كوْكب النُّخبة العلمية في مادة الريـــــاضيات - بكالوريا 2026 -

مِنْ أجل صُنْع تـاج الامتيـاز الذَّهبي في امتحان شهادة البكالوريـا

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

المنصة العلمية للبكالوريا - طبعة 2026 -

B

المحطة المعلوماتية الثانية نحو محور الدوال
{ النهايات ،، الاشتقاقية ،، الاستمرارية }

تحت المجهر النظري

خاص بجميع الشعب العلمية

MathS

الجزء 02

2026

... تذكروا أنَّ :

،، تعَب المُراجعة أفْضل مِنْ ألمِ السُّقوط ،،

من تجميع وَ رفع : عقبة بن نافع

https://www.facebook.com/okba.bac.2010

توجيهات المِنصة العلمية للنُّخبة - بكالوريا 2026 -

1* أيُّها التلاميذ الشُّرفاء ،، نضع بين أيديكم هذه الباقة المعلوماتية في مادة الرياضيات ،، كوضعية انطلاق فعلية للموسم الدراسي 2025 / 2026 ،، نتمنى الاستغلال الأمثل لها ،،

2* أيُّها النُّخبة ركّزوا هُنـا ،، هذه الباقة تعتبر محطة أساسية للانطلاق الفعلي نحو أول محور وهو محور الدوال ،، مزيج بين المعلومات المكتسبة و المراجعة الأولية من البرنامج ،،

3* أيُّها النُّبلاء ،، هذه الباقة المعلوماتية تتضمن أول محطة نحو محور الدوال بشرح نظري للعناصر التالية : ،، { النهايات ،، الاشتقاقية ،، الاستمرارية } ،،

مع وجود تطبيقات للتوضيح وَ الفهم الصحيح ...

4* أيُّها الشُّرفاء فئة *النظاميين* : وَلْيكن في العلم أنَّ هذه الباقة مهمة جدا لكم لأنَّها تشمل في مضمونها أغلب المعلومات التي تم الحصول عليها في سنة ثانية ثانوي ، فإن التركيز عليها يمنحكم الانطلاقة الصحيحة لفهم الدروس نحو محور الدوال الذي يعتبر أكبر محور في البرنامج و منه التحضير الممتاز لامتحان شهادة البكالوريا من بداية الموسم الدراسي .

5* أيُّها الشُّرفاء فئة *الأحرار* : ننصحكم و بشدة ، بـ التركيز على هذه المعلومات القاعدية الأساسية نحو محور الدوال ، لأنه يوجد عدد كبير من التلاميذ الأحرار الذين لهم نقص في الكفاءة القاعدية رغم أنهم يفهمون الدروس ،، لكن في الجزء التطبيقي تظهر الثغرات و الأخطاء الشائعة ،، كما تظهر جليا في أوراق امتحان شهادة البكالوريا .

6* أيُّها النُّخبة العلمية ،، بعد تفحص الباقة المعلوماتية ،، نرجو منكم تدوين الأفكار الطازجة في كراس خاص ،، من أجل العودة لأخذها قُبيل موعد كل فرض أو اختبار فصلي ثم نحو امتحان ـالبكالوريا في قادم الزمن .. تسهيلا لكم و استغلالا للوقت ،،

7* *تحفيزات ختامية* :: تذكروا أنَّ : أصعب الأمور بدايتها ،، تحملوا و انطلقوا دون تردد

الوقت كافٍ في بدايته و شافٍ في ختامه لتحطيم كل القيود و المضي حقبا نحو الامتياز ،،

التوكل على الله في كل شيء و العمل بجد و كد نحو تحقيق النَّجاح أمر مشروط ،،

الامتياز يحتاج تركيز كبير و صبر أكبر ،،

،، تعب المراجعة أفضل من ألم السقوط ،،

من كتابة و إهداء : عقبة بن نافع

https://www.facebook.com/okba.bac.2010

،، مخطط وَ مضمون الباقة المعلوماتية - رياضيات - بكالوريا 2026 ،،

المحطة الأولى - 01 -

إعداد الأستاذ : رحماني عماد

- النهايات تحت المجهر النظري : ملخص الدرس ،،

المحطة الثانية - 02 -

إعداد الأستاذ : رحماني عماد

- الاشتقاقية تحت المجهر النظري : ملخص الدرس ،،

المحطة الثالثة - 03 -

إعداد الأستاذ : رحماني عماد

- الاستمرارية تحت المجهر النظري : ملخص الدرس ،،

المحطة الرابعة - 04 -

مقتطف من سلسلة البادیسیة

- الاشتقاقية و الاستمرارية : عرض نظري مع التوضيح البياني ،،

المحطة الخامسة - 05 -

إعداد الأستاذ : تومي عمر

- النهايات و الاشتقاقية و الاستمرارية :

،، عرض نظري ممزوج بتطبيقات مع حلولها ،،

المحطة السادسة - 06 -

إعداد الأستاذ : هازل الطاهر

- النهايات و الاشتقاقية و الاستمرارية :

،، ملخص شامل موجه للطباعة و الاستفادة المباشرة ،،

https://www.facebook.com/okba.bac.2010

المنصة العلمية : عقبة بن نافع

Rahmani Imed

ملخص درس النهايات

السنة الثالثة ثانوي

رياضيات | تقني رياضي | علوم تجريبية

من إعداد الأستاذ: رحـمـانـي عـمـاد

مبرهنات أولية على النهايات:

- نهاية مجموع دالتين :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha}[f(x)+g(x)]$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

- نهاية جداء دالتين:

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	L	$L>0$	$L>0$	$L<0$	$L<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha}[f(x)\times g(x)]$	$L\times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

- نهاية حاصل قسمة دالتين:

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$L'\neq 0$	$\pm\infty$	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	0	$\pm\infty$	0	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	∞	0

ملاحظات:

- نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية الحد الأعلى درجة.
- نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية الحد الأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام.

المستقيمات المقاربة:

- المستقيم المقارب العمودي :

يكون المستقيم العمودي ذو المعادلة $x=a$ مقارب لمنحنى الدالة f إذا كان:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$$

- المستقيم المقارب الأفقي :

يكون المستقيم الأفقي ذو المعادلة $y=a$ مقارب لمنحنى الدالة f إذا كان:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=a$$

- المستقيم المقارب المائل :

يكون المستقيم المائل ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب لمنحنى الدالة f إذا كان:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$$

- إيجاد المستقيم المقارب المائل:

لإيجاد معادلة المستقيم المقارب المائل للدالة f نحسب:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$$

بعد إيجاد قيمة a نقوم بحساب قيمة b بـ :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(ax)\right]=b$$

نهاية دالة مركبة:

نعتبر الدالة f المركبة من الدالتين u و v حيث: $f=u\circ v$ و لتكن a، b، c أعداد حقيقية.

إذا كان $\lim_{x\to a} v(x)=b$ و $\lim_{x\to b} u(x)=c$ فإن: $\lim_{x\to a} f(x)=c$.

حالات عدم التعيين (ح ع ت):

توجد أربع حالات عدم تعيين و هي: $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $+\infty-\infty$ ، $0\times\infty$.

طرق إزالة حالة عدم التعيين:

- الإختزال:

دراسة مثال:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}=\frac{0}{0}$$ (ح ع ت)

نقسم البسط و المقام على $x-1$:

$$\begin{array}{l|l} x^2-4x+3 & x-1 \\ \cline{2-2} x^2-x & x-3 \\ \cline{1-1} \quad -3x+3 & \\ \quad -3x+3 & \\ \cline{1-1} \qquad 0 & \end{array}$$

إذن: $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

$$\begin{array}{l|l} x^2-3x+2 & x-1 \\ \cline{2-2} x^2-x & x-2 \\ \cline{1-1} \quad -2x+2 & \\ \quad -2x+2 & \\ \cline{1-1} \qquad 0 & \end{array}$$

إذن: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-3)}{\cancel{(x-1)}(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-3)}{(x-2)}=\frac{(1-3)}{(1-2)}=2$$

- العدد المشتق:

دراسة مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\frac{0}{0}$$ (ح ع ت)

نضع $f(x)=\cos x$ أي أن $f'(x)=-\sin x$ فتصبح النهاية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=-\sin(0)=0$$

- التحليل:

دراسة مثال:

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+3x-1}=+\infty-\infty$$ (ح ع ت)

بما أن معاملي x^2 غير متساويين نستعمل طريقة التحليل.

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+3x-1}=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to +\infty}|x|\sqrt{\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}-|x|\sqrt{\left(2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$$

بما أن النهاية لما x يؤول إلى $+\infty$ فإن $|x|=x$:

$$\lim_{x\to +\infty}|x|\sqrt{\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}-|x|\sqrt{\left(2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to +\infty}x\sqrt{\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}-x\sqrt{\left(2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{\left(1+\cancel{\frac{5}{x}}^{0}-\cancel{\frac{2}{x^2}}^{0}\right)}-\sqrt{\left(2+\cancel{\frac{3}{x}}^{0}-\cancel{\frac{1}{x^2}}^{0}\right)}\right)=\lim_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{1}-\sqrt{2}\right)=-\infty$$

لأن $\left(\sqrt{1}-\sqrt{2}\right)<0$

- المرافق:

دراسة مثال:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+5x-2}-\sqrt{x^2+3x-1}=+\infty-\infty \quad \text{(ح ع ت)}$$

بما أن معاملي x^2 متساويين نستعمل طريقة المرافق أي نضرب و نقسم على مرافق الدالة.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+5x-2}-\sqrt{x^2+3x-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+5x-2}-\sqrt{x^2+3x-1}\times\frac{\sqrt{x^2+5x-2}+\sqrt{x^2+3x-1}}{\sqrt{x^2+5x-2}+\sqrt{x^2+3x-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+5x-2}-\sqrt{x^2+3x-1}\times\sqrt{x^2+5x-2}+\sqrt{x^2+3x-1}}{\sqrt{x^2+5x-2}+\sqrt{x^2+3x-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5x-2}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+3x-1}\right)^2}{\sqrt{x^2+5x-2}+\sqrt{x^2+3x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+5x-2)-(x^2+3x-1)}{\sqrt{x^2+5x-2}+\sqrt{x^2+3x-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x-2-x^2-3x+1}{\sqrt{x^2+5x-2}+\sqrt{x^2+3x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+5x-2}+\sqrt{x^2+3x-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\cancel{\frac{1}{x}}^{\,0}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\cancel{\frac{1}{x}}^{\,0}\right)}{|x|\sqrt{\left(1+\cancel{\frac{5}{x}}^{\,0}-\cancel{\frac{2}{x^2}}^{\,0}\right)}+|x|\sqrt{\left(1+\cancel{\frac{3}{x}}^{\,0}-\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,0}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}(2)}{\cancel{x}\left(\sqrt{(1)}+\sqrt{(1)}\right)}=\frac{2}{2}=1$$

طرق إضافية لإزالة حالة عدم التعيين:

- تغيير المتغير:

دراسة مثال:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)=0\times-\infty \quad \text{(ح ع ت)}$$

نقوم بتغير المتغير ونضع $t=\frac{1}{x}$:

بما أن x يؤول إلى $-\infty$ إذن t يؤول إلى 0. $(\frac{1}{\infty}=0)$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}t\ln(t)=0$$

- طريقة لوبيتال: (غير مقررة وتكتب في الوسخ فقط)

تطبق هذه الطريقة في حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$، فنقوم باشتقاق البسط و المقام ثم نحسب النهاية.

دراسة مثال:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x+1}=\frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{(ح ع ت)}$$

نشتق البسط و المقام:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x+1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$$

Rahmani Imed

ملخص درس الإشتقاقية

السنة الثالثة ثانوي

رياضيات | تقني رياضي | علوم تجريبية

من إعداد الأستاذ: رحماني عماد

قابلية اشتقاق دالة عند عدد

l ، l_1 و l_2 أعداد حقيقية.

قابلية الإشتقاق	النهاية
الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0	$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l$
الدالة f قابلة للاشتقاق على يسار x_0	$\lim\limits_{h\xrightarrow{<}0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l_1$
الدالة f قابلة للاشتقاق على يـمين x_0	$\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l_2$

ملاحظة:

- إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على يسار وعلى يـمين x_0 و $l_1=l_2$ فإنها قابلة للاشتقاق عند x_0.
- إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على يسار وعلى يـمين x_0 و $l_1\neq l_2$ فإنها غير قابلة للاشتقاق عند x_0 و النقطة ذات الفاصلة x_0 تدعى نقطة زاوية.

معادلة المماس عند نقطة

مماس المنحني (C_f) عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ هو المستقيم الذي يشمل A و معامل توجيهه $f'(x_0)$ و معادلته:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

قابلية الإشتقاق و التفسير الهندسي

النهاية	قابلية الإشتقاق	التفسير الهندسي
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=a$	f قابلة للاشتقاق عند x_0.	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $(x_0;f(x_0))$ معامل توجيهه a
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0$	f قابلة للاشتقاق عند x_0.	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $(x_0;f(x_0))$ موازي لمحور الفواصل.
$\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=a$	f قابلة للاشتقاق على يمين x_0.	(C_f) يقبل نصف مماس على يمين النقطة $(x_0;f(x_0))$ معامل توجيهه a.
$\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0$	f قابلة للاشتقاق على يمين x_0.	(C_f) يقبل نصف مماس على يمين النقطة $(x_0;f(x_0))$ موازي لمحور الفواصل.
$\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=+\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0.	(C_f) يقبل نصف مماس عمودي على اليمين عند النقطة $(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأعلى.
$\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=-\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0.	(C_f) يقبل نصف مماس عمودي على اليمين عند النقطة $(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأسفل.
$\lim\limits_{h\xrightarrow{<}0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=a$	f قابلة للاشتقاق على يسار x_0.	(C_f) يقبل نصف مماس على يسار النقطة $(x_0;f(x_0))$ معامل توجيهه a.
$\lim\limits_{h\xrightarrow{<}0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=+\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0.	(C_f) يقبل نصف مماس عمودي على يسار عند النقطة $(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأسفل.
$\lim\limits_{h\xrightarrow{<}0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=-\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0.	(C_f) يقبل نصف مماس عمودي على يسار عند النقطة $(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأعلى.

التـقريب التـآلفي

يـمكن حساب أي قيمة تقريبية للأعداد من الشكل a,n باستخدام التقريب التآلفي دون التعويض في الدالة و ذلك بكتابته على الشكل $a+h$ حيث a الجزء الصحيح و h الجزء العشري (h قيمة قريبة من الصفر)

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)\cdot h$$

ملاحظة:

إذا كانت لدينا معادلة المماس عند a فيمكن عندها تعويض $a+h$ مباشرة في معادلة المماس للحصول على التقريب التألفي.

مشتقات الدوال المألوفة:

$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^n	$n\cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$

عمليات على الدوال المشتقة:

u و v دالتان قابلتان لاشتقاق و λ عدد حقيقي

$f(x)$	$f'(x)$
$u+v$	$u'+v'$
$u\times v$	$u'\cdot v+v'\cdot u$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}$
u^n	$n\cdot u'\cdot u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\lambda\cdot u$	$\lambda\cdot u'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$(f\circ g)'(x)$	$g'(x)\cdot f'(g(x))$
$u(ax+b)$	$a\cdot u'(ax+b)$

تطبيقات الاشتقاقية

إتجاه التغير:

إشارة الـمشتقة	إتجاه التغير
$f'(x)>0$ على مجال I	f متزايدة تـماما على I
$f'(x)<0$ على مجال I	f متناقصة تـماما على I
$f'(x)=0$ على مجال I	f ثابتة تـماما على I

القيم الحدية المحلية:

- إذا انعدمت المشتقة f' عند قيمة a من I مغيرة إشارتها فإن f تقبل قيمة حدية عند النقطة $(a\,;f(a))$.
- إذا كانت f' موجبة ثم انعدمت ثم سالبة فإن f تقبل قيمة حدية كبرى و إذا العكس فهي تقبل قيمة حدية صغرى.
- إذا انعدمت المشتقة f' عند قيمة a من I فإن منحنى الدالة f يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة $(a\,;f(a))$.

نقطة الإنعطاف:

- إذا انعدمت المشتقة الأولى f' عند قيمة a من I دون أن تغير إشارتها فإن منحنى الدالة f يقبل نقطة انعطاف احداثياها $(a\,;f(a))$.
- إذا انعدمت المشتقة الثانية عند قيمة a من I مغيرة إشارتها فإن منحنى الدالة f يقبل نقطة انعطاف احداثياها $(a\,;f(a))$.
- بيانيا نقطة الانعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس المنحنى.

حصر دالة على مجال:

- إذا كانت الدالة f متزايدة تماما على المجال $[a\,;b]$ فإن $f(a)\leq f(x)\leq f(b)$
- إذا كانت الدالة f متناقصة تماما على المجال $[a\,;b]$ فإن $f(b)\leq f(x)\leq f(a)$

Rahmani Imed

ملخص درس الإستمرارية

السنة الثالثة ثانوي

رياضيات | تقني رياضي | علوم تجريبية

من إعداد الأستاذ: رحـمـانـي عـمـاد

الإستمرارية عند نقطة

الإستمرارية	النهاية
الدالة f مستمرة عند x_0	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
الدالة f مستمرة على يسار x_0	$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = f(x_0)$
الدالة f مستمرة على يـمين x_0	$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x) = f(x_0)$

ملاحظة:

إذا كانت الدالة f مستمرة على يسار وعلى يـمين x_0 فإنها مستمرة عند x_0.

الإستمرارية على مجال

- تكون الدالة f مستمرة على مجال مفتوح $]a\,;b[$ إذا كانت f مستمرة عند كل نقطة من المجال $]a\,;b[$.
- تكون الدالة f مستمرة على مجال مغلق $[a\,;b]$ إذا كانت f مستمرة عند كل نقطة من المجال $]a\,;b[$ و كانت مستمرة عند a و عند b .

العمليات على الدوال المستمرة

لتكن f و g دالتان مستمرتان على مجال I، وليكن k عدد حقيقي.

- الدوال $f+g$ ، $f\times g$ ، kf مستمرة على المجال I.
- إذا كانت الدالة g غير معدومة على المجال I فإن: $\frac{f}{g}$ ، $\frac{k}{g}$ مستمرة على المجال I.

نتـائـج:

- كل الدوال المرجعية مستمرة على مجموعة تعريفها.
- كل دالة كثير حدود مستمرة على $\Re$.
- كل دالة ناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على مجموعة تعريفها.
- الدالتان cos و sin مستمرتان على $\Re$.

مبـرهنة:

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند عدد x_0 فإنها مستمرة عند x_0.

(العكس ليس صحيح دوما)

كوْكب النُّخبة في مادة الريـــــاضيات - بكالوريا 2026 -

المنصة العلمية للبكالوريا - طبعة 2026 -

تحت المجهر النظري

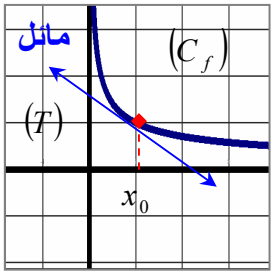
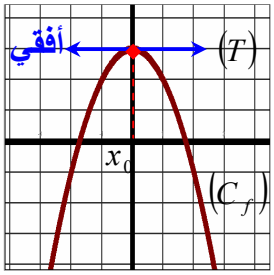
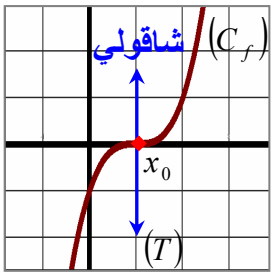
الاشتقاقية و الاستمرارية :

،، عرض نظري مع التوضيح البياني ،،

مقتطف من سلسلة الباديسية

المنصة العلمية : عقبة بن نافع https://www.facebook.com/okba.bac.2010

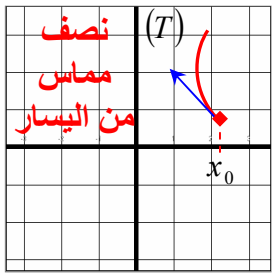
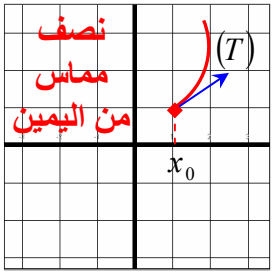
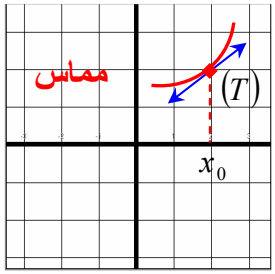
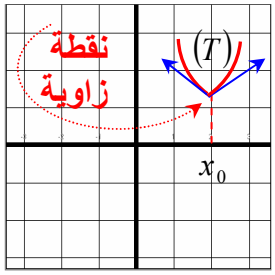
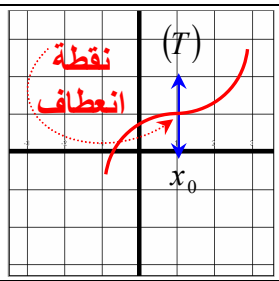
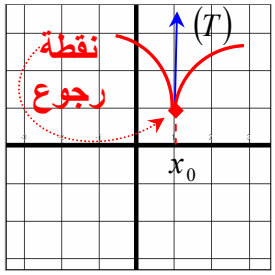
قابلية الاشتقاق دالة ذات شكل واحد

المنحنى	التفسير الهندسي	قابلية الاشتقاق	النهاية
	(C_f) يقبل مماس مائل (T) عند x_0 معامل توجيهه $f'(x_0)$ معادلته : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$	f قابلة للاشتقاق عند x_0 و عددها المشتق: $f'(x_0) = l$	$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = l$ $l \in \Re$
	(C_f) يقبل مماس أفقي عند x_0 معامل توجيهه $f'(x_0)$ موازيا (ox) معادلته : $y = f(x_0)$	f قابلة للاشتقاق عند x_0 و عددها المشتق: $f'(x_0) = 0$	$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 0$
	(C_f) يقبل مماس شاقولي عند x_0 x_0 معامل توجيهه $f'(x_0)$ موازيا (oy) معادلته : $(T): x = x_0$	f غير قابلة للاشتقاق عند x_0.	$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \infty$

العلاقة بين الاشتقاقية و الاستمرارية

إذا كانت الدالة f **قابلة للاشتقاق** فإن : f **مستمرة** و العكس غير صحيح كالدالة .
قد تكون f **مستمرة** لكنها **غير قابلة للاشتقاق** كالدالة : $f(x) = \|x\|$ فهي **مستمرة غير قابلة للاشتقاق** عند 0 .
إذا كانت الدالة f **غير مستمرة** فإن : f **غير قابلة للاشتقاق** و العكس غير صحيح.
قد تكون f **غير قابلة للاشتقاق** لكنها **مستمرة** كالدالة : $f(x) = \|x\|$ فهي **غير قابلة للاشتقاق و مستمرة** عند 0 .

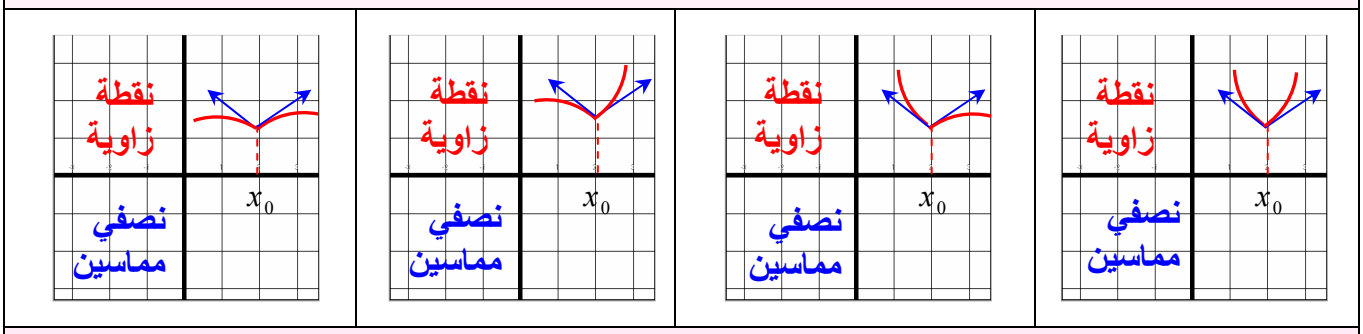
قابلية الاشتقاق دالة ذات قيمة مطلقة

المنحنى	التفسير الهندسي	قابلية الاشتقاق	النهاية
	(C_f) يقبل نصف مماس (T_G) من اليسار عند x_0 معامل توجيهه $f'_G(x_0)=l$ معادلته $y=f'_G(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$	f قابلة للاشتقاق عند x_0 من اليسار و عددها المشتق : $f'_G(x_0)=l$	$\lim\limits_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l$ $f'_G(x_0)=l$
	(C_f) يقبل نصف مماس (T_D) من اليمين عند x_0 معامل توجيهه $f'_D(x_0)=l$ معادلته : $y=f'_D(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$	f قابلة للاشتقاق عند x_0 من اليمين و عددها المشتق : $f'_D(x_0)=l'$	$\lim\limits_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l'$ $f'_D(x_0)=l'$
	(C_f) يقبل مماس (T) عند x_0 معامل توجيهه $f'(x_0)$ معادلته : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$	f قابلة للاشتقاق عند x_0 و عددها المشتق : $f'(x_0)=l$	$l=l'$
	(C_f) يقبل نصفي مماسين (T_G) و (T_D) عند x_0 معامل توجيههما $f'_G(x_0)$ و $f'_D(x_0)$	f غيرقابلة للاشتقاق عند x_0	$l \neq l'$
	(C_f) يقبل مماس (T) شاقولي عند x_0 يوازي (oy) يخترقه معادلته : $(T): x=x_0$	f غيرقابلة للاشتقاق عند x_0	$f'_G(x_0)=+\infty$ أو $-\infty$ $f'_D(x_0)=-\infty$ أو $+\infty$ متعاكسين في الإشارة
	(C_f) يقبل نصف مماس (T) شاقولي عند x_0 يوازي (oy) لا يخترقه معادلته : $(T): x=x_0$	f غيرقابلة للاشتقاق عند x_0	$f'_G(x_0)=+\infty$ أو $-\infty$ $f'_D(x_0)=+\infty$ أو $-\infty$ من نفس الإشارة

تعريف النقطة الزاوية و معناها

إذا كانت دالة f مستمرة و غير قابلة للاشتقاق عند x_0 أي : $f'_G(x_0) \neq f'_D(x_0)$ فإن منحناها يقبل عند النقطة ذات الفاصلة x_0 نصفي مماسين أحدهما من اليمين و الآخر من اليسار نقطة تقاطعهما $A(x_0 \; ; f(x_0))$ تمثل نقطة زاوية للمنحنى (C_f).

الحالات الأربع للنقطة الزاوية



نقطة الانعطاف و معناها

التعريف الأول

يقبل المنحنى (C_f) نقطة انعطاف $A(x_0 \; ; f(x_0))$ إذا انعدمت المشتقة الأولى عند x_0 و لم تغيّر إشارتها بجواره.

x		x_0	
المشتقة الأولى $f'(x)$	$-$	0	$-$
	$+$	0	$+$

التعريف الثاني

يقبل المنحنى (C_f) نقطة انعطاف $A(x_0 \; ; f(x_0))$ إذا انعدمت المشتقة الثانية عند x_0 و غيّرت إشارتها بجواره.

x		x_0	
المشتقة الثانية $f''(x)$	$-$	0	$+$
	$+$	0	$-$

التعريف الثالث

نقطة التماس التي يخترق المماس فيها المنحنى هي نقطة انعطاف و عندها يغيّر المنحنى اتجاهه

تعيين إشارة $f'(x)$ معادلتها $f'(x)=0$ صعبة الحل

لتعيين إشارة المشتقة الأولى $f'(x)$ معادلتها $f'(x)=0$ صعبة الحل أدرس تغيراتها أولا متبعا الخطوات :

1) أحسب المشتقة الثانية $f''(x)$ و حدّد إشارتها .

2) استنتج اتجاه تغير الدالة $f'(x)$ انطلاقا من إشارة $f''(x)$.

3) احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$ ؟ $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ ؟.

4) طبّق مبرهنة القيم المتوسّطة: هل f' **مستمرة** و **رتيبة** على $\Re$ ؟

5) استنتج أن $f'(x)=0$ لها **حل وحيد** α في $\Re$ يحقق : $f'(\alpha)=0$

6) من السطر الأخير **لجدول تغيرات** f' استنتج **إشارة** $f'(x)$.

جدول تغيرات $f'(x)$ و $f(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

مشتقات الدوال المألوفـــــــــــــــــــــــة

الدالة المشتقة $f'(x)$	الدالة $f(x)$	الدالة المشتقة $f'(x)$	الدالة $f(x)$
0	a و $a\in\Re$	$a.Cos(ax+b)$	$Sin(ax+b)$
a	$a.x$ و $a\in\Re$	$-a.Sin(ax+b)$	$Cos(ax+b)$
$n.x^{n-1}$	x^n و $n\in N^*$	$\frac{1}{Cos^2x}=1+\tan^2 x$	$\tan x$ و $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$
$a.n.x^{n-1}$	$a.x^n$ و $n\in N^*$	$\frac{a}{Cos^2(ax+b)}$	$\tan(ax+b)$
$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{x^n}$ و $n\in N^*$	$u'(x)\pm v'(x)$	$u(x)\pm v(x)$
$\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$	$\sqrt{ax+b}$	$u'(x).v(x)+v'(x).u(x)$	$u(x)\times v(x)$
$Cosx$	$Sinx$	$-\frac{v(x)}{v^2(x)}$	$\frac{1}{v(x)}$ و $v(x)\neq 0$
$-Sinx$	$Cosx$	$\frac{u'(x).v(x)-v'(x).u(x)}{v^2(x)}$	$\frac{u(x)}{v(x)}$ و $v(x)\neq 0$

مشتقات الدوال المركبـــــــــــــــــــــــــــــة

ملاحظـــــــات	الدالـــــة المشتقـــــــة	الدالـــة المركبة
لا تنس أضرب في مشتق **ما داخل القوس**	$aU'(ax+b)$	$U(ax+b)$
لا تنس أضرب في مشتق **ما داخل العارضة**	$V'[U]\times U'$	$V\circ U$
لا تنس أضرب في مشتق **ما تحت الأس**	$nU^{n-1}\times U'$	U^n و $n\in N$
لا تنس أضرب في مشتق **ما تحت الأس**	$\frac{-nU'}{U^{n+1}}$	$\frac{1}{U^n}$ و $n\in N$
لا تنس أضرب في مشتق **ما تحت الجذر**	$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$	$\sqrt{U}$

عبارتي التقريب التآلفي المحلي

العبارة الأولى : بدلالة x

أحسن تقريب تآلفي محلّي لمنحنى دالة عند نقطة فاصلتها x_0 **هو المماس** (T) للمنحنى (C_f) عند x_0

الذي معادلته : $(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ أي بجوار x_0 يكون : $f(x)\approx f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

العبارة الثانية: بدلالة h

بوضع : $(x-x_0)=h$ أي : $x=x_0+h$ يصبح التقريب بجوار x_0 : $f(x_0+h)\approx hf'(x_0)+f(x_0)$

فكرة عن المثلث العـــــــــــــــــددي

فهم جيّد

لنشر العبارات

1

1 + 1

1 + 2 + 1 $(a+b)^2$

1 + 3 + 3 + 1 $(a+b)^3$

1 + 4 + 6 + 4 + 1 $(a+b)^4$

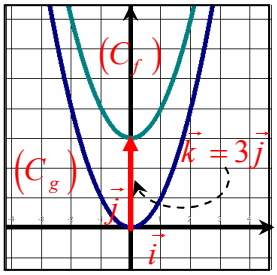
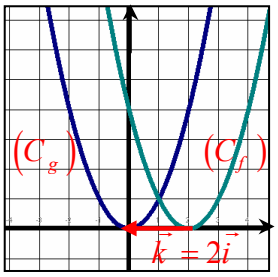
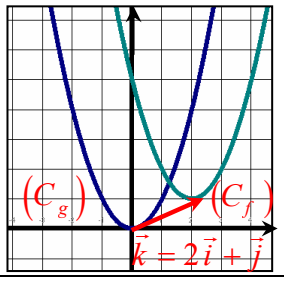
1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1

1 6 15 20 15 6 1

لا تحفظ

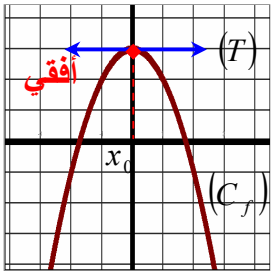
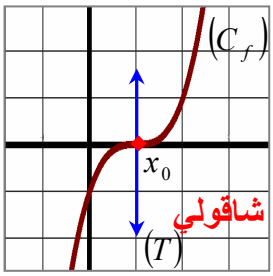
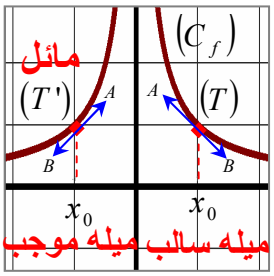
$(x+1)^2=1x^2+2x+1$	$(x+y)^2=1x^2+2x^1y^1+1y^2$
$(x+1)^3=1x^3+3x^2+3x+1$	$(x+y)^3=1x^3+3x^2y^1+3x^1y^2+1y^3$
$(x+1)^4=1x^4+4x^3+6x^2+4x+1$	$(x+y)^4=1x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+1y^4$

العبارات الثلاث للانسحـــــــــــــاب

الانسحاب	عبارته	كيفية السحب و الإنشاء
الشاقولـــــي	$f(x)=g(x)+a$	(C_f) هو صورة (C_g) بانسحاب شعاعه $\vec{k}(0;a)$ 
الأفقـــــي	$f(x)=g(x+b)$	(C_f) هو صورة (C_g) بانسحاب شعاعه $\vec{k}(-b;0)$ 
المائـــــل	$f(x)=g(x+b)+a$	(C_f) هو صورة (C_g) بانسحاب شعاعه $\vec{k}(-b;a)$ 

قراءة العدد المشتق بيانيـــــــــــــا

العدد المشتق بيانيا هو معامل توجيه المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 نميز ثلاث حالات :

المماس الأفقي الموازي لمحور الفواصل (xx'): $f'(x_0)=0$	المماس الشاقولي الموازي لمحور التراتيب (yy'): $f'(x_0)=\infty$	المماس المائل ذو الميل الموجب أو السالب: $f'(x_0)=a$
		

لا تنس : معامل توجيه المماس المائل: $a=f'(x_0)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$

كوكب النُّخبة في مادة الريـــــاضيات - بكالوريا 2026 -

المنصة العلمية للبكالوريا - طبعة 2025 -

- النهايات وَ الاشتقاقية وَ الاستمرارية :

" عرض نظري ممزوج بتطبيقات مع حلولها "

إعداد الأستاذ : تومي عمر

الاشتقاقيــة

❶ قابلية اشتقاق دالة :

العدد المشتق - الدالة المشتقة :

تعريف : f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$ وَ x_0 عدد من D_f .

القول أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 معناه النسبة $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ تقبل نهاية حقيقية ℓ لما يؤول h إلى 0

وَ نكتب : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell$ ، يسمى ℓ العدد المشتق للدالة f عند x_0 وَ نرمز له بـ : $f'(x_0)$.

ملاحظات :

- النسبة $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ تسمى نسبة تزايد الدالة f بين العددين x_0 وَ x_0+h .
- بوضع $x=x_0+h$ الكتابة $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$ تكتب $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$.
- إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من D_f نقول أنها تقبل الاشتقاق على D_f

وَ نسمي الدالة : $f':x\mapsto f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f .

تطبيق 01

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x^2-3$

1/ أكتب نسبة تزايد الدالة f بين العددين 1 وَ $1+h$.

2/ أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 1 وَ استنتج $f'(1)$.

الحل

1/ كتابة نسبة تزايد الدالة f بين العددين 1 وَ $1+h$:

لدينا من أجل كل $h\neq 0$:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\left[2(1+h)^2-3\right]-\left[2(1)^2-3\right]}{h}=\frac{2(1+2h+h^2)-2}{h}=\frac{4h+2h^2}{h}=\frac{(4+h)\cancel{h}}{\cancel{h}}=4+h$$

2/ إثبات أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 1:

بما أن : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(4+h)=4$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 1 وَ $f'(1)=4$.

قابلية الاشتقاق من اليمين وَ من اليسار :

تعريف : f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$ وَ x_0 عدد من D_f .

القول أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 إذا كانت قابلة للاشتقاق على يمين وَ على يسار العدد x_0 أي:

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$ مع $\ell\in\mathbb{R}$.

تطبيق 02

لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{|x|\,x^2}{x+2}$

1/ اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

2/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0=0$.

الحل

1/ كتابة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

نعلم أن : $|x|=\begin{cases}+x & ; \ x\geq 0\\ -x & ; \ x<0\end{cases}$ إذن : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x+2} & ; \ x\in[0;+\infty[\\ \dfrac{-x^3}{x+2} & ; \ x\in]-\infty;-2[\cup]-2;0[\end{cases}$.

2/ دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0=0$:

أولاً دراسة قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_0=0$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{x^3}{x+2}-0}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{x^3}{x+2}}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x^2}{x+2}=\frac{0}{2}=0$$

بما أن النهاية عدد ثابت فإن f قابلة للاشتقاق على يمين $x_0=0$.

ثانياً دراسة قابلية اشتقاق الدالة f على يسار $x_0=0$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{\frac{-x^3}{x+2}-0}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{\frac{-x^3}{x+2}}{x}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{-x^2}{x+2}=\frac{0}{2}=0$$

بما أن النهاية عدد ثابت فإن f قابلة للاشتقاق على يسار $x_0=0$.

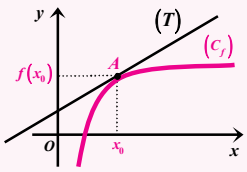
النتيجة : بما أن f قابلة للاشتقاق على يمين و على يسار $x_0=0$ و لهما نفس النهاية فإن f دالة قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$.

مماس منحنى عند نقطة منه:

تعريف : f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$ وَ ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند x_0 فإن (C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماساً (T)

معامل توجيهه العدد المشتق $f'(x_0)$ وَ معادلته : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.



ملاحظة : ليكن منحنى الدالة f يقبل مماساً (T) عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ معادلته : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

وَ (Δ) مستقيم الذي معادلته : $y=ax+b$.

- إذا كان : $f'(x_0)=a$ فإن المستقيمان (T) وَ (Δ) متوازيان .
- إذا كان : $f'(x_0)\times a=-1$ فإن المستقيمان (T) وَ (Δ) متعامدان .
- إذا كان : $f(x_0)=x_0\times f'(x_0)$ فإن المماس (T) يشمل النقطة $O(0;0)$ مبدأ المعلم .
- إذا كان : $f'(x_0)=0$ فإن المماس (T) يوازي محور الفواصل .

تطبيق 03

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^3-3x-1$ وَ (Δ) مستقيم الذي معادلته : $y=-3x+5$ . .

1/ أكتب معادلة لـ (T) مماس لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$ وَ يوازي المستقيم (Δ) .

2/ أكتب معادلة لـ (T') مماس لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة $x_1=1$ وَ الموازي لمحور الفواصل .

3/ أكتب معادلة لـ (T'') مماس لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة $x_2=-1$ وَ عمودي على المستقيم (T) .

الحل

1/ كتابة معادلة المماس (T):

لدينا معادلة المماس من الشكل : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ منه : $(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$

بما أن (T) وَ (Δ) متوازيان فإن : $f'(0)=-3$ وَ $f(0)=0^3-3(0)-1=-1$

معادلة المماس تصبح : $y=-3(x-0)-1$ وَ بالتالي : $(T): y=-3x-1$.

2/ كتابة معادلة المماس (T'):

لدينا معادلة المماس من الشكل : $y=f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1)$ منه : $(T'): y=f'(1)(x-1)+f(1)$

بما أن (T') يوازي محور الفواصل فإن : $f'(1)=0$ وَ $f(1)=1^3-3(1)-1=-3$

معادلة المماس تصبح : $y=0(x-1)-3$ وَ بالتالي : $(T'): y=-3$.

3/ كتابة معادلة المماس (T''):

لدينا معادلة المماس من الشكل : $y=f'(x_2)(x-x_2)+f(x_2)$ منه : $(T''): y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$

بما أن (T'') وَ (T) متعامدان فإن : $f'(-1)\times(-3)=-1$ منه : $f'(-1)=\frac{1}{3}$ وَ $f(-1)=(-1)^3-3(-1)-1=1$

معادلة المماس تصبح : $y=\frac{1}{3}(x+1)+1$ منه: $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}+1$ وَ بالتالي : $(T''): y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$.

الاشتقاقية وَ الاستمرارية :

مبرهنة : إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند عدد x_0 فإنها مستمرة عند x_0 .

ملاحظة : عكس هذه المبرهنة ليس بالضرورة صحيحة.

تطبيق 04

لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=|x-3|$

1/ برر لماذا الدالة f مستمرة عند $x_0=3$.

2/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0=3$ ، ماذا تلاحظ ؟

$\lim_{x\to 3^+}|x-3|=\lim_{x\to 3^+}(x-3)$

$\lim_{x\to 3^-}|x-3|=\lim_{x\to 3^-}-(x-3)$

الحل

1/ استمرارية الدالة f عند $x_0=3$:

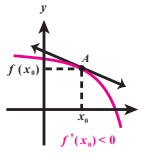
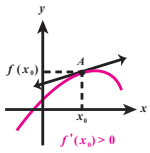
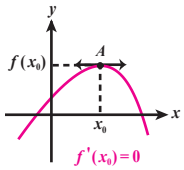
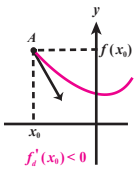
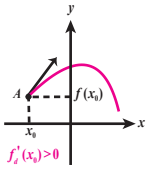
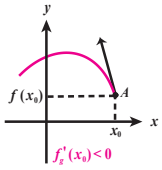
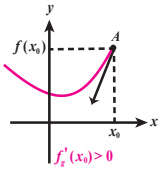
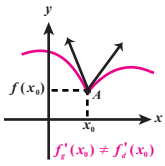
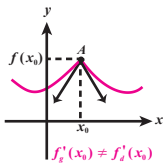
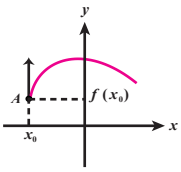
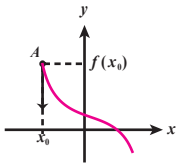
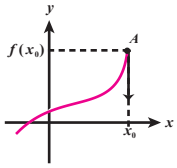
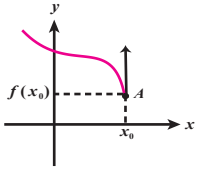
بما أن $\lim_{x\to 3}f(x)=f(3)=0$ فإن الدالة f مستمرة عند $x_0=3$.

2/ دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0=3$:

لدينا: $\lim_{x\xrightarrow{>}3}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}3}\frac{x-3}{x-3}=1$ وَ $\lim_{x\xrightarrow{<}3}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{<}3}\frac{-(x-3)}{x-3}=-1$

بما أن f قابلة للاشتقاق على يمين و على يسار $x_0=3$ و ليس لهما نفس النهاية فإن f دالة غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=3$.

التفسيرات الهندسية للاشتقاقية :

النهاية	الاستنتاج	التفسير الهندسي
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$	f تقبل الاشتقاق عند x_0 وَ $f'(x_0) = a$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماساً معادلته: $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$  
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$	f تقبل الاشتقاق عند x_0 وَ $f'(x_0) = 0$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماساً موازي لمحور الفواصل معادلته: $y = f(x_0)$ 
$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$	f تقبل الاشتقاق على يمين x_0 وَ $f'_d(x_0) = a$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس معادلته: $y = f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$  
$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b$	f تقبل الاشتقاق على يسار x_0 وَ $f'_g(x_0) = b$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس معادلته: $y = f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$  
$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq \lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	f لا تقبل الاشتقاق عند x_0 وَ $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصفي مماسين حيث A تسمى نقطة زاوية .  
$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	(C_f) يقبل على يمين النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x = x_0$. 
$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	(C_f) يقبل على يمين النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x = x_0$. 
$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	(C_f) يقبل على يسار النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x = x_0$. 
$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	(C_f) يقبل على يسار النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x = x_0$. 

❷ عمليات على الدوال المشتقة :

مشتقات الدوال المألوفة :

$f(x)$	$f'(x)$	مجال قابلية الاشتقاق
a حيث $a\in\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$a\,x$	a	$\mathbb{R}$
x^n حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$	$n.x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos(a\,x+b)$	$-a\sin(a\,x+b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(a\,x+b)$	$a\cos(a\,x+b)$	$\mathbb{R}$

المشتقات وَ العمليات على الدوال :

لتكن u وَ v دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال I وَ a عدد حقيقي .

الدالة	$u\pm v$	$a\,u$	$u\times v$	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$	$\sqrt{u}$	u^n	$u\circ v$
الدالة المشتقة	$u'\pm v'$	$a\,u'$	$u'v+v'u$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$n\times u^{n-1}\times u'$ $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$	$v'.u'(v)$

ملاحظات :
- الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على مجال محتوى في مجموعة تعريفها .
- نرمز: $f^{(1)}=f'$ ، $f^{(2)}=f''$ ، $f^{(3)}=f'''$ وَهكذا إلى غاية $f^{(n)}$ المشتقة ذات الرتبة n مع $n\in\mathbb{N}^*$.

تطبيق 05

– عين الدالة المشتقة للدالة f على المجال المعطى في كل حالة :

/1 $f(x)=-4x^5+2x^4-x^3+6$ ، $I=\mathbb{R}$

/2 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}$ ، $I=\mathbb{R}-\{1\}$

/3 $f(x)=\sin x\times\cos x$ ، $I=\mathbb{R}$

/4 $f(x)=\frac{x^2+x-3}{x^2}$ ، $I=\mathbb{R}-\{0\}$

/5 $f(x)=\frac{|x|+x-1}{2x-1}$ ، $I=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

/6 $f(x)=(x^2-3x)^{2017}$ ، $I=\mathbb{R}$

/7 $f(x)=\cos(-3x+2)$ ، $I=\mathbb{R}$

/8 $f(x)=\cos(\sin x)$ ، $I=\mathbb{R}$

الحل

1/ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن: $f'(x)=-4(x^5)'+2(x^4)'-(x^3)'+(6)'$ منه: $f'(x)=-20x^4+8x^3-3x^2$.

2/ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ إذن: $f'(x)=\left(\sqrt{x^2-2x+1}\right)'$ منه: $f'(x)=\dfrac{(x^2-2x+1)'}{2\sqrt{x^2-2x+1}}=\dfrac{\cancel{2}(x-1)}{\cancel{2}\sqrt{x^2-2x+1}}$

أي: $f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$.

3/ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن: $f'(x)=(2x-1)'\sin x+(\sin x)'(2x-1)$

منه: $f'(x)=2\sin x+(\cos x)(2x-1)$.

4/ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{0\}$ إذن: $f'(x)=\dfrac{(x^2+x-3)'(x^2)-(x^2)'(x^2+x-3)}{(x^2)^2}$

منه: $f'(x)=\dfrac{(2x+1)x^2-2x(x^2+x-3)}{x^4}=\dfrac{\cancel{2x^3}+x^2\cancel{-2x^3}-2x^2+6x}{x^4}=\dfrac{-x^2+6x}{x^4}$

و بالتالي: $f'(x)=\dfrac{-x+6}{x^3}$.

5/ أولاً نكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

لدينا: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-1}{2x-1}=1 & ; x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[\\ \dfrac{-1}{2x-1} & ; x\in\left]-\infty;0\right[\end{cases}$ منه: $f'(x)=\begin{cases}0 & ; x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[\\ \dfrac{2}{(2x-1)^2} & ; x\in\left]-\infty;0\right[\end{cases}$.

6/ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن: $f'(x)=2017(x^2-3x)^{2017-1}\times(x^2-3x)'$

منه: $f'(x)=2017(x^2-3x)^{2016}\times(2x-3)$.

7/ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن: $f'(x)=(-3x+2)'\cos'(-3x+2)$ منه: $f'(x)=(-3)[-\sin(-3x+2)]$

أي: $f'(x)=3\sin(-3x+2)$.

8/ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن: $f'(x)=(\sin x)'\cos'(\sin x)$ منه: $f'(x)=\cos x[-\sin(\sin x)]$

أي: $f'(x)=-\cos x\times\sin(\sin x)$.

❸ اتجاه تغير دالة :

المشتقة واتجاه التغير :

مبرهنة : f دالة قابلة للاشتقاق على مجال D_f من $\mathbb{R}$.

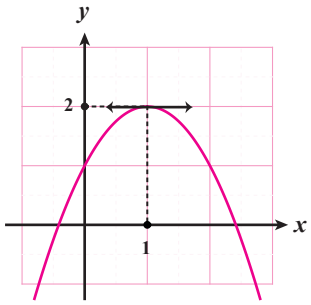
- إذا كان من أجل كل x من D_f ، $f'(x)>0$ فإن الدالة f متزايدة تماماً على D_f .
- إذا كان من أجل كل x من D_f ، $f'(x)<0$ فإن الدالة f متناقصة تماماً على D_f .
- إذا كان من أجل كل x من D_f ، $f'(x)=0$ فإن الدالة f ثابتة على D_f .

ملاحظة : نقول أن الدالة f رتيبة تماماً على المجال D_f ، إذا كانت متزايدة تماماً أو متناقصة تماماً على المجال D_f .

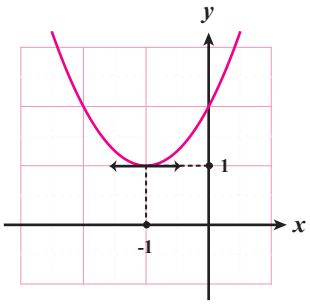
القيم الحدية المحلية :

تعاريف : f دالة معرفة على D_f من $\mathbb{R}$ وَ x_0 عدد حقيقي من D_f .

- نقول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني يوجد مجال مفتوح I محتوى في D_f وَ يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من I يكون : $f(x) \leq f(x_0)$.
- نقول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني يوجد مجال مفتوح I محتوى في D_f وَ يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من I يكون : $f(x) \geq f(x_0)$.



$f(1)=2$ قيمة حدية محلية عظمى



$f(-1)=1$ قيمة حدية محلية صغرى

ملاحظة : f دالة معرفة وَ قابلة للاشتقاق مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ وَ x_0 عدد حقيقي من I .

تكون $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f إذا انعدمت الدالة المشتقة f' وَ مغيرة إشارتها بجوار x_0 .

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(x_0)$	↗

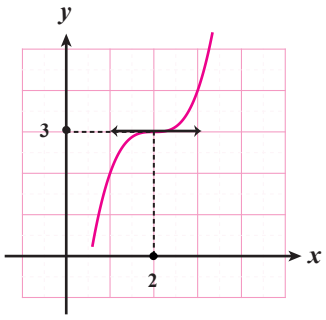
x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$f(x_0)$	↘

نقطة الانعطاف :

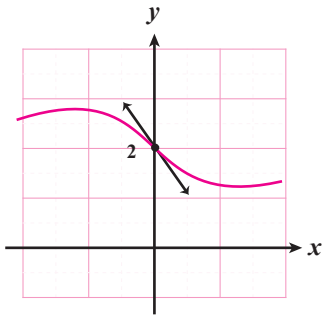
تعريف ①: نقطة انعطاف دالة هي نقطة من المنحنى التي عندها المماس يخترق هذا المنحنى .

تعريف ②: إذا انعدمت الدالة المشتقة الثانية f'' عند x_0 مع تغير الإشارة فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها x_0 .

تعريف ③: إذا انعدمت الدالة المشتقة الأولى f' عند x_0 دون تغيير الإشارة فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها x_0 .



$(2;3)$ تمثل نقطة انعطاف



$(0;2)$ تمثل نقطة انعطاف

تطبيق 06

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$

1/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2/ – أثبت أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ثم احسب $f'(x)$.

– استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم عين القيم الحدية للدالة f مستنتجا نوعها.

– شكل جدول تغيرات الدالة f .

3/ هل للدالة f نقطة انعطاف ؟ في حالة نعم أكتب معادلة المماس في هذه النقطة .

الحل

1/ حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3=-\infty$ أخذنا نهاية الحد أكبر أس (درجة) .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty$ أخذنا نهاية الحد أكبر أس (درجة) .

2/ إثبات أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

بما أن f دالة كثير الحدود فهي معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ منه: $f'(x)=6x^2+6x-12$.

– استنتاج اتجاه تغير الدالة :

لمعرفة اتجاه تغير الدالة f نقوم بدراسة إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$.

لدينا: $f'(x)=6x^2+6x-12$ تكافئ : $f'(x)=6(x^2+x-2)$ تكافئ : $f'(x)=(x-1)(x+2)$

الجدول المقابل يبين إشارة: $f'(x)$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين $]-\infty;-2[$ وَ $]1;+\infty[$.

الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-2;1[$.

– تعيين القيم الحدية للدالة f:

بما أن المشتقة الأولى f' تنعدم و تغير من إشارتها عند : $x=-2$ وَ $x=1$ فإن للدالة f قيمتين حديتين الأولى عظمى وَ هي $f(-2)=21$ و الثانية صغرى و هي $f(1)=-6$.

– جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-2)=21$	$\searrow$	$f(1)=-6$	$\nearrow$	$+\infty$

2/ هل للدالة f نقطة انعطاف ؟

الدالة f تقبل نقطة انعطاف إذا كانت المشتقة الثانية $f''(x)$ تنعدم و تغير من إشارتها.

لدينا: $f'(x)=6x^2+6x-12$ منه: $f''(x)=12x+6$ أي: $f''(x)=6(2x+1)$

إذن: $f''(x)=0$ تكافئ : $2x+1=0$ تكافئ : $x=\frac{-1}{2}$

من جدول الإشارة نلاحظ أن $f''(x)$ تنعدم و تغير من إشارتها عند الفاصلة $x_0=\frac{-1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

إذن للدالة f نقطة انعطاف و هي: $\left(\frac{-1}{2};f\left(\frac{-1}{2}\right)\right)$ حيث : $f\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{15}{2}$.

- معادلة المماس عند الفاصلة: $x_0 = \frac{-1}{2}$

لدينا معادلة المماس من الشكل: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

منه: $y = f'\left(\frac{-1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{-1}{2}\right)$ حيث: $f'\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-27}{2}$ وَ $f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{15}{2}$

معادلة المماس تصبح: $y = \frac{-27}{2}x - \frac{27}{4} + \frac{15}{2}$ تكافئ: $y = \frac{-27}{2}x + \frac{3}{4}$ و هي معادلة المماس المطلوبة .

④ التقريب التآلفي :

تعريف : إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 فإن :

- التقريب التآلفي للدالة f من أجل x قريب من x_0 هو: $f(x) \simeq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
- التقريب التآلفي للدالة f من أجل h قريب من 0 هو: $f(x_0 + h) \simeq f'(x_0) \times h + f(x_0)$ حيث: $h = x - x_0$.

تطبيق 07

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x^2 + 5x - 2$ وَ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;I,J)$.

1/ عين معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

2/ أوجد أحسن تقريب تآلفي للدالة f بجوار 0 ، ثم استنتج قيمة مقربة للعدد $f(0,000001)$.

الحل

1/ تعيين معادلة المماس (T):

لدينا معادلة المماس من الشكل: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ منه: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

- حساب $f(0)$: لدينا $f(0) = -2$.
- حساب $f'(0)$: لدينا $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2h^2 + 5h - 2) - (-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 5h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2h+5)\cancel{h}}{\cancel{h}}$

$f'(0) = \lim_{h \to 0}(2h + 5) = 5$

إذن معادلة المماس تصبح: $y = 5(x - 0) - 2$ وَ بالتالي: $(T): y = 5x - 2$.

2/ إيجاد أحسن تقريب تآلفي للدالة f بجوار 0 :

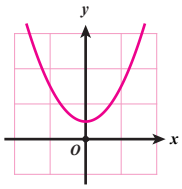
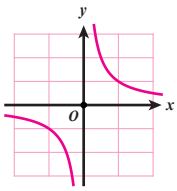
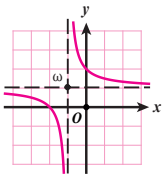
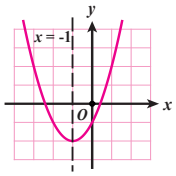
أحسن تقريب تآلفي للدالة f بجوار 0 هي الدالة: $x \mapsto 5x - 2$ وَ نكتب : $f(x) \approx 5x - 2$ لما x قريب من 0 .

بما أن العدد $0,000001$ قريب من 0 فإن: $f(0,000001) \approx 5 \times 0,000001 - 2$ منه: $f(0,000001) \approx 0,000005 - 2$

إذن: $f(0,000001) \approx -1,999995$.

❺ الدالة الزوجية-الدالة الفردية-مركز تناظر-محور تناظر :

لتكن f دالة عددية وَ (C_f) التمثيل البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

	التعريف	التمثيل البياني
الدالة الزوجية	f دالة زوجية إذا وفقط إذا كان من أجل كل : $x \in D_f$ وَ $-x \in D_f$ فإن : $f(-x)=f(x)$	
	إذا كانت f دالة زوجية فإن بيانها (C_f) يقبل محور التراتيب كمحور تناظر .	
الدالة الفردية	f دالة فردية إذا وفقط إذا كان من أجل كل : $x \in D_f$ وَ $-x \in D_f$ فإن : $f(-x)=-f(x)$	
	إذا كانت f دالة فردية فإن بيانها (C_f) يقبل مبدأ المعلم O كمركز تناظر .	
مركز تناظر	$\omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر لـ (C_f) إذا وفقط إذا كان من أجل كل: $x \in D_f$ وَ $(2\alpha-x) \in D_f$ فإن: $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$	
محور تناظر	$x=\alpha$ محور تناظر لـ (C_f) إذا وفقط إذا كان من أجل كل: $x \in D_f$ وَ $(2\alpha-x) \in D_f$ فإن: $f(2\alpha-x)=f(x)$	

تطبيق 08

لتكن f دالة عددية حيث جزء من جدول تغيراتها كما يلي :

x	0		2		5		9
$f(x)$	-2	↗	3	↘	-1	↗	0

1/ تمم جدول تغيرات الدالة f في كل من الحالتين التاليتين :

أ- الدالة f زوجية . ب- الدالة f فردية .

2/ نضع $(C)=(C_1)\cup(C_2)$ منحنى الدالة f في المستوي وَ $y=x^3-x+2$ معادلة المنحنى (C_1) على المجال $[0;+\infty[$

- عين معادلة المنحنى (C_2) على المجال $]-\infty;0]$ في كلا الحالتين : أ- الدالة f زوجية . ب- الدالة f فردية .

الحل

1/ ⊂ جدول التغيرات في حالة f دالة زوجية :

x	-9		-5		-2		0		2		5		9
$f(x)$	0	↘	-1	↗	3	↘	-2	↗	3	↘	-1	↗	0

⊂ جدول التغيرات في حالة f دالة فردية :

x	-9		-5		-2		0		2		5		9
$f(x)$	0	↗	1	↘	-3	↗	2	‖	-2	↗	3	↘	-1	↗	0

2/ تعيين معادلة المنحنى (C_2):

⊂ لما f دالة زوجية فإنها تحقق $f(-x)=f(x)$ منه معادلة المنحنى (C_2) على المجال $]-\infty;0]$ هي : $y=-x^3+x+2$.

⊂ لما f دالة فردية فإنها تحقق $f(-x)=-f(x)$ منه معادلة المنحنى (C_2) على المجال $]-\infty;0]$ هي : $y=x^3-x-2$.

تطبيق 09

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,2\}$ بالشكل: $f(x)=\dfrac{x^2-3x-1}{x^2-x-2}$

- أثبت أن النقطة $\omega\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ مركز تناظر لـ (C_f) منحنى الدالة f .

الحل

$\omega\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ مركز تناظر لـ (C_f) إذا وفقط إذا كان : $f(1-x)+f(x)=2$

$$f(1-x)+f(x)=\frac{(1-x)^2-3(1-x)-1}{(1-x)^2-(1-x)-2}+\frac{x^2-3x-1}{x^2-x-2}$$
$$=\frac{1-2x+x^2-3+3x-1}{1-2x+x^2-1+x-2}+\frac{x^2-3x-1}{x^2-x-2}$$
$$=\frac{x^2+x-3}{x^2-x-2}+\frac{x^2-3x-1}{x^2-x-2}$$
$$=\frac{2x^2-2x-4}{x^2-x-2}=$$
$$=\frac{2(x^2-x-2)}{x^2-x-2}$$
$$=2$$

إذن النقطة $\omega\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ مركز تناظر لـ (C_f) منحنى الدالة f .

تطبيق 10

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x)=x^2-2x+2$

- أثبت أن بيان الدالة f يقبل محور تناظر يطلب تعين معادلته .

الحل

إذا كان $x=\alpha$ محور تناظر فإن: $f(2\alpha-x)=f(x)$ تكافئ : $(2\alpha-x)^2-2(2\alpha-x)+2=x^2-2x+2$

تكافئ: $4\alpha^2-4\alpha x+x^2-4\alpha+2x+2=x^2-2x+2$ تكافئ: $4\alpha^2-4\alpha x-4\alpha+4x=0$

تكافئ: $(-4\alpha+4).x+4\alpha^2-4\alpha=0$ تكافئ: $\begin{cases}-4\alpha+4=0\\4\alpha^2-4\alpha=0\end{cases}$ تكافئ: $\begin{cases}-4(\alpha-1)=0\\4\alpha(\alpha-1)=0\end{cases}$ تكافئ: $\alpha=1$ أو $\begin{cases}\alpha=1\\\alpha=0\end{cases}$ منه: $\alpha=1$

إذن المستقيم $x=1$ محور تناظر لبيان الدالة f .

كوكب النُّخبة في مادة الريـــــاضيات - بكالوريا 2026 -

المنصة العلمية للبكالوريا - طبعة 2026 -

ملخص شامل

{ النهايات ،، الاشتقاقية ،، الاستمرارية }

،، ملف موجه للطباعة المباشرة ،،

إعداد الأستاذ : هازل الطاهر

المنصة العلمية : عقبة بن نافع https://www.facebook.com/okba.bac.2010

ملخص 01

النهـــايـــات - الإستمـــراريـــة - الإشتقاقيـــة

أولا: النهـــايـــات

① f ; g دالتان: a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ و ℓ ; ℓ' من $\mathbb{R}$. ∞ ترمز إلى $+\infty$ أو $-\infty$

$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\lim\limits_{x\to a} \left(f(x)\times g(x)\right)$	$\lim\limits_{x\to a} \left(f(x)+g(x)\right)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$
$\frac{\ell}{\ell'} : \ell' \neq 0$	$\ell \times \ell'$	$\ell + \ell'$	ℓ'	ℓ
0	$\infty : \ell \neq 0$	∞	∞	ℓ
∞	$\infty : \ell' \neq 0$	∞	ℓ'	∞
ع ع ت	0	0	0	0
$\infty : \ell \neq 0$	0	ℓ	0	ℓ
0	ع ع ت	∞	∞	0
∞	ع ع ت	∞	0	∞
ع ع ت	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
ع ع ت	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
ع ع ت	$-\infty$	ع ع ت	$-\infty$	$+\infty$
ع ع ت	$-\infty$	ع ع ت	$+\infty$	$-\infty$

② لما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ فإن: ⊙ نهاية كثير حدود هي نهاية حدّه الأعلى درجة.

⊙ نهاية دالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحد الأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام.

③ النهاية بالمقارنة: f ; g ; h ثلاث دوال و ℓ عدد حقيقي و x كبيرا بالقدر الكافي:

⊙ مبرهنة الحصر: $\left[g(x)\le f(x)\le h(x) \wedge \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\ell\right] \Rightarrow \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell\right)$

⊙ مبرهنة الحد من الأعلى: $\left[f(x)\le g(x) \wedge \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty\right] \Rightarrow \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty\right)$

⊙ مبرهنة الحد من الأدنى: $\left[f(x)\ge g(x) \wedge \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty\right] \Rightarrow \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\right)$

ملاحظة: تبقى المبرهنات السابقة صحيحة عندما يؤول x إلى عدد حقيقي أو إلى $-\infty$

④ نهاية دالة مركبة: u ; v ; f ثلاث دوال حيث $f = v \circ u$ و a ; b ; c تمثل أعداد حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$

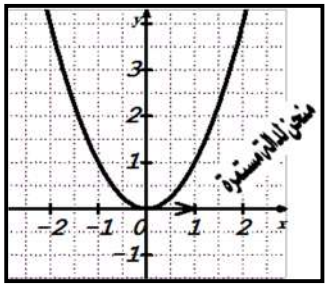
$$\left[\left(\lim_{x\to a} u(x)=b\right) \wedge \left(\lim_{x\to b} v(x)=c\right)\right] \Rightarrow \left(\lim_{x\to a} f(x)=c\right)$$

ثانيا : الإستمـــــراريـــــــة :

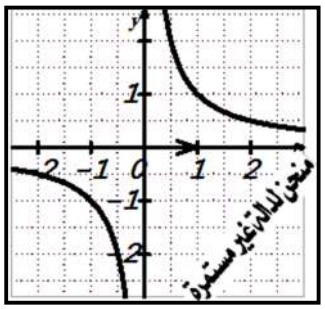
① f دالة معرفة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ يشمل العدد الحقيقي x_0 .

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

f مستمرة عند x_0 إذا كانت : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$



② f مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ إذا كانت مستمرة عند كل قيمة منه . وهذا يعني هندسيا أن (C_f) على المجال I هو خط مستمر غير متقطع . (يمكن رسمه دون رفع القلم) .



③ <u>نتائج :</u> ⊙ الدوال المرجعية مستمرة على أي مجال من مجموعة تعريفها.

⊙ الدوال كثيرات الحدود مستمرة على $\mathbb{R}$.

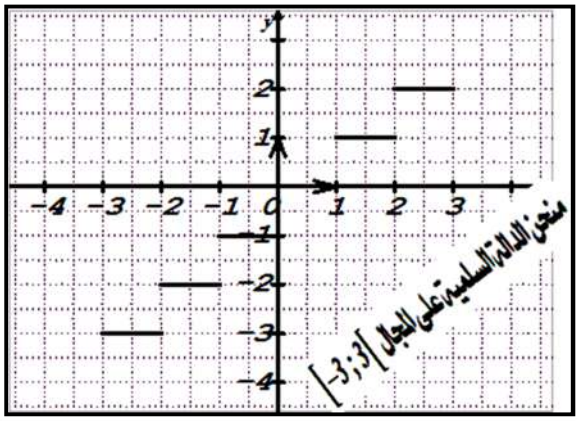
⊙ الدوال الناطقة مستمرة على أي مجال من مجموعة تعريفها .

⊙ الدالتان $x\mapsto \sin x$ و $x\mapsto \cos x$ مستمرتان على $\mathbb{R}$.

⊙ مجموع وجداء ومركب دوال مستمرة هي أيضا دوال مستمرة .

④ <u>دالة الجزء الصحيح (الدالة السلمية)</u>: هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ والتي نرمز بـ : E أو بالرمز $[\ ]$ والمعرفة بـ :

$$E(x)=[x]=n \ : n\in\mathbb{Z} \wedge n\le x<n+1$$



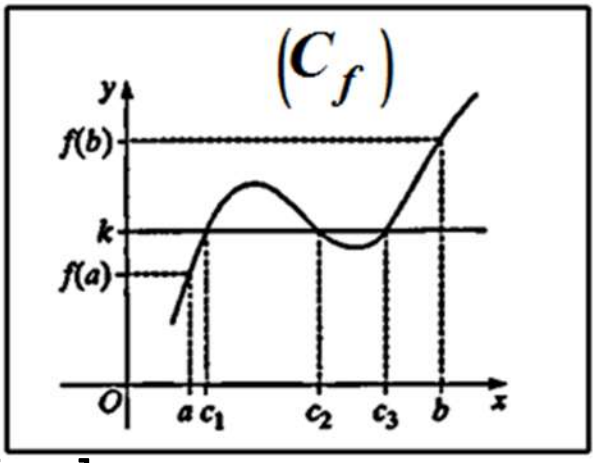
<u>نتيجة :</u> من أجل كل x من $\mathbb{Z}$: $E(x)=x$

<u>أمثلة :</u> ⊙ $E(\sqrt{3})=1$ لأن : $1\le\sqrt{3}<2$

⊙ $[-0,5]=-1$ لأن : $-1\le -0,5<0$

⊙ $[4]=4$; $[-2]=-2$

⑤ <u>مبرهنة القيم المتوسطة : (الحالة العامة)</u> : إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ وكان κ عددا حقيقيا محصورا بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c من $[a;b]$ يحقق : $f(c)=\kappa$.



وهذا يعني هندسيا أن (C_f) يقطع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\kappa$ في نقطة على الأقل فاصلتها c حيث : $c\in[a;b]$.

⑥ <u>مبرهنة القيم المتوسطة (الحالة الخاصة)</u> : إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ وكان : $f(a)\times f(b)<0$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c من $]a;b[$ يحقق : $f(c)=0$

وهذا يعني هندسيا أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة على الأقل فاصلتها c : $c\in]a;b[$.

<u>ملاحظة</u> : إضافة إلى الشروط السابقة الواردة في المبرهنتين إذا كانت f رتيبة تماما على المجال $[a;b]$ فإن c وحيد .

ثالثا : الإشتقاقيـــــــة

① قابلية الإشتقاق عند قيمة (العدد المشتق) : f دالة معرفة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ يشمل العدد الحقيقي x_0. (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

تعريف-1-: f قابلة للإشتقاق عند x_0 إذا كانت : $\ell \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell$

تعريف-2-: f قابلة للإشتقاق عند x_0 إذا كانت : $\ell \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$

العدد الحقيقي ℓ يدعى العدد المشتق للدالة f عند x_0 ويرمز له بـــ : $f'(x_0)$

التفسير الهندسي للعدد المشتق : إذا كانت f قابلة للإشتقاق عند x_0 فهذا يعني هندسيا أن (C) يقبل مماسا (T) في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ معامل توجيهه (ميله) $f'(x_0)$ ومعادلته : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

② قابلية الإشتقاق على مجال : f قابلة للإشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ إذا كانت قابلة للإشتقاق عند كل قيمة منه.

③ نتائج : ⊙ إذا كانت f قابلة للإشتقاق على المجال I فإن f مستمرة على I.

(العكس غير صحيح في الحالة العامة)

⊙ إذا كانت f غير مستمرة على المجال I فإن f غير قابلة للإشتقاق على I.

④ النظريات العامة على المشتقات: $f;g$ دالتان قابلتان للإشتقاق على $]a,b[$ حيث g لاتنعدم على $]a,b[$ و $f';g'$ الدالتان المشتقتان لـ: $f;g$ على الترتيب و λ عدد حقيقي :

الدالة	الدالة المشتقة
$f+g$	$(f+g)'=f'+g'$
$f\times g$	$(f\times g)'=f'\times g+g'\times f$
$\lambda\times f$	$(\lambda\times f)'=\lambda\times f'$
$\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\times g-g'\times f}{g^2}$
$\dfrac{1}{g}$	$\left(\dfrac{1}{g}\right)'=\dfrac{-g'}{g^2}$

⑤ جدول لمشتقات دوال مألوفة : f دالة لمتغير حقيقي :

$f(x)$	$f'(x)$
$a : a \in \mathbb{R}$	0
$a\,x : a \in \mathbb{R}$	a
$x^n : n \in \mathbb{N}^*$	$n\,x^{n-1}$
$\sqrt{x} : x \in \mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\dfrac{1}{x} : x \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$\sin x : x \in \mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x : x \in \mathbb{R}$	$-\sin x$

⑥ إتجاه تغير دالة على مجال : f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$:

- f متزايدة تماما على I إذا كان من أجل كل x من I : $f'(x) > 0$
- f متناقصة تماما على I إذا كان من أجل كل x من I : $f'(x) < 0$
- f ثابتة على I إذا كان من أجل كل x من I : $f'(x) = 0$

ملاحظة: نقول أن f رتيبة تماما على I إذا كانت f إما متزايدة تماما وإما متناقصة تماما على I .

⑦ مشتقة دالة مركبة :

مبرهنة : إذا كانت μ دالة قابلة للإشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ وكانت v دالة قابلة للإشتقاق على المجموعة $u(I)$ (صورة I بالدالة μ) فإن الدالة $f = v\,ou$ قابلة للإشتقاق على I

ولدينا من أجل كل x من I : $f'(x) = (v\,ou)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$

نتائج : (مشتقات دوال مركبة شهيرة) μ دالة قابلة للإشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$:

الملاحظة	الدالة المشتقة	الدالة
μ دالة موجبة تماما على I	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$	$\left(u^n\right)' = n u^{n-1} \times u'$	u^n
$b\,;a$ و $(ax+b) \in I$ عددين حقيقيين مع $a \neq 0$	$\left[u(ax+b)\right]' = u'(ax+b) \times a$	$u(ax+b)$

إنتهى

شِعار العمل في هذا الموسم الدراسي 2025 / 2026 :

" تعبُ المُراجعة أفضَل مِنْ ألمِ السُّقُوط "

صناعة الطريق الذهبي نحو بكالوريا 2026

" بالتوفيق وَ النَّجاح لجُموع التلاميذ الشُّرفاء "

https://www.facebook.com/okba.bac.2010