EN811100
LINEAR CIRCUIT ANALYSIS

Chapter 2

Basic Laws

Dec 20, 2019

C. K. Alexander – M. N. O. Sadiku
Fundamentals of Electric Circuits, 5th Edition, The McGraw-Hill Companies 2013
J. A. Svoboda – R. C. Dorf
Introduction to Electric Circuits, 9th edition, John Wiley & Sons, Inc. 2014

1

Basic Laws - Chapter 2

2

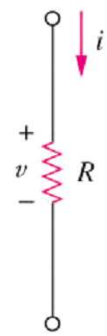
2.1 Ohms Law

- Ohm's law states that the voltage across a resistor is directly proportional to the current I flowing through the resistor.

- Mathematical expression for Ohm's Law is as follows:

$$v = iR$$

- Two extreme possible values of R: **0 (zero) and ∞ (infinite)** are related with two basic circuit concepts: short circuit and open circuit.



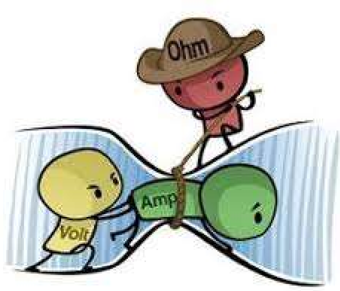
3

Historical

Georg Simon Ohm (1787–1854), a German physicist, in 1826 experimentally determined the most basic law relating voltage and current for a resistor. Ohm's work was initially denied by critics.

Born of humble beginnings in Erlangen, Bavaria, Ohm threw himself into electrical research. His efforts resulted in his famous law. He was awarded the Copley Medal in 1841 by the Royal Society of London. In 1849, he was given the Professor of Physics chair by the University of Munich. To honor him, the unit of resistance was named the ohm.

© SSPL via Getty Images



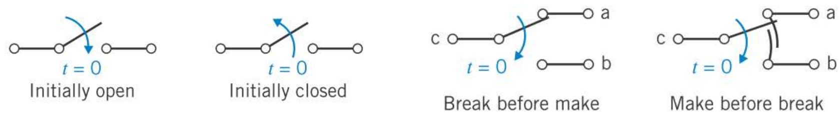
$$V = IR$$

4

2.1 Ohms Law

Switches

Switches have two distinct states: open and closed. Ideally, a switch acts as a short circuit when it is closed and as an open circuit when it is open.



SPST Switches

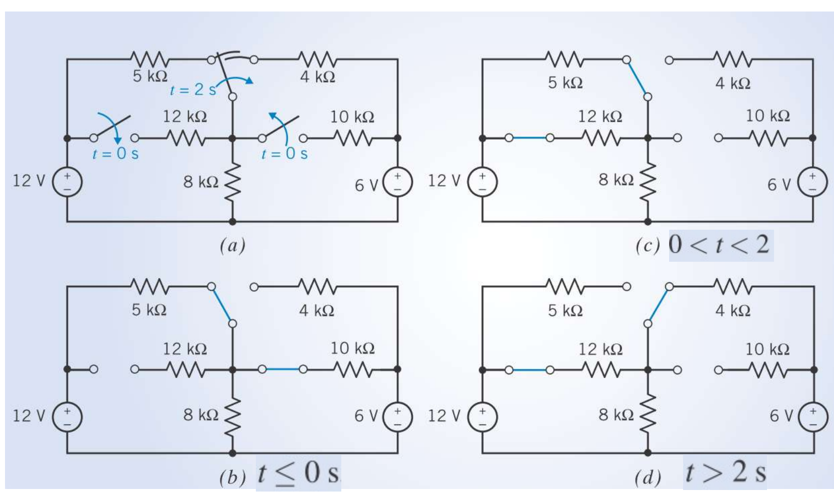
SPDT Switches

Single Pole Single Throw

Single Pole Dual Throws

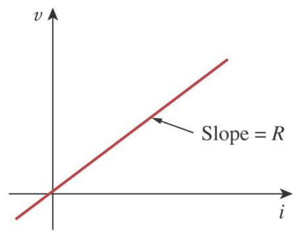
2.1 Ohms Law

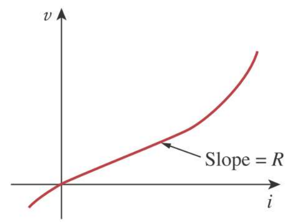
Example a circuit with switches



2.1 Ohms Law

The i-v characteristic of





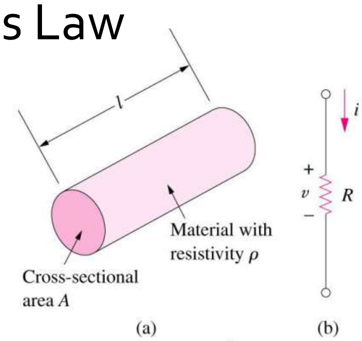
a linear resistor

a nonlinear resistor

In this course, all the elements that are designated as resistors are linear (unless mentioned otherwise).

7

2.1 Ohms Law



$$R \propto \frac{l}{A}$$

(Unit of ρ = Ohm-meter)

The constant of the proportionality is the resistivity of the material, i.e., ρ

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

The *resistance R* of an element denotes its ability to resist the flow of electric current; it is measured in ohms (Ω).

8

2.1 Ohms Law

Resistivities of common materials.

Material	Resistivity (Ω·m)	Usage
Silver	1.64×10^{-8}	Conductor
Copper	1.72×10^{-8}	Conductor
Aluminum	2.8×10^{-8}	Conductor
Gold	2.45×10^{-8}	Conductor
Carbon	4×10^{-5}	Semiconductor
Germanium	47×10^{-2}	Semiconductor
Silicon	6.4×10^{2}	Semiconductor
Paper	10^{10}	Insulator
Mica	5×10^{11}	Insulator
Glass	10^{12}	Insulator
Teflon	3×10^{12}	Insulator

9

2.1 Ohms Law

- *Conductance* is the ability of an element to conduct electric current; it is the reciprocal of resistance R and is measured in mhos or siemens.

$$G = \frac{1}{R} = \frac{i}{v}$$

Conductance is the ability of an element to conduct electric current; it is measured in mhos (℧) or siemens (S).

- The power dissipated by a resistor:

$$p = vi = i^2 R = \frac{v^2}{R}$$

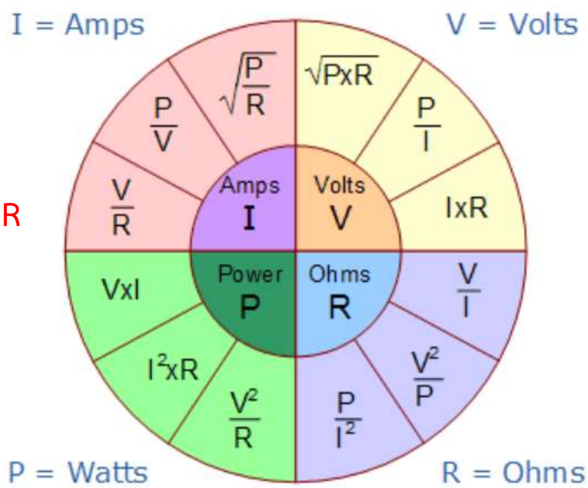
10

Ohms Law Summary

$$V = IR$$

$$P = VI$$

การหาค่า P, V, I, R ถ้าเราทราบ 2 ค่า อีก 2 ค่าที่เหลือจะตามมา

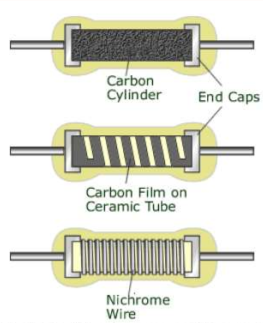


11

2.1 Ohms Law

Fixed Resistors

- Inside the resistor



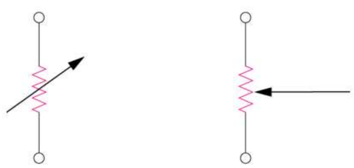
- A common type of resistor that you will work with in your labs:
- It has 4 color-coded bands (3 for value and one for tolerance)
  – How to read the value of the resistor?

12

2.1 Ohms Law

Variable Resistors

- Variable resistors have adjustable resistance and are typically called potentiometer (or pot for short).
- Potentiometers have three terminals one of which is a sliding contact or wiper.



(a) (b)

13

2.2 Nodes, Branches and Loops

- A branch represents a single element such as a voltage source or a resistor.
- A node is the point of connection between two or more branches.
- A loop is any closed path in a circuit.

Mesh

- A network with b branches, n nodes, and l independent loops will satisfy the fundamental theorem of network topology:

Independent loop
หมายถึง Loop ที่ประกอบด้วย
Branch อย่างน้อย 1 Branch
ที่ไม่เป็นของ Loop อื่น

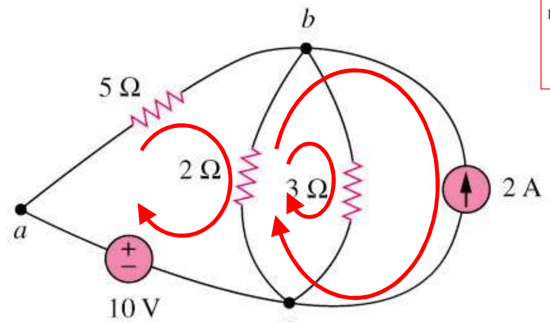
$$b = l + n - 1$$

14

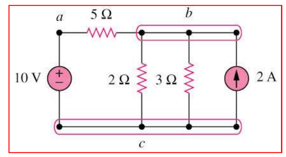
2.2 Nodes, Branches and Loops

Branch = 5, Loop = 3, Node = 3

Example 1



Original circuit



Equivalent circuit

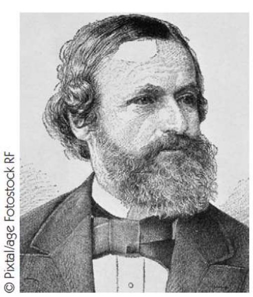
$$b = l + n - 1$$

$$5 = 3 + 3 - 1$$

How many branches, nodes and loops are there?

15

Historical

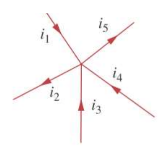


Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887), a German physicist, stated two basic laws in 1847 concerning the relationship between the currents and voltages in an electrical network. Kirchhoff's laws, along with Ohm's law, form the basis of circuit theory.

Born the son of a lawyer in Konigsberg, East Prussia, Kirchhoff entered the University of Konigsberg at age 18 and later became a lecturer in Berlin. His collaborative work in spectroscopy with German chemist Robert Bunsen led to the discovery of cesium in 1860 and rubidium in 1861. Kirchhoff was also credited with the Kirchhoff law of radiation. Thus Kirchhoff is famous among engineers, chemists, and physicists.

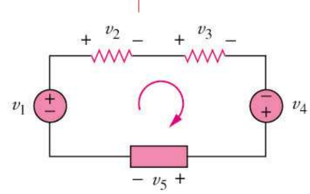
Kirchhoff Current Law (applied at node)

$$\sum_{n=1}^{N} i_n = 0$$



Kirchhoff Voltage Law (applied at loop)

$$\sum_{m=1}^{M} v_n = 0$$

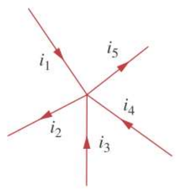


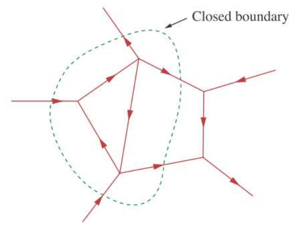
16

2.3 Kirchhoff's Laws

- Kirchhoff's current law (KCL) states that the algebraic sum of currents entering a node (or a closed boundary) is zero.

(มาจาก กฎการอนุรักษ์ประจุไฟฟ้า)





$i_1 + (-i_2) + i_3 + i_4 + (-i_5) = 0$ → กระแสรวมที่ Node = 0

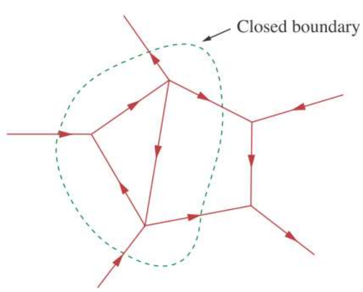
or

$i_1 + i_3 + i_4 = i_2 + i_5$ → กระแสที่เข้า = กระแสที่ออก

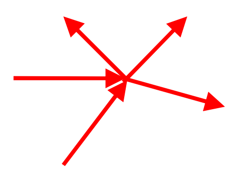
Mathematically, $\sum_{n=1}^{N} i_n = 0$ or $\sum i_{IN} = \sum i_{OUT}$

17

- Kirchhoff's current law (KCL) states that the algebraic sum of currents entering a node (or a closed boundary) is zero.



=



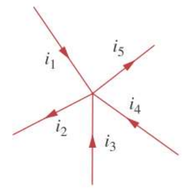
Closed boundary มองเป็น 1 Node ก็ได้

18

การกำหนดเครื่องหมาย + - ของกระแส

❖ ในกรณีที่เราใช้สมการ $$\sum_{n=1}^{N} i_n = 0$$

ให้กำหนดว่ากระแสไหลเข้า จะต้องมีเครื่องหมายตรงข้ามกับ กระแสที่ไหลออก เช่น



กระแสไหลเข้าเป็น +

กระแสไหลออกเป็น –

$$i_1 + (-i_2) + i_3 + i_4 + (-i_5) = 0$$

หรือ

กระแสไหลเข้าเป็น -

กระแสไหลออกเป็น + (เลือกอย่างใดอย่างหนึ่ง)

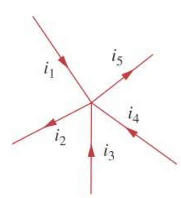
การกำหนดเครื่องหมาย + - ของกระแส

❖ ในกรณีที่เราใช้สมการ $$\sum i_{IN} = \sum i_{OUT}$$

ให้จัดสมการให้กระแสไหลเข้าทั้งหมดอยู่ด้านหนึ่งของสมการ

ส่วนอีกฝั่งหนึ่งของสมการ

ให้มีเฉพาะกระแสที่ไหลออก



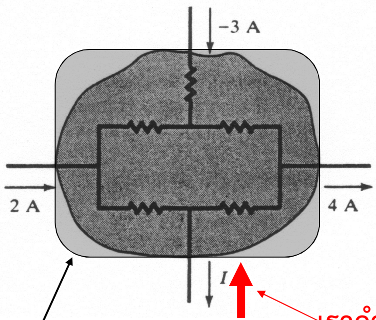
$$i_1 + i_3 + i_4 = i_2 + i_5$$

2.3 Kirchhoff's Laws

Example 1

- Determine the current I for the circuit shown in the figure below.

ในตัวอย่างนี้กำหนดให้ กระแสไหลเข้าเป็น -, ไหลออกเป็น +



ไหลออก (+) ไหลเข้า (-)

I + 4-(-3)-2 = 0

⇒I = -5A

This indicates that the actual current, I is flowing in the opposite direction.

เรากำหนดให้ I ไหลออก แต่ถ้าเราได้คำตอบเป็นลบ แสดงว่าจริงๆแล้ว I ไหลสวนทางกับที่เรากำหนด

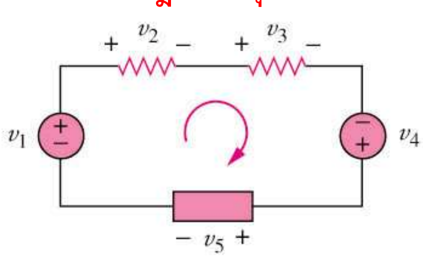
We can consider the whole enclosed area as one "node".

21

2.3 Kirchhoff's Laws

- Kirchhoff's voltage law (KVL) states that the algebraic sum of all voltages around a closed path (or loop) is zero.

(มาจาก กฎการอนุรักษ์พลังงาน)



$$-v_1 + v_2 + v_3 - v_4 + v_5 = 0$$

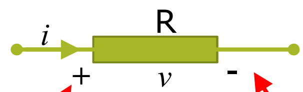
การกำหนดเครื่องหมาย + - ของแรงดัน

1. กำหนดทิศทางการไหลของกระแสภายใน Loop
2. ไล่ไปตามทิศทาง Loop ถ้าเราเจอขั้วของแรงดันขั้วใดขึ้นก่อน จะได้เครื่องหมายของแรงดันเป็นไปตามขั้วนั้น

Mathematically, $\sum_{m=1}^{M} v_n = 0$

22

การกำหนดขั้วของแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมอุปกรณ์ไฟฟ้า ให้ดูจากทิศทางของกระแส



กระแสไหลเข้าขั้วไหน
แรงดันที่ขั้วนั้นจะเป็นขั้วบวก

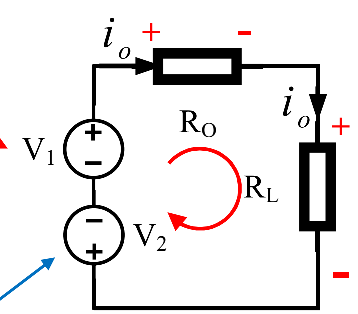
กระแสไหลออกที่ขั้วไหน
แรงดันที่ขั้วนั้นจะเป็นขั้วลบ

$$v = iR$$

กฎของโอห์ม

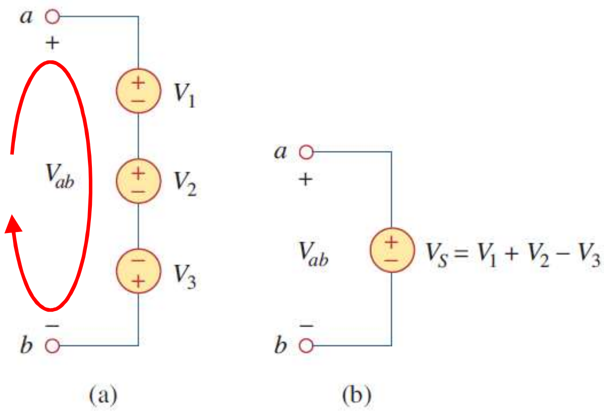
การกำหนดเครื่องหมายของแรงดันไฟฟ้าใน Loop

ให้ไล่วงจรตามทิศของกระแสใน Loop
ถ้าเจอแรงดันที่ขั้วลบขึ้นก่อน
แสดงว่า V ตัวนั้นจะมี
เครื่องหมายเป็นลบ



ถ้าเจอแรงดันที่ขั้วบวกขึ้นก่อน
แสดงว่า V ตัวนั้นจะมี
เครื่องหมายเป็นบวก

$$-V_1 + i_o R_o + i_o R_L + V_2 = 0$$



$$V_1 + V_2 - V_3 - V_{ab} = 0$$

or

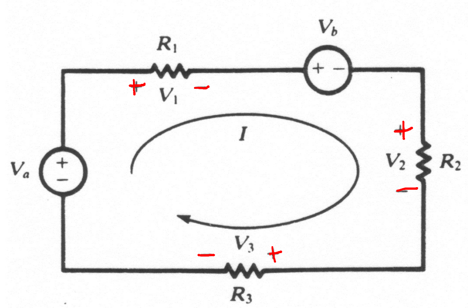
$$V_{ab} = V_1 + V_2 - V_3$$

25

2.3 Kirchhoff's Laws

Example 2

- Applying the KVL equation for the circuit of the figure below.



$-v_a+v_1+v_b+v_2+v_3 = 0$

$V_1 = IR_1$ $v_2 = IR_2$ $v_3 = IR_3$

$\Rightarrow v_a - v_b = I(R_1 + R_2 + R_3)$

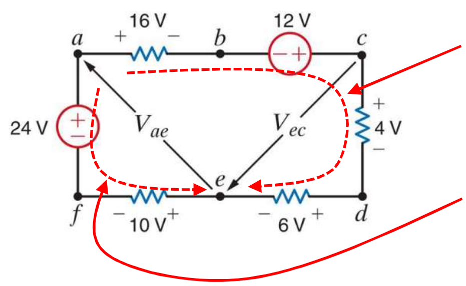
$$I = \frac{v_a - v_b}{R_1 + R_2 + R_3}$$

26

2.3 Kirchhoff's Laws

Exercise

In the following circuit use KVL to determine V_{ae} and V_{ec}. Note that we use the convention V_{ae} to indicate the voltage of point a with respect to point *e* or $V_{ae}=V_a-V_e$



$$V_{ae} = +16-12+4+6$$
$$= 14\,V$$
or
$$V_{ae} = 24-10 = 14\,V$$

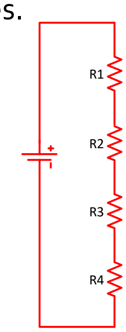
$$V_{ec} = -6-4 = -10\,V \quad \text{or} \quad V_{ec} = 10-24+16-12 = -10\,V$$

27

2.4 Series Resistors and Voltage Division

- Series: Two or more elements are in series if they are cascaded or connected sequentially and consequently carry the same current.

- The equivalent resistance of any number of resistors connected in a series is the sum of the individual resistances.



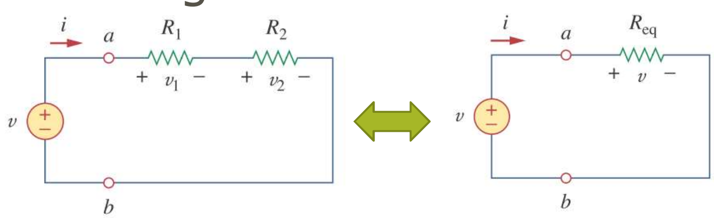
$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N = \sum_{n=1}^{N} R_n$$

- The voltage divider can be expressed as

$$v_n = \frac{R_n}{R_1 + R_2 + \cdots + R_N} v$$

28

2.4 Series Resistors and Voltage Division (การแบ่งแรงดัน)



$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N = \sum_{n=1}^{N} R_n$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2}$$

$$v = v_1 + v_2 = i(R_1 + R_2)$$

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v, \qquad v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v$$

$$v_n = \frac{R_n}{R_1 + R_2 + \cdots + R_N} v$$

ใช้สำหรับหาแรงดันตกคร่อม R_n ในวงจร R ที่ต่ออนุกรมกัน

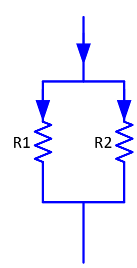
29

2.5 Parallel Resistors and Current Division

- Parallel: Two or more elements are in parallel if they are connected to the same two nodes and consequently have the same voltage across them.

- The equivalent resistance of a circuit with N resistors in parallel is:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N}$$



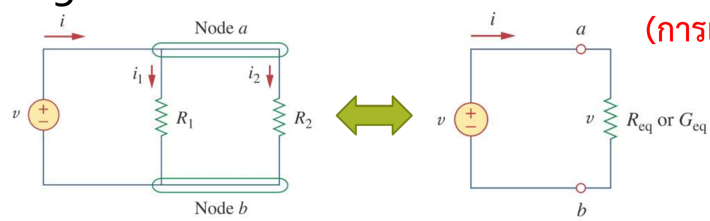
- The total current i is shared by the resistors in inverse proportion to their resistances. The current divider can be expressed as:

$$i_n = \frac{v}{R_n} = \frac{iR_{eq}}{R_n}$$

30

2.5 Parallel Resistors and Current Division

(การแบ่งกระแส)



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} = v\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{v}{R_{eq}}$$

$$i = v\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right) \Rightarrow v = \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)i$$

$$v = i_1 R_1 = i_2 R_2 \Rightarrow i_1 = \frac{v}{R_1}, \quad i_2 = \frac{v}{R_2}$$

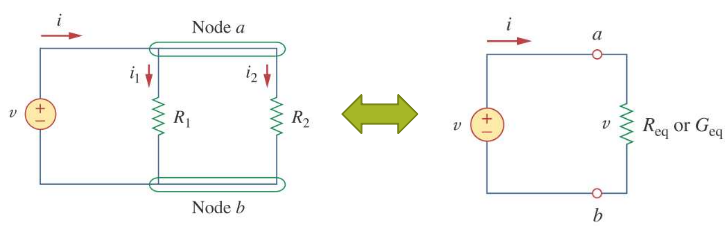
ใช้คำนวณกระแส
ที่ผ่าน R_n ในวงจร
R ที่ต่อขนานกัน

$$i_1 = \frac{R_2\, i}{R_1 + R_2}, \quad i_2 = \frac{R_1\, i}{R_1 + R_2}$$

31

2.5 Parallel Resistors and Current Division

(การแบ่งกระแส)



กรณีที่เราคำนวณโดยใช้ค่า Conductance (G) $\quad G = \dfrac{1}{R}$

สำหรับการต่อ R แบบขนานจะได้

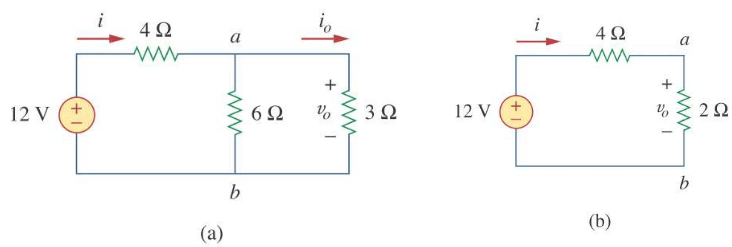
$$G_{eq} = G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_N$$ และ $$i_n = \frac{G_n}{G_1 + G_2 + \cdots + G_N} i$$

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i \qquad i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i$$

32

2.5 Parallel Resistors and Current Division

Example 3



Find i_0 and v_0 and the power dissipated in the 3-Ω resistor

$$6\ \Omega \parallel 3\ \Omega = \frac{6 \times 3}{6 + 3} = 2\ \Omega$$

Apply Ohm's law $i = \dfrac{12}{4 + 2} = 2\ \text{A}$

33

2.5 Parallel Resistors and Current Division

$$v_o = 2i = 2 \times 2 = 4\ \text{V}$$

Or apply voltage division

$$v_o = \frac{2}{2 + 4}(12\ \text{V}) = 4\ \text{V}$$

$$v_o = 3i_o = 4 \qquad \Rightarrow \qquad i_o = \frac{4}{3}\ \text{A}$$

Or apply current division

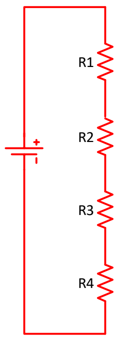
$$i_o = \frac{6}{6 + 3}i = \frac{2}{3}(2\ \text{A}) = \frac{4}{3}\ \text{A}$$

The power dissipated in the 3-Ω resistor is

$$p_o = v_o i_o = 4\left(\frac{4}{3}\right) = 5.333\ \text{W}$$

34

Summary

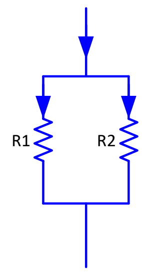


Series resistors

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N = \sum_{n=1}^{N} R_n$$

Parallel resistors

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N}$$



35

Practice Problem 2.9 By combining the resistors in Fig. 2.36, find R_{eq}.

Answer: 10 Ω.

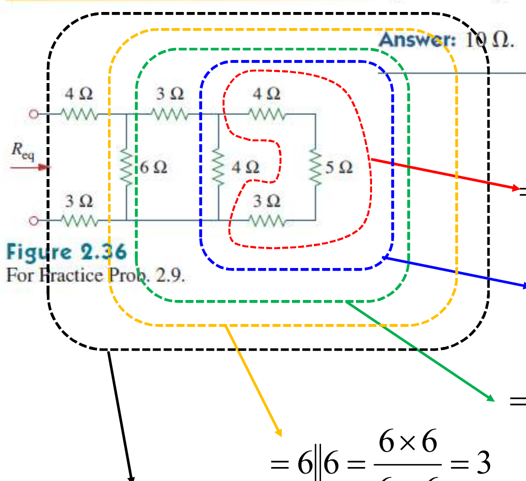


Figure 2.36 For Practice Prob. 2.9.

$$= 4 + 5 + 3 = 12$$

$$= 4 \| 12 = \frac{4 \times 12}{4 + 12} = 3$$

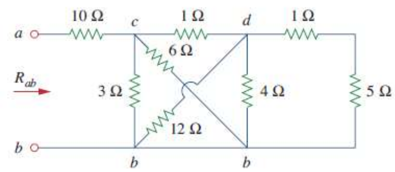
$$= 3 + 3 = 6$$

$$= 6 \| 6 = \frac{6 \times 6}{6 + 6} = 3$$

$$= 4 + 3 + 3 = 10 \ \Omega$$

36

วิธีทำ **Example 2.10** Calculate the equivalent resistance R_{ab} in the circuit in Fig.



Ans: 11.2 Ohms

R 1 Ohm
อนุกรมกับ 5 Ohm $=1+5=6$

ขนานกับ 4 Ohm $=\dfrac{6\times 4}{6+4}=2.4$

ขนานกับ 12 Ohm $=\dfrac{12\times 2.4}{12+2.4}=2$

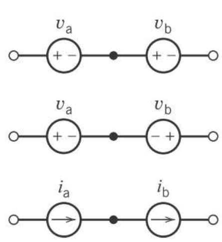
อนุกรมกับ 1 Ohm $=2+1=3$

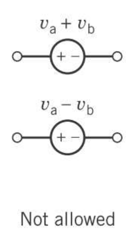
R 3 Ohm ขนานกับ 6 Ohm
$$=\frac{6\times 3}{6+3}=2$$

ขนานกัน
$$=\frac{2\times 3}{2+3}=1.2$$

อนุกรมกับ 10 Ohm $=1.2+10=11.2\ \Omega$

Parallel and Series Voltage and Current Sources

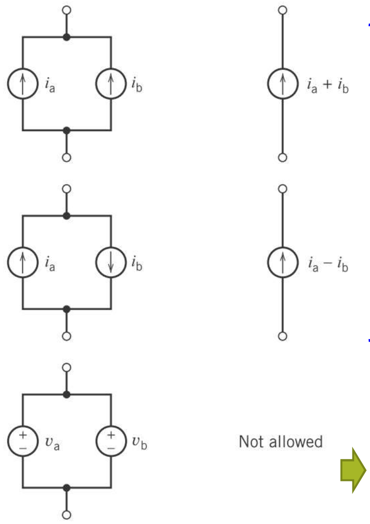




Voltage source สามารถต่ออนุกรมกันได้

Current source จะต่ออนุกรมกันไม่ได้ ถ้ากระแสไม่เท่ากัน เพราะกระแสใน 1 Branch จะมีค่าได้ 1 ค่าเท่านั้น

Parallel and Series Voltage and Current Sources

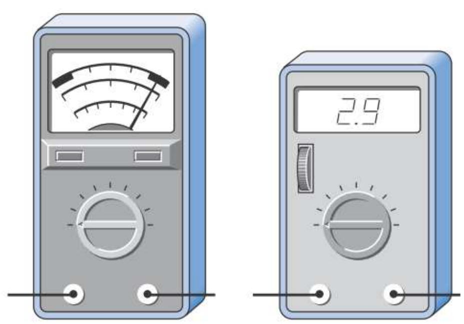


Current source สามารถต่อขนานกันได้

Voltage source ที่มีค่าต่างกัน จะนำมาต่อขนานกันไม่ได้ เพราะ แรงดันตกคร่อม 1 Branch จะมีได้ 1 ค่าเท่านั้น

39

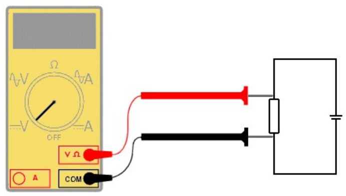
2.6 Voltmeters and Ammeters



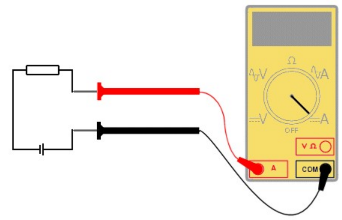
(a) Analog Meter

(b) Digital Meter

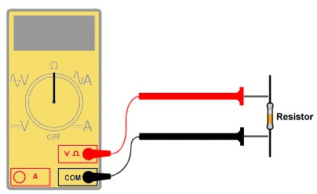
2.7 Multimeters



Using a multimeter
to measure voltage



Using a multimeter
to measure current

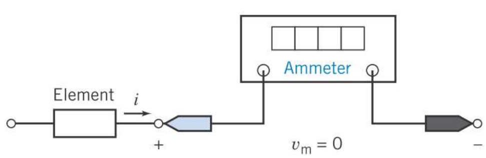


Using a multimeter
to measure resistance

สายไฟฟ้า สีแดงคือ + สีดำคือ –

สีอ่อนคือ + สีเข้มคือ -

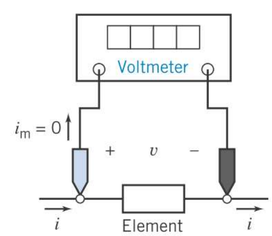
2.6 Voltmeters and Ammeters



(a)

Ideal Ammeter

การต่อ Ammeter
ต้องต่ออนุกรมกับ Load

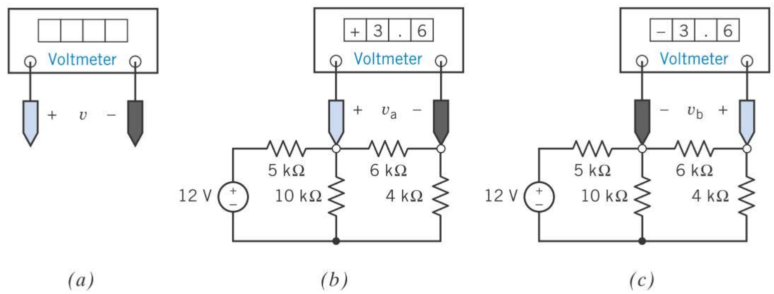


(b)

Ideal Voltmeter

การต่อ Voltmeter
ต้องต่อขนานกับ Load

2.6 Voltmeters and Ammeters



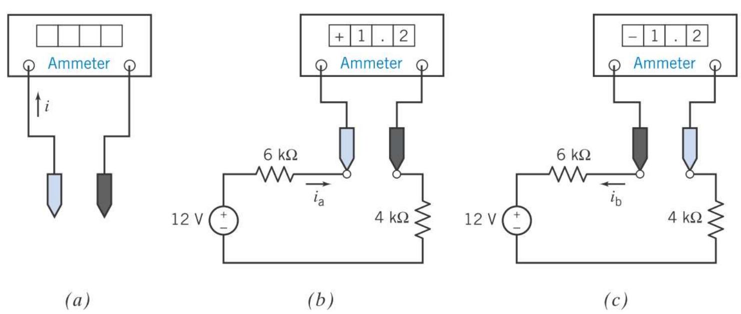
Using a voltmeter to measure voltage

การต่อ Voltmeter เราจะต่อขั้วบวกของ meter กับขั้วบวกของแหล่งจ่ายไฟฟ้า และต่อขั้วลบของ meter เข้ากับขั้วลบของแหล่งจ่าย

ถ้าแรงดันที่วัดได้เป็นบวก แสดงว่าแรงดันมีขั้วตามที่กำหนดไว้

ถ้าแรงดันที่วัดได้เป็นลบ แสดงว่าแรงดันมีขั้วตรงข้ามกับที่กำหนดไว้

2.6 Voltmeters and Ammeters



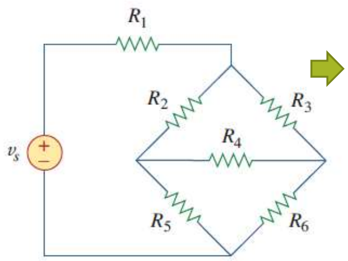
Using an ammeter to measure current

การต่อ Ammeter เราจะกำหนดให้กระแสไหลเข้าที่ขั้วบวกของ Ammeter และไหลออกที่ขั้วลบของ Ammeter

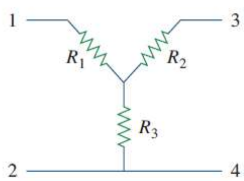
ถ้ากระแสที่วัดได้เป็นบวก แสดงว่ากระแสไหลตามทิศที่กำหนดไว้

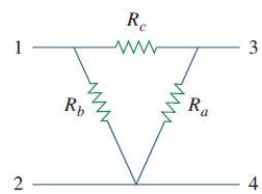
ถ้ากระแสที่วัดได้เป็นลบ แสดงว่ากระแสไหลตรงข้ามกับทิศที่กำหนดไว้

2.8 Y-Δ Transformation



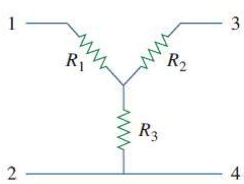
ไม่ใช่ทั้งการต่อแบบอนุกรมและขนาน
ต้องใช้การแปลง Y-Δ มาช่วย

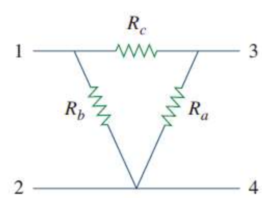




การต่อแบบ Y

การต่อแบบ Δ





การต่อแบบ Y

การต่อแบบ Δ

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

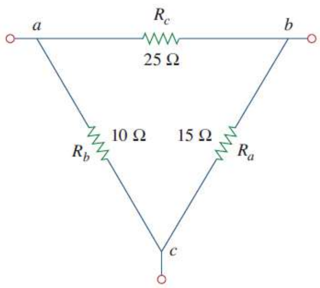
$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$

Example 2.14

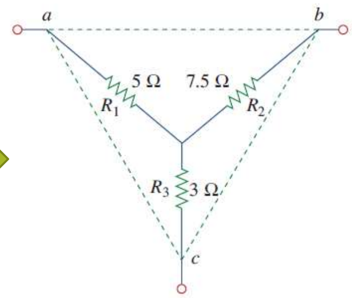
Convert the Δ network in Fig. 2.50(a) to an equivalent Y network.



$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} = \frac{10 \times 25}{15 + 10 + 25} = \frac{250}{50} = 5\ \Omega$$

$$R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c} = \frac{25 \times 15}{50} = 7.5\ \Omega$$

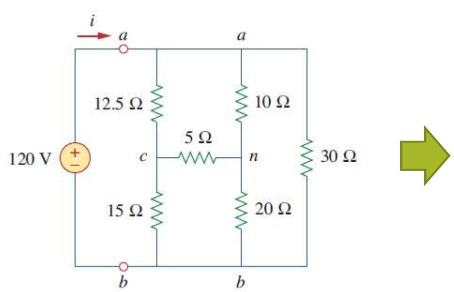
$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c} = \frac{15 \times 10}{50} = 3\ \Omega$$



47

Example 2.15

Obtain the equivalent resistance R_{ab} for the circuit in Fig. 2.52 and use it to find current i.



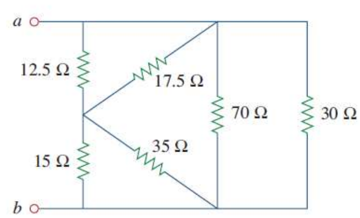


Figure 2.52
For Example 2.15.

$$R_a = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1} = \frac{10 \times 20 + 20 \times 5 + 5 \times 10}{10}$$

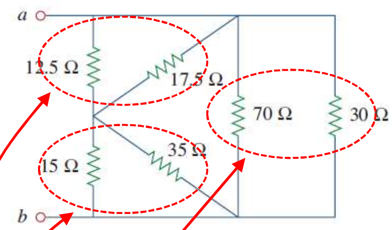
$$= \frac{350}{10} = 35\ \Omega$$

$$R_b = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2} = \frac{350}{20} = 17.5\ \Omega$$

$$R_c = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3} = \frac{350}{5} = 70\ \Omega$$

48

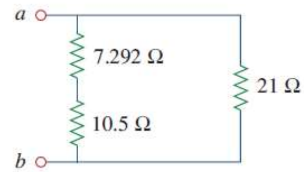
Example 2.15



$$70 \parallel 30 = \frac{70 \times 30}{70 + 30} = 21\ \Omega$$

$$12.5 \parallel 17.5 = \frac{12.5 \times 17.5}{12.5 + 17.5} = 7.292\ \Omega$$

$$15 \parallel 35 = \frac{15 \times 35}{15 + 35} = 10.5\ \Omega$$



$$R_{ab} = (7.292 + 10.5) \| 21$$
$$= \frac{17.792 \times 21}{17.792 + 21}$$
$$= 9.632\ \Omega$$

$$I = \frac{v_s}{R_{ab}} = \frac{120}{9.632} = 12.458A$$

49