarrow$ $\frac{L}{R}\frac{di}{dt} = \frac{V_s}{R} - i$

$$\frac{di}{i - V_s/R} = -\frac{R}{L}dt$$

Integrate both sides จะได้ $\ln\left(i - \frac{V_s}{R}\right)\Big|_{I_0}^{i(t)} = -\frac{R}{L}t\Big|_0^t$

แทนค่าขอบเขตการ Integrate จะได้

$$\ln\left(i-\frac{V_s}{R}\right)\Bigg|_{I_0}^{i(t)} = -\frac{R}{L}t\Big|_0^t$$

$$\ln\left(i(t)-\frac{V_s}{R}\right)-\ln\left(I_0-\frac{V_s}{R}\right) = -\frac{R}{L}t$$

จัดรูปใหม่

$$\ln\left(\frac{i(t)-\frac{V_s}{R}}{I_0-\frac{V_s}{R}}\right) = -\frac{R}{L}t$$

จาก

ถ้า $y=e^x$

จะได้ $\ln(y)=\ln(e^x)=x$

ดังนั้น $\ln(y)=x \Leftrightarrow y=e^x$

$$\frac{i(t)-\frac{V_s}{R}}{I_0-\frac{V_s}{R}} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

69

$$\frac{i(t)-\frac{V_s}{R}}{I_0-\frac{V_s}{R}} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

จัดรูปใหม่ จะได้

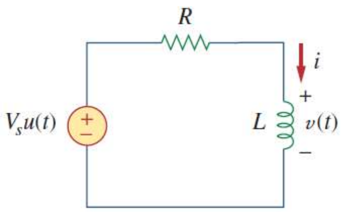
$$i(t)=\frac{V_s}{R}+\left(I_0-\frac{V_s}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}$$

จะได้สูตรกระแสของวงจร RL ที่เป็นผลตอบสนองต่อการจ่ายแรงดันไฟฟ้าแบบ Step Voltage ให้วงจร RL

$$i(t)=\frac{V_s}{R}+\left(I_0-\frac{V_s}{R}\right)e^{-t/\tau} \qquad \text{โดย} \qquad \tau=\frac{L}{R}$$

70

แรงดันที่ตกคร่อม L เมื่อป้อน Step Voltage ให้วงจร RL



จากสูตรกระแสที่ไหลผ่าน L

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right)e^{-t/\tau}$$

จะได้

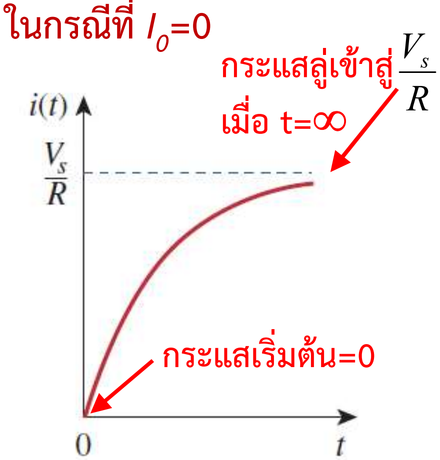
$$v(t) = L\frac{di}{dt} = V_s\frac{L}{\tau R}e^{-t/\tau}, \qquad \tau = \frac{L}{R}, \qquad t > 0$$

หรือ

$$v(t) = V_s e^{-t/\tau} u(t)$$

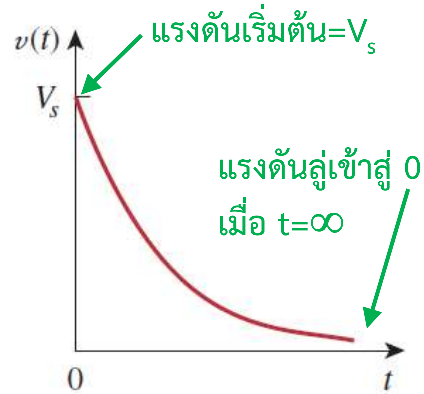
71

กระแสและแรงดันของ L เมื่อป้อน Step Voltage ให้วงจร RL ในกรณีที่ I_0=0



กระแสที่ไหลผ่าน L

$$i(t) = \frac{V_s}{R}(1 - e^{-t/\tau})u(t)$$

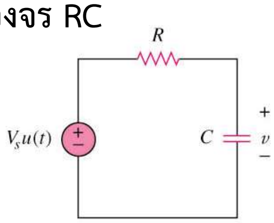


แรงดันตกคร่อม L

$$v(t) = V_s e^{-t/\tau} u(t)$$

เปรียบเทียบผลตอบสนองต่อ Step Voltage ของวงจร RC กับ RL

วงจร RC

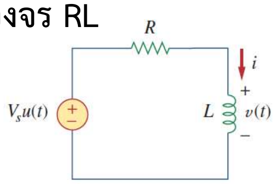


$$v(t) = V_s + (V_0 - V_s)e^{-t/\tau}, \quad t > 0$$

$$\tau = RC$$

แรงดันตกคร่อม C ไม่สามารถเปลี่ยนแปลงได้อย่างฉับพลัน

วงจร RL



$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right)e^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

กระแสที่ไหลผ่าน L ไม่สามารถเปลี่ยนแปลงได้อย่างฉับพลัน

73

สูตรลัดในการวิเคราะห์ผลตอบสนองของวงจร RL ต่อ Step Function Voltage Source

กระแสของ L ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาคือ

$$i(t) = \begin{cases} I_0 & t < 0 \\ \frac{V_s}{R} + (I_0 - \frac{V_s}{R})e^{-t/\tau} & t > 0 \end{cases}$$

เมื่อ $t \le 0$ จะได้ $i(0) = I_0$ = Initial value

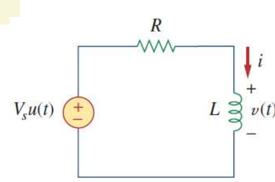
เมื่อ $t = \infty$ จะได้ $i(\infty) = \frac{V_s}{R}$ = Final value

จะได้

$$i(t) = i(\infty) + (i(0^+) - i(\infty))e^{-t/\tau}$$

ในสูตรนี้ เราจะต้องทราบค่าต่อไปนี้คือ

$$i(0), \quad i(\infty), \quad \tau$$



7.5 The Step-Response of a RL Circuit

Three steps to find out the step response of an RL circuit:

1. The initial inductor current i(0) at t = 0+.
2. The final inductor current $i(\infty)$.
3. The time constant τ.

$$i(t) = i(\infty) + [i(0+) - i(\infty)]\, e^{-t/\tau}$$

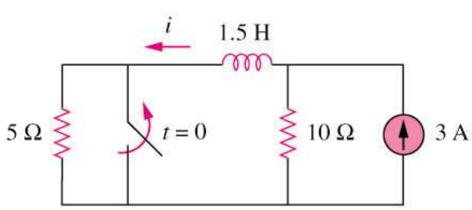
วิธีการวิเคราะห์ผลตอบสนองของวงจร RL ต่อ Step Voltage นั้น เราจะต้องหาค่าต่อไปนี้

1. ค่ากระแสเริ่มต้น i(0) ของ L
2. ค่ากระแสสุดท้าย $i(\infty)$ ของ L
3. Time constant τ ของวงจร RL

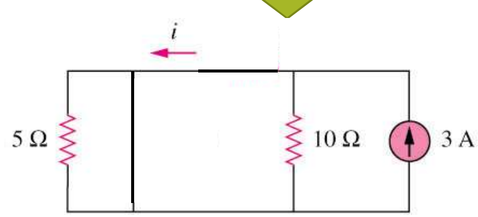
The above method is a short-cut method. You may also determine the solution by setting up the circuit formula directly using KCL, KVL , ohms law, capacitor and inductor VI laws.

7.5 The Step-Response of a RL Circuit

Example 6 The switch in the circuit shown below has been closed for a long time. It opens at t = 0. Find i(t) for t > 0.



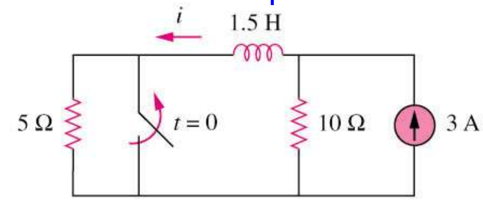
วิธีทำ 1. หา i(0) ณ เวลา t≤0 Switch อยู่ในสถานะ Close circuit เป็นเวลานาน และ L เสมือน Short circuit จะได้วงจร

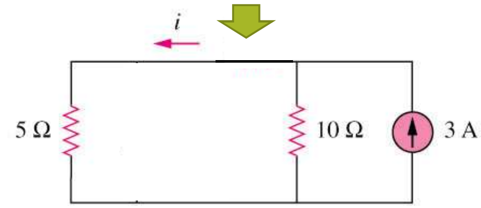


จะได้กระแส

$$i(0) = 3 \text{ A}$$

2. หา i(∞) จากตอนที่ Switch มาเป็นสถานะ Open circuit ในภายหลังที่ t>0 และ L ก็เสมือน Short circuit



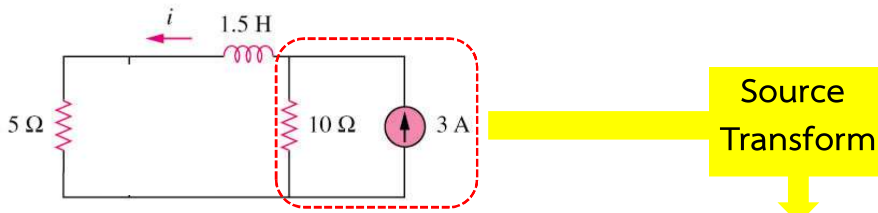


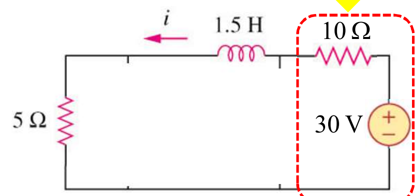
จะได้กระแส i(∞) จากสูตร Current divider

$$i(\infty) = \left(\frac{10}{5+10}\right) \times 3 = 2\text{ A}$$

77

3. หาค่า Time constant





ได้

$$R = 10 + 5 = 15\,\Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{1.5}{15} = 0.1$$

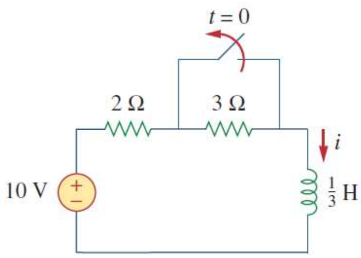
4. แทนค่าลงในสูตร

$$i(t) = i(\infty) + (i(0) - i(\infty))e^{-t/\tau}$$
$$= 2 + (3-2)e^{-t/0.1}$$
$$= 2 + e^{-10t}$$

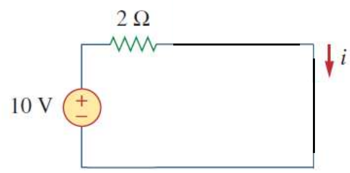
78

Example 7.12

Find $i(t)$ in the circuit of Fig. 7.51 for $t > 0$. Assume that the switch has been closed for a long time.



วิธีทำ 1. หา i(0) ณ เวลา t≤0 Switch อยู่ในสถานะ Close circuit เป็นเวลานาน และ L เสมือน Short circuit จะได้วงจร



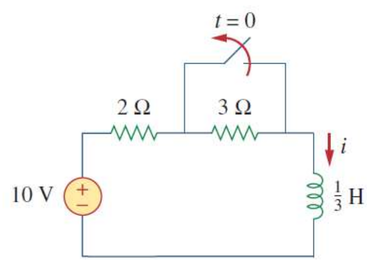
จะได้กระแส

$$i(0^-) = \frac{10}{2} = 5 \text{ A}$$

และเนื่องจากกระแสของ L ไม่สามารถเปลี่ยนแปลงได้อย่างฉับพลัน

จะได้ $$i(0) = i(0^+) = i(0^-) = 5 \text{ A}$$

2. หา i(∞) จากตอนที่ Switch มาเป็นสถานะ Open circuit ในภายหลังที่ t>0 และ L ก็เสมือน Short circuit



$$i(\infty) = \frac{10}{2+3} = 2 \text{ A}$$

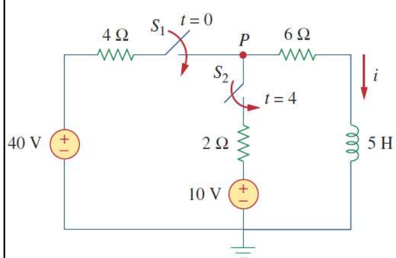
3. หาค่า Time constant

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{1/3}{5} = \frac{1}{15}$$

4. แทนค่าลงในสูตร
$$\begin{aligned} i(t) &= i(\infty) + (i(0) - i(\infty))e^{-t/\tau} \\ &= 2 + (5-2)e^{-t/1/15} \\ &= 2 + 3e^{-15t} \end{aligned}$$

Example 7.13

At $t = 0$, switch 1 in Fig. 7.53 is closed, and switch 2 is closed 4 s later. Find $i(t)$ for $t > 0$. Calculate i for $t = 2$ s and $t = 5$ s.



โจทย์ข้อนี้เมื่อ t=0 สวิตซ์ S1 จะ close
ต่อมาเมื่อ t=4 สวิตซ์ S2 จะ close
ดังนั้นเราจะแบ่งการวิเคราะห์ 3 ช่วง
1. ช่วง t<0, 2. ช่วงเวลา 0<t<4
3. ช่วงเวลา t>4

วิธีทำ 1. หา i(0) ณ เวลา t≤0 นั้น S1 และ S2 อยู่ในสถานะ Open circuit เป็นเวลานาน ไม่มีกระแสไหลในวงจร i(0)=0

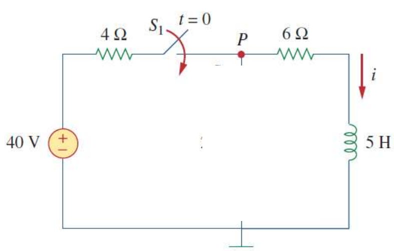
$$i(0) = 0 \text{ A}$$

2. หา i(∞) ของวงจรที่ S1 Close และ S2 Open

L เสมือน Short Circuit จะได้ $i(\infty) = \dfrac{40}{4+6} = 4 \text{ A}$

81

3. หา Time constant ของวงจรที่ S1 Close และ S2 Open



$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{5}{4+6} = 0.5$$

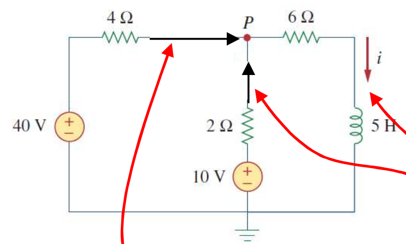
4. ได้กระแสในช่วง 0<t<4
$$\begin{aligned} i(t) &= i(\infty) + (i(0) - i(\infty))e^{-t/\tau} \\ &= 4 + (0-4)e^{-t/0.5} \\ &= 4 - 4e^{-2t} \end{aligned}$$

82

5. เมื่อ t=4⁻ ขณะก่อนที่ S2 จะ Close จะได้กระแส

$$i(t)\big|_{t=4} = 4 - 4e^{-2(4)} = 4(1-e^{-8}) = 3.998 \approx 4 \text{ A}$$

ต่อมาเมื่อ t=4 นั้น S2 จะ Close จะได้วงจร



6. หา i(∞) ของวงจรที่ S1 และ S2 Close และ L เสมือน Short Circuit

ให้ v คือแรงดันที่ Node P และใช้ KCL ที่ Node P จะได้

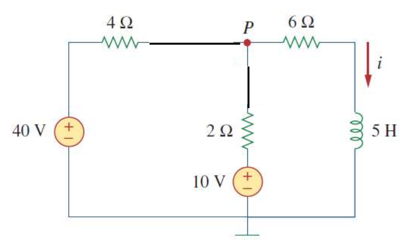
$$\boxed{\frac{40-v}{4}} + \boxed{\frac{10-v}{2}} = \boxed{\frac{v}{6}}$$

จะได้

$$v = \frac{180}{11}\text{ V} \quad \text{และ} \quad i(\infty) = \frac{v}{6} = \frac{30}{11} = 2.727 \text{ A}$$

83

7. หา Time constant ของวงจรที่ S1 และ S2 Close



ต้องหา Thevenin's equivalent resistance ที่ขั้วของ L (ให้ Short circuit voltage source และไม่นำ L มาคิด)

$$R_{\text{Th}} = 4 \parallel 2 + 6 = \frac{4 \times 2}{6} + 6 = \frac{22}{3}\,\Omega$$

ได้ Time constant ของวงจรที่ S1 และ S2 Close

$$\tau = \frac{L}{R_{\text{Th}}} = \frac{5}{\frac{22}{3}} = \frac{15}{22}\text{ s}$$

84

8. ได้กระแสในช่วง t>4

ที่ต้องใช้ t-4 ในสูตรเพราะ S2 Close ที่เวลา t=4

$$i(t) = i(\infty) + [i(4) - i(\infty)]e^{-\boxed{(t-4)}/\tau}, \qquad t \geq 4$$

$$i(t) = 2.727 + (4 - 2.727)e^{-(t-4)/\tau}, \qquad \tau = \frac{15}{22}$$

$$= 2.727 + 1.273e^{-1.4667(t-4)}, \qquad t \geq 4$$

สรุปรวม

สูตรนี้เป็นของวงจรที่ S1 Close และ S2 Open

สูตรนี้เป็นของวงจรที่ S1 และ S2 Close ทั้งคู่

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 4(1 - e^{-2t}), & 0 \leq t \leq 4 \\ 2.727 + 1.273e^{-1.4667(t-4)}, & t \geq 4 \end{cases}$$

85

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 4(1 - e^{-2t}), & 0 \leq t \leq 4 \\ 2.727 + 1.273e^{-1.4667(t-4)}, & t \geq 4 \end{cases}$$

9. หาค่ากระแส i(2) และ i(5)

At $t = 2$,

$$i(2) = 4(1 - e^{-4}) = 3.93 \text{ A}$$

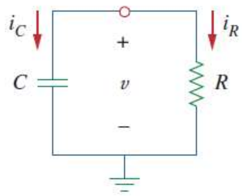
At $t = 5$,

$$i(5) = 2.727 + 1.273e^{-1.4667} = 3.02 \text{ A}$$

86

Chapter 7 Summary

วงจร Source Free RC



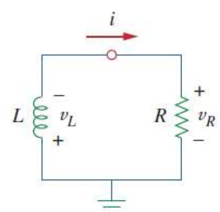
$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

$$\boxed{v(t) = V_0 e^{-t/RC}}$$

$$\boxed{i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0}{R}e^{-t/\tau}}$$

$$\boxed{\tau = RC}$$

วงจร Source Free RL



$$L\frac{di}{dt} + iR = 0$$

$$\boxed{i(t) = I_0 e^{-Rt/L}}$$

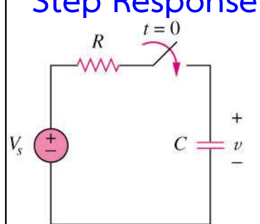
$$\boxed{v_R(t) = iR = I_0 R e^{-t/\tau}}$$

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$$

87

Chapter 7 Summary (continue)

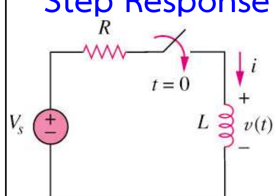
Step Response of a RC circuit



$$v(t) = v(\infty) + (v(0^+) - v(\infty))e^{-t/\tau}$$

$$\tau = RC$$

Step Response of a RL circuit

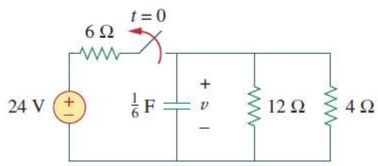


$$i(t) = i(\infty) + (i(0^+) - i(\infty))e^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

88

Practice Problem 7.2



If the switch in Fig. 7.10 opens at $t = 0$, find $v(t)$ for $t \geq 0$ and $w_C(0)$.

Answer: $8e^{-2t}$ V, 5.333 J.

89

Practice Problem 7.4

For the circuit in Fig. 7.18, find $i(t)$ for $t > 0$.

Answer: $5e^{-2t}$ A, $t > 0$.

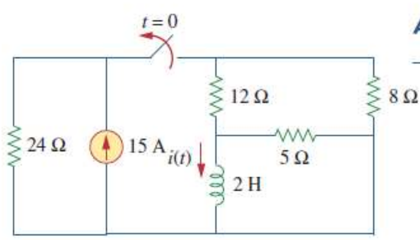


Figure 7.18
For Practice Prob. 7.4.

90

Practice Problem 7.10

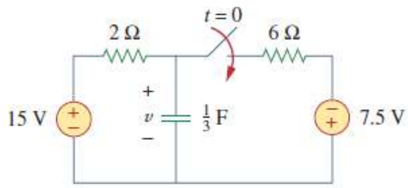


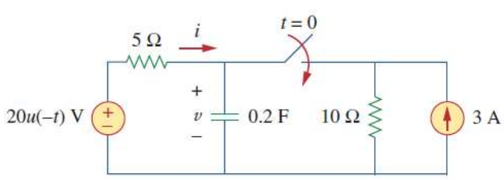
Figure 7.44
For Practice Prob. 7.10.

Find $v(t)$ for $t > 0$ in the circuit of Fig. 7.44. Assume the switch has been open for a long time and is closed at $t = 0$. Calculate $v(t)$ at $t = 0.5$.

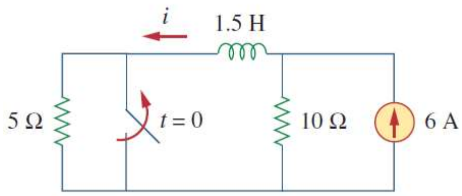
Answer: $(9.375 + 5.625e^{-2t})$ V for all $t > 0$, 7.63 V.

Practice Problem 7.11

The switch in Fig. 7.47 is closed at $t = 0$. Find $i(t)$ and $v(t)$ for all time. Note that $u(-t) = 1$ for $t < 0$ and 0 for $t > 0$. Also, $u(-t) = 1 - u(t)$.



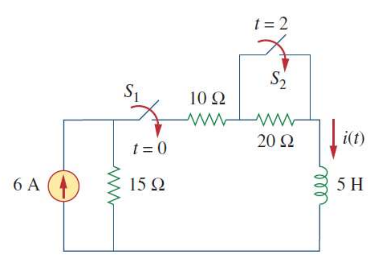
Practice Problem 7.12



The switch in Fig. 7.52 has been closed for a long time. It opens at $t = 0$. Find $i(t)$ for $t > 0$.

Answer: $(4 + 2e^{-10t})$ A for all $t > 0$.

Practice Problem 7.13



Switch S_1 in Fig. 7.54 is closed at $t = 0$, and switch S_2 is closed at $t = 2$ s. Calculate $i(t)$ for all t. Find $i(1)$ and $i(3)$.

Answer:

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2(1 - e^{-9t}), & 0 < t < 2 \\ 3.6 - 1.6e^{-5(t-2)}, & t > 2 \end{cases}$$

$i(1) = 1.9997$ A, $i(3) = 3.589$ A.