บทที่ 9
การวิเคราะห์ไซนูซอยด์ที่สภาวะคงตัว
The Sinusoidal Steady-State Analysis

ในบทที่ผ่านมาเราได้ศึกษาการวิเคราะห์วงจรที่มีการกระตุ้นจากแหล่งจ่ายแบบต่างๆ เช่นแหล่งจ่ายที่ไม่เปลี่ยนแปลงค่ากับเวลา แหล่งจ่ายที่มีค่าเปลี่ยนแปลงในลักษณะของพัลส์ เป็นต้น ในบทนี้จะได้กล่าวถึงผลตอบสนองที่สภาวะคงตัวของวงจรที่ถูกกระตุ้นด้วยสัญญาณไซนูซอยด์ เนื่องจากมีการใช้แรงดันกระแสสลับที่มีลักษณะเป็นสัญญาณไซนูซอยด์มาก โดยเฉพาะสำหรับแหล่งจ่ายในระบบไฟฟ้ากำลัง และสัญญาณในระบบสื่อสาร

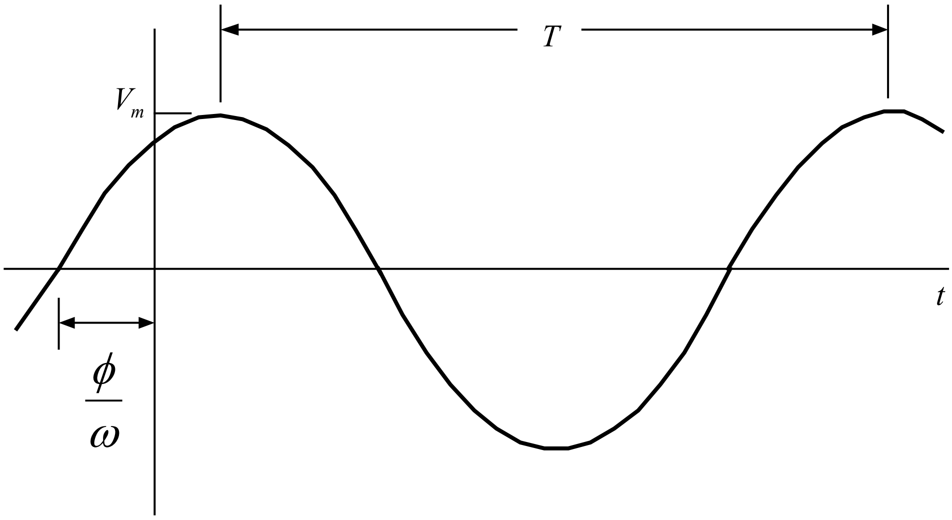
เทคนิคการวิเคราะห์วงจรโดยใช้เฟสเซอร์ (Phasor) ได้ถูกนำมาใช้ประกอบกับเทคนิคการวิเคราะห์วงจรทั้งสองแบบคือการวิเคราะห์โนดและการวิเคราะห์เมช และจะได้แสดงการนำทฤษฎีเกี่ยวกับวงจรฟ้าที่ศึกษาไปแล้วทั้งหมดมาประยุกต์ใช้ในการคำนวณหาผลตอบสนองที่สภาวะคงตัวของวงจรที่ถูกกระตุ้นด้วยสัญญาณไซนูซอยด์ รวมทั้งการเขียนผังเฟสเซอร์ (Phasor Diagram) ด้วย

9.1 แหล่งจ่ายแบบไซนูซอยด์

การกระตุ้นวงจรด้วยสัญญาณไซนูซอยด์และหาผลตอบสนองต่อสัญญาณแบบนี้มีความสำคัญมากในการศึกษาสาขาวิศวกรรมไฟฟ้า เนื่องจากการผลิต การส่ง การจ่าย และการใช้ระบบไฟฟ้ากำลัง และสัญญาณในระบบสื่อสารจะเป็นสัญญาณไซนูซอยด์เป็นส่วนใหญ่

ในช่วงปลายศตวรรษที่ 19 ซึ่งเป็นช่วงเริ่มต้นของการใช้ไฟฟ้า การใช้ไฟฟ้าส่วนใหญ่ถูกใช้สำหรับแสงสว่าง โดยระบบที่ เอดิสันใช้จะเป็นระบบไฟฟ้ากระแสตรง ต่อมาเมื่อการใช้ไฟฟ้าแพร่หลายมากขึ้นทำให้ต้องมีการเชื่อมต่อระบบไฟฟ้าในระยะทางไกลมากขึ้น และได้มีการพัฒนามอเตอร์และเครื่องกำเนิดไฟฟ้าขึ้น ทำให้เกิดข้อถกเถียงในการเลือกใช้ระบบไฟฟ้า ว่าควรจะเป็นระบบไฟฟ้ากระแสตรงหรือเป็นระบบไฟฟ้ากระแสสลับ ซึ่งในที่สุดระบบไฟฟ้ากระแสสลับก็ถูกเลือกเนื่องจากเหตุผลหลักคือประสิทธิภาพในการส่งกำลังระยะไกล โดยที่เราสามารถแปลงแรงดันกระแสสลับให้มีค่าสูงขึ้นโดยใช้หม้อแปลงไฟฟ้า ส่งผ่านสายส่งกำลัง แล้วทำการแปลงลงสู่ค่าแรงดันที่ต้องการที่ปลายทาง การทำเช่นนี้ส่งผลให้กำลังสูญเสียในสายส่งกำลังลดลง ในระบบสื่อสารหรือระบบไฟฟ้าอื่นๆ นิยมใช้สัญญาณไซนูซอยด์เนื่องจากสัญญาณไซนูซอยด์มีองค์ประกอบความถี่เพียงความถี่เดียวทำให้การวิเคราะห์ ออกแบบ ทดสอบ และสร้างวงจรต่างๆ ทำได้ง่ายกว่า และความเข้าใจการตอบสนองของวงจรต่อสัญญาณไซนูซอยด์จะนำไปสู่การศึกษาผลตอบสนองต่อสัญญาณแบบอื่นๆ ที่ไม่เป็นสัญญาณไซนูซอยด์ ดังจะได้ศึกษาต่อไป

การกระตุ้นวงจรด้วยฟังก์ชันกระตุ้นหนึ่งจะทำให้ได้ผลตอบสนองกระตุ้น ส่วนผลตอบสนองธรรมชาติจะเกิดจากค่าพลังงานที่สะสมอยู่ภายในวงจร ผลตอบสนองธรรมชาติจะปรากฏตัวเพียงชั่วขณะเวลาเท่านั้น และจะหายไปเหลือแต่ผลตอบสนองกระตุ้น ในบทนี้เราจะสนใจเฉพาะ ผลตอบสนองในสภาวะคงตัวซึ่งก็คือผลตอบสนองกระตุ้นของวงจรที่ถูกกระตุ้นด้วยสัญญาณไซนูซอยด์เท่านั้น



รูปที่ 9.1 แหล่งจ่ายแรงดันแบบไซนูซอยด์

พิจารณาฟังก์ชันกระตุ้น

$$v_s = V_m \sin \omega t \qquad (9.1)$$

หรือในกรณีของแหล่งจ่ายกระแส

$$i_s = I_m \sin \omega t \qquad (9.2)$$

ค่าขนาดของสัญญาณไซนูซอยด์ ในสมการ (9.1) คือ V_m และมีค่าความถี่เชิงมุม ω (rad/s) สัญญาณไซนูซอยด์เป็นฟังก์ชันคาบ (Periodic Function) ซึ่งมีคุณสมบัติโดยนิยาม

$$x(t+T) = x(t)$$

สำหรับเวลา t ใดๆ และ T คือคาบการแกว่งของสัญญาณไซนูซอยด์

ส่วนกลับของคาบคือความถี่หรือจำนวนรอบต่อวินาที (Cycles per second) ใช้หน่วย เฮิร์ท (Hertz, Hz) ตามชื่อของนักวิทยาศาสตร์ชาวเยอรมัน และใช้สัญลักษณ์ f โดยที่

$$f = \frac{1}{T}$$

ค่าความถี่เชิงมุม ω ของสัญญาณไซนูซอยด์คือ

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \text{ rad/s}$$

ถ้าสัญญาณแรงดันในสมการ (9.1) มีการเลื่อนเฟส ϕ ในหน่วยเรเดียน (Radian) ด้วย จะได้

$$v_s = V_m \sin(\omega t + \phi) \tag{9.3}$$

ดังแสดงในรูปที่ 9.1 โดยทั่วไปเราจะพิจารณา ωt และ ϕ ในหน่วยเรเดียน แต่ในบางกรณีอาจใช้หน่วยเป็นองศาก็ได้ แต่ต้องแสดงให้ชัดเจนว่ากำลังใช้หน่วยแบบใด เช่น

$$v_s = V_m \sin(4t + 30^\circ)$$

หรือ

$$v_s = V_m \sin\left(4t + \frac{\pi}{6}\right)$$

สังเกตว่าในการคำนวณเกี่ยวกับสัญญาณไซนูซอยด์ที่มีความถี่เชิงมุม ω เราอาจต้องใช้ความรู้จากวิชาตรีโกณมิติ เช่น

$$\sin\omega t = \cos(\omega t - 90^\circ)$$

$$\cos\omega t = \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$\sin(\omega t \pm \theta) = \cos\theta \sin\omega t \pm \sin\theta \cos\omega t$$

$$\cos(\omega t \pm \theta) = \cos\theta \cos\omega t \mp \sin\theta \sin\omega t$$

$$A\cos\omega t + B\sin\omega t = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega t - \theta)$$

เมื่อ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) \qquad A > 0$ และ $\theta = 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) \qquad A < 0$

ถ้าในวงจรมีแรงดันตกคร่อมองค์ประกอบหนึ่ง

$$v = V_m \sin\omega t$$

และมีกระแสไหลผ่านองค์ประกอบนั้น

$$i = I_m \sin(\omega t + \phi)$$

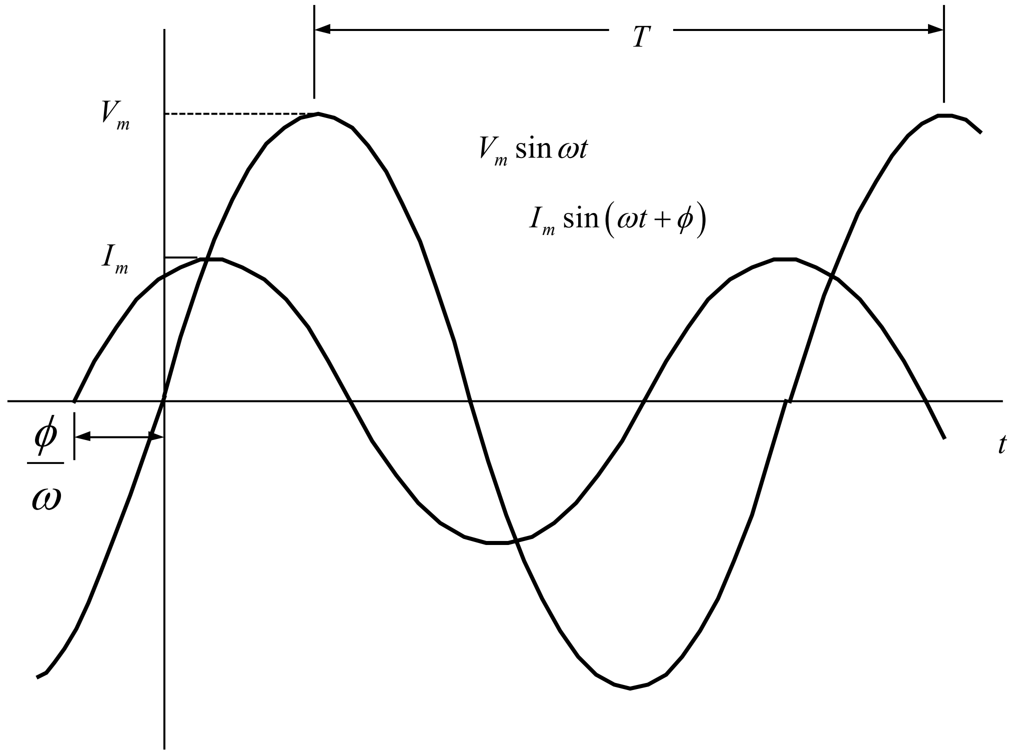
เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างกระแสและแรงดันดังแสดงในรูปที่ 9.2 ซึ่งเราจะเห็นว่ากระแสจะถึงค่าสูงสุดก่อนแรงดัน เรียกว่ากระแสนำแรงดัน ดังนั้นที่จุดๆ หนึ่งบนกระแส $i(t)$ จะถึงก่อนจุดที่ตรงกันของแรงดัน $v(t)$ เราอาจเรียกกรณีเช่นนี้อีกแบบหนึ่งว่าแรงดันตามกระแสอยู่ ϕ เรเดียน ดังเช่นตัวอย่าง

$$v = 2\sin(3t + 20^\circ)$$

และ

$$i = 4\sin(3t - 10^\circ)$$

จะได้ว่าแรงดันนำกระแส (หรือกระแสตามแรงดัน) อยู่ 30° หรือ $\pi/6$ เรเดียน



รูปที่ 9.2 กระแสและแรงดันขององค์ประกอบวงจรหนึ่ง

ตัวอย่าง 9.1 แรงดันตกคร่อมองค์ประกอบหนึ่งมีค่า $v = 3\cos 3t$ V และกระแสผ่านองค์ประกอบนี้คือ $i = -2\sin(3t + 10°)$ จงหาความสัมพันธ์ของมุมระหว่างกระแสและแรงดัน

วิธีทำ ทำการแปลงกระแสให้อยู่ในรูปที่มีขนาดเป็นบวก จาก $-\sin\omega t = \sin(\omega t + \pi)$ จะได้

$$i = 2\sin(3t + 180° + 10°)$$

และเพื่อให้เปรียบเทียบกับค่าแรงดันซึ่งเป็นฟังก์ชัน cos ได้จะทำการแปลงกระแสจากฟังก์ชัน sin เป็น cos โดยอาศัยความสัมพันธ์ $\sin\theta = \cos(\theta - 90°)$

$$\begin{aligned} i &= 2\cos(3t + 180° + 10° - 90°) \\ &= 2\cos(3t + 100°) \end{aligned}$$

เมื่อเทียบกับแรงดันจะได้ว่า กระแสนำแรงดัน (หรือแรงดันตามกระแส) อยู่ $100°$

ในบทที่ผ่านมาเราทราบว่าค่าผลตอบสนองของวงจรเชิงเส้นใดๆ ต่อฟังก์ชันกระตุ้น

$$v_s = V_0 \cos\omega t$$

คือ

$$v_f = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

ซึ่งสามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$v_f = \sqrt{A^2 + B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\cos\omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\sin\omega t\right)$$

พิจารณาสามเหลี่ยมในรูปที่ Ex 9.1 และสังเกตว่า

$$\sin\theta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ และ } \cos\theta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

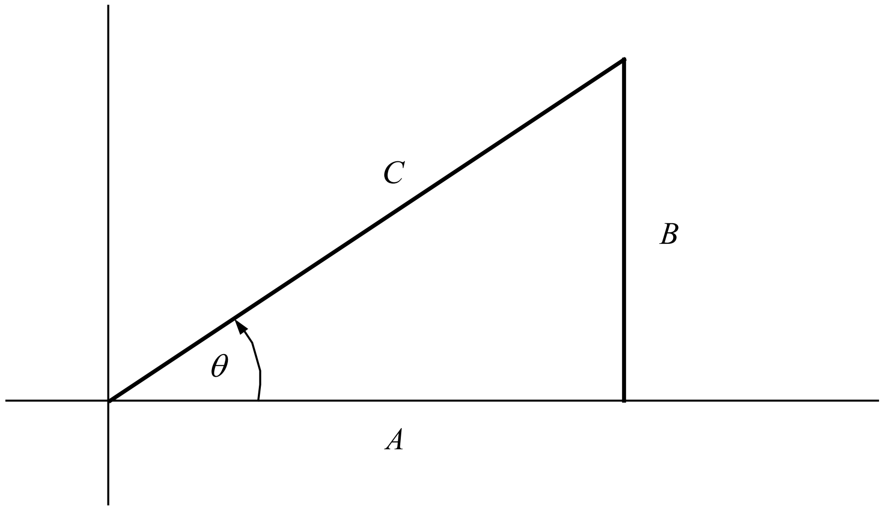
ดังนั้นเราจะได้ผลตอบสนอง

$$v_f = \sqrt{A^2+B^2}\left(\cos\theta\cos\omega t + \sin\theta\sin\omega t\right) \tag{9.4}$$

ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$v_f = \sqrt{A^2+B^2}\left(\cos\omega t - \theta\right) \tag{9.5}$$

เมื่อ $\theta = \tan^{-1}\frac{B}{A}$ เนื่องจากในกรณีนี้ $A > 0$ แต่ถ้าในกรณี $A < 0$ จะได้ $\theta = 180° + \tan^{-1}\frac{B}{A}$



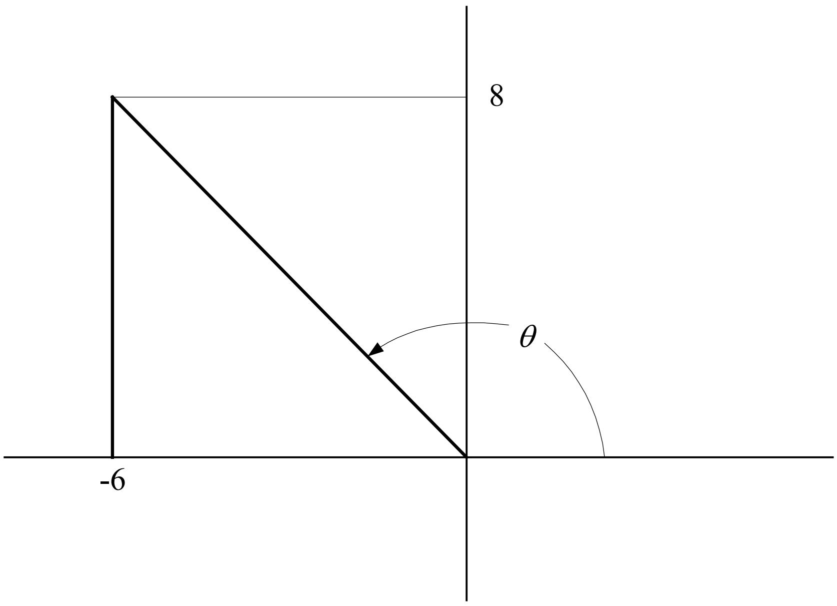
รูปที่ Ex 9.1 สามเหลี่ยมสำหรับหาค่า A และ B โดยที่ $C = \sqrt{A^2+B^2}$

ตัวอย่าง 9.2 ถ้ากระแสมีค่าตามฟังก์ชัน $i = -6\cos 2t + 8\sin 2t$ จงหาค่ากระแสในรูปแบบของสมการ (9.5)

วิธีทำ เนื่องจากค่า $A < 0$ ดังแสดงในรูป Ex9.2 ดังนั้น

$$\begin{aligned}\theta &= 180° + \tan^{-1}\frac{B}{A} \\ &= 180° + \tan^{-1}\frac{8}{-6} \\ &= 180° - 53.1° = 126.9°\end{aligned}$$

จะได้ค่ากระแส $i = 10\cos(2t - 126.9°)$

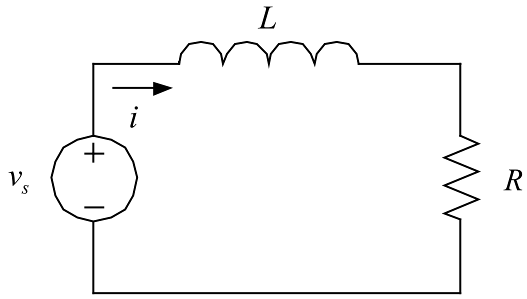


รูปที่ Ex9.2

9.2 ผลตอบสนองของวงจรอันดับหนึ่งต่อสัญญาณไซนูซอยด์

พิจารณาวงจรอันดับหนึ่งดังในรูปที่ 9.3 ซึ่งประกอบด้วยตัวต้านทาน R อนุกรมกับตัวเหนี่ยวนำ L และแหล่งจ่ายแรงดันซึ่งมีฟังก์ชันกระตุ้น

$$v_s = V_m \cos \omega t$$



รูปที่ 9.3 วงจร RL

เราต้องการหาค่าผลตอบสนองกระตุ้น i_f ที่สภาวะคงตัว ไม่ว่าวงจรจะเริ่มต้นด้วยค่ากระแสเริ่มต้นเท่าใด หากรากของสมการคุณลักษณะอยู่บนซีกซ้ายของ ระนาบ s แล้ว ผลตอบสนองจะเป็นสัญญาณไซนูซอยด์เมื่อ $t \to \infty$ เราเรียกผลตอบสนองนี้ว่าผลตอบสนองกระตุ้นที่สภาวะคงตัว

สมการอนุพันธ์สำหรับวงจรนี้คือ

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos \omega t \tag{9.6}$$

แก้สมการหาคำตอบตามวิธีในบทที่ 7 จะได้

$$i_f = A\cos \omega t + B\sin \omega t \tag{9.7}$$

เนื่องจากจะทำการพิจารณาผลตอบสนองกระตุ้นเท่านั้น ดังนั้นเราจะไม่เขียนตัวห้อย f แทนค่าคำตอบจากสมการ (9.7) ลงใน สมการ (9.6) จะได้

$$L(-\omega A\sin\omega t+\omega B\cos\omega t)+R(A\cos\omega t+B\sin\omega t)=V_m\cos\omega t$$

เทียบพจน์สัมประสิทธิ์ของ $\cos\omega t$ จะได้

$$\omega LB+RA=V_m$$

และเทียบพจน์สัมประสิทธิ์ของ $\sin\omega t$ จะได้

$$-\omega LA+RB=0$$

แก้สมการหาค่า A และ B ได้

$$A=\frac{RV_m}{R^2+\omega^2L^2}$$

และ

$$B=\frac{\omega LV_m}{R^2+\omega^2L^2}$$

ดังนั้นการตอบสนองต่อการกระตุ้นด้วยสัญญาณไซนูซอยด์คือ

$$\begin{aligned} i &= A\cos\omega t+B\sin\omega t \\ &= \frac{V_m}{Z}\cos(\omega t-\beta) \end{aligned}$$

เมื่อ

$$Z=\sqrt{R^2+\omega^2L^2}$$

และ

$$\beta=\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

กล่าวได้ว่าค่าผลตอบสนองกระตุ้นที่สภาวะคงตัวจะอยู่ในรูป

$$i=I_m\cos(\omega t+\phi)$$

โดยที่

$$I_m=\frac{V_m}{Z}$$

และ

$$\phi=-\beta$$

ในกรณีนี้เราได้คำตอบเฉพาะในสภาวะคงตัว สำหรับวงจรที่มีตัวเก็บพลังงานหนึ่งตัว จะเห็นได้ว่าวิธีการนี้จะค่อนข้างยุ่งยากในกรณีที่มีตัวเก็บพลังงานหลายตัว ชาร์ล พี สเตนเมทซ์ (Charle P. Steinmetz) ได้พัฒนาเครื่องมือทางคณิตศาสตร์สำหรับการศึกษาวงจรกระแสสลับ โดยเฉพาะการสังเกตพบการสมมูลของการเขียนจำนวนเชิงซ้อน

$$a + jb = r(\cos\phi + j\sin\phi)$$

และได้เขียนหนังสือชื่อ Theory and Calculation of AC Phenomena ในปี ค.ศ. 1893 (พ.ศ. 2436) เราจะได้ศึกษาวิธีการเหล่านี้ในหัวข้อต่อไป

9.3 ฟังก์ชันกระตุ้นแบบเอกโปเนนเทียลเชิงซ้อน

จากการศึกษาที่ผ่านมาเราพบว่า ฟังก์ชันกระตุ้นจะอยู่ในรูป

$$v_s = V_m \cos\omega t$$

และผลตอบสนองก็จะอยู่ในรูป

$$i = \frac{V_m}{Z}\cos(\omega t - \beta)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่าผลตอบสนองมีขนาดและเฟสแตกต่างจากแหล่งจ่ายแรงดันที่กระตุ้นวงจร

หากพิจารณาสัญญาณแรงดันในรูปเอกโปเนนเทียล

$$v_e = V_m e^{j\omega t} \tag{9.8}$$

จากสมการของออยเลอร์ (Euler's Equation) $e^{\pm j\omega t} = \cos\omega t \pm j\sin\omega t$ จะได้

$$v_s = V_m \cos\omega t = \mathrm{Re}\left\{V_m e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{v_e\right\}$$

ค่า $\mathrm{Re}\{a + jb\}$ หมายถึงค่าส่วนจริงของค่าเชิงซ้อน $a + jb$ ซึ่งก็คือ a

เราต้องการหาค่ากระแส i โดยที่

$$i = \mathrm{Re}\left\{I_m e^{j\omega t}\right\}$$

เราจะใช้แหล่งจ่ายแรงดันตามสมการ (9.8) กับสมการอนุพันธ์ของวงจรอันดับหนึ่งในหัวข้อที่แล้ว

$$L\frac{di_e}{dt} + Ri_e = v_e$$

เนื่องจากสัญญาณกระตุ้นเป็นฟังก์ชันเอกโปเนนเทียลดังนั้นผลตอบสนองจะเป็นฟังก์ชันเอกโปเนนเทียลด้วย เราได้

$$i_e = Ae^{j\omega t}$$

แทนคำตอบลงในสมการอนุพันธ์

$$(j\omega L + R)Ae^{j\omega t} = V_m e^{j\omega t}$$

แก้สมการจะได้

$$A = \frac{V_m}{R + j\omega L} = \frac{V_m}{Z}e^{-j\beta}$$

โดยที่

$$\beta = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

และ

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

แทนค่าสัมประสิทธิ์ A ที่ได้ลงในสมการผลตอบสนอง

$$i_e = \frac{V_m}{Z}e^{-j\beta}e^{j\omega t}$$

สังเกตว่าฟังก์ชันกระตุ้นคือ

$$v_s = \mathrm{Re}\left\{V_m e^{j\omega t}\right\} = V_m \cos\omega t$$

เราคาดว่าผลตอบสนอง

$$i = \mathrm{Re}\{i_e\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{V_m}{Z}e^{-j\beta}e^{j\omega t}\right\}$$

ทำให้ได้

$$\begin{aligned} i &= \frac{V_m}{Z}\mathrm{Re}\left\{e^{-j\beta}e^{j\omega t}\right\} = \frac{V_m}{Z}\mathrm{Re}\left\{e^{j(\omega t-\beta)}\right\} \\ &= \frac{V_m}{Z}\cos(\omega t - \beta) \end{aligned}$$

ที่จริงเราสนใจที่จะใช้ฟังก์ชันกระตุ้นไซนูซอยด์

$$v_s = V_m \cos\omega t = \mathrm{Re}\left\{V_m e^{j\omega t}\right\}$$

เพื่อหาผลตอบสนองกระตุ้น

$$i = I_m \cos(\omega t - \beta)$$

อย่างไรก็ตามเราได้ว่าค่าผลตอบสนองนี้หาได้จาก

$$i = \mathrm{Re}\{i_e\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{V_m}{Z} e^{j(\omega t - j\beta)}\right\}$$

ซึ่งได้จากการกระตุ้นด้วย $v_s = \mathrm{Re}\{V_m e^{j\omega t}\}$

ดังนั้นถ้า

$$v_s = \mathrm{Re}\{V_m e^{j\omega t}\} \tag{9.9}$$

จะได้

$$i = \mathrm{Re}\left\{\frac{V_m}{Z} e^{j(\omega t - j\beta)}\right\} \tag{9.10}$$

พิจารณาตัวอย่างวงจรอันดับสองซึ่งมีสมการอนุพันธ์

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{di}{dt} + 12i = 12\cos 3t \tag{9.11}$$

เริ่มโดยการแทนการกระตุ้นจริงด้วยการกระตุ้นเอกโปเนนเทียล

$$v_e = 12e^{j3t}$$

แทนลงในสมการ (9.10)

$$\frac{d^2 i_e}{dt^2} + \frac{di_e}{dt} + 12i_e = 12e^{j3t} \tag{9.12}$$

คำตอบของสมการ (9.12) จะอยู่ในรูป

$$i_e = Ae^{j3t}$$

และค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองของคำตอบคือ

$$\frac{di_e}{dt} = j3Ae^{j3t}$$

และ

$$\frac{d^2 i_e}{dt^2} = -9Ae^{j3t}$$

แทนค่าลงในสมการ (9.12)

$$(-9 + j3 + 12)Ae^{j3t} = 12e^{j3t}$$

แก้สมการหาค่าสัมประสิทธิ์

$$A = \frac{12}{3 + j3} = 2\sqrt{2}\angle -45^\circ$$

ดังนั้น

$$i_e = Ae^{j3t} = 2\sqrt{2}e^{-j(\pi/4)}e^{j3t}$$
$$= 2\sqrt{2}e^{j(3t-\pi/4)}$$

จากสมการของออยเลอร์ เราได้ค่าผลตอบสนองในสภาวะคงตัวที่ต้องการคือ

$$i(t) = \mathrm{Re}\{i_e\} = \mathrm{Re}\left\{2\sqrt{2}e^{j(3t-\pi/4)}\right\}$$
$$= 2\sqrt{2}\cos(3t - 45°)$$

หรืออาจใช้หน่วยเรเดียนสำหรับเฟส

$$i(t) = 2\sqrt{2}\cos(3t - \frac{\pi}{4})$$

จะเห็นจากตัวอย่างนี้ว่าเราได้พัฒนาวิธีการหาคำตอบผลตอบสนองในสภาวะคงตัวต่อการกระตุ้นด้วยสัญญาณไซนูซอยด์ สรุปเป็นขั้นตอนได้ดังตารางที่ 9.1

ตาราง 9.1 การหาคำตอบผลตอบสนองในสภาวะคงตัวต่อการกระตุ้นด้วยสัญญาณไซนูซอยด์

1. เขียนฟังก์ชันกระตุ้นในรูป $y_s = Y_m\cos(\omega t + \phi)$ โดยที่ y_s อาจเป็น i_s หรือ v_s

2. แทนฟังก์ชันกระตุ้นด้วยการกระตุ้นเอกโปเนนเทียล เช่นสำหรับแหล่งจ่ายแรงดันจะได้

$$v_s = \mathrm{Re}\left\{V_m e^{j(\omega t+\phi)}\right\}$$

3. ใช้การกระตุ้นเอกโปเนนเทียล สมการอนุพันธ์ของวงจรและคำตอบในรูป

$$x_e = Ae^{j(\omega t+\phi)}$$

4. หาค่าสัมประสิทธิ์ A ซึ่งโดยทั่วไปจะเป็นจำนวนเชิงซ้อน $A = Be^{-j\beta}$

5. จะได้ค่า

$$x_e = Ae^{j(\omega t+\phi)} = Be^{j(\omega t+\phi-\beta)}$$

6. คำตอบที่ต้องการคือ

$$x(t) = \mathrm{Re}\{x_e\} = B\cos(\omega t + \phi - \beta)$$

ตัวอย่าง 9.3 จงหาค่าผลตอบสนอง i ของวงจรในรูปที่ 9.3 กำหนดค่า $R = 2\,\Omega$ $L = 1$ H และแหล่งจ่าย $v_s = 10\sin 3t$ V

วิธีทำ เขียนสมการของแหล่งจ่ายแรงดันใหม่

$$v_s = 10\sin 3t = 10\cos(3t - 90^\circ)$$

ใช้การกระตุ้นเอกโปเนนเทียล

$$v_e = 10e^{j(3t-90^\circ)}$$

ในสมการ

$$L\frac{di_e}{dt} + Ri_e = v_e$$

โดยที่ $i_e = Ae^{j(3t-90^\circ)}$ จะได้

$$j3Ae^{j(3t-90^\circ)} + 2Ae^{j(3t-90^\circ)} = 10e^{j(3t-90^\circ)}$$

ดังนั้น

$$j3A + 2A = 10$$

แก้สมการหาค่า

$$A = \frac{10}{2 + j3} = \frac{10}{\sqrt{4+9}}e^{-j\beta}$$

เมื่อ

$$\beta = \tan^{-1}\frac{3}{2} = 56.3^\circ$$

จะได้คำตอบจากการกระตุ้นเอกโปเนนเทียล

$$i_e = \frac{10}{\sqrt{13}}e^{-j56.3^\circ}e^{j(3t-90^\circ)} = \frac{10}{\sqrt{13}}e^{j(3t-146.3^\circ)}$$

ทำให้ได้คำตอบที่ต้องการคือ

$$i = \mathrm{Re}\{i_e\} = \frac{10}{\sqrt{13}}\cos(3t - 146.3^\circ) \quad \text{A}$$

9.4 แนวคิดในการใช้เฟสเซอร์

แรงดันหรือกระแสไซนูซอยด์ที่ความถี่หนึ่งสามารถอธิบายด้วยค่าขนาดและเฟส เช่นค่ากระแสผลตอบสนองในวงจรอันดับหนึ่งในหัวข้อที่แล้ว

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathrm{Re}\left\{ I_m e^{j(\omega t+\phi-\beta)} \right\} \\ &= I_m \cos(\omega t+\phi-\beta) \end{aligned}$$

ค่าขนาด I_m และเฟส $(\phi-\beta)$ และจากการที่เราทราบค่าความถี่เชิงมุม ω สามารถอธิบายผลตอบสนองได้สมบูรณ์ ดังนั้นเราสามารถเขียนกระแส

$$i(t) = \mathrm{Re}\left\{ I_m e^{j(\phi-\beta)} e^{j\omega t} \right\}$$

ซึ่งจะเห็นว่าตัวประกอบเชิงซ้อน $e^{j\omega t}$ ไม่มีการเปลี่ยนแปลงตลอดการคำนวณที่ผ่านมา ดังนั้นค่าข้อมูลที่เราต้องการจริง สามารถแทนด้วย

$$\mathbf{I} = I_m e^{j(\phi-\beta)} = I_m \angle \phi-\beta \tag{9.13}$$

เมื่อ $\mathbf{I}$ คือเฟสเซอร์ของกระแส i โดยทั่วไปเฟสเซอร์จะเป็นจำนวนเชิงซ้อนแทนค่าของขนาดและเฟสของสัญญาณไซนูซอยด์ เราใช้คำว่าเฟสเซอร์แทนที่จะใช้คำว่าเวคเตอร์เพราะว่ามุมที่พิจารณาอ้างถึงเวลามากกว่าตำแหน่ง สามารถเขียนเฟสเซอร์ในรูปเอกโปเนนเทียล โพลาร์หรือเรคแทงกูลาร์ก็ได้ แนวคิดในการใช้เฟสเซอร์สามารถใช้ได้สำหรับสำหรับวงจรเชิงเส้น ในสภาวะคงตัว และในวงจรประกอบด้วยแหล่งจ่ายอิสระแบบไซนูซอยด์ที่ความถี่เดียวเท่านั้น

ค่าจำนวนจริงของกระแสไซนูซอยด์ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$i(t) = I_m \cos(\omega t+\theta)$$

เมื่อ $\theta = \phi-\beta$ และแทนได้ด้วย

$$i(t) = \mathrm{Re}\left\{ I_m e^{j(\omega t+\theta)} \right\}$$

เพื่อให้แทนได้ด้วยเฟสเซอร์ เราจะไม่เขียนส่วนที่ไม่เปลี่ยนแปลง Re และ $e^{j\omega t}$ จะได้

$$\mathbf{I} = I_m e^{j\theta} = I_m \angle \theta$$

ถึงแม้ว่าเราจะไม่เขียนพจน์ ความถี่เชิงซ้อน $e^{j\omega t}$ แต่เราจะคำนวณต่อโดยที่การคำนวณทั้งหมดจะอยู่ในโดเมนความถี่ หรือกล่าวว่าเราได้ทำการแปลงปัญหาในโดเมนเวลามาอยู่ในโดเมนความถี่โดยการใช้เฟสเซอร์ ในที่นี้การแปลงหมายถึงการแทนหรือเปลี่ยนรูปทางคณิตศาสตร์เพื่อเอื้อให้การคำนวณทำได้ง่ายขึ้น ตาราง 9.2 แสดงการแปลงจากโดเมนเวลามาอยู่ในโดเมนความถี่โดยการใช้เฟสเซอร์

ตาราง 9.2 การแปลงจากโดเมนเวลามาอยู่ในโดเมนความถี่

1. เขียนฟังก์ชันในโดเมนเวลา ในรูป $$y(t) = Y_m \cos(\omega t + \phi)$$ 2. ใช้สมการของออยเลอร์เขียน $y(t)$ ใหม่ในรูป $$y(t) = \text{Re}\left\{Y_m e^{j(\omega t+\phi)}\right\}$$ 3. เอาส่วนที่ไม่เปลี่ยนแปลงออก จะได้ $$\mathbf{Y} = Y_m e^{j\phi} = Y_m \angle \phi$$

ตัวอย่างการแปลงคือ หากต้องการหาเฟสเซอร์ของ

$$i(t) = 5\sin(100t + 120°)$$

เขียนใหม่ในรูปฟังก์ชัน cosine ได้

$$i(t) = 5\cos(100t + 30°)$$

ข้อมูลที่เราต้องการคือขนาดและเฟส ดังนั้นเฟสเซอร์ของ i คือ

$$\mathbf{I} = 5\angle 30°$$

กระบวนการย้อนกลับสามารถทำได้เช่นกัน โดยการทำขั้นตอนย้อนกลับทีละขั้น เรียกว่าการแปลงจากโดเมนความถี่มาเป็นโดเมนเวลา เช่นหากต้องการแทนเฟสเซอร์ $\mathbf{V} = 25\angle 125°$ ด้วยนิพจน์ในโดเมนเวลา จะได้

$$v(t) = 25\cos(\omega t + 125°)$$

การใช้วิธีเฟสเซอร์จะทำให้การหาผลตอบสนองในสภาวะคงตัวต่อการกระตุ้นด้วยไซนูซอยด์ ทำได้ง่าย ดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

พิจารณาวงจรอันดับหนึ่ง ในรูปที่ 9.3 กำหนดค่า $R = 200\,\Omega$ $L = 2$ H และแหล่งจ่าย $v_s = V_m \cos \omega t$ V โดยที่ $\omega = 100$ rad/s เขียนสมการอนุพันธ์ได้

$$L\frac{di}{dt} + Ri = v_s$$

จาก

$$v_s = V_m \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}\left\{V_m e^{j(\omega t+\phi)}\right\}$$

และคำตอบจะอยู่ในรูป

$$i = I_m \cos(\omega t + \beta) = \mathrm{Re}\left\{ I_m e^{j(\omega t+\beta)} \right\}$$

เอาส่วนที่ไม่เปลี่ยนแปลงคือ $e^{j\omega t}$ ออก จะได้

$$(j\omega L + R)\underbrace{I_m e^{j\beta}}_{\mathbf{I}} = \underbrace{V_m e^{j\phi}}_{\mathbf{V}}$$

โดยที่เฟสเซอร์กระแส $\mathbf{I} = I_m e^{j\beta}$ และเฟสเซอร์แรงดัน $\mathbf{V} = V_m e^{j\phi}$
ดังนั้นในรูปของเฟสเซอร์เราได้สมการอนุพันธ์

$$(j\omega L + R)\mathbf{I} = \mathbf{V}$$

หรือ

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{(j\omega L + R)}$$

แทนค่า $R = 200\,\Omega$ $L = 2$ H และ $\omega = 100$ rad/s จะได้

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= \frac{\mathbf{V}}{(j200 + 200)} \\ &= \frac{V_m \angle 0^\circ}{283\angle 45^\circ} \\ &= \frac{V_m}{283}\angle -45^\circ\end{aligned}$$

แปลงเฟสเซอร์ของกระแสกลับไปในโดเมนเวลาจะได้

$$i(t) = \frac{V_m}{283}\cos(100t - 45^\circ) \quad \text{A}$$

จากตัวอย่างที่ผ่านมาจะเห็นว่าเราสามารถใช้วิธีเฟสเซอร์เขียนสมการอนุพันธ์ให้เป็นสมการพีชคณิต ทำให้การหาคำตอบในรูปของเฟสเซอร์ทำได้ง่าย จากนั้นเราจะแปลงคำตอบในรูปเฟสเซอร์กลับมายังโดเมนเวลาเพื่อให้ได้คำตอบในสภาวะคงตัวตามที่ต้องการ

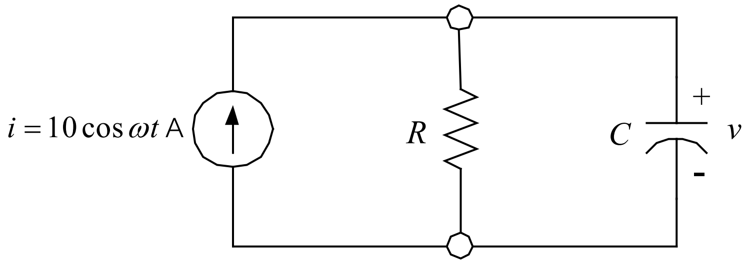
ตัวอย่าง 9.4 จงหาค่าแรงดันในสภาวะคงตัว v ของวงจรในรูป Ex9.4 เมื่อกำหนด $i = 10\cos\omega t$ A $R = 1\,\Omega$ $C = 10$ mF และ $\omega = 100$ rad/s

วิธีทำ หาเฟสเซอร์ของแหล่งจ่ายกระแส

$$\mathbf{I} = I_m \angle 0^\circ$$

เราจะหาค่าแรงดันคำตอบในรูปเฟสเซอร์ $\mathbf{V}$ ก่อน เขียนสมการอนุพันธ์จากสมการ KCL ได้

$$\frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} = i$$



รูปที่ Ex9.4

เนื่องจาก $i = 10\,\mathrm{Re}\left\{e^{j\omega t}\right\}$ และ $v = V_m\,\mathrm{Re}\left\{e^{j(\omega t+\phi)}\right\}$ แทนลงในสมการอนุพันธ์ และไม่เขียน Re

$$\frac{V_m}{R}e^{j(\omega t+\phi)} + j\omega C V_m e^{j(\omega t+\phi)} = 10e^{j\omega t}$$

เอาพจน์ $e^{j\omega t}$ ออกจะได้

$$\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)V_m e^{j\phi} = 10e^{j0^\circ}$$

เขียนใหม่ในรูปเฟสเซอร์กระแสและแรงดัน

$$\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)\mathbf{V} = \mathbf{I}$$

แทนค่า $R = 1\,\Omega$ $C = 10$ mF และ $\omega = 100$ rad/s

$$\left(1 + j1\right)\mathbf{V} = \mathbf{I}$$

หรือ

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{\left(1+j1\right)} = \frac{10}{\sqrt{2}\angle 45^\circ} = \frac{10}{\sqrt{2}}\angle -45^\circ$$

แปลงเฟสเซอร์ของกระแสกลับไปในโดเมนเวลาจะได้

$$v(t) = \frac{10}{\sqrt{2}}\cos(100t - 45^\circ) \quad \text{V}$$

9.5 ความสัมพันธ์เฟสเซอร์ขององค์ประกอบวงจรต่าง ๆ

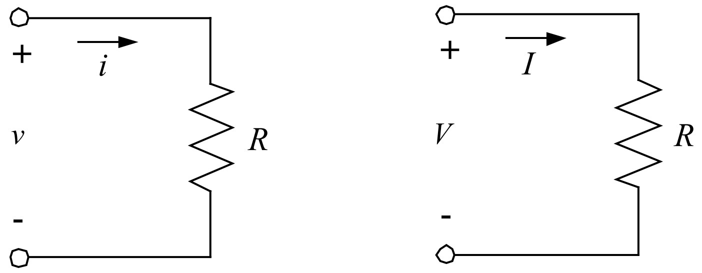
ในหัวข้อที่แล้วเราได้ว่าการแทนด้วยเฟสเซอร์ก็คือการแปลงจากโดเมนเวลาไปยังโดเมนความถี่ และด้วยการแปลงนี้เราได้แปลงสมการอนุพันธ์เป็นสมการพีชคณิต ซึ่งสามารถหาคำตอบได้ง่ายกว่า ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าเฟสเซอร์แรงดันและเฟสเซอร์กระแสขององค์ประกอบวงจรที่ได้ศึกษามาแล้วคือ ตัวต้านทาน ตัวเก็บประจุและตัวเหนี่ยวนำ

พิจารณาตัวต้านทานในรูปที่ 9.4 (ก) ความสัมพันธ์ของกระแสและแรงดันในโดเมนเวลาคือ

$$v = Ri \tag{9.14}$$

และพิจารณาแหล่งจ่ายแรงดันในสภาวะคงตัว

$$v = V_m \cos(\omega t + \phi)$$



(ก) (ข)

รูปที่ 9.4 ตัวต้านทาน

(ก) ความสัมพันธ์ของกระแสและแรงดันในโดเมนเวลา (ข) ความสัมพันธ์เฟสเซอร์

ดังนั้น

$$v = \mathrm{Re}\left\{V_m e^{j(\omega t+\phi)}\right\} \tag{9.15}$$

กระแสจะอยู่ในรูป

$$i = \mathrm{Re}\left\{I_m e^{j(\omega t+\beta)}\right\} \tag{9.16}$$

แทนสมการ (9.15) และ (9.16)ลงในสมการ (9.14) โดยไม่เขียน Re

$$V_m e^{j(\omega t+\phi)} = RI_m e^{j(\omega t+\beta)}$$

และเอาพจน์ $e^{j\omega t}$ ออก จะได้

$$V_m e^{j\phi} = RI_m e^{j\beta}$$

ดังนั้นจาก $\phi = \beta$ จะเขียนเป็นเฟสเซอร์ได้

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \tag{9.17}$$

การที่เฟสของกระแส β และเฟสของแรงดัน ϕ ของตัวต้านทานมีค่าเท่ากัน เราเรียกว่าเฟสตรงกัน (In Phase) จะได้ความสัมพันธ์เฟสเซอร์ดังแสดงในรูปที่ 9.4 (ข) ตัวอย่างเช่นถ้าแรงดันตกคร่อมตัวต้านทานในโดเมนเวลามีค่า $v = 10\cos 10t$ เราจะทราบว่าค่ากระแสในโดเมนเวลาจะเป็น

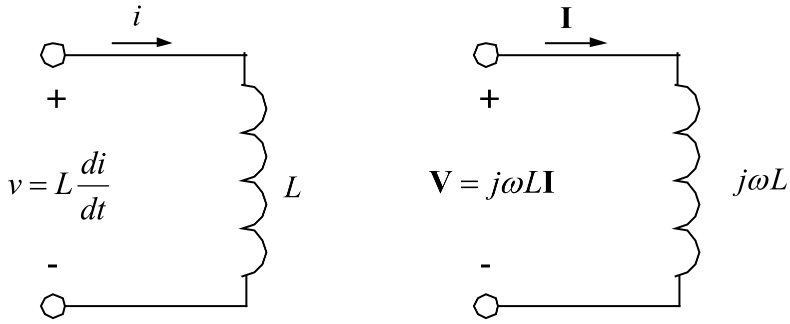
$$i = \frac{10}{R}\cos\omega t$$

ในโดเมนความถี่จะได้

$$\mathbf{V} = 10\angle 0^\circ$$

และอาศัยสมการ (9.17)

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{R} = \frac{10\angle 0^\circ}{R}$$



(ก) (ข)

รูปที่ 9.5 ตัวเหนี่ยวนำ

(ก) ความสัมพันธ์ของกระแสและแรงดันในโดเมนเวลา (ข) ความสัมพันธ์เฟสเซอร์

พิจารณาตัวเหนี่ยวนำในรูปที่ 9.5 (ก) ความสัมพันธ์ของกระแสและแรงดันในโดเมนเวลาคือ

$$v = L\frac{di}{dt} \tag{9.18}$$

ในทำนองเดียวกันเราจะใช้แหล่งจ่ายแรงดัน

$$v = \mathrm{Re}\left\{V_m e^{j(\omega t+\phi)}\right\}$$

และกระแสก็จะอยู่ในรูป

$$i = \mathrm{Re}\left\{I_m e^{j(\omega t+\beta)}\right\}$$

แทนลงในสมการ (9.18) จะได้

$$V_m e^{j(\omega t+\phi)} = L\frac{d}{dt}\left\{I_m e^{j(\omega t+\beta)}\right\}$$

ทำการหาค่าอนุพันธ์

$$V_m e^{j\omega t} e^{j\phi} = j\omega L I_m e^{j\omega t} e^{j\beta}$$

และเอาพจน์ $e^{j\omega t}$ ออก จะได้

$$V_m e^{j\phi} = j\omega L I_m e^{j\beta} \tag{9.19}$$

เขียนเป็นเฟสเซอร์ได้

$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I} \tag{9.20}$$

จะได้ความสัมพันธ์เฟสเซอร์ดังในรูปที่ 9.5 (ข) เนื่องจาก $j = e^{j90^\circ}$ สมการ (9.19) สามารถเขียนได้เป็น

$$V_m e^{j\phi} = \omega L I_m e^{j\beta} e^{j90^\circ}$$

ดังนั้น

$$\phi = \beta + 90^\circ$$

หรือกล่าวได้ว่าแรงดันนำกระแสอยู่ 90° ตัวอย่างเช่นพิจารณาตัวเหนี่ยวนำ 2 H $\omega = 100$ rad/s และแหล่งจ่ายแรงดัน $v = 10\cos(10t + 50^\circ)$ จะได้เฟสเซอร์ของแรงดัน

$$\mathbf{V} = 10\angle 50^\circ$$

และเฟสเซอร์ของกระแส

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{j\omega L} = \frac{10\angle 50^\circ}{j\omega L}$$

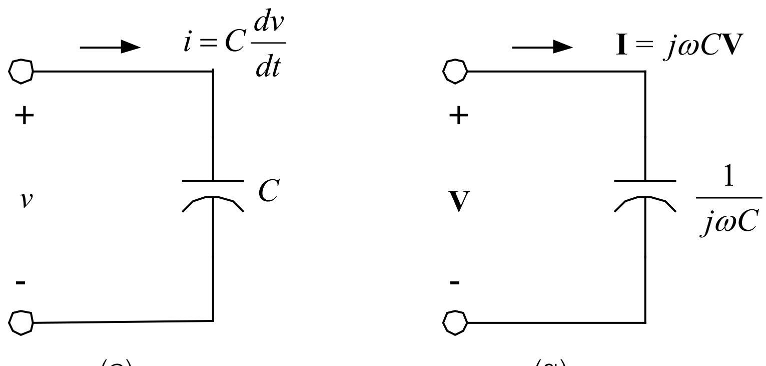
แทนค่า $j\omega L = j200$

$$\mathbf{I} = \frac{10\angle 50^\circ}{j200} = \frac{10\angle 50^\circ}{200\angle 90^\circ} = 0.05\angle -40^\circ \text{ A}$$

เขียนกระแสในโดเมนเวลาได้

$$i(t) = 0.05\cos(100t - 40^\circ) \text{ A}$$

ดังนั้นจะเห็นว่ากระแสตามแรงดันอยู่ 90°



รูปที่ 9.6 ตัวเก็บประจุ

(ก) ความสัมพันธ์ของกระแสและแรงดันในโดเมนเวลา (ข) ความสัมพันธ์เฟสเซอร์

และสุดท้ายพิจารณาตัวเก็บประจุดังแสดงในรูปที่ 9.6 (ก) ความสัมพันธ์ของกระแสและแรงดันในโดเมนเวลาคือ

$$i = C\frac{dv}{dt} \tag{9.21}$$

ในทำนองเดียวกันเราจะใช้แหล่งจ่ายแรงดัน

$$v = \mathrm{Re}\left\{V_m e^{j(\omega t+\phi)}\right\}$$

และกระแสก็จะอยู่ในรูป

$$i = \mathrm{Re}\left\{I_m e^{j(\omega t+\beta)}\right\}$$

แทนลงในสมการ (9.21) จะได้

$$I_m e^{j(\omega t+\beta)} = C\frac{d}{dt}\left\{V_m e^{j(\omega t+\phi)}\right\}$$

ทำการหาค่าอนุพันธ์

$$I_m e^{j\omega t} e^{j\beta} = j\omega C V_m e^{j\omega t} e^{j\phi}$$

และเอาพจน์ $e^{j\omega t}$ ออก จะได้

$$I_m e^{j\beta} = j\omega C V_m e^{j\phi} \tag{9.22}$$

เขียนเป็นเฟสเซอร์ได้

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V} \tag{9.23}$$

จะได้ความสัมพันธ์เฟสเซอร์ดังในรูปที่ 9.6 (ข) เนื่องจาก $j = e^{j90^\circ}$ สมการ (9.22) สามารถเขียนได้เป็น

$$I_m e^{j\beta} = \omega C V_m e^{j\phi} e^{j90^\circ}$$

ดังนั้น

$$\beta = \phi + 90^\circ$$

หรือกล่าวได้ว่ากระแสนำแรงดันอยู่ 90° ตัวอย่างเช่นพิจารณาตัวเก็บประจุ 1 mF $\omega = 1000$ rad/s และแหล่งจ่ายแรงดัน $v = 100\cos\omega t$ จะได้เฟสเซอร์ของแรงดัน

$$\mathbf{V} = 100\angle 0^\circ$$

และ

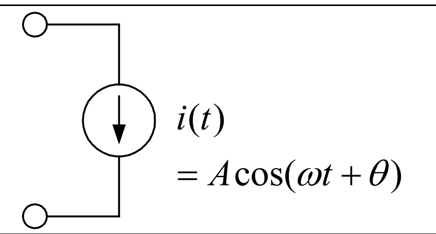
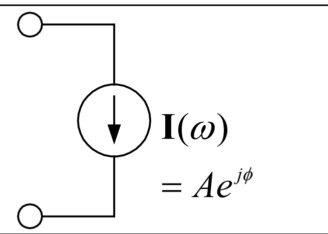
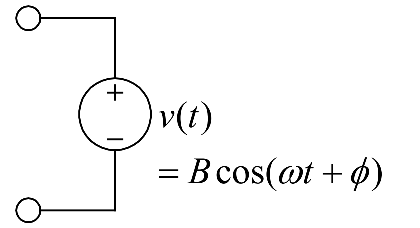
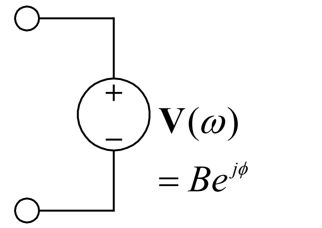
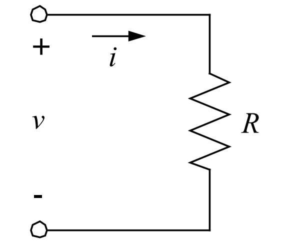
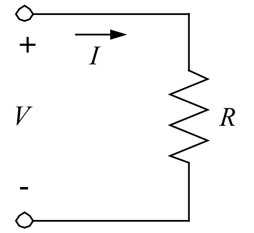
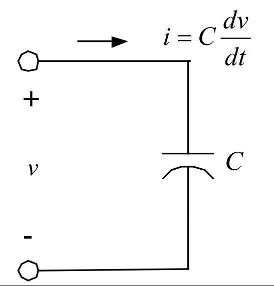
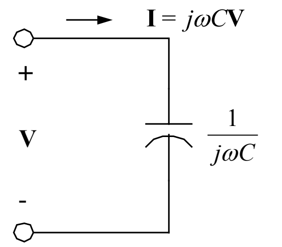
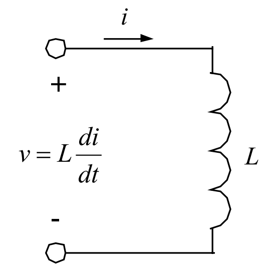
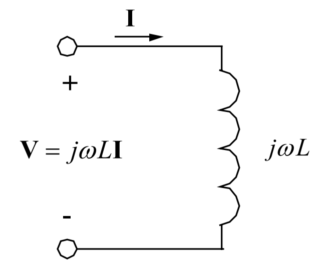
$$\begin{aligned}\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V} &= (e^{j90^\circ}\omega C)(100e^{j0^\circ}) \\ &= (1e^{j90^\circ})100 \\ &= 100\angle 90^\circ\end{aligned}$$

เขียนกระแสในโดเมนเวลาได้

$$i(t) = 100\cos(1000t + 90^\circ)\ \text{A}$$

ตาราง 9.3 สรุปความสัมพันธ์เฟสเซอร์ขององค์ประกอบวงจรทั้งสามชนิดและแหล่งจ่ายแบบต่างๆ

ตาราง 9.3 ความสัมพันธ์เฟสเซอร์ขององค์ประกอบวงจรต่าง ๆ

องค์ประกอบ	โดเมนเวลา	โดเมนความถี่
แหล่งจ่ายกระแส		
แหล่งจ่ายแรงดัน		
ตัวต้านทาน		
ตัวเก็บประจุ		
ตัวเหนี่ยวนำ		
CCVS