ملخص شامل لأهم المكتسبات قبلية :

1) توحيد المقامات والعمليات على الكسور : a , b , c و d أعداد حقيقية غير معدومة لدينا :

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c} \qquad \frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd} \qquad \frac{a}{b}\pm c=\frac{a\pm bc}{b}$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}=\frac{ad}{bc} \qquad \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}=\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{1}\right)}=\frac{a}{bc} \qquad \frac{c}{\left(\frac{a}{b}\right)}=\frac{\left(\frac{c}{1}\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)}=\frac{bc}{a} \qquad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

2) قواعد القوى و الأسس : x , a و b أعداد حقيقية غير معدومة لدينا :

$$x^0=1 \qquad x^1=x \qquad x^{a+b}=x^a x^b \qquad x^{a-b}=\frac{x^a}{x^b} \qquad \left(x^a\right)^b=\left(x^b\right)^a=x^{ab} \qquad x^{-a}=\frac{1}{x^a}$$

$$(ab)^x=a^x b^x \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x} \qquad 0^x=0 \qquad 1^x=1 \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\left(\frac{b}{a}\right)^x=\frac{b^x}{a^x} \qquad \left(\frac{1}{b}\right)^x=\frac{1}{b^x}$$

n عدد طبيعي و α عدد حقيقي موجب تماما لدينا :

$(\alpha)^n=\alpha^n$ $\qquad$ $(-\alpha)^n=\alpha^n$ إذا كان n زوجي $\qquad$ $(-\alpha)^n=-\alpha^n$ إذا كان n فردي

3) قواعد الجذر التربيعي : a و b أعداد حقيقية موجبة تماما لدينا :

$$\sqrt{0}=0 \qquad \sqrt{1}=1 \qquad \sqrt{a}\geq 0 \qquad \sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ $\qquad$ $\left(\sqrt{a}\right)^n=\sqrt{a^n}$ $\qquad$ x عدد حقيقي لدينا : $\sqrt{x^2}=|x|$

$\sqrt{a}=\sqrt{b}$ أي $a=b$ $\qquad$ $\sqrt{a}=b$ معناه : $a=b^2$ $\qquad$ (نفس الأمر بالنسبة للمتراجحات)

4) قواعد القيمة المطلقة : a و b أعداد حقيقية غير معدومة و n عدد طبيعي و α عدد حقيقي موجب تماما لدينا :

$|a|\geq 0$ $\qquad$ $|-a|=|a|$ $\qquad$ $|a|=a$ إذا كان $a\geq 0$ $\qquad$ $|a|=-a$ إذا كان $a\leq 0$ $\qquad$ $|a|^n=|a^n|$

$|b|=\alpha$ معناه $b=\alpha$ أو $b=-\alpha$ $\qquad$ $|b|\leq\alpha$ أي : $-\alpha\leq b\leq\alpha$ $\qquad$ $|b|\geq\alpha$ معناه : $b\geq\alpha$ و $b\leq-\alpha$

$|ab|=|a||b|$ $\qquad$ $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ $\qquad$ $|a-b|=|b-a|$

5) المتطابقات الشهيرة

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab \qquad (a-b)^2=a^2+b^2-2ab \qquad (a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab^2+3ba^2 \qquad (a-b)^3=a^3-b^3-3ab^2+3ba^2 \qquad a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+b^2+ab\right)$$

6) المجالات و خواصها

$$\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[\qquad \mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[\qquad \mathbb{R}-\{a\}=]-\infty;a[\cup]a;+\infty[$$

$$\mathbb{R}_+=[0;+\infty[\qquad \mathbb{R}_-=]-\infty;0]$$

$\boxed{x\in[a;b] \text{ : أي } a\leq x\leq b}$ $\boxed{x\in[a;b[\text{ : أي } a\leq x<b}$ $\boxed{x\in]a;b] \text{ : أي } a<x\leq b}$ $\boxed{x\in]a;b[\text{ : أي } a<x<b}$

$x\geq a$ $(a\leq x)$ أي : $x\in[a;+\infty[$ $\qquad$ $x<a$ $(a>x)$ أي : $x\in]-\infty;a[$ $\qquad$ $x\neq a$ أي : $x\in\mathbb{R}-\{a\}$

$x\geq a$ أو $x<b$ أي : $x\in]-\infty;b[\cup[a;+\infty[$ حيث $b<a$

Scanned with CamScanner

7) المتراجحات وخواصها

α, β و m أعداد حقيقية مع $m \neq 0$ لدينا :

- $\alpha \geq \beta$ فإن : $\alpha - \beta \geq 0$ و $\alpha \pm m \geq \beta \pm m$
- $\alpha \leq \beta$ فإن : $\alpha - \beta \leq 0$ و $\alpha \pm m \leq \beta \pm m$
- إذا كان $\alpha \geq \beta$ و $m > 0$ فإن : $m\alpha \geq m\beta$ و $\frac{\alpha}{m} \geq \frac{\beta}{m}$
- إذا كان $\alpha \leq \beta$ و $m > 0$ فإن : $m\alpha \leq m\beta$ و $\frac{\alpha}{m} \leq \frac{\beta}{m}$
- إذا كان $\alpha \geq \beta$ و $m < 0$ فإن : $m\alpha \leq m\beta$ و $\frac{\alpha}{m} \leq \frac{\beta}{m}$
- إذا كان $\alpha \leq \beta$ و $m < 0$ فإن : $m\alpha \geq m\beta$ و $\frac{\alpha}{m} \geq \frac{\beta}{m}$

نتيجة : يتغير إتجاه المتراجحة اذا قمنا بضرب أو قسمة طرفي المتراجحة في عدد حقيقي سالب غير معدوم

حالة خاصة : إذا كان $m > 0$ فإن : و $\frac{1}{m} > 0$ إذا كان $m < 0$ فإن : و $\frac{1}{m} < 0$

a و b أعداد حقيقية غير معدومة من نفس الإشارة و n عدد طبيعي

1) $a > 0$ و $b > 0$ لدينا :إذا كان $a \geq b$ أو $a \leq b$ فإن : $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$ أو $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ بنفس الترتيب

نتيجة : يتغير إتجاه المتراجحة التي طرفيها موجبين تماما اذا قمنا بضرب أو قسمة طرفي المتراجحة في عدد حقيقي سالب غير معدوم

مقلوب الطرفين , إدخال الدالة المتناقصة على الطرفين , أما باقي العمليات تربيع , جذر ..... لايتغير الإتجاه

2) $a < 0$ و $b < 0$ و لدينا إذا كان $a \geq b$ أو $a \leq b$ فإن :

$\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$ أو $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$, $a^2 \leq b^2$ أو $a^2 \geq b^2$, $a^n \leq b^n$ أو $a^n \geq b^n$ إذا كان n زوجي , $|a| \leq |b|$ أو $|a| \geq |b|$ بنفس الترتيب

نتيجة : يتغير إتجاه المتراجحة التي طرفيها سالبين تماما اذا قمنا بضرب أو قسمة طرفي المتراجحة في عدد حقيقي سالب غير معدوم

مقلوب الطرفين , إدخال الدالة المتناقصة على الطرفين , تربيع , قيمة مطلقة ,رفع القوى إلى عدد طبيعي زوجي

8) المعادلات ودراسة الإشارة

1) المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $ax+b$ مع a و b عددين حقيقيين حيث $a \neq 0$

لدينا $ax+b=0$ أي $ax=-b$ ومنه $x=\frac{-b}{a}$ وعليه :

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a	0	نفس إشارة a

2) المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : ax^2+bx+c مع a ، b و c أعداد حقيقية حيث $a \neq 0$

لدينا $ax^2+bx+c=0$ أي $\Delta = b^2-4ac$ ومنه :

- $\Delta < 0$ المعادلة $ax^2+bx+c=0$ لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$ ومنه :

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	نفس إشارة a	

- $\Delta = 0$ المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حل مضاعف هو $x_0=\frac{-b}{2a}$

ومن أجل كل عدد حقيقي x لدينا تحليل العبارة ax^2+bx+c هو : $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$ ومنه :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
ax^2+bx+c	نفس إشارة a	0	نفس إشارة a

- $\Delta > 0$ المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين هما : $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

ومن أجل كل عدد حقيقي x لدينا تحليل العبارة ax^2+bx+c هو : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ ومنه :

Scanned with CamScanner

بفرض $x_2 > x_1$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		نفس إشارة a	0	عكس إشارة a	0	نفس إشارة a	

3) a عدد حقيقي موجب تماما

أ) $x^2=a$ أي : $x=\sqrt{a}$ أو $x=-\sqrt{a}$

ب) $x^2 \geq a$ أي : $x \geq \sqrt{a}$ أو $x \leq -\sqrt{a}$ ومنه $x \in \left]-\infty;-\sqrt{a}\right] \cup \left[\sqrt{a};+\infty\right[$

ت) $x^2 \leq a$ أي : $-\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$ ومنه $x \in \left[-\sqrt{a};\sqrt{a}\right]$

a عدد حقيقي سالب تماما : $x^2 \leq a$ لاتقبل حلول أو قيم في $\mathbb{R}$ $x^2 > a$ محققة من أجل كل عدد حقيقي x

4) $p(x)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة أي : $p(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ مع B,A و C ثوابت حقيقية معلومة

إذا كان x_1 جذر لكثير الحدود $p(x)$ فإن : $p(x_1)=0$ و $p(x)=(x-x_1)(ax^2+bx+c)$

حيث b,a و c ثوابت يمكن إيجادهم بالنشر والتبسيط و المطابقة مع العبارة $p(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$

أو إستعمال القسمة الإقليدية حيث : $\dfrac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x-x_1}=ax^2+bx+c$

5) $A(x)B(x)=0$ معناه : $A(x)=0$ أو $B(x)=0$

إشارة $A(x)B(x)$: ندرس إشارة $A(x)$ ثم إشارة $B(x)$ حسب قيم x ثم نقوم بعملية الجداء في جدول الإشارة

حيث : $(+)\times(-)=(-)\times(+)=-$ و $(+)\times(+)=(-)\times(-)=+$

$\dfrac{A(x)}{B(x)}=0$ معناه : $A(x)=0$ و $B(x)\neq 0$

إشارة $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ من إشارة $A(x)B(x)$ مع الأخذ بعين الإعتبار قيم x حتى يكون $B(x)=0$ كقيم ممنوعة

6) $\left[A(x)\right]^n=0$ مع n عدد طبيعي معناه : $A(x)=0$

إشارة $\left[A(x)\right]^n$: إذا كان n عدد طبيعي زوجي فإن $\left[A(x)\right]^n \geq 0$

إذا كان n عدد طبيعي فردي فإن إشارة $\left[A(x)\right]^n$ من إشارة $A(x)$

1) إذا كان $A(x)\geq 0$ فإن : $\sqrt{A(x)}\geq 0$

2) • إذا كان $A(x)\geq 0$ و $B(x)\geq 0$ على نفس مجال قيم x فإن : $A(x)+B(x)\geq 0$ و $A(x)B(x)\geq 0$

• إذا كان $A(x)\leq 0$ و $B(x)\leq 0$ على نفس مجال قيم x فإن : $A(x)+B(x)\leq 0$ و $A(x)B(x)\geq 0$

• إذا كان ($A(x)\geq 0$ و $B(x)>0$) أو ($A(x)\leq 0$ و $B(x)<0$) على نفس مجال قيم x فإن : $\dfrac{A(x)}{B(x)}\geq 0$

9) عموميات على الداول

1) مجموعة تعريف : D_f جزء من R ، نعرف دالة f على D_f عندما ترفق بكل عدد حقيقي x من D_f عدد حقيقي وحيد نرمز له بـ $f(x)$ ويسمى D_f مجموعة تعريف الدالة f

أ) $f(x)=\sqrt{u(x)}$ معرفة من أجل $u(x)\geq 0$ أي : $D_f=\{x/u(x)\geq 0\}$

ب) $f(x)=\dfrac{1}{v(x)}$ معرفة من أجل $v(x)\neq 0$ أي $D_f=\{x/v(x)\neq 0\}$

• إذا كان لدينا: $f(x)=u(x)\pm v(x)$ أي أو $f(x)=u(x)v(x)$ فإن : $D_f=D_u\cap D_v$

•إذا كان لدينا : $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ فإن : $D_f=D_u\cap D_v$ مع

2) تركيب دوال : $f(x)=(uov)(x)=u(v(x))$ ولدينا : $D_f=\{x/x\in D_v, v(x)\in D_u\}$

3) تساوي دالتين : نقول أن الدالتين f و g أنهما متساويتان اي $f=g$ إذا كان : $D_f=D_g$ و $f(x)=g(x)$

Scanned with CamScanner

10) **النهايات:** α عدد حقيقي ثابت غير معدوم و n عدد طبيعي غير معدوم

1) **النهايات على الدوال المرجعية :**

$\lim_{x\to\infty}(\alpha x+b)=\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ ، $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\alpha}{x}\right)=0$ ، $\lim_{x\to0}\left(\frac{\alpha}{x}\right)=\pm\infty$ ، $\lim_{x\to\pm\infty}|x|=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}x^n=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}x^n=+\infty$ (n عدد زوجي) ، $\lim_{x\to-\infty}x^n=-\infty$ (n عدد فردي) $\lim_{x\xrightarrow[<]{>}\alpha}\frac{1}{(x-\alpha)^n}=+\infty$ (n عدد زوجي)

2) **حالات عدم التعيين :** $+\infty-\infty$ ، $0\times\infty$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{0}{0}$

ملاحظة : $\infty\times\infty=\infty$ ، $\frac{\infty}{0}=\infty$ ، $\frac{0}{\infty}=0$ ، $\pm\infty\pm\infty+\alpha=\pm\infty$

3) **طرق إزالة حالات عدم التعيين :** التحليل والإختزال (القسمة الإقليدية) ، تعريف العدد المشتق ، المرافق فالدالة الجذرية ، العامل المشترك ، يمكن أيضا بالعمليات المعروفة نشر وتبسيط توحيد المقامات .....

نهاية دالة كثيرة حدود عند $\pm\infty$ هي نهاية أكبر حد والنتيجة المحصل عليها هي $\pm\infty$

نهاية دالة ناطقة عند $\pm\infty$ هي نهاية حد الأعلى درجة فالبسط على حد الأعلى درجة فالمقام

4) x_0 ، ℓ_1 و ℓ_2 أعداد حقيقية مع $\ell_2\neq0$ حيث : $\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell_1$ و $\lim_{x\to x_0}g(x)=\ell_2$

لدينا : $\lim_{x\to x_0}\alpha f(x)=\alpha\ell_1$ ، $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n=(\ell_1)^n$ ، $\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\ell_1\pm\ell_2$ ، $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))=\ell_1\ell_2$

$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\ell_1}{\ell_2}$ ....وهكذا تبقى العمليات على النهايات نفس العمليات فالاعداد الحقيقية مع مراعاة حالات عدم التعيين

5) التفسير البياني : إذا كان $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ فإن المستقيم $x=a$ مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f

إذا كان $\lim_{x\to\infty}f(x)=a$ فإن المستقيم $y=a$ مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالة f بجوار ∞

إذا كان $\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ فإن المستقيم $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار ∞

إذا كان $\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0$ فإن منحنى الدالة g مجاور (مقارب) لمنحنى الدالة f بجوار ∞

إذا كانت الدالة f معرفة بـ : $f(x)=h(x)+ax+b$ و $\lim_{x\to\infty}h(x)=0$ فإن المستقيم $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار ∞ لإن : $\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=\lim_{x\to\infty}h(x)=0$

11) **الإشتقاقية :** α عدد حقيقي

1) نقول أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند α معناه : $\lim_{h\to0}\left(\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}\right)=l$ أو $\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)=l$

حيث l عدد حقيقي ثابت ويسمى العدد المشتق للدالة f عند α ونكتب : $f'(\alpha)=l$

ملاحظة : f غير قابلة للإشتقاق عند α معناه : $\lim_{h\to0}\left(\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}\right)=\infty$

f قابلة للإشتقاق عند D_f معناه أنها قابلة للإشتقاق عند كل نقطة من D_f

مشتقة الدالة f هي الدالة التي ترفق بكل $x\in D_f$ العدد المشتق $f'(x)$ ونرمز لها بـ f' حيث : $\lim_{h\to0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)=f'(x)$

2) التفسير الهندسي للعدد المشتق :

- الدالة f قابلة للإشتقاق عند α معناه أن منحنى الدالة f يقبل المستقيم (T) كمماس له فالنقطة ذات الفاصلة α حيث معادلة المماس (T) من الشكل : $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ والعدد المشتق $f'(\alpha)$ هو معامل توجيه(ميل) المماس (T)
- التقريب التألفي : التقريب التالفي يقصد به إعطاء دالة ما صيغة دالة تألفية وأحسن تقريب تألفي للدالة f عند α هو معادلة المماس حيث $f(x)\approx f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ كما توجد صيغة أخرى هي : $f(\alpha+h)\approx f'(\alpha)h+f(\alpha)$

Scanned with CamScanner

3) مشتقات الدوال المألوفة : α عدد حقيقي ثابت غير معدوم و n عدد طبيعي

الدالة	مجال قابلية الإشتقاق	الدالة المشتقة
$x \to \alpha$	$\mathbb{R}$	$x \to 0$
$x \to \alpha x + b$	$\mathbb{R}$	$x \to \alpha$
$x \to x^n$	$\mathbb{R}$	$x \to nx^{n-1}$
$x \to \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$x \to \frac{-n}{x^{n+1}}$
$x \to \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \to \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \to -\sin(x)$
$x \to \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \to \cos(x)$

4) العمليات على المشتقات : α عدد حقيقي ثابت غير معدوم و n عدد طبيعي وتأخذ شروط كل دالة بعين الإعتبار فمجال الإشتقاقية

الدالة	الدالة المشتقة
$f \pm g$	$f' \pm g'$
$f.g$	$f'.g + f.g'$
αf	$\alpha f'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'.g - f.g'}{g^2}$
$\frac{1}{f}$	$\frac{-f'}{f^2}$
$\frac{1}{f^n}$	$\frac{-nf'}{f^{n+1}}$
f^n	$nf'f^{n-1}$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$x \to f(\alpha x + b)$	$x \to \alpha f'(\alpha x + b)$
$x \to (fog)(x) = f(g(x))$	$x \to g'(x) f'(g(x))$

5) تطبيقات الإشتقاقية :

- إتجاه تغير الدالة : f دالة معرفة وقابلة للإشتقاق على D_f حيث f' دالتها المشتقة لدينا :
  - إذا كانت f' موجبة تماما على D_f (اي $f'(x) > 0$ لكل $x \in D_f$) فإن الدالة f متزايدة تماما على D_f
  - إذا كانت f' سالبة تماما على D_f (اي $f'(x) < 0$ لكل $x \in D_f$) فإن الدالة f متناقصة تماما على D_f
  - إذا كانت f' معدومة على D_f (اي $f'(x) = 0$ لكل $x \in D_f$) فإن الدالة f ثابتةعلى D_f
- حصر الدالة : f دالة معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال $[a;b]$
  - إذا كانت الدالة f متزايدة تماما على المجال $[a;b]$ فإنه من أجل $x \in [a;b]$ أي $a \le x \le b$ فإن : $f(a) \le f(x) \le f(b)$
  - إذا كانت الدالة f متناقصة تماما على المجال $[a;b]$ فإنه من أجل $x \in [a;b]$ أي $a \le x \le b$ فإن : $f(b) \le f(x) \le f(a)$

Scanned with CamScanner

6) القيم الحدية المحلية للدالة :

- f دالة معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال $[a;b]$ و α عدد حقيقي حيث $\alpha \in [a;b]$ لدينا :

إذا إنعدمت f' عند α (أي $f'(\alpha)=0$) وغيرت من إشارتها فإن $f(\alpha)$ قيمة حدية محلية للدلة f على المجال $[a;b]$

- التفسير البياني : إذا قبلت الدالة f قيمة حدية محلية عند النقطة ذات الفاصلة α فإن التمثيل البياني للدالة f يقبل عند النقطة $A(\alpha;f(\alpha))$ مماس موازي لحامل محور الفواصل (مماس أفقي) معادلته : $y=f(\alpha)$

7) نقطة الإنعطاف :

نقول أن النقطة $I(b;f(b))$ نقطة إنعطاف لمنحنى الدالة f إذا:

- إنعدمت المشتقة الأولى f' عند α ولم تغير من إشارتها
- إنعدمت المشتقة الثانية f'' عند α وغيرت من إشارتها ب)

التفسير البياني : إذا كانت النقطة $I(b;f(b))$ نقطة إنعطاف لمنحنى الدالة f فإن المماس يخترق منحنى الدالة عند النقطة I مغيرا وضعيته بالنسبة للمنحنى الدالة f

12) **الدراسة البيانية :**

المستوي المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j})$، f دالة معرفة على D_f التمثيل البياني للدالة f في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ هو مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $x \in D_f$ و $y=f(x)$ ونرمز لمنحنى أو تمثيل البياني للدالة f بـ (C_f)

1) شفعية دوال : من أجل كل $x \in D_f$ و $-x \in D_f$ لدينا :

- إذا كان $f(-x)=f(x)$ فإن الدالة f دالة زوجية والمنحنى (C_f) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب
- إذا كان $f(-x)=-f(x)$ فإن الدالة f دالة فردية والمنحنى (C_f) متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم
- النقطة $(a;b)$ مركز تناظر لـ (C_f) معناه : من أجل كل $x \in D_f$ و $(2a-x) \in D_f$ فإن $f(2a-x)+f(x)=2b$
- المستقيم $x=a$ محور تناظر لـ (C_f) معناه : من أجل كل $x \in D_f$ و $(2a-x) \in D_f$ فإن $f(2a-x)=f(x)$

2) الوضع النسبي بين منحنيين أو منحنى ومستقيم :

(ملاحظة (C_g) التمثيل البياني للدالة g يمكن أن يكون عن معادلة مستقيم اي $g(x)=ax+b$)

لدراسة الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمنحنى (C_g) ندرس إشارة الفرق $f(x)-g(x)$ ونلخص النتائج فالجدول التالي :

إشارة الفرق	الوضع النسبي
$f(x)-g(x)=0$	(C_f) يقطع (C_g)
$f(x)-g(x)<0$	(C_f) تحت (C_g)
$f(x)-g(x)>0$	(C_f) فوق (C_g)

نتائج :

- (C_f) فوق محور الفواصل أي $f(x)>0$
- (C_f) تحت محور الفواصل أي $f(x)<0$
- (C_f) يقطع محور الفواصل أي نحل المعادلة $f(x)=0$

(إن كان α حل للمعادلة $f(x)=0$ فإن نقطة تقاطع (C_f) مع محور الفواصل هي $(\alpha;0)$ ويمكن أن تكون أكثر من نقطة)

- إذا كان $0 \in D_f$ فإن (C_f) يقطع محور التراتيب في نقطة وحيدة هي $(0;f(0))$

3) إستنتاج منحنى من منحنى بياني أخر :

لتكن الدالتين f و g المعرفتين بتمثيليها البياني (C_f) يو (C_g) لدينا :

- $g(x)=-f(x)$ معناه أن المنحنى (C_g) نضير المنحنى (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل
- $g(x)=f(-x)$ معناه أن المنحنى (C_g) نضير المنحنى (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب
- $g(x)=f(x+a)+b$ معناه أن المنحنى هو صورة المنحنى (C_f) بإنسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$

Scanned with CamScanner

• $g(x)=|f(x)|$ نقوم أولا بتفكيك القيمة المطلقة ومنه لدينا :

لما $f(x)>0$ فإن $g(x)=f(x)$ ومنه : المنحنى (C_g) ينطبق على المنحنى (C_f)

لما $f(x)<0$ فإن $g(x)=-f(x)$ ومنه : المنحنى (C_g) نضير المنحنى (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

• $g(x)=-|f(x)|$ نقوم أولا بتفكيك القيمة المطلقة ومنه لدينا :

لما $f(x)<0$ فإن $g(x)=f(x)$ ومنه : المنحنى (C_g) ينطبق على المنحنى (C_f)

لما $f(x)>0$ فإن $g(x)=-f(x)$ ومنه : المنحنى (C_g) نضير المنحنى (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

• $g(x)=f(|x|)$ بملاحظة أن الدالة g دالة زوجية ثم نقوم أولا بتفكيك القيمة المطلقة ومنه لدينا :

لما $x\geq 0$ فإن $g(x)=f(x)$ ومنه : المنحنى (C_g) ينطبق على المنحنى (C_f)

وبما أن الدالة g دالة زوجية ومنه المنحنى (C_g) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

• $g(x)=f(-|x|)$ بملاحظة أن الدالة g دالة زوجية ثم نقوم أولا بتفكيك القيمة المطلقة ومنه لدينا :

لما $x\leq 0$ فإن $g(x)=f(x)$ ومنه : المنحنى (C_g) ينطبق على المنحنى (C_f)

وبما أن الدالة g دالة زوجية ومنه المنحنى (C_g) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

4) المناقشة البيانية :

• $f(x)=h(m)$ (حيث $h(m)=m$ ، $h(m)=m^2$ .... دالة تحتوي على المتغير الحقيقي m)

هي مناقشة بيانية (أفقية)حلولها فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الأفقية (الموازية لحامل محور الفواصل) $y=h(m)$

• $f(x)=ax+h(m)$ مع a عدد حقيقي غير معدوم وثابت

هي مناقشة بيانية(مائلة) حلولها فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات التي لها نفس معامل التوجيه a : $y=ax+h(m)$

• $f(x)=h(m)x+b$

هي مناقشة بيانية (دورانية) حلولها فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f)مع المستقيمات التي معامل توجيهها $h(m)$ والتي تمر جميعا على نقطة ثابتة

Scanned with CamScanner

سلسلة تمارين المكتسبات قبلية :

التمرين الأول :

1) حل المعادلات والمتراجحات ذات المتغير الحقيقي x التالية :

• $x\left(x-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{8}$ • $\frac{2}{x-6}-\frac{1}{x-2}\geq 0$ • $\frac{(4x-x^2-4)(x^2-5x+4)}{x^2+x+1}<0$

2) حل المعادلة : $x^2-3x+2=0$ ثم إستنتج حلول المعادلات التالية :

• $x-3\sqrt{x}+2=0$ • $\frac{1}{x^2-4x+4}-\frac{3}{x-2}+2=0$ • $x^4-3x^2+2=0$

التمرين الثاني :

1) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3-6x^2+11x-\alpha^2-2$ مع α عدد حقيقي

• عين قيم α حتى يكون 1 جذر لكثير الحدود $f(x)$

• من أجل $\alpha=2$ بين وبطريقتين مختلفتين بين أن : $f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$ حيث a و b ثوابت يطلب تعينهم

• عين حسب قيم x إشارة $f(x)$

2) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{6}{x}+\frac{11}{\sqrt{x}}-6$

• بين أنه من أجل كل $x>0$ فإن : $g(x)=f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ثم عين حلول المعادلة $g(x)=0$

التمرين الثالث :

عين مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

• $f(x)=\frac{x-1}{x^2+x+1}$ • $f(x)=\sqrt{-x^2+8x-7}$ • $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2-x-2}$ • $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x^2-1}}$

التمرين الرابع :

1) أدرس شفعية الدوال التالية :

• $f(x)=\frac{x^3+2x}{x^2+1}$ $(x\in\mathbb{R})$ • $f(x)=\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}$ $(x\in\mathbb{R}-\{-1;1\})$

2) (c_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس المعرفة من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$ بـ : $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$

• بين أن النقطة $A(1;1)$ مركز تناظر للمنحنى (c_f)

3) (c_g) التمثيل البياني للدالة g في معلم متعامد ومتجانس المعرفة من أجل كل عدد حقيقي x بـ : $g(x)=x^2-2x+1+|x-1|$

• بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(2-x)=g(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

التمرين الخامس : في كل حالة من الحالات التالية عين عبارة ومجموعة تعريف الدالة h مركب الدالتين f و g حيث: $h(x)=(fog)(x)$

• $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{x+2};x\neq -2 \\ g(x)=x^2-3x;x\in\mathbb{R} \end{cases}$ • $\begin{cases} f(x)=x^2-1;x\in\mathbb{R} \\ g(x)=\sqrt{x-2};x\geq 2 \end{cases}$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

التمرين السادس :

1) بإستعمال تعريف العدد المشتق التالي $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)=f'(x)$ عين الدالة المشتقة f' للدالة f في الحالات التالية :

• $f(x)=x^2$ • $(x\neq 0)\ f(x)=\frac{1}{x}$ • $(x>0)\ f(x)=\sqrt{x}$

2) عين الدالة المشتقة f' للدالة f (معينا مجال قابلية الإشتقاق) في كل حالة من الحالات التالية :

• $(x\in\mathbb{R})\ f(x)=\frac{1}{2028}x^{2028}+181x^8+2009x+1962$ • $(x\neq -1)\ f(x)=\frac{x^2+x-1}{x+1}$

• $(x\geq 2)\ f(x)=\sqrt{x-2}$ • $(x\leq -1)\ f(x)=(x-1)\sqrt{x^2-1}+(x^3+2)^5+\frac{3}{2x+1}$

• $f(x)=\cos(1-3x)+ton(x)$ $\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ و k عدد صحيح

3) عين اتجاه تغير الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

• $(x\in\mathbb{R})\ f(x)=2x^3-15x^2+18x+6$ • $(x\in R)\ f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$

4) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2026-x^2$

• بين أنه من أجل كل $0\leq x\leq 3\sqrt{2}$ فإن : $2007\leq g(x)\leq 2026$

5) (c_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس ، عين معادلة المماس (T) للمنحنى (c_f) في كل حالة من الحالات التالية :

• عبارة الدالة f هي : $f(x)=-\frac{1}{x+1}$ و المماس (T) للمنحنى (c_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x=0$

• المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة الموجبة معامل توجيهه هو 9 و عبارة الدالة f هي : $f(x)=x^3+3x^2$

• عبارة الدالة f هي : $f(x)=\frac{x}{x+1}$ و المماس (T) يمر من مبدأ المعلم

6) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ حيث a,b,c و d ثوابت حقيقية غير معدومة وليكن (c_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس، عين a,b,c و d علما أن :

1) منحنى (c_g) يقبل قيمتين حديتين فاصلتيها : $x=1$ و $x=2$

2) منحنى (c_g) يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة المعدومة معادلته : $y=-4x+2$

3) النقطة $A(1:2)$ تنتمي الى منحنى الدالة "g المشتقة الثانية للدالة g

5) عين نقاط إنعطاف المنحنى (c_f) للدالة f في كل حالة : • $f(x)=\frac{x^3-3x^2+x}{6}$ • $f(x)=x^5+1$

التمرين السابع :

1) أحسب النهايات التالية:

• $\lim_{x\to -\infty}\left(-x^5+3x^2+1\right)$ • $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{-3x^2+1}{x-1}\right)$ • $\lim_{x\overset{>}{\to} 2}\left(\frac{x-7}{2-x}\right)$

• $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^3-6x-9}{x-3}\right)$ • $\lim_{x\to 5}\left(\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}\right)$ • $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}+x^2-2}{x-1}\right)$

حل سلسلة تمارين المكتسبات قبلية :

التمرين الأول:

1) حل المعادلات والمتراجحات ذات المتغير الحقيقي x التالية :

• $x\left(x-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{8}$ أي $x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}=0$ ومنه $8x^2-6x+1=0$ وبما أن $\Delta=4$ فإن للمعادلة حلين هما :

$$x_1=\frac{-(-6)-\sqrt{4}}{2(8)}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4} \quad \text{و} \quad x_1=\frac{-(-6)+\sqrt{4}}{2(8)}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$$

• $\frac{2}{x-6}-\frac{1}{x-2}\geq 0$: لدينا $\frac{2}{x-6}-\frac{1}{x-2}=\frac{2(x-2)-(x-6)}{(x-6)(x-2)}=\frac{2x-4-x+6}{(x-6)(x-2)}=\frac{x+2}{(x-6)(x-2)}$

ومنه $x+2=0$ **أي** $x=-2$ **و** $(x-6)(x-2)=0$ **أي** $x=6$ **أو** $x=2$ **وعليه :**

x	$-\infty$		-2		2		6		$+\infty$
$x+2$		-	0	+		+		+	
$(x-6)(x-2)$		+		+	0	-	0	+	
$\frac{2}{x-6}-\frac{1}{x-2}$		-	0	+	‖	-	‖	+	

ومنه $\frac{2}{x-6}-\frac{1}{x-2}\geq 0$ لما : $x\in[-2;2[\cup]6;+\infty[$

• $\frac{(4x-x^2-4)(x^2-5x+4)}{x^2+x+1}<0$: نضع $A(x)=\frac{(4x-x^2-4)(x^2-5x+4)}{x^2+x+1}$

لدينا المعادلة $x^2-5x+4=0$ تقبل حلين هما $x=1$ أو $x=4$ و $-x^2+4x-4=0$ تقبل حل وحيد هو $x=2$

والمعادلة $x^2+x+1=0$ لاتقبل حلول في مجموعة الأعداد الحقيقية ومنه نلخص الإشارة فالجدول التالي :

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
x^2-5x+4		+	0	-		-	0	+	
$-x^2+4x-4$		-		-	0	-		-	
x^2+x+1		+		+		+		+	
$A(x)$		-	0	+	0	+	0	-	

ومنه $A(x)<0$ لما : $x\in]-\infty;1[\cup]4;+\infty[$

2) حل المعادلة $x^2-3x+2=0$ لدينا $\Delta=1$ ومنه للمعادلة حلين هما : $x=1$ و $x=2$

إستنتاج حلول المعادلات التالية :

• $x-3\sqrt{x}+2=0$: بوضع $X=\sqrt{x}$ أي $X^2=x$ مع $x\geq 0$ ومنه المعادلة $x-3\sqrt{x}+2=0$ تكافئ $X^2-3X+2=0$

أي للمعادلة حلين هما : $X=\sqrt{x}=1$ أي $x=1$ و $X=\sqrt{x}=2$ أي $x=4$

• $\frac{1}{x^2-4x+4}-\frac{3}{x-2}+2=0$: لدينا $x^2-4x+4=(x-2)^2$ ومنه :

$$\frac{1}{x^2-4x+4}-\frac{3}{x-2}+2=\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{3}{x-2}+2=\left(\frac{1}{x-2}\right)^2-3\left(\frac{1}{x-2}\right)+2=0$$

وعليه بوضع $X=\frac{1}{x-2}$ مع $x\neq 2$ فإن المعادلة $\frac{1}{x^2-4x+4}-\frac{3}{x-2}+2=0$ تكافئ $X^2-3X+2=0$ ومنه للمعادلة حلين هما :

$X=\frac{1}{x-2}=1$ أي $x-2=1$ ومنه $x=3$ أو $X=\frac{1}{x-2}=2$ أي $x-2=\frac{1}{2}$ ومنه $x=\frac{5}{2}$

Scanned with CamScanner

• $x^4-3x^2+2=0$: بوضع $X=x^2$ أي $X^2=x^4$ ومنه المعادلة $x^4-3x^2+2=0$ تكافئ $X^2-3X+2=0$

ومنه للمعادلة أربع حلول هي : $X=x^2=1$ أي $x=1$ أو $x=-1$ أو $X=x^2=2$ أي $x=\sqrt{2}$ أو $x=-\sqrt{2}$

التمرين الثاني :

1) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3-6x^2+11x-\alpha^2-2$ مع α عدد حقيقي

• تعين قيم α حتى يكون 1 جذر لكثير الحدود $f(x)$

لدينا 1 جذر لكثير الحدود $f(x)$ أي $f(1)=0$ ومنه : $1^3-6(1)^2+11(1)-\alpha^2-2=0$ أي $\alpha^2-4=0$ أذا $\alpha^2=4$

وعليه قيم α هي : $\alpha=2$ أو $\alpha=-2$

• من أجل $\alpha=2$ تبين وبطريقتين مختلفتين أن : $f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$ حيث a و b ثوابت يطلب تعينهم

ط1) بما أن 1 جذر لكثير الحدود $f(x)$ فإن : $f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)=x^3-6x^2+11x-6$ نقوم بالنشر والتبسيط فنجد :

$x^3+(a-1)x^2+(b-a)x-b=x^3-6x^2+11x-6$ ثم نقوم بالمطابقة ومنه : $a-1=-6$ أي $a=-5$ و $-b=-6$ أي $b=6$

ومنه $f(x)=(x-1)(x^2-5x+6)$

ط2) بما أن 1 جذر لكثير الحدود $f(x)$ فإن : $\frac{f(x)}{x-1}=Q(x)$ أي $f(x)=(x-1)Q(x)$ حيث $Q(x)$ كثير حدود من درجة الثانية

ومنه بإستعمال القسمة الإقليدية نجد : $Q(x)=x^2-5x+6$ وعليه $f(x)=(x-1)(x^2-5x+6)$ أي $a=-5$ و $b=6$

• تعين حسب قيم x إشارة $f(x)$

لدينا $f(x)=(x-1)(x^2-5x+6)$ ومنه $f(x)=0$ معناه $x-1=0$ أي $x=1$ أو $x^2-5x+6=0$ أي للمعادبة حلين هما $x=2$ أو $x=3$ وعليه إشارة $f(x)$ نلخصها فالجدول التالي :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		-	0	+		+		+	
x^2-5x+6		+		+	0	-	0	+	
$f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

2) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{6}{x}+\frac{11}{\sqrt{x}}-6$

• تبين أنه من أجل كل $x>0$ فإن : $g(x)=f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

لدينا من أجل كل $x>0$: (لاحظ أن $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$ و $\left(\sqrt{x}\right)^3=\left(\sqrt{x}\right)^2\sqrt{x}=x\sqrt{x}$)

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3-6\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+11\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-6=\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^3}-\frac{6}{\left(\sqrt{x}\right)^2}+\frac{11}{\sqrt{x}}-6=\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{6}{x}+\frac{11}{\sqrt{x}}-6=g(x)$$

تعين حلول المعادلة $g(x)=0$:

لدينا من أجل كل $x>0$ فإن : $g(x)=f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ومنه $g(x)=0$ معناه $f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0$

مما سبق لدينا $f(x)=0$ معناه $x=1$ أو $x=2$ أو $x=3$ ومنه $f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0$ فإن :

$\frac{1}{\sqrt{x}}=1$ أي $\sqrt{x}=1$ ومنه $x=1$ أو $\frac{1}{\sqrt{x}}=2$ أي $\sqrt{x}=\frac{1}{2}$ ومنه $x=\frac{1}{4}$ أو $\frac{1}{\sqrt{x}}=3$ أي $\sqrt{x}=\frac{1}{3}$ ومنه $x=\frac{1}{9}$

إذا حلول المعادلة $g(x)=0$ هي $S=\left\{1;\frac{1}{4};\frac{1}{9}\right\}$

Scanned with CamScanner

التمرين الثالث : تعين مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

- $f(x)=\frac{x-1}{x^2+x+1}$ لدينا الدالة f معرفة إذا كان $x^2+x+1\neq 0$ وبما $x^2+x+1=0$ لاتقبل حلول من أجل كل عدد حقيقي x لإن $\Delta<0$ إذا $x^2+x+1\neq 0$ محققة من أجل كل $x\in R$ وعليه $D_f=\mathbb{R}$
- $f(x)=\sqrt{-x^2+8x-7}$: لدينا الدالة f معرفة إذا كان $-x^2+8x-7\geq 0$

لدينا $-x^2+8x-7=0$ معناه $x=1$ أو $x=7$ وعليه :

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
$-x^2+8x-7$		-	0	+	0	-	

ومنه $-x^2+8x-7\geq 0$ إذا كان $x\in[1;7]$ أي $D_f=[1;7]$

- $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2-x-2}$ لدينا الدالة f معرفة إذا كان $x^2-x-2\neq 0$ و $x\geq 0$

لدينا $x^2-x-2\neq 0$ معناه $x\neq 1$ أو $x\neq -2$ وبما أن $x\geq 0$ فإن : $D_f=[0;1[\cup]1;+\infty[$

- $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x^2-1}}$ لدينا الدالة f معرفة إذا كان $x^2-1>0$ أي $x^2>1$ ومنه $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ إذا $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

التمرين الرابع :

1) أدرس شفعية الدوال التالية :

- $f(x)=\frac{x^3+2x}{x^2+1}$ $(x\in\mathbb{R})$

لدينا من أجل $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$ و : $f(-x)=\frac{(-x)^3+2(-x)}{(-x)^2+1}=\frac{-x^3-2x}{x^2+1}=-\frac{x^3+2x}{x^2+1}=-f(x)$ ومنه الدالة f دالة فردية

- $f(x)=\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}$ $(x\in\mathbb{R}-\{-1;1\})$

لدينا من أجل $x\neq 1$ فإن $-x\neq -1$ و من أجل $x\neq -1$ فإن $-x\neq 1$ وعليه لكل : $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$ فإن $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

ولدينا $f(-x)=\frac{-x}{-x-1}+\frac{-x}{-x+1}=\frac{-x}{-(x+1)}+\frac{-x}{-(x-1)}=\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}=f(x)$ ومنه الدالة f دالة زوجية

2) (c_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس المعرفة من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$ بـ : $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$

- تبين أن النقطة $A(1;1)$ مركز تناظر للمنحنى (c_f)
- لدينا من أجل $x\neq 1$ فإن $-x\neq -1$ أي $2-x\neq 1$ ولدينا :

$$f(2-x)=\frac{(2-x)^2-(2-x)+1}{2-x-1}=\frac{x^2+4-4x-2+x+1}{1-x}=\frac{x^2-3x+3}{-(x-1)}=-\frac{x^2-3x+3}{x-1}$$

أي :

$$f(2-x)+f(x)=-\frac{x^2-3x+3}{x-1}+\frac{x^2-x+1}{x-1}=\frac{-x^2+3x-3+x^2-x+1}{x-1}=\frac{2x-2}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x-1}=2$$

وبما أن : $f(2-x)+f(x)=2$ فإن النقطة $A(1;1)$ مركز تناظر للمنحنى (c_f)

Scanned with CamScanner

3) (c_g) التمثيل البياني للدالة g في معلم متعامد ومتجانس المعرفة من اجل كل عدد حقيقي x بـ: $g(x)=x^2-2x+1+|x-1|$

أ) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(2-x)=g(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$$g(2-x)=(2-x)^2-2(2-x)+1+|2-x-1|=x^2+4-4x-x+2x+1+|1-x|=x^2-2x+1+|x-1|=g(x)$$

بما أنه لكل عدد حقيقي x فإن : $g(2-x)=g(x)$ أي $g(2(1)-x)=g(x)$ فإن المستقيم $x=1$ محو تناظر للمنحنى (c_g)

التمرين الخامس : في كل حالة من الحالات التالية عين عبارة ومجموعة تعريف الدالة h مركب الدالتين f و g حيث: $h(x)=(fog)(x)$

أ) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x+2};x\neq -2 \\ g(x)=x^2-3x;x\in\mathbb{R} \end{cases}$ لدينا : $D_h=D_{fog}=\{x/x\in D_g;g(x)\in D_f\}$

ومنه $x\in D_g$ و $g(x)\in D_f$ معناه $x\in\mathbb{R}$ و $g(x)\neq 2$ أي $x\in R$ و $x^2-3x+2\neq 0$ وعليه $x\in\mathbb{R}$ و $x\neq 1$ و $x\neq 2$

إذا : $D_h=\mathbb{R}-\{1;2\}$ ومنه من أجل $x\in\mathbb{R}-\{1;2\}$ لدينا : $h(x)=f(g(x))=\dfrac{1}{g(x)+2}=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

ب) $\begin{cases} f(x)=x^2-1;x\in\mathbb{R} \\ g(x)=\sqrt{x-2};x\geq 2 \end{cases}$ لدينا : $D_h=D_{fog}=\{x/x\in D_g;g(x)\in D_f\}$

ومنه $x\in D_g$ و $g(x)\in D_f$ معناه $x\geq 2$ و $g(x)\in R$ أي $x\geq 2$ إذا : $D_h=[2;+\infty[$

ومنه من أجل $x\geq 2$ لدينا : $h(x)=f(g(x))=[g(x)]^2-1=\left(\sqrt{x-2}\right)^2-1=x-3$

التمرين السادس :

1) بإستعمال تعريف العدد المشتق التالي : $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)=f'(x)$ عين الدالة المشتقة f' للدالة f في الحالات التالية :

• $f(x)=x^2$ ، لدينا $f(x+h)=(x+h)^2=x^2+h^2+2hx$ ومنه :

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{x^2+h^2+2hx-x^2}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{h^2+2hx}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{h(h+2x)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}(h+2x)=2x$$

وعليه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=2x$

• $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ ، لدينا $f(x+h)=\dfrac{1}{x+h}$ ومنه :

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{-h}{hx(x+h)}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{-1}{x(x+h)}\right)=\frac{-1}{x^2}$$

وعليه من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 0$: $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$

• $f(x)=\sqrt{x}$ $(x>0)$ ، ، لدينا $f(x+h)=\sqrt{x+h}$ ومنه :

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

وعليه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Scanned with CamScanner

2) تعين الدالة المشتقة f' للدالة f (معينا مجال قابلية الإشتقاق) في كل حالة من الحالات التالية :

• $f(x)=\frac{1}{2028}x^{2028}+181x^8+2009x+1962$ $(x\in\mathbb{R})$ ، لدينا الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'(x)=2028\left(\frac{1}{2028}\right)x^{2027}+8(181)x^5+2009+0=x^{2027}+1448x^5+2009$$

• $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x+1}$ $(x\neq-1)$ ، لدينا الدالة f قابلة للإشتقاق من أجل كل عدد حقيقي $x\neq1$ حيث :

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x+1)-1(x^2+x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x+x+1-x^2-x+1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$$

• $f(x)=\sqrt{x-2}$ $(x\geq2)$ ، لدينا الدالة f قابلة للإشتقاق على $]2;+\infty[$ حيث : $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$

$$(x\leq-1)\quad f(x)=(x-1)\sqrt{x^2-1}+(x^3+2)^5+\frac{3}{2x+1}$$

لدينا الدالة f قابلة للإشتقاق على $]-\infty;-1[$ حيث :

$$f'(x)=1\left(\sqrt{x^2-1}\right)+\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)(x-1)+5(3x^2)(x^3+2)^4+\frac{-3(2)}{(2x+1)^2}=\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2-x}{\sqrt{x^2-1}}+15x^2(x^3+2)^4-\frac{6}{(2x+1)^2}$$

• $f(x)=\cos(1-3x)+ton(x)$ $\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ و k عدد صحيح

لدينا الدالة f قابلة للإشتقاق من أجل كل عدد حقيقي $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ و k عدد صحيح حيث : (ملاحظة : $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$)

$$(3f'(x)=-3(-\sin(1-3x))+\frac{(\cos x)(\cos x)-(\sin x)(-\sin x)}{(\cos(x))^2}=3\sin(1-3x)+\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}=3\sin(1-3x)+\frac{1}{\cos^2x}$$

تعين اتجاه تغير الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

• $f(x)=2x^3-15x^2+36x+6$ $(x\in\mathbb{R})$ ، لدينا الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'(x)=6x^2-30x+36$$

إشارة $f'(x)$: لدينا $f'(x)=0$ معناه $x=2$ أو $x=3$ ومنه

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

من جدول إشارة $f'(x)$ لدينا الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;2]$ و $[3;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[2;3]$

• $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$ $(x\in R)$ ، لدينا الدالة f قابلة للإشتقاق من أجل كل عدد حقيقي x حيث :

$$f'(x)=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

إشارة $f'(x)$: لدينا من أجل كل عدد حقيقي x فإن $\sqrt{x^2-2x+2}>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $x-1$ وعليه

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

من جدول إشارة $f'(x)$ لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;1]$

Scanned with CamScanner

4) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2026-x^2$

• تبين أنه من أجل كل $0\le x\le 3\sqrt{2}$ فإن : $2007\le g(x)\le 2026$

لدينا الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $g'(x)=-2x$

إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	

من جدول إشارة $f'(x)$ لدينا الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فهي متناقصة تماما على المجال $[0;3\sqrt{2}]$

ومنه من أجل كل $0\le x\le 3\sqrt{2}$ فإن : $g(3\sqrt{2})\le g(x)\le g(0)$ أي $2007\le g(x)\le 2026$

5) (c_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس ، تعين معادلة المماس (T) للمنحنى (c_f) في كل حالة من الحالات التالية :

• عبارة الدالة f هي $f(x)=-\frac{1}{x+1}$ مع $x\neq -1$ و المماس (T) للمنحنى (c_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x=0$

لدينا الدالة f قابلة للإشتقاق من أجل كل عدد حقيقي $x\neq -1$ حيث : $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ ومنه معادلة المماس (T) للمنحنى (c_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x=0$ هي : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $y=x-1$

• المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة الموجبة معامل توجيهه هو 9 و عبارة الدالة f هي : $f(x)=x^3+3x^2$

لدينا الدالة f قابلة للإشتقاق من أجل كل عدد حقيقي x حيث : $f'(x)=3x^2+6x$ ومنه معادلة المماس (T) الذي معامل توجيهه 9 وعند النقطة ذات الفاصلة الموجبة ولتكن x_0 معناه : $f'(x_0)=9$ أي $3(x_0)^2+6x_0-9=0$ أي $x_0=1$ أو $x_0=-3$

وبما أن $x_0>0$ إذا $x_0=1$ ومنه معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$ هي: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ أي $y=9x-5$

• عبارة الدالة f هي : $f(x)=\frac{x}{x+1}$ مع $x\neq -1$ و المماس (T) يمر من مبدأ المعلم

لدينا الدالة f قابلة للإشتقاق من أجل كل عدد حقيقي $x\neq -1$ حيث : $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$

لدينا معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 هي $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ وبما أن المماس يمر من المبدأ فإن

$f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)=0$ أي $-x_0f'(x_0)+f(x_0)=0$ ومنه $\frac{-x_0}{(x_0+1)^2}+\frac{x_0}{x_0+1}=0$ أي $\frac{(x_0)^2}{(x_0+1)^2}=0$ وعليه $x_0=0$

إذا معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$ هي $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $y=x$

6) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ حيث a,b,c و d ثوابت حقيقية غير معدومة وليكن (c_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس، تعين a,b,c و d علما أن :

• منحنى (c_g) يقبل قيمتين حديتين فاصلتيهما : $x=1$ و $x=2$ معناه $g'(1)=0$ و $g'(2)=0$ ومنه لدينا الدالة g قابلة للإشتقاق من أجل كل عدد حقيقي x حيث : $g'(x)=3ax^2+2bx+c$ وبما أن $g'(1)=0$ و $g'(2)=0$ فإن

$\begin{cases}3a+2b+c=0....(1)\\12a+4b+c=0....(2)\end{cases}$ بطرح (1) من (2) نتحصل على $9a+2b=0....(أ)$

• منحنى (c_g) يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة المعدومة معادلته : $y=-4x+2$ أي معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة المعدومة هي : $y=g'(0)(x-0)+g(0)=g'(0)x+g(0)=-4x+2$ بالمطابقة نجد $g'(0)=-4$ أي $c=-4$

و $g(0)=2$ أي $d=2$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

• النقطة $A(1:2)$ تنتمي الى منحنى الدالة g'' المشتقة الثانية للدالة g

لدينا الدالة g' قابلة للإشتقاق من أجل كل عدد حقيقي x حيث : $g''(x)=6ax+2b$ ولدينا النقطة $A(1:2)$ تنتمي الى منحنى الدالة g''

معناه $g''(1)=2$ أي $6a+2b=2$ ..... (ب)

بطرح (أ) من (ب) نجد : $3a=-2$ أي $a=-\frac{2}{3}$ بالتعويض عن قيمة a فالمعادلة (أ) أو (ب) نجد $b=3$ ومنه: $g(x)=-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x+2$

• تعين نقاط إنعطاف المنحنى (c_f) للدالة f في كل حالة :

أ) $f(x)=\frac{x^3-3x^2+x}{6}$ ، لدينا الدالة f قابلة للإشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ حيث : $f'(x)=\frac{3x^2-6x+1}{6}$

أي $f''(x)=\frac{6x-6}{6}=x-1$ ومنه لدينا :

بما أن المشتقة الثانية إنعدمت عند نقطة ذات الفاصلة1 وغيرت من إشارتها فإن النقطة $(1;f(1))$ أي $\left(1;\frac{-1}{6}\right)$ نقطة أنعطاف للمنحنى (c_f)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	

ب) $f(x)=x^5+1$ ، لدينا الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'(x)=5x^4$ ومنه لدينا :

بما أن المشتقة الأولى إنعدمت عند النقطة ذات الفاصلة 0 ولم تغير من إشارتها فإن النقطة $(0;f(0))$ أي $(0;1)$ نقطة أنعطاف للمنحنى (c_f)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	

التمرين السابع :

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^5+3x^2+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^5\right)=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^2+1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x)=-\infty$

• $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}\left(\frac{x-7}{2-x}\right)=+\infty$

• بإستعمال القسمة الإقليدية نجد $x^3-6x-9=(x-3)(x^2+3x+3)$ ومنه :

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{x^3-6x-9}{x-3}\right)=\lim_{x\to3}\left(\frac{(x-3)(x^2+3x+3)}{x-3}\right)=\lim_{x\to3}\left(x^2+3x+3\right)=21$$

• بإستعمال مرافق الدالة الجدرية لدينا :

ع) $\lim\limits_{x\to5}\left(\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}\right)=\lim\limits_{x\to5}\left(\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}\right)=\lim\limits_{x\to5}\left(\frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}\right)=\lim\limits_{x\to5}\left(\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}\right)=\lim\limits_{x\to5}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}\right)=\frac{1}{4}$

من تعريف العدد المشتق وبوضع $f(x)=\sqrt{x}+x^2$ أي $f(1)=2$ و لدينا الدالة f قابلة للإشتقاق من أجل $x>0$ حيث :

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+2x$ ومنه :

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x}+x^2-2}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)=f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}}+2(1)=\frac{5}{2}$$

مسألة شاملة

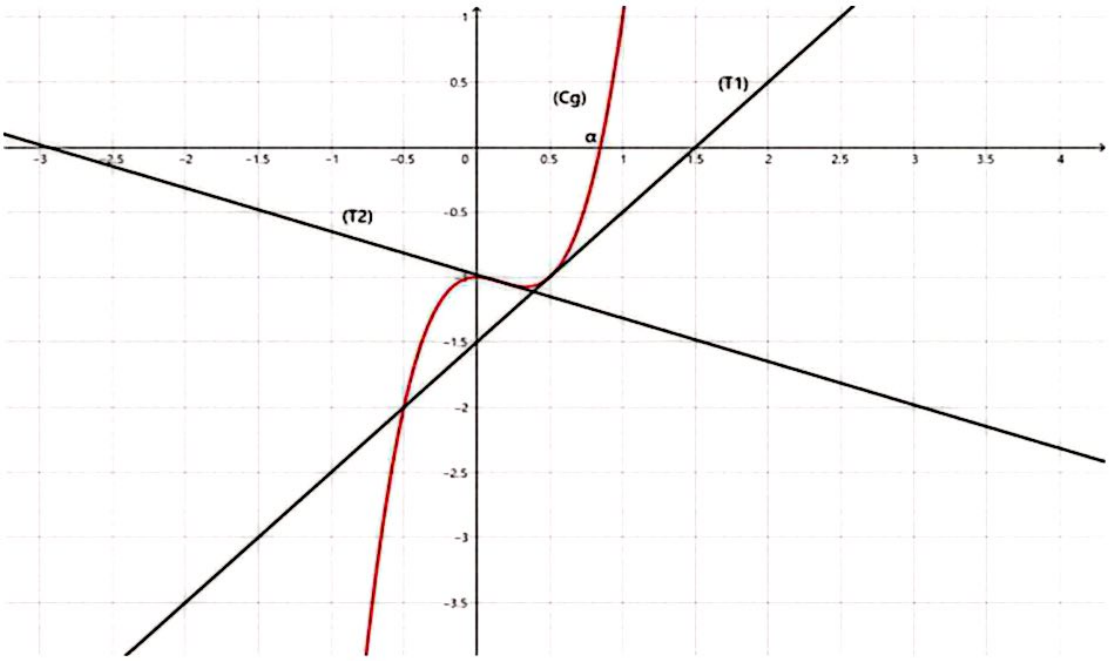
الجزء I)

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$: بـ $g(x)=ax^3+bx^2-1$ حيث a و b ثوابت حقيقية

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ لدينا (c_g) التمثيل البياني للدالة g

(T_1) مماس للمنحنى (c_g) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{2}$ ، (T_2) مماس للمنحنى (c_g) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{6}$

ولتكن النقطة $(\alpha;0)$ نقطة تقاطع المنحنى (c_g) مع حامل محور الفواصل (أنظر للشكل الموالي)



بقراءة بيانية :

1) عين $g'(0)$ ، $g''\left(\frac{1}{6}\right)$ ، $g\left(\frac{1}{2}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2g(x)+2}{2x-1}$ ثم إستنتج معادلة المماس (T_1)

2) عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة : $g(x)-m^2=5-5m$ حل وحيد موجب

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x)=4x^3-2x^2-1$

- عين حسب قيم x إشارة $g(x)$
- تحقق أن : $0.8<\alpha<0.9$

الجزء II)

f الدالة المعرفة من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 0$ بـ : $f(x)=-x+\frac{2x-2}{x^2}$ وليكن (c_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ثم تحقق أن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (c_f)

2) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 0$ فإن : $f'(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)$

- إستنتج أن:

الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $\left[\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$ و متزايدة تماما على المجال $\left]0;\frac{1}{\alpha}\right]$ ثم شكل جدول تغيراتها

Scanned with CamScanner

• دون حساب عين $\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{\alpha}+h\right)-f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{h}$ وفسر النتيجة هندسيا

3) بين أن $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=2\left(\alpha^2-\frac{1}{\alpha}\right)$ ثم عين حصرا لـ $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

4) أحسب $\lim_{|x|\to+\infty}\left(f(x)+x\right)$ ثم فسر النتيجة بيانيا

• أدرس الوضع النسبي للمنحنى (c_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=-x$

• بين أن المنحنى (c_f) يقبل مماس (T) موازي للمستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلته

5) β عدد حقيقي حيث $-1.8<\beta<-1.7$ وحل للمعادلة : $x^3-2x+2=0$

• أحسب $f(\beta)$ وفسر النتيجة هندسيا

• إستنتج حسب قيم x إشارة $f(x)$

6) أرسم المستقيم (Δ) و المماس (T) ثم المنحنى (c_f)

• عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x\neq 0$: $mx^2-2x+2=0$ حلين من نفس الإشارة

الجزء III)

لتكن الدالة h المعرفة من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 0$ بـ : $h(x)=\left[f(x)\right]^2$ وليكن (c_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق

1) أحسب نهايات الدالة h عند حدود مجموعة تعريفها ثم فسر النتائج بيانيا

2) عين إتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها

الجزء IV)

لتكن الدالة k المعرفة من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$ بـ : $k(x)=-|x-1|+\frac{\sqrt{4x^2-8x+4}-2}{x^2-2x+1}+2$

وليكن (c_k) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$ فإن : $k(2-x)=k(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$ فإن : $k(x)=f(|x-1|)+2$

3) من أجل $x>1$ بين أن المنحنى (c_k) صورة المنحنى (c_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه

• أرسم المنحنى (c_k) إنطلاقا من المنحنى (c_f) موضحا الطريقة المتبعة

Scanned with CamScanner

التصحيح المفصل للتمرين الأول

الجزء I)

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$: بـ $g(x)=ax^3+bx^2-1$ حيث a و b ثوابت حقيقية

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ لدينا (c_g) التمثيل البياني للدالة g

(T_1) مماس للمنحنى (c_g) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{2}$ ، (T_2) مماس للمنحنى (c_g) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{6}$

ولتكن النقطة $(\alpha;0)$ نقطة تقاطع المنحنى (c_g) مع حامل محور الفواصل

بقراءة بيانية :

1) تعين $g'(0)$ ، $g''\left(\frac{1}{6}\right)$ ، $g\left(\frac{1}{2}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2g(x)+2}{2x-1}$ ثم إستنتاج معادلة المماس (T_1)

- $g'(0)=0$ لإن ($g(0)$ قيمة حدية للدالة g)
- $g''\left(\frac{1}{6}\right)=0$ (لأن المماس (T_2) يخترق المنحنى (c_g) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{6}$ مغيرا من وضعيته)
- $g\left(\frac{1}{2}\right)=-1$
- لدينا : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2g(x)+2}{2x-1}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2(g(x)+1)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{g(x)+1}{x-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{g(x)-(-1)}{x-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{g(x)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=g'\left(\frac{1}{2}\right)$

ولدينا (T_1) مماس للمنحنى (c_g) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{2}$ أي $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ ميل المماس (T_1) ومنه نأخذ نقطتين من المماس (T_1) هما $\left(\frac{1}{2};-1\right)$ ، $\left(\frac{3}{2};0\right)$ وعليه $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2g(x)+2}{2x-1}=g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{0-(-1)}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=1$

- إستنتاج معادلة المماس (T_1) :

$$(T_1): y=g'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{2}\right)$$

لدينا (T_1) مماس للمنحنى (c_g) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{2}$ ومنه : $(T_1): y=1\left(x-\frac{1}{2}\right)+-1=x-\frac{1}{2}-1$

$$(T_1): y=x-\frac{3}{2}$$

2) تعين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة : $g(x)-m^2=5-5m$ حل وحيد موجب

لدينا المعادلة $g(x)-m^2=5-5m$ تكافئ $g(x)=m^2+5-5m$ ومنه حلولها هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (c_g) مع المستقيمات الأفقية (الموازية لحامل محور الفواصل) ذات المعادلة $y=m^2-5m+5$ وعليه المعادلة تقبل حل وحيد موجب أي :

$m^2-5m+5>-1$ أي $m^2-5m+6>0$ وعليه لدينا :

m	$-\infty$		2		3		$+\infty$
m^2-5m+6		+	0	-	0	+	

أي : $m\in]-\infty;2[\cup]3;+\infty[$

3) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x)=4x^3-2x^2-1$

Scanned with CamScanner

لدينا مما سبق : $g\left(\frac{1}{2}\right)=-1$ أي $a\left(\frac{1}{2}\right)^3+b\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=-1$ ومنه $\frac{a}{8}+\frac{b}{4}=0$ أي $a=-2b$

ولدينا الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $g'(x)=3ax^2+2bx$ وبما أن $g'\left(\frac{1}{2}\right)=1$ أي $3a\left(\frac{1}{2}\right)^2+2b\left(\frac{1}{2}\right)=1$ ومنه

$\frac{3a}{4}+b=1$ أي $3a+4b=4$ وبما أن $a=-2b$ فإن $3(-2b)+4b=4$ أي $-2b=4$ وعليه $b=-2$ و $a=-2(-2)=4$

ومنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x)=4x^3-2x^2-1$

- تعين حسب قيم x إشارة $g(x)$: نعلم أن النقطة $(\alpha;0)$ نقطة تقاطع المنحنى (c_g) مع حامل محور الفواصل أي $g(\alpha)=0$ ومنه

لدينا لما $x\in]-\infty;\alpha]$ المنحنى (c_g) تحت محور الفواصل أي : $g(x)\le 0$

لدينا لما $x\in[\alpha;+\infty[$ المنحنى (c_g) فوق محور الفواصل أي : $g(x)\ge 0$

ونلخص النتائج في جدول الإشارة التالي :

x		α		$+\infty$ $-\infty$
$g(x)$	-	0	+	

- التحقق أن : $0.8<\alpha<0.9$

لدينا الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0.8;0.9]$ أي لما $0.8<\alpha<0.9$ فإن : $g(0.8)<g(\alpha)<g(0.9)$ أي $-0.23<0<0.29$

وعليه $0.8<\alpha<0.9$

الجزء II)

f الدالة المعرفة من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 0$ بـ : $f(x)=-x+\frac{2x-2}{x^2}$ وليكن (c_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1) حساب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+\frac{2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+\frac{2}{x}\right)=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x+\frac{2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x+\frac{2}{x}\right)=+\infty$$

- التحقق أن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (c_f) :

لدينا : $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(-x+\frac{2x-2}{x^2}\right)=-\infty$ (لإن : $\lim_{x\to0}(-x)=0$ ، $\lim_{x\to0}(2x-2)=-2$ و $\lim_{x\to0}(x^2)=0^+$)

ومنه المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (c_f)

2) أثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 0$ فإن : $f'(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)$

لدينا الدالة f قابلة للإشتقاق على المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ حيث من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 0$:

$$f'(x)=-1+\frac{(2)(x^2)-(2x)(2x-2)}{x^4}=-1+\frac{x(2x-2(2x-2))}{x^4}=-1+\frac{2x-4x+4}{x^3}=\frac{-x^3-2x+4}{x^3}$$

ولدينا من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 0$ فإن :

$$g\left(\frac{1}{x}\right)=4\left(\frac{1}{x}\right)^3-2\left(\frac{1}{x}\right)^2-1=4\left(\frac{1}{x^3}\right)-2\left(\frac{1}{x^2}\right)-1=\frac{4}{x^3}-\frac{2}{x^2}-1=\frac{4}{x^3}-\frac{2x}{x^3}-\frac{x^3}{x^3}=\frac{-x^3-2x+4}{x^3}=f'(x)$$

ومنه أجل كل عدد حقيقي $x\neq 0$ فإن : $f'(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)$

Scanned with CamScanner

• إستنتاج أن الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $\left[\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$ و متزايدة تماما على المجال $\left]0;\frac{1}{\alpha}\right]$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 0$ فإن : $f'(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)$ أي إشارة $f'(x)$ من إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$ ومنه مما سبق لدينا :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

أي لما $\frac{1}{x}\geq\alpha>0$ أي $0<x\leq\frac{1}{\alpha}$ فإن $g\left(\frac{1}{x}\right)\geq 0$ أي الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]0;\frac{1}{\alpha}\right]$

ولما $0<\frac{1}{x}\leq\alpha$ أي $x\geq\frac{1}{\alpha}$ فإن $g\left(\frac{1}{x}\right)\leq 0$ أي الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$

ولما $\frac{1}{x}<0$ أي $x<0$ فإن $g\left(\frac{1}{x}\right)<0$ أي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$

وعليه أن الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $\left[\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$ و متزايدة تماما على المجال $\left]0;\frac{1}{\alpha}\right]$

• جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	‖	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	↘	$-\infty$

• دون حساب تعين $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{\alpha}+h\right)-f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{h}$ وتفسير النتيجة هندسيا

لدينا الدالة f قابلة للإشتقاق عند $\frac{1}{\alpha}$ ومنه من تعريف العدد المشتق لدينا :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{\alpha}+h\right)-f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{h}=f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=g\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)}\right)=g(\alpha)=0$$

ومنه المنحنى (c_f) يقبل مماس أفقي عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{\alpha}$

3) تبين أن $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=2\left(\alpha^2-\frac{1}{\alpha}\right)$:

ط1) لدينا $g(\alpha)=0$ أي $4\alpha^3-2\alpha^2-1=0$ ومنه $2\alpha^2=4\alpha^3-1$ ولدينا :

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=-\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{2\left(\frac{1}{\alpha}\right)-2}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}=\frac{-1}{\alpha}+\frac{\frac{2}{\alpha}-2}{\frac{1}{\alpha^2}}=\frac{-1}{\alpha}+\frac{\frac{2-2\alpha}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha^2}}=\frac{-1}{\alpha}+\left(\frac{2-2\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha^2}{1}\right)=\frac{-1}{\alpha}+(2-2\alpha)\alpha=\frac{-1}{\alpha}+2\alpha-2\alpha^2$$

أي : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{-1+2\alpha^2-2\alpha^3}{\alpha}=\frac{-1+\left(4\alpha^3-1\right)-2\alpha^3}{\alpha}=\frac{2\alpha^3-2}{\alpha}=2\left(\frac{\alpha^3-1}{\alpha}\right)=2\left(\frac{\alpha^3}{\alpha}\frac{-1}{\alpha}\right)=2\left(\alpha^2-\frac{1}{\alpha}\right)$

ط2) لدينا $g(\alpha)=0$ أي $4\alpha^3-2\alpha^2-1=0$ و $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{-1+2\alpha^2-2\alpha^3}{\alpha}$

Scanned with CamScanner

لدينا : و لتبين أن $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=2\left(\alpha^2-\frac{1}{\alpha}\right)$ يكفي أن نبين أن : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)-2\left(\alpha^2-\frac{1}{\alpha}\right)=0$

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)-2\left(\alpha^2-\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{-1+2\alpha^2-2\alpha^3}{\alpha}-2\left(\frac{\alpha^3-1}{\alpha}\right)=\frac{-1+2\alpha^2-2\alpha^3}{\alpha}-\frac{2\alpha^3-2}{\alpha}=\frac{-1+2\alpha^2-2\alpha^3-2\alpha^3+2}{\alpha}$$

أي $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)-2\left(\alpha^2-\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{-4\alpha^3+2\alpha^2+1}{\alpha}=\frac{-\left(4\alpha^3-2\alpha^2-1\right)}{\alpha}=\frac{-g(\alpha)}{\alpha}=\frac{0}{\alpha}=0$ ومنه $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=2\left(\alpha^2-\frac{1}{\alpha}\right)$

• تعين حصرا لـ $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$:

لدينا $0.8<\alpha<0.9$ أي $\frac{1}{0.9}<\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{0.8}$ ومنه $1.11<\frac{1}{\alpha}<1.25$ أي $-1.25<-\frac{1}{\alpha}<-1.11$ .....(1)

و من أجل $0.8<\alpha<0.9$ لدينا $(0.8)^2<\alpha^2<(0.9)^2$ أي $0.64<\alpha^2<0.81$.....(2) بجمع (1) مع (2) طرف لطرف نجد :

$-0.61<\alpha^2-\frac{1}{\alpha}<-0.3$ أي $2(-0.61)<2\left(\alpha^2-\frac{1}{\alpha}\right)<2(-0.3)$ ومنه $-1.22<f\left(\frac{1}{\alpha}\right)<-0.6$

4) حساب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(f(x)+x\right)$ ثم تفسير النتيجة بيانيا :

لدينا : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(-x+\frac{2x-2}{x^2}+x\right)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\frac{2x-2}{x^2}\right)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0$

التفسير البياني : لدينا $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(f(x)-(-x)\right)=0$

وعليه المنحنى (c_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ و $-\infty$ معادلته $y=-x$

• دراسة الوضع النسبي للمنحنى (c_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=-x$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x\neq0$ فإن : $f(x)-(-x)=f(x)+x=-x+\frac{2x-2}{x^2}+x=\frac{2x-2}{x^2}$

وبما أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\neq0$ فإن $x^2>0$ وعليه إشارة $f(x)-(-x)$ من إشارة $2x-2$

لدينا $2x-2=0$ أي $x=1$ ومنه :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)-(-x)$		-	‖	-		+	
الوضع النسبي للمنحنى (c_f) والمستقيم (Δ)		المنحنى (c_f) يقع تحت المستقيم (Δ)	‖	المنحن (c_f) يقع تحت (Δ)	المنحنى (c_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة $(1;-1)$	المنحنى (c_f) يقع فوق المستقيم (Δ)	

• تبين أن المنحنى (c_f) يقبل مماس (T) موازي للمستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلته

(c_f) يقبل مماس (T) موازي للمستقيم (Δ) معناه المعادلة $f'(x)=-1$ تقبل حل وحيد x_0

لدينا مما سبق $f'(x)=\frac{-x^3-2x+4}{x^3}$ أي $f'(x_0)=\frac{-(x_0)^3-2x_0+4}{(x_0)^3}=-1$ معناه $-(x_0)^3-2x_0+4=-(x_0)^3$ أي $-2x_0+4=0$

ومنه $x_0=2$

وعليه معادلة المماس (T) الموازي للمستقيم (Δ) عند نقطة ذات الفاصلة $x_0=2$ هي :

$y=f'(2)(x-2)+f(2)=-1(x-2)-\frac{3}{2}$ أي $y=-x+\frac{1}{2}$

Scanned with CamScanner

5) β عدد حقيقي حيث $-1.8<\beta<-1.7$ وحل للمعادلة : $x^3-2x+2=0$

• حساب $f(\beta)$ وتفسير النتيجة هندسيا

لدينا : β عدد حقيقي حيث $-1.8<\beta<-1.7$ وحل للمعادلة : $x^3-2x+2=0$ أي $\beta^3-2\beta+2=0$ ومنه :

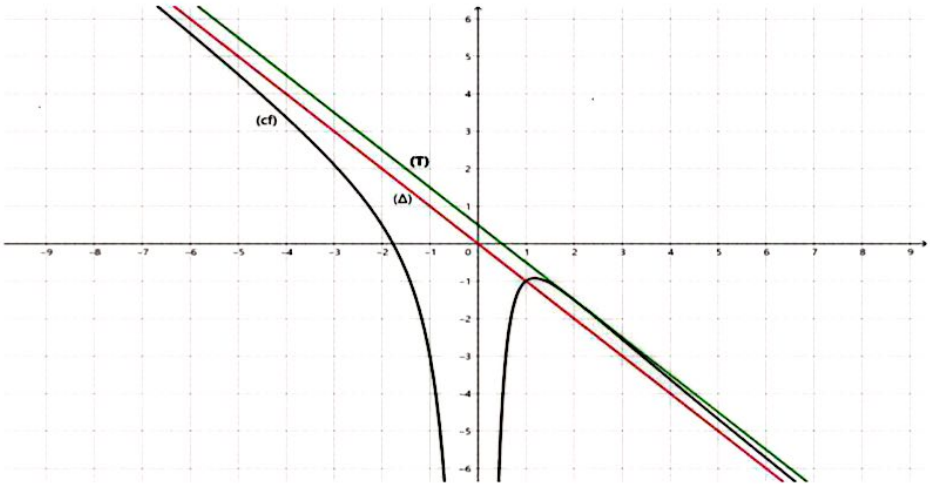
$$f(\beta)=-\beta+\frac{2\beta-2}{\beta^2}=\frac{-\beta^3+2\beta-2}{\beta^2}=\frac{-(\beta^3-2\beta+2)}{\beta^2}=\frac{-(0)}{\beta^2}=0$$

وعليه المنحنى (c_f) يقطع محور الفواصل فالنقطة التي فاصلتها β

• إستنتج حسب قيم x إشارة $f(x)$

x	$-\infty$		β		0		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	‖	-	

6) رسم المستقيم (Δ) و المماس (T) ثم المنحنى (c_f) :



• تعين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x\neq 0$: $mx^2-2x+2=0$ حلين من نفس الإشارة

لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 0$: $mx^2-2x+2=0$ معناه $mx^2=2x-2$ أي $m=\frac{2x-2}{x^2}$ ومنه $-x+m=-x+\frac{2x-2}{x^2}$

أي $f(x)=-x+m$ أي مناقشة بيانية مائلة حلولها فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات التي معامل توجيهها هو 1- حيث

$y=-x+m$ ومنه لما : $0<m<\frac{1}{2}$ فإن المعادلة ذات المجهول الحقيقي $x\neq 0$: $mx^2-2x+2=0$ تقبل حلين من نفس الإشارة

الجزء III)

1) لتكن الدالة h المعرفة من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 0$ بـ : $h(x)=[f(x)]^2$ وليكن (c_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق حساب نهايات الدالة h عند حدود مجموعة تعريفها ثم تفسير النتائج بيانيا :

$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty}[f(x)]^2=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^2=+\infty$ (لإن : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$)

$\lim_{x\to 0} h(x)=\lim_{x\to 0}[f(x)]^2=+\infty$ (لإن : $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$ أي $\lim_{x\to 0}[f(x)]^2=+\infty$) ومنه المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (c_h)

2) تعين إتجاه تغير الدالة h ثم تشيكل جدول تغيراتها

لدينا الدالة h قابلة للإشتقاق على المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$ حيث: $h'(x)=2f'(x)f(x)$

Scanned with CamScanner

• إشارة $h'(x)$

x	$-\infty$		β		0		$\frac{1}{\alpha}$		0
$f'(x)$		-		-	‖	+	0	-	
$f(x)$		+	0	-	‖	-		-	
$h'(x)$		-	0	+	‖	-	0	+	

وعليه الدالة h متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;\beta]$ و $\left]0;\frac{1}{\alpha}\right]$ و متزايدة تماما على المجالين $[\beta;0[$ و $\left[\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$

• جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$		β		0		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$h'(x)$		-	0	+	‖	-	0	+	
$h(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$h\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	↗	$+\infty$

الجزء IV)

لتكن الدالة k المعرفة من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$ بـ : $k(x)=-|x-1|+\frac{\sqrt{4x^2-8x+4}-2}{x^2-2x+1}+2$

وليكن (c_k) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق

1) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$ فإن : $k(2-x)=k(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$:

$$k(2-x)=-|2-x-1|+\frac{\sqrt{4(2-x)^2-8(2-x)+4}-2}{(2-x)^2-2(2-x)+1}+2=-|1-x|+\frac{\sqrt{4(4+x^2-4x)-16+8x+4}-2}{4+x^2-4x-4+2x+1}+2$$

$$k(2-x)=-|1-x|+\frac{\sqrt{16+4x^2-16x-16+8x+4}-2}{4+x^2-4x-4+2x+1}+2=-|x-1|+\frac{\sqrt{4x^2-8x+4}-2}{4+x^2-4x-4+2x+1}+2$$

بما أن : $k(2-x)=k(x)$ ومنه المنحنى (c_k) يقبل المستقيم $x=1$ كمحور تناظر له

2) التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$ فإن : $k(x)=f(|x-1|)+2$

من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$ لدينا :

$$k(x)=-|x-1|+\frac{\sqrt{4(x^2-2x+2)}-2}{x^2-2x+1}+2=-|x-1|+\frac{\sqrt{4(x-1)^2}-2}{(x-1)^2}+2=-|x-1|+\frac{2\sqrt{(x-1)^2}-2}{(x-1)^2}+2$$

$$k(x)=-|x-1|+\frac{2|x-1|-2}{(x-1)^2}+2=f(|x-1|)+2$$

3) من أجل $x>1$ بين أن المنحنى (c_k) صورة المنحنى (c_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه

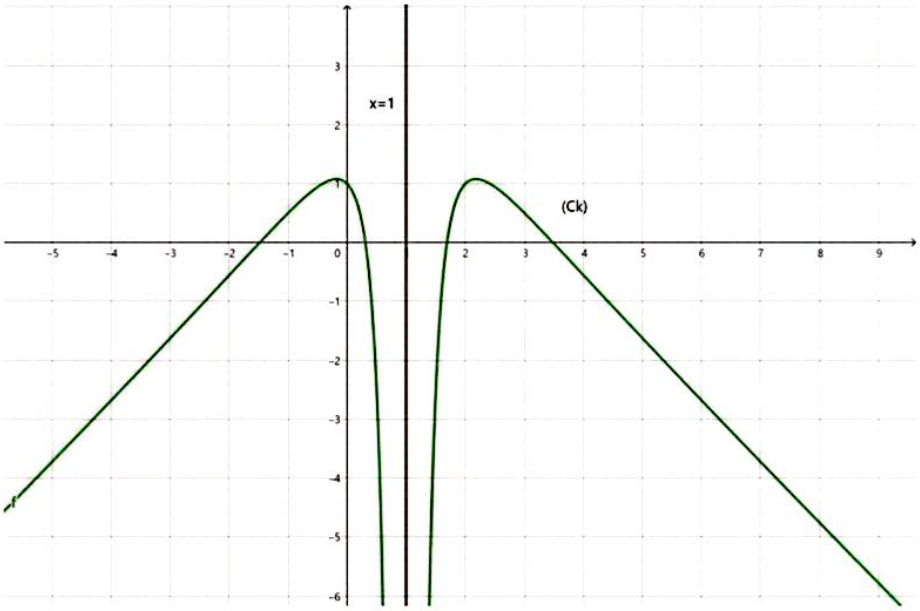
لدينا لما $x>1$ فإن $x-1>0$ أي $|x-1|=x-1$ ومنه : $k(x)=f(x-1)+2$ أي :

(c_k) صورة المنحنى (c_f) بإنسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Scanned with CamScanner

• رسم المنحنى (c_k) إنطلاقا من المنحنى (c_f) موضحا الطريقة المتبعة :

على المجال $]1;+\infty[$ (c_k) صورة المنحنى (c_f) بإنسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ وبما أن المستقيم $x=1$ محور تناضر للمنحنى (c_k) وعليه نرسم نضير المنحنى (c_k) فالمجال $]1;+\infty[$ على المجال $]-\infty;1[$ (أنضر للشكل)



Scanned with CamScanner