EN811100
LINEAR CIRCUIT ANALYSIS

Chapter 9

Sinusoidal and Phasor

Mar 10, 2563

C. K. Alexander – M. N. O. Sadiku
Fundamentals of Electric Circuits, 5th Edition, The McGraw-Hill Companies 2013
J. A. Svoboda – R. C. Dorf
Introduction to Electric Circuits, 9th edition, John Wiley & Sons, Inc. 2014

Sinusoids and Phasor - Chapter 9

9.1 Motivation
9.2 Sinusoids' features
9.3 Phasors
9.4 Phasor relationships for circuit elements
9.5 Impedance and admittance
9.6 Kirchhoff's laws in the frequency domain
9.7 Impedance combinations

Historical

George Westinghouse. Photo © Bettmann/Corbis

DC vs AC?

Nikola Tesla (1856–1943) and **George Westinghouse** (1846–1914) helped establish alternating current as the primary mode of electricity transmission and distribution.

Today it is obvious that ac generation is well established as the form of electric power that makes widespread distribution of electric power efficient and economical. However, at the end of the 19th century, which was the better—ac or dc—was hotly debated and had extremely outspoken supporters on both sides. The dc side was led by Thomas Edison, who had earned a lot of respect for his many contributions. Power generation using ac really began to build after the successful contributions of Tesla. The real commercial success in ac came from George Westinghouse and the outstanding team, including Tesla, he assembled. In addition, two other big names were C. F. Scott and B. G. Lamme.

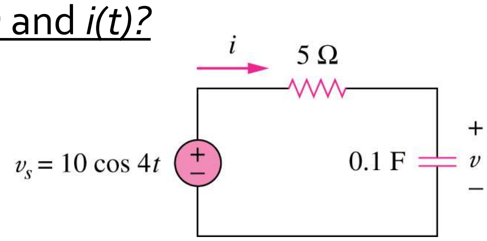
The most significant contribution to the early success of ac was the patenting of the polyphase ac motor by Tesla in 1888. The induction motor and polyphase generation and distribution systems doomed the use of dc as the prime energy source.

ในปลายศตวรรษที่ 19 มีการแข่งขันเรื่องการส่งพลังงานไฟฟ้าว่าควรจะใช้ไฟฟ้ากระแสตรง (DC) หรือไฟฟ้ากระแสสลับ (AC) ดี? ฝ่ายที่สนับสนุนไฟฟ้ากระแสตรงคือ Thomas Edison ส่วนฝ่ายที่สนับสนุนไฟฟ้ากระแสสลับคือ Nikola Tesla และ George Westinghouse สุดท้ายฝ่ายที่ชนะก็คือ AC

9.1 Motivation

How to determine *v(t)* and *i(t)?*

How can we apply what we have learned before to determine *i(t)* and *v(t)*?



❖ ในบทที่ 1-8 ที่ผ่านมา ไฟฟ้าที่ใช้ในวงจรเป็นไฟฟ้า DC (ค่าแรงดันไฟฟ้าหรือกระแสไฟฟ้าเป็นค่าคงที่)

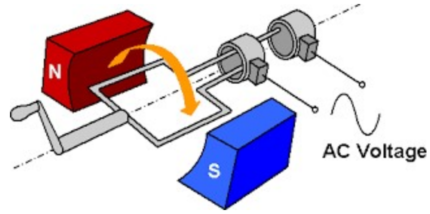
❖ ไฟฟ้าที่ใช้ตามบ้านเรือนส่วนใหญ่เป็นไฟฟ้ากระแสสลับ ซึ่งต้องใช้ฟังก์ชัน Sine, Cosine ในการอธิบาย ซึ่งต่างไปจากไฟฟ้ากระแสตรง

❖ เนื้อหาในบทที่ 9-12 เป็นเรื่องการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ

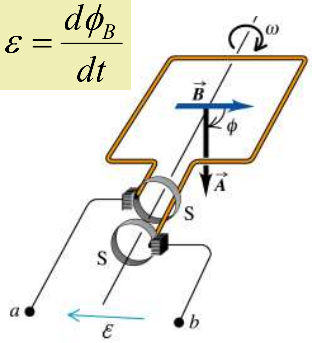
4

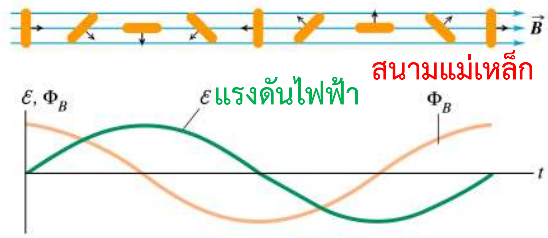
ไฟฟ้ากระแสสลับ

พลังงานไฟฟ้าที่ผลิตโดยเครื่องกำเนิดไฟฟ้ากระแสสลับใช้กฎการเหนี่ยวนำทางแม่เหล็กไฟฟ้าของฟาราเดย์ที่ว่า เมื่อแท่งตัวนำเคลื่อนที่ตัดผ่านสนามแม่เหล็กจะเกิด Electromotive Force (แรงดันไฟฟ้า) ตามสมการ



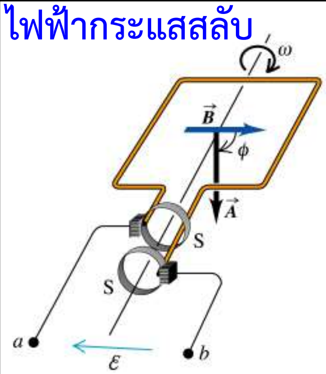
$$\varepsilon = \frac{d\phi_B}{dt}$$



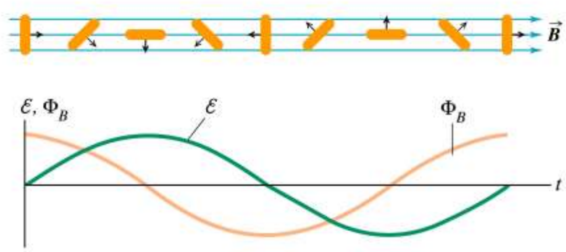


5

ไฟฟ้ากระแสสลับ



$$\varepsilon = \frac{d\phi_B}{dt}$$

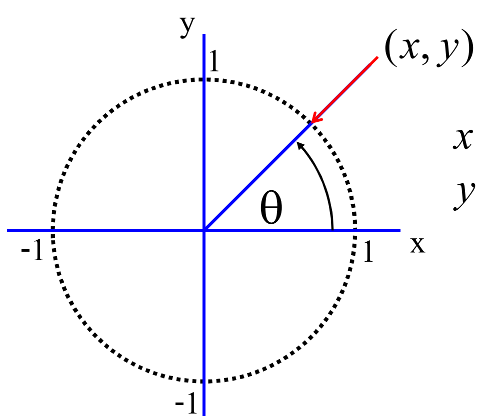


❖ ในเครื่องกำเนิดไฟฟ้ากระแสสลับ จะมีการ “หมุน” ขดลวดให้ตัดผ่านสนามแม่เหล็ก ซึ่งการ “หมุน” ของขดลวด1/2 รอบ ขดลวดจะพลิกด้าน 1 ครั้ง การที่ขดลวดพลิกด้าน จะทำให้กระแสไหลกลับทิศทาง เมื่อขดลวดพลิกด้านไป-มา จึงเกิดเป็นไฟฟ้ากระแสสลับขึ้น

❖ การหมุนของขดลวดเป็นการเคลื่อนที่แบบวงกลมที่อธิบายด้วยฟังก์ชัน Sine ได้ ดังนั้นไฟฟ้ากระแสสลับจึงใช้ฟังก์ชัน Sine อธิบายได้

ฟังก์ชัน Sine และ Cosine

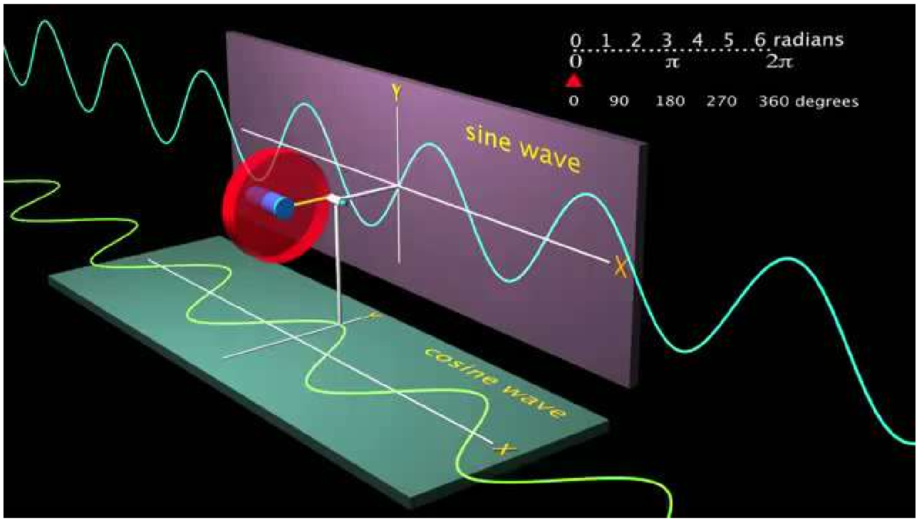
พิกัด (x, y) ของจุดที่อยู่บนวงกลมรัศมี 1 หน่วย (Unit circle) เมื่อนำมา Plot เทียบกับมุม θ จะได้ฟังก์ชัน Cosine และ Sine ตามลำดับ



$$x = \cos(\theta)$$
$$y = \sin(\theta)$$

ฟังก์ชัน Cosine และ Sine เหมาะสำหรับใช้อธิบายสัญญาณที่มีลักษณะเป็นคาบซ้ำๆกัน

8

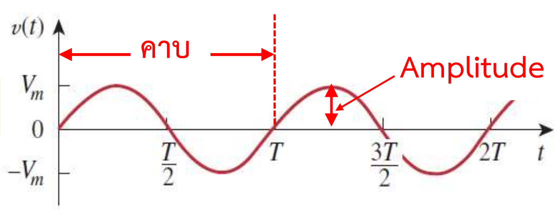


9

9.2 Sinusoids

A sinusoid is a signal that has the form of the sine or cosine function.

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$$



Sinusoid หมายถึงสัญญาณที่มีรูปเหมือนฟังก์ชัน Sine หรือ Cosine

❖ Sinusoid มีพารามิเตอร์ 3 ตัวได้แก่

- V_m = the amplitude of the sinusoid
- ω = the angular frequency (ความถี่เชิงมุม) (Radians/s)
- ϕ = the phase (มีหน่วยเป็น Radian หรือ Degree)

ω สัมพันธ์กับความถี่ (f) และคาบ (T) ของสัญญาณตามสูตร

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

f มีหน่วยเป็น รอบ/วินาที (Hertz)

T มีหน่วยเป็น วินาที

10

9.2 Sinusoids $v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$

Sinusoid จัดว่าเป็นสัญญาณคาบ (Periodic signal) คือเป็นสัญญาณที่มีรูปซ้ำกันทุกๆคาบ T ดังนี้

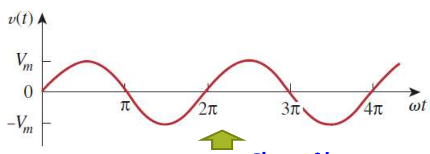
$$v(t + T) = V_m \sin\omega(t + T) = V_m \sin\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)$$

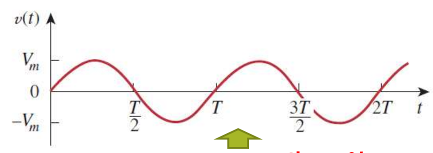
$$= V_m \sin(\omega t + 2\pi) = V_m \sin\omega t = v(t)$$

Note: A periodic function is one that satisfies,

$$v(t) = v(t + nT)$$ ➡ จะได้ความถี่เป็น $f = \frac{1}{T}$

for all t and for all integers n.





Sinusoid plot เทียบกับ ωt

Sinusoid plot เทียบกับ t

11

Historical

The Burndy Library Collection at The Huntington Library, San Marino, California.

Heinrich Rudorf Hertz (1857–1894), a German experimental physicist, demonstrated that electromagnetic waves obey the same fundamental laws as light. His work confirmed James Clerk Maxwell's celebrated 1864 theory and prediction that such waves existed.

Hertz was born into a prosperous family in Hamburg, Germany. He attended the University of Berlin and did his doctorate under the prominent physicist Hermann von Helmholtz. He became a professor at Karlsruhe, where he began his quest for electromagnetic waves. Hertz successfully generated and detected electromagnetic waves; he was the first to show that light is electromagnetic energy. In 1887, Hertz noted for the first time the photoelectric effect of electrons in a molecular structure. Although Hertz only lived to the age of 37, his discovery of electromagnetic waves paved the way for the practical use of such waves in radio, television, and other communication systems. The unit of frequency, the hertz, bears his name.

Heinrich Rudorf Hertz เป็นนักฟิสิกส์ชาวเยอรมันที่ค้นพบคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าและพบว่าแสงก็จัดเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า การค้นพบคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าของ Hertz ทำให้เกิดการนำคลื่นวิทยุมาใช้ในการสื่อสาร Hertz ได้รับเกียรติให้นำชื่อเขามาใช้เป็นหน่วยของความถี่

12

9.2 Sinusoids

Example 1: Given a sinusoid: $5\sin(4\pi t - 60^o)$ calculate its amplitude, phase, angular frequency, period, and frequency.

วิธีทำ

$$5\sin(4\pi t - 60^o)$$

เปรียบเทียบฟอร์ม

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$$

จะได้

$\text{Amplitude} = 5$ $\quad \omega = 4\pi \text{ Rad/s} \quad \phi = -60^\circ$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = 0.5 \text{ Sec} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.5} = 2 \text{ Hz}$$

หมายเหตุ: การอธิบาย Sinusoid ในวิชานี้

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$$

ω ใช้หน่วยเป็น Radian/Second จะได้หน่วยของ ωt เป็น Radian

ϕ จึงต้องใช้หน่วยเป็น Radian

แต่ ϕ ที่ใช้หน่วยเป็น Radian จะตีความหมายทางเรขาคณิตได้ยาก ในวิชานี้ ส่วนใหญ่เราจึงใช้หน่วยของ ϕ เป็นองศา (Degree)

เช่น $5\sin(4\pi t - 60^o)$

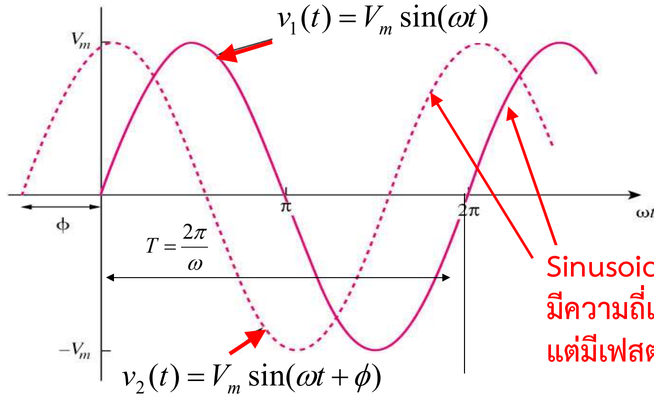
ϕ ใช้หน่วยเป็น Degree

การใช้หน่วยของ ϕ เป็น Degree จะนำไปบวกกับ ωt โดยตรงไม่ได้ เพราะ ωt มีหน่วยเป็น Radian

Sinusoid ที่มี ω ใช้หน่วยเป็น Rad/S และ ϕ ใช้หน่วยเป็น Degree เป็นการเขียนเชิงสัญลักษณ์ แต่จะเอาค่า ωt กับ ϕ มาบวกกันโดยตรงไม่ได้ ถ้าจะบวกกันต้องแปลงหน่วย Degree เป็น Radian ก่อน 14

9.2 Sinusoids $v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$

- เฟส (Phase) ของ Sinusoid หมายถึงมุมเริ่มต้นของ Sinusoid
- Sinusoid สองตัวต้องมีความถี่เท่ากันจึงจะเปรียบเทียบเฟสได้

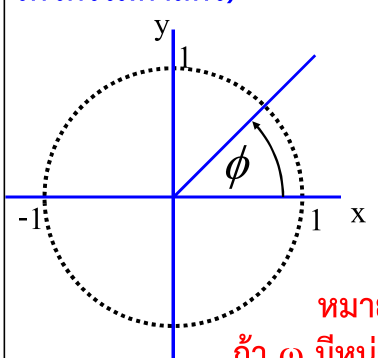


- Only two sinusoidal values with the same frequency can be compared by their amplitude and phase difference.
- If phase difference is zero, they are in phase;
- if phase difference is not zero, they are out of phase.

15

9.2 Sinusoids $v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$

เฟสก็คือมุมเริ่มต้นตอน t = 0 ของ Sinusoid ดังนั้นหน่วยของเฟสจะตรงกับหน่วยของมุมนั่นเอง หน่วยของเฟสที่นิยมใช้มี 2 แบบคือ Radian (นิยมใช้ในทางคณิตศาสตร์) กับ Degree (นิยมใช้ในทางวิศวกรรมศาสตร์)



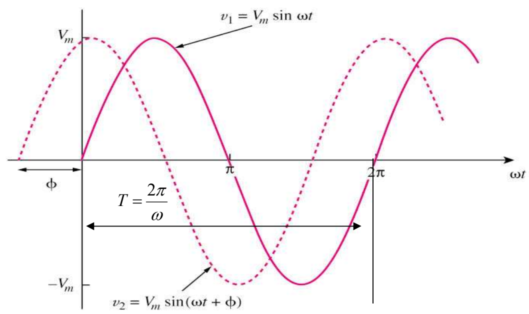
Degree	Radian
0	0
90	$\pi/2$
180	π
360	2π

หมายเหตุ: ในสูตร $v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$ ถ้า ω มีหน่วยเป็น Radian/s, ϕ จะต้องมีหน่วยเป็น Radian จึงจะทำให้ $\omega t + \phi$ บวกกันได้

16

การเปรียบเทียบ Phase ของ Sinusoid 2 ตัว

- Sinusoid สองตัวต้องมี ω เท่ากันจึงจะเปรียบเทียบเฟสได้
- ก่อนจะเอาค่าเฟสมาเทียบกันจะต้องทำดังนี้
  - จัดรูปให้ Sinusoid ทั้งสองตัวอยู่ในรูปฟังก์ชัน Sine หรือ Cosine ให้ตรงกัน (เลือกเอา Sine หรือ Cosine อย่างใดอย่างหนึ่ง)
  - ค่า Amplitude ต้องปรับให้เป็นบวกเสมอ



17

9.2 Sinusoids

Example 2 Find the phase angle between

$i_1 = -4\sin(377t + 25^o)$ and $i_2 = 5\cos(377t - 40^o)$,

does i_1 lead or lag i_2? หมายเหตุ: Lead=นำ, Lag=ตาม

วิธีทำ จาก $\sin(\omega t + 90^o) = \cos(\omega t)$

ดังนั้น

$$i_2 = 5\cos(377t - 40^o) = 5\sin(377t - 40^o + 90^o) = 5\sin(377t + 50^o)$$

ในขณะเดียวกัน เนื่องจาก $-\sin(\omega t) = \sin(\omega t \pm 180^o)$

ดังนั้น

$$i_1 = -4\sin(377t + 25^o) = 4\sin(377t + 180^o + 25^o) = 4\sin(377t + 205^o)$$

เมื่อเปรียบเทียบ $i_1 = 4\sin(377t + \boxed{205^o})$ กับ $i_2 = 5\sin(377t + \boxed{50^o})$

จะได้ว่า i_1 มีเฟสนำ i_2 อยู่ 155^o

เฟสต่างกัน 155 องศา

18

Example 9.2

Calculate the phase angle between $v_1 = -10\cos(\omega t + 50^\circ)$ and $v_2 = 12\sin(\omega t - 10^\circ)$. State which sinusoid is leading.

วิธีทำ จาก $-\cos(\omega t) = \cos(\omega t \pm 180^o)$ จะได้

$$v_1 = -10\cos(\omega t + 50^o) = 10\cos(\omega t + 50^o - 180^o) = 10\cos(\omega t - 130^o)$$

หรือ

$$v_1 = -10\cos(\omega t + 50^o) = 10\cos(\omega t + 50^o + 180^o) = 10\cos(\omega t + 230^o)$$

ขณะเดียวกัน $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - 90^o)$ จะได้

$$v_2 = 12\sin(\omega t - 10^o) = 12\cos(\omega t - 10^o - 90^o) = 12\cos(\omega t - 100^o)$$

เมื่อเปรียบเทียบ $v_1 = 10\cos(\omega t - 130^o)$ กับ $v_2 = 12\cos(\omega t - 100^o)$

จะได้ว่า v_1 มีเฟสตาม v_2 อยู่ 30^o

เอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติที่สำคัญ

$$\sin(\theta \pm \phi) = \sin\theta\cos\phi \pm \cos\theta\sin\phi$$
$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \sin\theta\sin\phi$$

และ

$$\sin(180^o) = \sin(-180^o) = 0$$
$$\cos(180^o) = \cos(-180^o) = -1$$
$$\sin(90^o) = 1,\quad \sin(-90^o) = -1$$
$$\cos(90^o) = \cos(-90^o) = 0$$

จะได้ว่า

$$\sin(\omega t \pm 180^\circ) = -\sin\omega t$$
$$\cos(\omega t \pm 180^\circ) = -\cos\omega t$$
$$\sin(\omega t \pm 90^\circ) = \pm\cos\omega t$$
$$\cos(\omega t \pm 90^\circ) = \mp\sin\omega t$$

การบวก Sine กับ Cosine

จาก $\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \sin\theta\sin\phi$

ถ้าให้ $\theta = \omega t$ จะได้ $\cos(\omega t - \phi) = \cos\phi\cos\omega t + \sin\phi\sin\omega t$

กำหนดให้ C เป็นค่าคงที่ คูณ C ตลอดทั้ง 2 ฝั่ง

$$C\cos(\omega t - \phi) = \underbrace{C\cos\phi}\cos\omega t + \underbrace{C\sin\phi}\sin\omega t$$

ให้ $A = C\cos\phi$ $B = C\sin\phi$

จะได้ $C\cos(\omega t - \phi) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

โดย

$$\sqrt{A^2 + B^2} = C\sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = C \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

และ $\dfrac{B}{A} = \dfrac{C\sin\phi}{C\cos\phi} = \tan\phi \quad \Rightarrow \quad \phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{B}{A}\right)$

21

สรุป การบวก Sine กับ Cosine

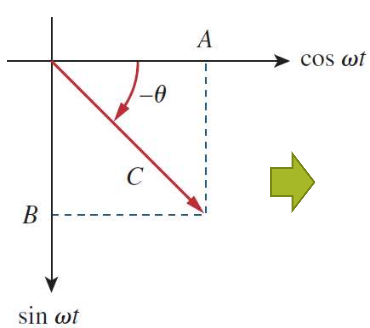
$$A\cos\omega t + B\sin\omega t = C\cos(\omega t - \phi)$$

โดย

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

$$A = C\cos\phi$$

$$B = C\sin\phi$$

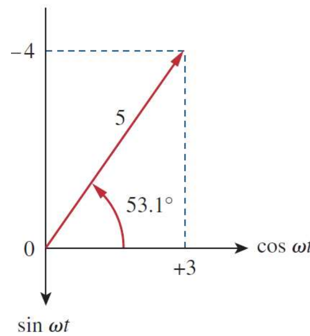


ความสัมพันธ์ระหว่าง A, B, C
เหมือนเป็นการบวกเวกเตอร์
โดยให้ A เป็นค่าในแกนนอน
B เป็นค่าในแกนตั้ง(ด้านลบ)

22

ตัวอย่าง $3\cos\omega t - 4\sin\omega t = ?$

วิธีทำ $A = 3 \qquad B = -4$



จะได้

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right) = -53.1^o$$

และ

$$3\cos\omega t - 4\sin\omega t = 5\cos\left(\omega t + 53.1^o\right)$$

ประโยชน์ของการบวก Sine กับ Cosine แบบนี้คือ เราสามารถรวม Sinusoids 2 ตัวให้เป็น Sinusoid ตัวเดียวได้โดยใช้สูตรการบวกนี้

แนวคิดนี้เป็นพื้นฐานของ Phasor ในหัวข้อถัดไป

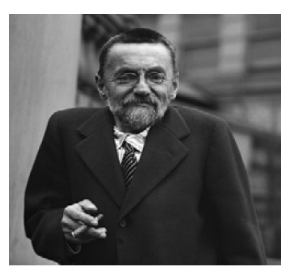
9.3 Phasor

ที่ผ่านมาเราต้องอธิบาย Sinusoid ในรูปฟังก์ชัน

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$$

ซึ่งไม่ค่อยสะดวก เพราะต้องเขียนฟังก์ชันยาวมาก ในปี ค.ศ. 1893 Charles Protues Steinmetz จึงคิดค้นวิธีการอธิบาย Sinusoid ด้วยจำนวนเชิงซ้อน ที่เรียกว่า Phasor ซึ่งทำให้การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับที่ใช้ความถี่เดียว ทำได้สะดวกมากขึ้น

(วิธีที่ใช้ Phasor เหมาะจะใช้กับโจทย์ไฟฟ้ากระแสสลับความถี่เดียว เช่น วงจรไฟฟ้าที่ใช้ไฟฟ้า 220V 50Hz)

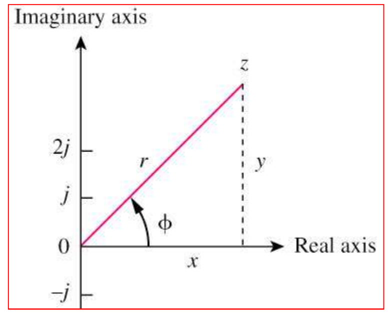


Charles Protues Steinmetz

(1865-1923)

9.3 Phasor

- A phasor is a complex number that represents the amplitude and phase of a sinusoid.
- Complex number can be represented in one of the following three forms:



จำนวนเชิงซ้อนสามารถเขียนได้ 3 รูปแบบ

a. Rectangular $z = x + jy$

b. Polar $z = r\angle\phi$

c. Exponential $z = re^{j\phi}$

where

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ = ขนาด

$\phi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ = เฟส

$x = r\cos\phi$

$y = r\sin\phi$

Note: $j = \sqrt{-1}$

25

Mathematic operation of complex number:

ให้ $z_1 = x_1 + jy_1 = r_1\angle\phi_1$ และ $z_2 = x_2 + jy_2 = r_2\angle\phi_2$

1. Addition $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$
2. Subtraction $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$

Rectangular form เหมาะสำหรับการบวกลบจำนวนเชิงซ้อน

3. Multiplication

Rectangular form= $z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)$

Polar form= $z_1z_2 = r_1r_2\angle\phi_1 + \phi_2$

การคูณจำนวนเชิงซ้อนในรูป Polar form ให้เอา “ขนาด” คูณกัน และเอาเฟสบวกกัน

26

ตัวอย่าง จงคำนวณ $(5+j2)(-1+j4)-5\angle 60^\circ$

วิธีทำ $z_1 \times z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)$

$$(5+j2)(-1+j4) = 5\times(-1) - 2\times 4 + j\left(2\times(-1)+5\times 4\right)$$
$$= \boxed{-13+j18}$$

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$

บวกกัน

$$-5\angle 60^\circ = -5\cos 60^o - j5\sin 60^o$$
$$= \boxed{-2.5 - j2.5\sqrt{3}}$$

ต้องแปลง Polar form เป็น Rectangular form ก่อนจึงจะบวกลบกันได้

$$(5+j2)(-1+j4) - 5\angle 60^\circ = -15.5 + j13.67$$

27

Mathematic operation of complex number:

4. Division:

Rectangular form

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{(x_1+jy_1)(x_2-jy_2)}{\underbrace{(x_2+jy_2)(x_2-jy_2)}} = \frac{(x_1+jy_1)(x_2-jy_2)}{(x_2^2+y_2^2)}$$

Polar form

ผลต่างกำลังสอง

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle \phi_1 - \phi_2$$

การหารจำนวนเชิงซ้อนในรูป Polar form ให้เอา “ขนาด” หารกัน และเอาเฟส ลบกัน

*** Polar form เหมาะสำหรับการคูณหารจำนวนเชิงซ้อน ***

28

ตัวอย่าง จงคำนวณ $\dfrac{10+j5+3\angle 40^{o}}{-3+j4}+10\angle 30^{o}+j5$

วิธีทำ

$$10+j5+3\angle 40^{o}=10+j5+3\cos 40^{o}+j3\sin 40^{o}$$
$$=10+j5+2.298+j1.928=12.298+j6.928$$
$$=14.115\angle 29.394^{o}$$

$$-3+j4=5\angle 126.87^{o}$$

$$\frac{10+j5+3\angle 40^{o}}{-3+j4}=\frac{14.115\angle 29.394^{o}}{5\angle 126.87^{o}}=\frac{14.115}{5}\angle 29.394^{o}-126.87^{o}$$
$$=2.823\angle -97.47^{o}=-0.367-j2.8$$

$$\frac{10+j5+3\angle 40^{o}}{-3+j4}+10\angle 30^{o}+j5=-0.367-j2.8+5\sqrt{3}+j5+j5$$
$$=8.293+j7.2$$

29

Mathematic operation of complex number:

5. Reciprocal $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{r}\angle -\phi$

6. Square root $\sqrt{z}=\sqrt{r}\angle \phi/2$

7. Complex conjugate

$$z^{*}=x-jy=r\angle -\phi=re^{-j\phi}$$

8. Euler's identity

$$e^{\pm j\phi}=\cos\phi\pm j\sin\phi$$

$$\cos\phi=\mathrm{Re}\{e^{j\phi}\}$$
$$\sin\phi=\mathrm{Im}\{e^{j\phi}\}$$

9. อื่นๆ

$$\frac{1}{j}=-j$$

หมายเหตุ
Re{ } = ส่วนที่เป็นจำนวนจริง (Real)
Im{ } = ส่วนที่เป็นจำนวนจินตภาพ (Imaginary)

30

9.3 Phasor

Transform a sinusoid to and from the time domain to the phasor domain:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \longleftrightarrow \mathbf{V} = V_m \angle\phi$$

(time domain) (phasor domain)

- Amplitude and phase difference are two principal concerns in the study of voltage and current sinusoids.
- Phasor will be defined from the cosine function in all our proceeding study. If a voltage or current expression is in the form of a sine, it will be changed to a cosine by subtracting from the phase.

31

การแปลง Sinusoid เป็น Phasor

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \Longleftrightarrow \mathbf{V} = V_m \angle\phi$$

❖ การแปลง Sinusoid เป็น Phasor เรานำเฉพาะ Amplitude และ Phase มาเขียนในรูป $\mathbf{V} = V_m \angle\phi$ โดยไม่นำความถี่เชิงมุม ω มาคิด (ให้ใช้ตัวพิมพ์ใหญ่แทน Phasor)

❖ ค่า Phase จะดูจากเฟสของ Cosine function เป็นหลัก

❖ ถ้า Sinusoid ที่อธิบายโดยใช้ฟังก์ชัน Sine ให้เราเปลี่ยนฟังก์ชัน Sine เป็น Cosine ก่อน แล้วจึงค่อยพิจารณาเฟส เช่น

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi) \rightarrow V_m \cos(\omega t + \phi - 90^o)$$

32

การแปลง Sinusoid เป็น Phasor

Time domain representation	Phasor domain representation
$V_m \cos(\omega t + \phi)$	$V_m \angle \phi$
$V_m \sin(\omega t + \phi)$	$V_m \angle \phi - 90^\circ$
$I_m \cos(\omega t + \theta)$	$I_m \angle \theta$
$I_m \sin(\omega t + \theta)$	$I_m \angle \theta - 90^\circ$

33

Example 4: Transform the following sinusoids to phasors:

$i = 6\cos(50t - 40^\circ)$ A

$v = -4\sin(30t + 50^\circ)$ V

Solution:

a. $\mathbf{I} = 6\angle -40^\circ$ A

b. Since $-\sin(A) = \cos(A+90^\circ)$;

จัดให้อยู่ในรูป Cosine ก่อน

$v(t) = -4\sin(30t + 50^\circ) = 4\cos(30t+50^\circ+90^\circ)$

$= 4\cos(30t+140^\circ)$ V

Transform to phasor ⇨ $\mathbf{V} = 4\angle 140^\circ$ V

34

Example 5: Transform the following phasors to sinusoids

$$\mathbf{V} = -10\angle 30^\circ \ \text{V} \qquad \mathbf{I} = j(5 - j12)\ \text{A}$$

Solution:

ต้องเปลี่ยน Amplitude ให้เป็นบวก

$$v(t) = \boxed{-10}\cos(\omega t + 30^o) = 10\cos(\omega t + 30^o + 180^o)$$

$$= 10\cos(\omega t + 210^o)$$

$$\mathbf{I} = j(5 - j12) = 12 + j5$$

$$= \sqrt{12^2 + 5^2}\angle \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) = 13\angle 22.62^o$$

$$i(t) = 13\cos(\omega t + 22.62^o)$$

35

การอธิบาย Phasor โดยใช้ Euler's Identity

จาก $e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$

และ $\cos\phi = \mathrm{Re}\{e^{j\phi}\}$

ดังนั้น $v(t) = V_m\cos(\omega t + \phi)$ สามารถเขียนได้เป็น

$$v(t) = V_m\cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}\{V_m e^{j(\omega t + \phi)}\}$$

หรือ

$$v(t) = \mathrm{Re}\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{\mathbf{V} e^{j\omega t}\}$$

โดย

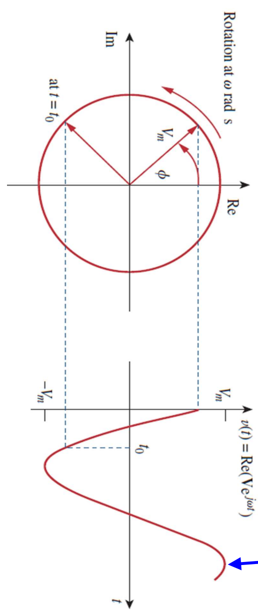
$$\mathbf{V} = V_m e^{j\phi} = V_m\angle\phi$$

ส่วนที่ไม่ขึ้นกับเวลาคือ Phasor

ส่วนที่ขึ้นกับเวลา

36

การตีความหมายของ Phasor ในทางเรขาคณิต



Phasor เป็นปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง (มุมเฟส) ซึ่งจะคล้ายกับเวคเตอร์ แต่ Phasor จะเป็นเหมือนเข็มนาฬิกาที่เดินด้วยความเร็ว ω Radian/sec และมีมุมเริ่มต้น (ตอน t=0) เป็น ϕ

กล่าวคือ “เข็มนาฬิกา” ของ Phasor จะหมุนไปตลอดเวลาที่ความเร็ว ω Rad/sec

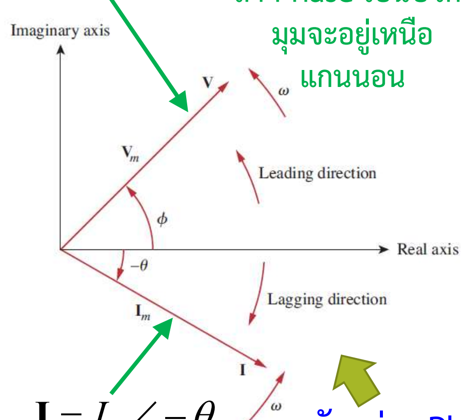
เมื่อเอาไฟฉายส่องจากด้านบนลงมา เงาของเข็มนี้ เมื่อนำมา Plot เทียบกับเวลา ก็จะได้กราฟ Sinusoid

$$v(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{V}e^{j\omega t}\}$$

Phasor Diagram

$\mathbf{V} = V_m \angle \phi$

ถ้า Phase เป็นบวก มุมจะอยู่เหนือแกนนอน



$\mathbf{I} = I_m \angle -\theta$

ถ้า Phase ติดลบ มุมจะอยู่ใต้แกนนอน

เมื่อนำ Phasor หลายตัวมา Plot ในกราฟเดียวกัน เราจะได้ Phasor diagram ที่แสดงถึงตำแหน่งของ Phasor แต่ละตัว ซึ่ง Phasor ทุกตัวจะหมุนไปพร้อมๆกัน โดยรักษาระยะห่างของมุมไว้เท่าๆเดิมเสมอ

ตัวอย่าง Phasor diagram ที่มี Phasor 2 ตัว คือ $\mathbf{V} = V_m \angle \phi$ และ $\mathbf{I} = I_m \angle -\theta$

ถ้า Phase เป็น 0 จะได้ ลูกศรที่ตรงกับแกนนอนพอดี

38

9.3 Phasor

The differences between $v(t)$ and $\mathbf{V}$:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \Longleftrightarrow \mathbf{V} = V_m \angle\phi$$

- $v(t)$ is instantaneous or time-domain representation
  V is the frequency or phasor-domain representation.
- $v(t)$ is time dependent, **V** is not.
- $v(t)$ is always real with no complex term,
  V is generally complex.

Note: Phasor analysis applies only when frequency is constant; when it is applied to two or more sinusoid signals only if they have the same frequency.

39

ข้อแตกต่างระหว่าง $v(t)$ กับ $\mathbf{V}$ (Phasor)

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \Longleftrightarrow \mathbf{V} = V_m \angle\phi$$

- $v(t)$ คือค่าแรงดันไฟฟ้าขณะเวลาใดๆ ซึ่งจัดเป็น time-domain representation แต่ **V** เป็นการอธิบาย Sinusoid ในโดเมนความถี่โดยใช้เฟสกับขนาด ซึ่งจัดเป็น phasor-domain representation.
- $v(t)$ แปรผันตามเวลา แต่ **V** ไม่แปรผันตามเวลา.
- $v(t)$ เป็นจำนวนจริง ไม่ใช่จำนวนเชิงซ้อน, แต่ **V** โดยทั่วไปเป็นจำนวนเชิงซ้อน.

*** Phasor ใช้วิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับในกรณีที่ Sinusoid ทุกตัวมีความถี่เดียวกันเท่านั้น ***

40

Example 9.3

Evaluate these complex numbers:

(a) $(40\angle 50^\circ + 20\angle -30^\circ)^{1/2}$

วิธีทำ

(a) Using polar to rectangular transformation,

$$40\angle 50^\circ = 40(\cos 50^\circ + j\sin 50^\circ) = 25.71 + j30.64$$

$$20\angle -30^\circ = 20[\cos(-30^\circ) + j\sin(-30^\circ)] = 17.32 - j10$$

Adding them up gives

$$40\angle 50^\circ + 20\angle -30^\circ = 43.03 + j20.64 = 47.72\angle 25.63^\circ$$

Taking the square root of this,

$$(40\angle 50^\circ + 20\angle -30^\circ)^{1/2} = 6.91\angle 12.81^\circ$$

41

Example 9.3

Evaluate these complex numbers:

(b) $\dfrac{10\angle -30^\circ + (3 - j4)}{(2 + j4)(3 - j5)^*}$

วิธีทำ

(b) Using polar-rectangular transformation, addition, multiplication, and division,

$$\frac{10\angle -30^\circ + (3 - j4)}{(2 + j4)(3 - j5)^*} = \frac{8.66 - j5 + (3 - j4)}{(2 + j4)(3 + j5)}$$

$$= \frac{11.66 - j9}{-14 + j22} = \frac{14.73\angle -37.66^\circ}{26.08\angle 122.47^\circ}$$

$$= 0.565\angle -160.13^\circ$$

Conjugate Operator

42

Example 9.5 Find the sinusoids represented by these phasors:

(a) $\mathbf{I} = -3 + j4$ A

(b) $\mathbf{V} = j8e^{-j20^\circ}$ V

วิธีทำ

(a) $\mathbf{I} = -3 + j4 = 5\angle 126.87^\circ$. Transforming this to the time domain gives

$$i(t) = 5\cos(\omega t + 126.87^\circ) \text{ A}$$

(b) Since $j = 1\angle 90^\circ$,

$$\mathbf{V} = j8\angle -20^\circ = (1\angle 90^\circ)(8\angle -20^\circ)$$
$$= 8\angle 90^\circ - 20^\circ = 8\angle 70^\circ \text{ V}$$

Converting this to the time domain gives

$$v(t) = 8\cos(\omega t + 70^\circ) \text{ V}$$

หมายเหตุ

$$j = \cos 90^o + j\sin 90^o = e^{j90^0} = 1\angle 90^o$$

43

Example 9.6

Given $i_1(t) = 4\cos(\omega t + 30^\circ)$ A and $i_2(t) = 5\sin(\omega t - 20^\circ)$ A, find their sum.

วิธีทำ

$$\mathbf{I}_1 = 4\angle 30^\circ$$

$$i_2 = 5\cos(\omega t - 20^\circ - 90^\circ) = 5\cos(\omega t - 110^\circ)$$

$$\mathbf{I}_2 = 5\angle -110^\circ$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 4\angle 30^\circ + 5\angle -110^\circ$$
$$= 3.464 + j2 - 1.71 - j4.698 = 1.754 - j2.698$$
$$= 3.218\angle -56.97^\circ \text{ A}$$

$$i(t) = 3.218\cos(\omega t - 56.97^\circ) \text{ A}$$

ตัวอย่างข้อนี้แสดงให้เห็นว่าการใช้ Phasor ช่วยคำนวณการบวก Sinusoids หลายๆตัวเข้าด้วยกันจะคำนวณได้ง่ายมาก

44

Relationship between differential operation in phasor

Time Domain

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

Phasor Domain

$$\mathbf{V} = V_m \angle\phi$$

$$v(t) = \mathrm{Re}\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\}$$

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\phi}$$

$$\frac{dv}{dt} = \mathrm{Re}\{\underbrace{j\omega V_m e^{j\phi}}_{j\omega\mathbf{V}} e^{j\omega t}\}$$

หมายเหตุ

$$\frac{d}{dt} e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t}$$

จะได้ว่า

Time Domain		Phasor Domain
$\frac{dv}{dt}$	$\Leftrightarrow$	$j\omega\mathbf{V}$

45

Relationship between integral operation in phasor

Time Domain

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

Phasor Domain

$$\mathbf{V} = V_m \angle\phi$$

$$v(t) = \mathrm{Re}\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\}$$

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\phi}$$

$$\int v\,dt = \mathrm{Re}\{\underbrace{\frac{V_m}{j\omega} e^{j\phi}}_{\frac{\mathbf{V}}{j\omega}} e^{j\omega t}\}$$

หมายเหตุ

$$\int e^{j\omega t}\,dt = \frac{e^{j\omega t}}{j\omega}$$

จะได้ว่า

Time Domain		Phasor Domain
$\int v\,dt$	$\Leftrightarrow$	$\frac{\mathbf{V}}{j\omega}$

46

Relationship between differential, integral operation in phasor

$$v(t) \Longleftrightarrow \mathbf{V} = V_m \angle \phi$$

$$\frac{dv}{dt} \Longleftrightarrow j\omega \mathbf{V}$$

$$\int v\,dt \Longleftrightarrow \frac{\mathbf{V}}{j\omega}$$

Example 9.7 Use phasor approach, determine the current *i(t)* in a circuit described by the integro-differential equation.

$$4i + 8\int i\,dt - 3\frac{di}{dt} = 50\cos(2t + 75°)$$

วิธีทำ

แปลงเป็น Phasor

$$\omega = 2$$

$$4\mathbf{I} + \frac{8\mathbf{I}}{j\omega} - 3j\omega\mathbf{I} = 50\underline{/75°}$$

$$\mathbf{I}(4 - j4 - j6) = 50\underline{/75°}$$

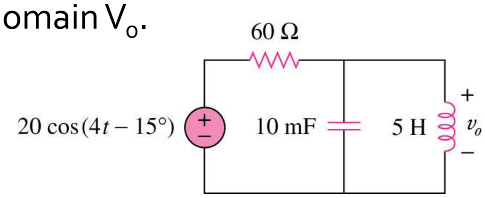
$$\mathbf{I} = \frac{50\underline{/75°}}{4 - j10} = \frac{50\underline{/75°}}{10.77\underline{/-68.2°}} = 4.642\underline{/143.2°}\text{ A}$$

จะได้ $i(t) = 4.642\cos(2t + 143.2°)\text{ A}$

ตัวอย่างนี้แสดงว่า Phasor ช่วยหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ได้ง่ายมาก

9.3 Phasor

In-class exercise for Unit 6a, we can derive the differential equations for the following circuit in order to solve for $v_o(t)$ in phase domain V_o.



$$\frac{d^2 v_o}{dt^2}+\frac{5}{3}\frac{dv_0}{dt}+20v_0=-\frac{400}{3}\sin(4t-15^o)$$

However, the derivation may sometimes be very tedious.

Is there any quicker and more systematic methods to do it?

มีวิธีการหาคำตอบของสมการเหล่านี้ที่สะดวกรวดเร็วหรือไม่?

49

9.3 Phasor

The answer is YES!

Instead of first deriving the differential equation and then transforming it into phasor to solve for V_o, we can transform all the RLC components into phasor first, then apply the KCL laws and other theorems to set up a phasor equation involving V_o directly.

แทนที่เราจะหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์โดยตรง ให้เราแปลงสมการในรูป Phasor เราสามารถแปลง R, L, C ในรูป Phasor แล้วแก้สมการของ Phasor โดยใช้ KVL, KCL, ฯลฯ หาคำตอบได้อย่างสะดวกรวดเร็วกว่ามาก !!!

50

9.4 Phasor Relationships for Circuit Elements

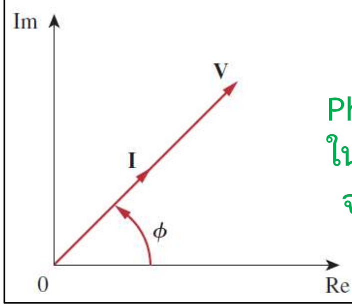
กรณี Resistor กำหนดให้ $i = I_m \cos(\omega t + \phi)$ ➡ $\mathbf{I} = I_m \angle \phi$

ใช้กฎของโอห์มจะได้ $v = iR = RI_m \cos(\omega t + \phi)$

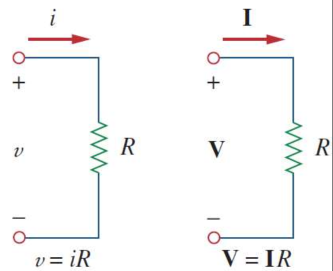
แปลงเป็น Phasor $\mathbf{V} = R\underbrace{I_m \angle \phi}_{}$; $\mathbf{I} = I_m \angle \phi$

จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง Phasor **I** กับ **V** ในกรณี Resistor

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I}$$



Phasor **I** กับ **V** ในกรณี Resistor จะมีเฟสตรงกัน (In phase)



9.4 Phasor Relationships for Circuit Elements

กรณี Inductor กำหนดให้ $i = I_m \cos(\omega t + \phi) \longrightarrow \mathbf{I} = I_m \angle \phi$

จะได้ $v = L\dfrac{di}{dt} = -\omega L I_m \sin(\omega t + \phi)$

หมายเหตุ

$$\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \phi) = -\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$v = \omega L I_m \cos(\omega t + \phi + 90^\circ)$$

แปลงเป็น Phasor

$$\mathbf{V} = \omega L I_m e^{j(\phi + 90^\circ)} = \omega L I_m e^{j\phi} e^{j90^\circ} = \omega L I_m \angle \phi + 90^\circ$$

$$e^{j90^\circ} = j$$

$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$$

จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง Phasor **I** กับ **V** ในกรณี Inductor

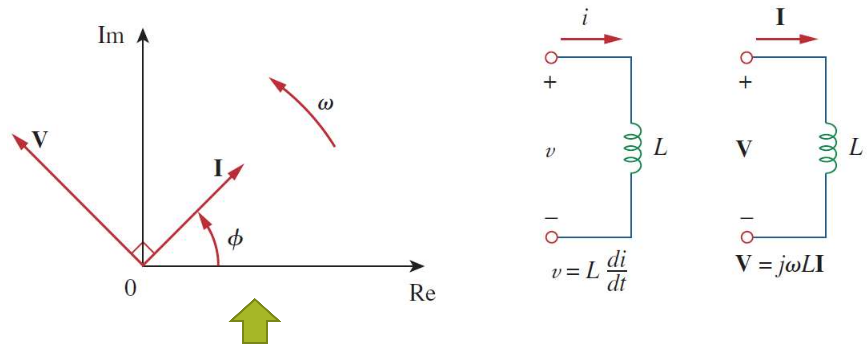
$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$$

52

9.4 Phasor Relationships for Circuit Elements

ความสัมพันธ์ระหว่าง Phasor $\mathbf{I}$ กับ $\mathbf{V}$ ในกรณี Inductor

$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$$



Phasor $\mathbf{I}$ จะมีเฟสตามหลัง $\mathbf{V}$ อยู่ 90 องศา (Phase lag)

9.4 Phasor Relationships for Circuit Elements

กรณี Capacitor กำหนดให้ $v = V_m \cos(\omega t + \phi) \rightarrow \mathbf{V} = V_m \angle \phi$

จะได้ $i = C\dfrac{dv}{dt} = -\omega C V_m \sin(\omega t + \phi)$

หมายเหตุ

$$\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \phi) = -\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$i = \omega C V_m \cos(\omega t + \phi + 90^o)$$

แปลงเป็น Phasor

$$\mathbf{I} = \omega C V_m e^{j(\phi + 90^o)} = \omega C V_m e^{j\phi} e^{j90^o} = \omega C V_m \angle \phi + 90^o$$

$$e^{j90^\circ} = j$$

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V}$$

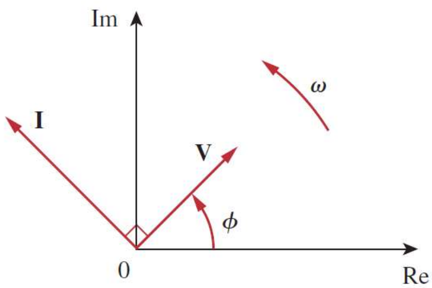
จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง Phasor $\mathbf{V}$ กับ $\mathbf{I}$ ในกรณี Capacitor

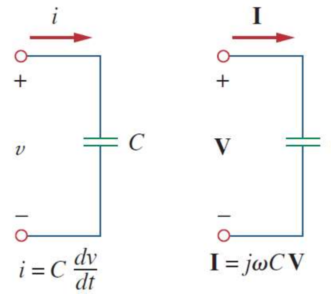
$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = \frac{1}{j\omega C}\mathbf{I}$$

9.4 Phasor Relationships for Circuit Elements

ความสัมพันธ์ระหว่าง Phasor **I** กับ **V** ในกรณี Capacitor

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V} \qquad \mathbf{V} = \frac{1}{j\omega C}\mathbf{I}$$



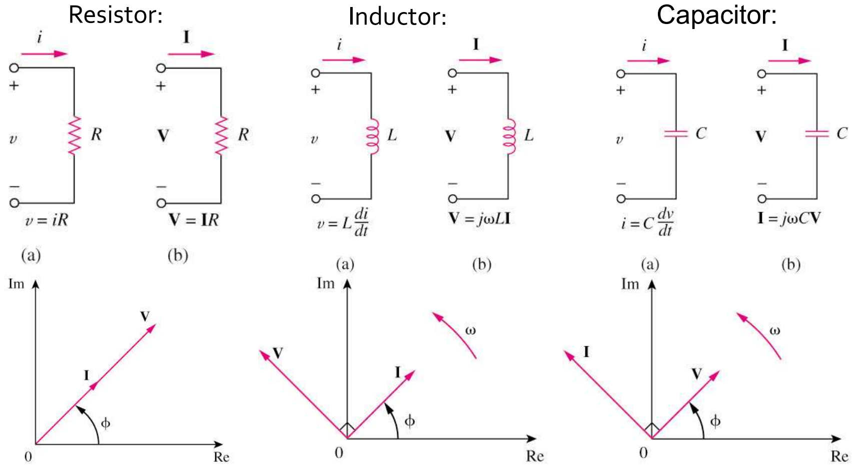


Phasor **I** จะมีเฟสนำ **V** อยู่ 90 องศา (Phase lead)

9.4 Phasor Relationships for Circuit Elements

สรุป ความสัมพันธ์ระหว่าง Phasor **I** กับ **V** ทุกกรณี

Resistor: Inductor: Capacitor:



9.4 Phasor Relationships for Circuit Elements

Summary of voltage-current relationship		
Element	Time domain	Frequency domain (Phasor domain)
R	$v = Ri$	$\mathbf{V} = R\mathbf{I}$
L	$v = L\dfrac{di}{dt}$	$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$
C	$i = C\dfrac{dv}{dt}$	$\mathbf{V} = \dfrac{\mathbf{I}}{j\omega C}$

57

Example 9.8

ω

The voltage $v = 12\cos(60t + 45°)$ is applied to a 0.1-H inductor. Find the steady-state current through the inductor.

Solution:

For the inductor, $\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$, where $\omega = 60$ rad/s and $\mathbf{V} = 12\underline{/45°}$ V. Hence,

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{j\omega L} = \frac{12\underline{/45°}}{j60 \times 0.1} = \frac{12\underline{/45°}}{6\underline{/90°}} = 2\underline{/-45°}\text{ A}$$

Converting this to the time domain,

$$i(t) = 2\cos(60t - 45°)\text{ A}$$

58

9.5 Impedance and Admittance

- The impedance Z of a circuit is the ratio of the phasor voltage V to the phasor current I, measured in ohms Ω.

$$Z = \frac{V}{I} = R + jX$$

where R = Re{Z} is the resistance and X = Im{Z} is the reactance. Positive X is for L and negative X is for C.

- The admittance Y is the reciprocal of impedance, measured in siemens (S).

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{V}$$

59

9.5 Impedance and Admittance

Impedance ($\mathbf{Z}$) หมายถึง อัตราส่วนระหว่าง Phasor voltage $\mathbf{V}$ กับPhasor current $\mathbf{I}$ โดยมีหน่วยเป็น Ohms (Ω) (หน่วยเดียวกับค่า Resistance)

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \quad \text{หรือ} \quad \mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$$

*** Z คล้าย R แต่ที่แตกต่างคือ R เป็นจำนวนจริง แต่ Z เป็นจำนวนเชิงซ้อน***

Impedance มี 2 ส่วน

Reactance=Im(Z)=Imaginary Part of Z

$$Z = R + jX = |Z|\angle\theta$$

Resistance=Re(Z)=Real Part of Z

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$$

$$R = |Z|\cos\theta$$

$$X = |Z|\sin\theta$$

ส่วนกลับของ Impedance เรียกว่า Admittance (Admittance มีหน่วยเป็น Siemens (S))

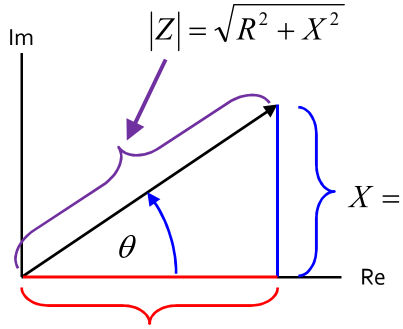
$$Y = \frac{1}{Z} = G + jB$$

60

9.5 Impedance and Admittance

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{V_m\angle\phi}{I_m\angle\beta} = \frac{V_m}{I_m}\angle\phi-\beta$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$



$$X = |Z|\sin\theta$$

$$R = |Z|\cos\theta$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$$

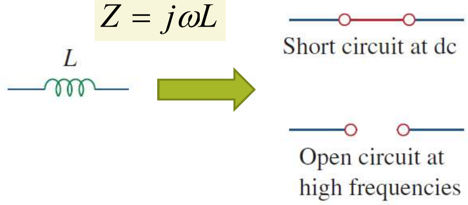
9.5 Impedance and Admittance

Impedances and admittances of passive elements		
Element	**Impedance**	**Admittance**
R	$Z = R$	$Y = \frac{1}{R}$
L	$Z = j\omega L$	$Y = \frac{1}{j\omega L}$
C	$Z = \frac{1}{j\omega C}$	$Y = j\omega C$

9.5 Impedance and Admittance

Impedance ของ Inductor

$Z = j\omega L$



ที่ความถี่ DC

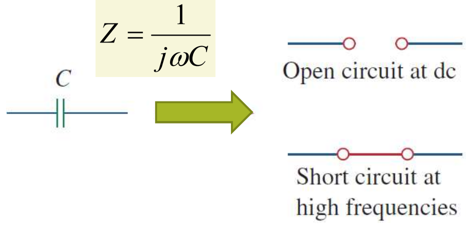
$\omega = 0; Z = 0$

ที่ความถี่ ∞

$\omega \to \infty; Z \to \infty$

Impedance ของ Capacitor

$Z = \dfrac{1}{j\omega C}$



ที่ความถี่ DC

$\omega = 0; Z \to \infty$

ที่ความถี่ ∞

$\omega \to \infty; Z = 0$

63

9.5 Impedance and Admittance

After we know how to convert RLC components from time to phasor domain, we can transform a time domain circuit into a phasor/frequency domain circuit.

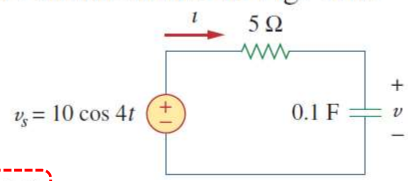
Hence, we can apply the KCL laws and other theorems to directly set up phasor equations involving our target variable(s) for solving.

เราสามารถแปลง R,L,C,V,I ในวงจรให้อยู่ในรูป Phasor จากนั้นก็สามารถจะใช้วิธีการต่างๆในการวิเคราะห์วงจร เช่น KCL, KVL, Superposition, ฯลฯ ในการวิเคราะห์วงจรได้ตามปกติ

วิธีการที่ใช้ Phasor นี้จะช่วยให้เราไม่ต้องแก้สมการเชิงอนุพันธ์โดยตรงเมื่อมีโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับไฟฟ้ากระแสสลับ ทำให้สะดวกในการคำนวณมาก

64

Example 9.9 Find $v(t)$ and $i(t)$ in the circuit shown in Fig. 9.16.



วิธีทำ $v_s = 10 \cos 4t$

$\omega = 4$

$$\mathbf{V}_s = 10\underline{/0^\circ} \text{ V}$$

$$\mathbf{Z} = 5 + \frac{1}{j\omega C} = 5 + \frac{1}{j4 \times 0.1} = \boxed{5 - j2.5\ \Omega}$$

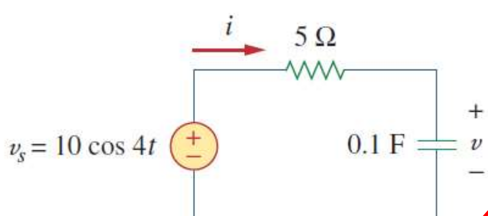
ใช้สูตรการหาร
จำนวนเชิงซ้อน

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2^2 + b_2^2)}}$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}} = \frac{10\underline{/0^\circ}}{5 - j2.5} = \frac{10(5 + j2.5)}{5^2 + 2.5^2} = 1.6 + j0.8 = 1.789\underline{/26.57^\circ} \text{ A}$$

$$\boxed{i(t) = 1.789 \cos(4t + 26.57^\circ) \text{ A}}$$

65



$$\mathbf{V} = \mathbf{I}\mathbf{Z}_C = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C} = \frac{1.789\underline{/26.57^\circ}}{j4 \times 0.1}$$

$$= \frac{1.789\underline{/26.57^\circ}}{0.4\underline{/90^\circ}} = 4.47\underline{/-63.43^\circ} \text{ V}$$

$$\boxed{v(t) = 4.47 \cos(4t - 63.43^\circ) \text{ V}}$$

66

9.6 Kirchhoff's Laws in the Frequency Domain

- Both KVL and KCL are hold in the phasor domain or more commonly called frequency domain.

  KCL และ KVL ใช้ได้ใน Phasor Domain

  Phasor Domain มีชื่อเรียกจริงๆ คือ Frequency Domain
- Moreover, the variables to be handled are phasors, which are complex numbers.

  Phasor เป็นจำนวนเชิงซ้อน
- All the mathematical operations involved are now in complex domain.

  ตัวดำเนินการต่างๆทางคณิตศาสตร์ ต้องเป็นตัวดำเนินการที่ใช้กับจำนวนเชิงซ้อน

67

9.7 Impedance Combinations

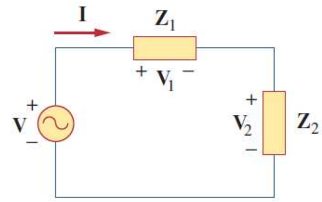
- The following principles used for DC circuit analysis all apply to AC circuit.

  หลักการต่อไปนี้ที่ใช้กับวงจรไฟฟ้ากระแสตรง สามารถใช้กับวงจรไฟฟ้ากระแสสลับได้
- For example:
  a. voltage division: การแบ่งแรงดัน
  b. current division : การแบ่งกระแส
  c. circuit reduction
  d. impedance equivalence
  e. Y-Δ transformation

68

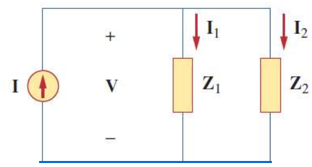
Voltage Divider

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{V}, \qquad \mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{V}$$



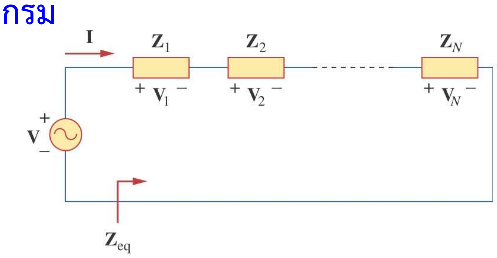
Current Divider

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{I}, \qquad \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{I}$$



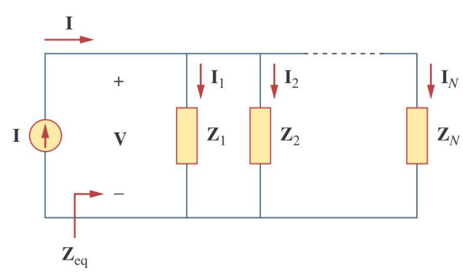
การต่อ Impedance แบบอนุกรม

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \cdots + \mathbf{Z}_N$$

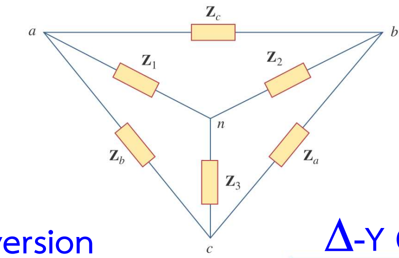


การต่อ Impedance แบบขนาน

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \cdots + \frac{1}{\mathbf{Z}_N}$$



การแปลง Impedance แบบ Y-Δ



Y-Δ Conversion

$$\mathbf{Z}_a = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1}$$

$$\mathbf{Z}_b = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2}$$

$$\mathbf{Z}_c = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_3}$$

Δ-Y Conversion

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_b\mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c}$$

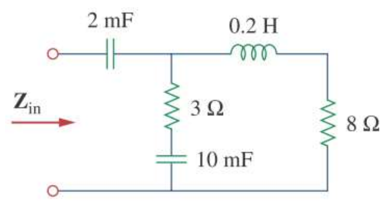
$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_c\mathbf{Z}_a}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c}$$

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_a\mathbf{Z}_b}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c}$$

71

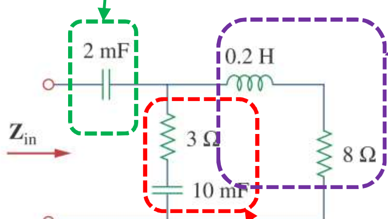
Example 9.10

Find the input impedance of the circuit in Fig. 9.23. Assume that the circuit operates at $\omega = 50$ rad/s.



วิธีทำ

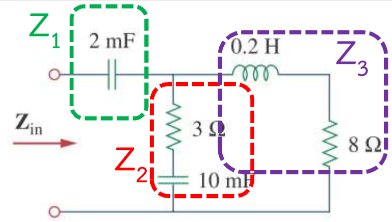
$$\mathbf{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j50 \times 2 \times 10^{-3}} = -j10\ \Omega$$



$$\mathbf{Z}_3 = 8 + j\omega L = 8 + j50 \times 0.2 = (8 + j10)\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_2 = 3 + \frac{1}{j\omega C} = 3 + \frac{1}{j50 \times 10 \times 10^{-3}} = (3 - j2)\ \Omega$$

72



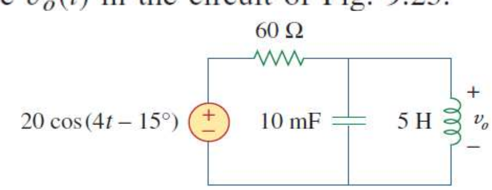
$$\mathbf{Z}_{in} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 \parallel \mathbf{Z}_3 = -j10 + \frac{(3 - j2)(8 + j10)}{11 + j8}$$

$$= -j10 + \frac{(44 + j14)(11 - j8)}{11^2 + 8^2} = -j10 + 3.22 - j1.07\ \Omega$$

จะได้ $\mathbf{Z}_{in} = 3.22 - j11.07\ \Omega$

73

Example 9.11 Determine $v_o(t)$ in the circuit of Fig. 9.25.



วิธีทำ

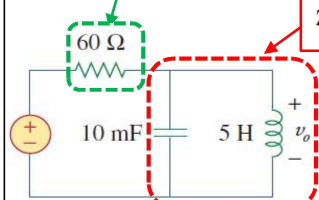
$$v_s = 20\cos(4t - 15^\circ) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_s = 20\angle -15^\circ\ \text{V}, \qquad \omega = 4$$

$$10\ \text{mF} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j4 \times 10 \times 10^{-3}} = -j25$$

$$5\ \text{H} \quad \Rightarrow \quad j\omega L = j4 \times 5 = j20\ \Omega$$

$\boxed{\mathbf{Z}_1 = 60\ \Omega}$

$$\boxed{\mathbf{Z}_2 = -j25 \parallel j20 = \frac{-j25 \times j20}{-j25 + j20} = j100\ \Omega}$$



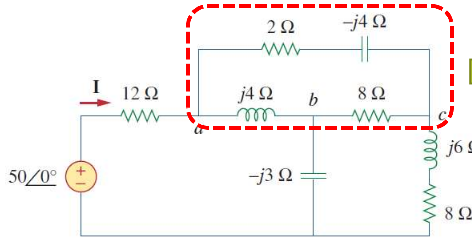
ใช้ Voltage Divider

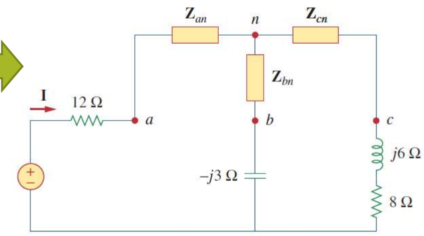
$$\mathbf{V}_o = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2}\mathbf{V}_s = \frac{j100}{60 + j100}(20\angle -15^\circ)$$

$$= (0.8575\angle 30.96^\circ)(20\angle -15^\circ) = 17.15\angle 15.96^\circ\ \text{V}$$

$$v_o(t) = 17.15\cos(4t + 15.96^\circ)\ \text{V}$$

Example 9.12 Find current **I** in the circuit of Fig. 9.28.





วิธีทำ

$$z_{an} = \frac{z_{ac} z_{ab}}{z_{ab} + z_{bc} + z_{ac}}$$

$$z_{bn} = \frac{z_{ab} z_{bc}}{z_{ab} + z_{bc} + z_{ac}}$$

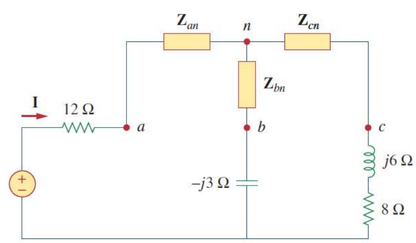
$$z_{cn} = \frac{z_{ac} z_{bc}}{z_{ab} + z_{bc} + z_{ac}}$$

$$\mathbf{Z}_{an} = \frac{j4(2 - j4)}{j4 + 2 - j4 + 8} = \frac{4(4 + j2)}{10} = (1.6 + j0.8)\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_{bn} = \frac{j4(8)}{10} = j3.2\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_{cn} = \frac{8(2 - j4)}{10} = (1.6 - j3.2)\ \Omega$$

75



$$\begin{aligned}\mathbf{Z} &= 12 + \mathbf{Z}_{an} + (\mathbf{Z}_{bn} - j3) \parallel (\mathbf{Z}_{cn} + j6 + 8)\\ &= 12 + 1.6 + j0.8 + (j0.2) \parallel (9.6 + j2.8)\\ &= 13.6 + j0.8 + \frac{j0.2(9.6 + j2.8)}{9.6 + j3}\\ &= 13.6 + j1 = 13.64\angle 4.204^\circ\ \Omega\end{aligned}$$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{50\angle 0^\circ}{13.64\angle 4.204^\circ} = 3.666\angle -4.204^\circ\ \text{A}$$

76

Practice Problem 9.1

Given the sinusoid $30 \sin(4\pi t - 75^\circ)$, calculate its amplitude, phase, angular frequency, period, and frequency.

Answer: 30, -75°, 12.57 rad/s, 0.5 s, 2 Hz.

Practice Problem 9.2

Find the phase angle between

$$i_1 = -4 \sin(377t + 55^\circ) \quad \text{and} \quad i_2 = 5 \cos(377t - 65^\circ)$$

Does i_1 lead or lag i_2?

Answer: 210°, i_1 leads i_2.

Practice Problem 9.3

Evaluate the following complex numbers:

(a) $[(5 + j2)(-1 + j4) - 5\angle 60^\circ]^*$

(b) $\dfrac{10 + j5 + 3\angle 40^\circ}{-3 + j4} + 10\angle 30^\circ + j5$

Answer: (a) $-15.5 - j13.67$, (b) $8.293 + j7.2$.

Practice Problem 9.4

Express these sinusoids as phasors:

(a) $v = 7 \cos(2t + 40^\circ)$ V
(b) $i = -4 \sin(10t + 10^\circ)$ A

Answer: (a) $\mathbf{V} = 7\angle 40^\circ$ V, (b) $\mathbf{I} = 4\angle 100^\circ$ A.

Practice Problem 9.5

Find the sinusoids corresponding to these phasors:

(a) $\mathbf{V} = -25\angle 40^\circ$ V
(b) $\mathbf{I} = j(12 - j5)$ A

Answer: (a) $v(t) = 25 \cos(\omega t - 140^\circ)$ V or $25 \cos(\omega t + 220^\circ)$ V, (b) $i(t) = 13 \cos(\omega t + 67.38^\circ)$ A.

Practice Problem 9.6

If $v_1 = -10 \sin(\omega t - 30^\circ)$ V and $v_2 = 20 \cos(\omega t + 45^\circ)$ V, find $v = v_1 + v_2$.

Answer: $v(t) = 29.77 \cos(\omega t + 49.98^\circ)$ V.

Practice Problem 9.7

Find the voltage $v(t)$ in a circuit described by the integrodifferential equation

$$2\frac{dv}{dt} + 5v + 10\int v\,dt = 50\cos(5t - 30^\circ)$$

using the phasor approach.

Answer: $v(t) = 5.3\cos(5t - 88^\circ)$ V.

Practice Problem 9.8

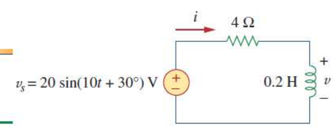
If voltage $v = 10\cos(100t + 30^\circ)$ is applied to a 50 μF capacitor, calculate the current through the capacitor.

Answer: $50\cos(100t + 120^\circ)$ mA.

Practice Problem 9.9

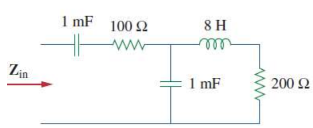
Refer to Fig. 9.17. Determine $v(t)$ and $i(t)$.

Answer: $8.944\sin(10t + 93.43^\circ)$ V, $4.472\sin(10t + 3.43^\circ)$ A.



Practice Problem 9.10

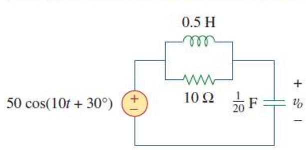
Determine the input impedance of the circuit in Fig. 9.24 at $\omega = 10$ rad/s.



Answer: $(149.52 - j195)$

Practice Problem 9.11

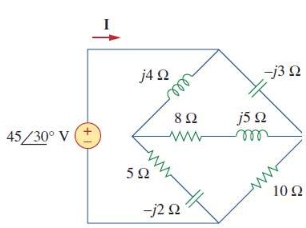
Calculate v_o in the circuit of Fig. 9.27.



Answer: $v_o(t) = 35.36\cos(10t - 105^\circ)$ V.

Practice Problem 9.12

Find **I** in the circuit of Fig. 9.30.



Answer: $9.546\angle 33.8^\circ$ A.