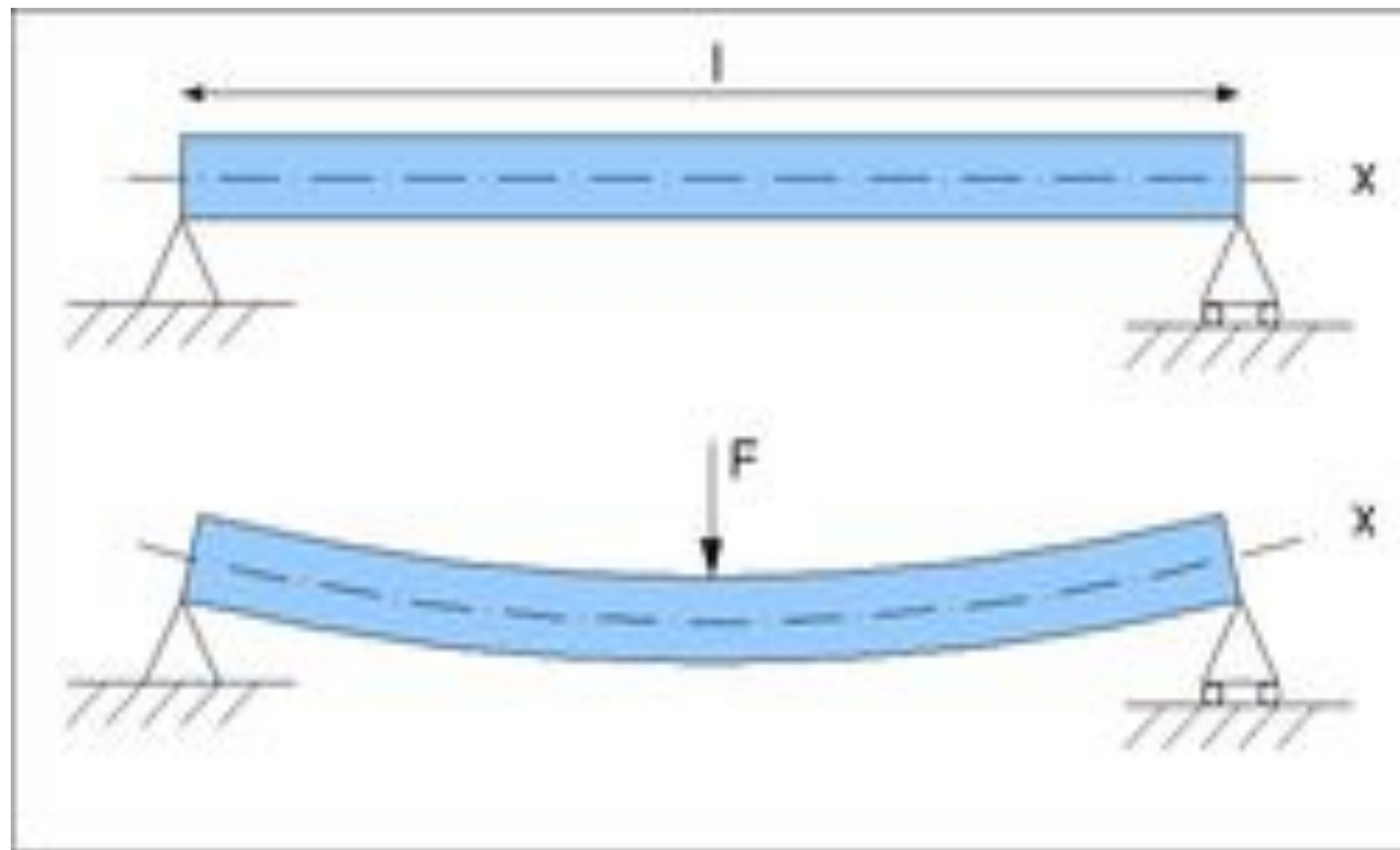


# FLEXION SIMPLE



# HYPOTHESES DE CALCUL

## 1- INTRODUCTION :

Parmi les hypothèses de calcul utilisées en béton armé, trois sont pratiquement communes à toutes les théories; il s'agit de :

- la conservation des sections planes.
- L'adhérence acier-béton.
- Non prise en compte du béton tendu.

D'autres hypothèses sont spécifiques à certaines théories et règlements. Elles relient, en général, les contraintes du béton à ses déformations.

## **2 - HYPOTHESES :**

Les hypothèses de calcul diffèrent selon l'état limite considéré. Néanmoins les trois hypothèses pré-citées sont valables pour les 2 états limites que nous étudierons : l'Etat Limite Ultime, et l'Etat Limite de Service (E.L.U et E.L.S)

### **2-1 HYPOTHESES COMMUNES :**

#### **a) Le béton tendu est négligé :**

Le béton est supposé fissuré jusqu'à l'axe neutre; c'est-à-dire que toute la zone tendue est supposée fissurée.

#### **b) Conservation des sections planes :**

C'est l'hypothèse classique utilisée en résistance des matériaux, c'est la loi de Navier, qui est à la base de tous les calculs de flexion.

#### **c) Adhérence acier-béton :**

On suppose qu'il n'y a pas de glissement entre l'acier et le béton. Chaque armature subit la même variation linéaire que la gaine de béton qui l'enrobe.

Ce groupe d'hypothèses constitue une idéalisation des conditions réelles.

## 2-2 HYPOTHESES COMPLEMENTAIRES A L'ELU :

a) Le raccourcissement ultime du béton est limité à :

- $\epsilon_{bc} = 3,5 \text{ ‰}$  en flexion.
- $\epsilon_{bc} = 2 \text{ ‰}$  en compression centrée.

b) L'allongement ultime des aciers est limité à :

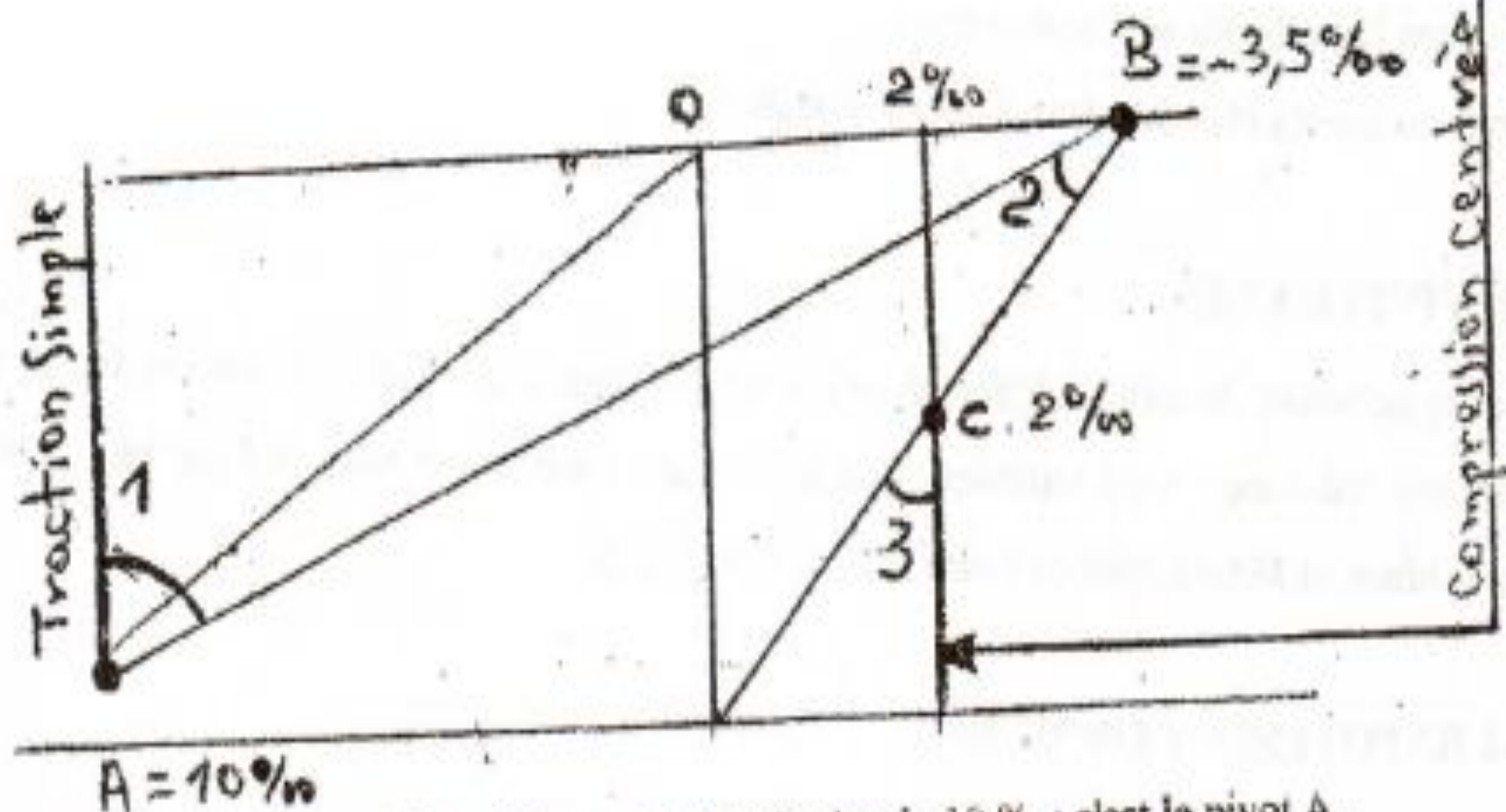
- $\epsilon_s = 10 \text{ ‰}$  dans tous les cas.

**Remarque :** Le raccourcissement de l'acier comprimé doit être identique à celui du béton comprimé.

$$\epsilon_{bc} = \epsilon_{sc}$$

c) Le diagramme linéaire des déformations doit passer par l'un des trois pivots : A, B ou C : C'est la règle des trois pivots.

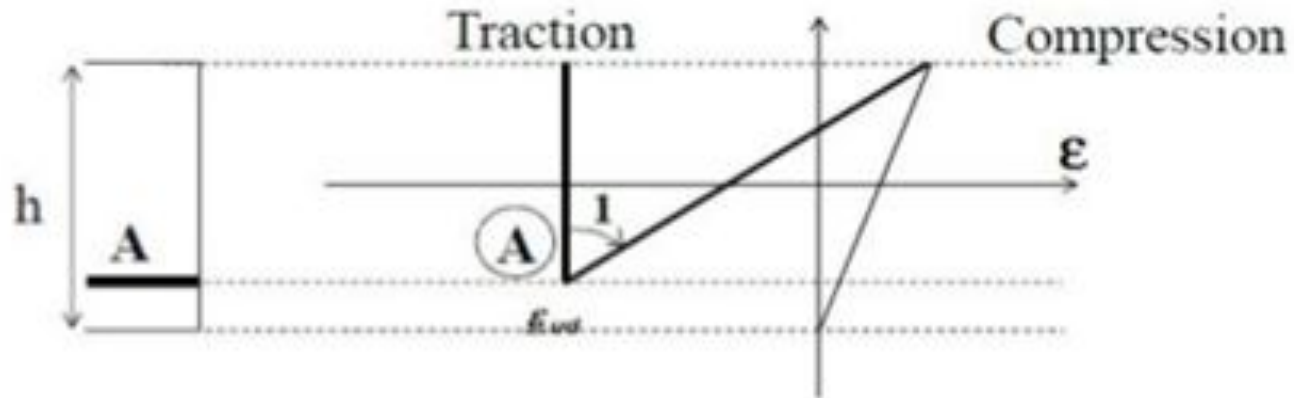




Le domaine 1 correspond à un allongement de l'acier de  $10\text{‰}$  : c'est le pivot A.

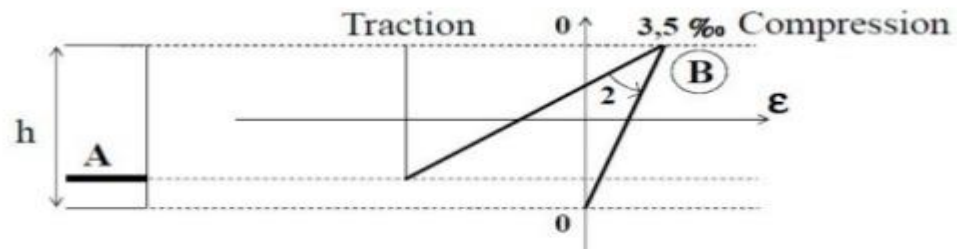
Le domaine 2 correspond à un raccourcissement de béton de  $3,5\text{‰}$  : c'est le pivot B.

Le domaine 3 correspond à une section entièrement comprimée : c'est le pivot C.



1. Introduction 2. Hypothèses 3. Sec. rect. ( $A'=0$ ) 4. Sec. rect. avec  $A'$  5. Section en T 6. Divers

### ➤ Pivot B (Cas courant)



□ Béton :  $\epsilon_c = \epsilon_{cu2} = 3.5 \text{ ‰}$  ,  $\epsilon_{c2} = 2 \text{ ‰}$  (pour  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ )  
 $\epsilon_s \leq \epsilon_{ud}$

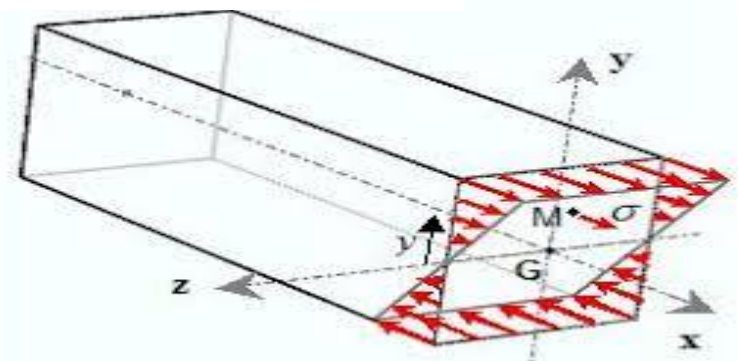
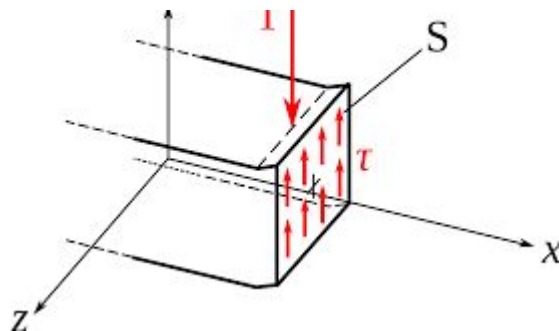
Marwan SADEK

## Définition :

Une poutre est soumise à la flexion simple lorsque l'ensemble des forces et couples extérieurs à gauche de cette section se réduisent, au centre de gravité de cette section, à :

- Un moment fléchissant  $M$
- Un effort tranchant  $V$

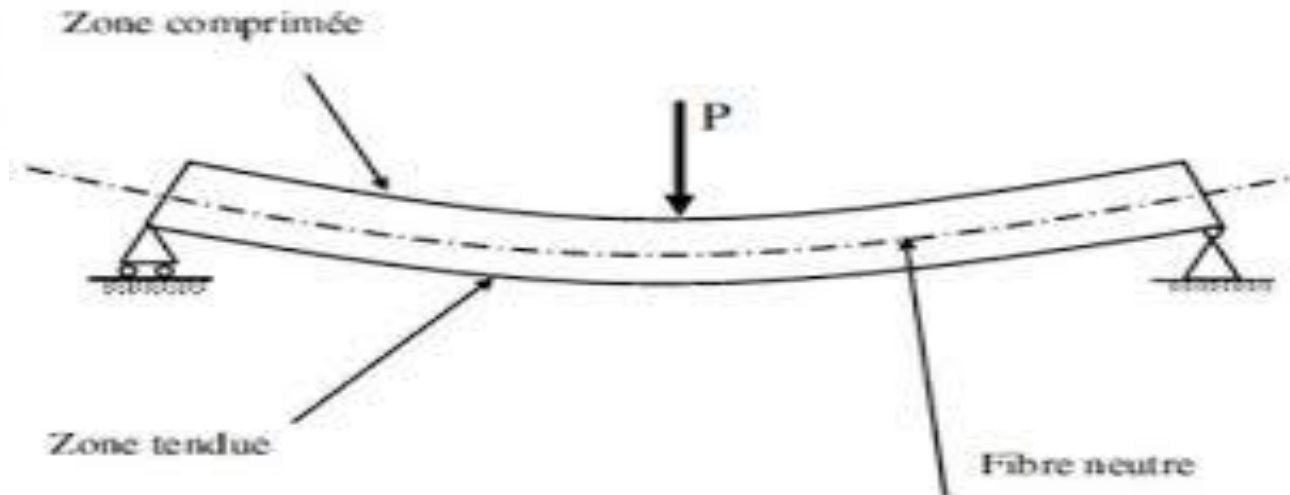
Le moment de flexion  $M$  et l'effort tranchant  $V$  sont étudiés séparément.



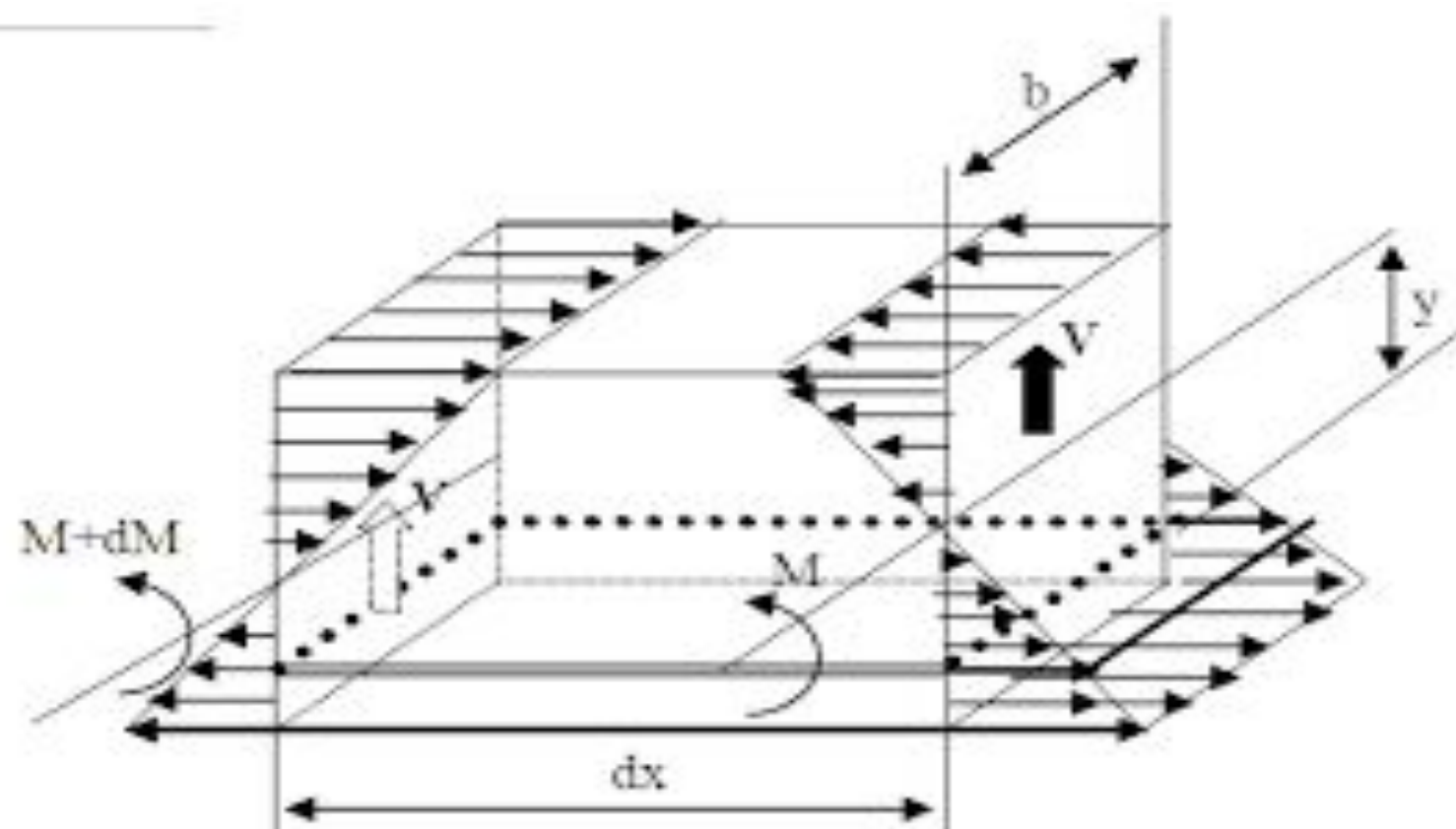
# CALCUL VIS A VIS DU MOMENT FLECHISSANT $M$

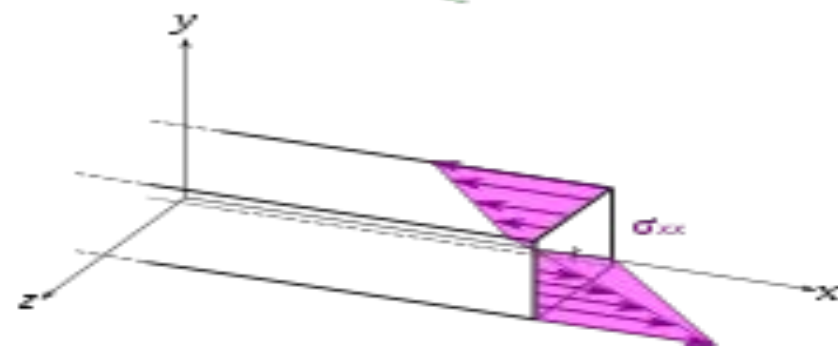
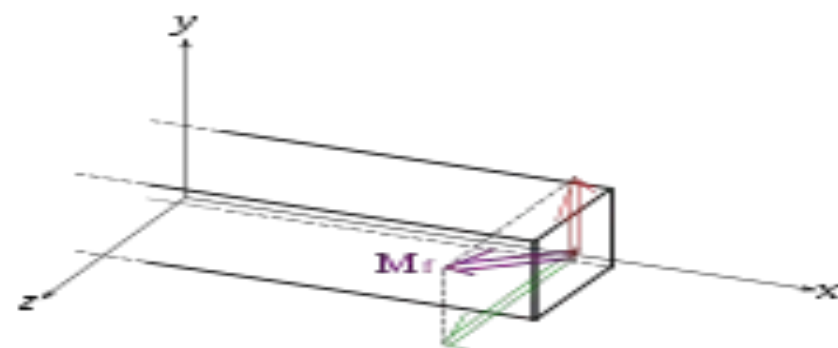
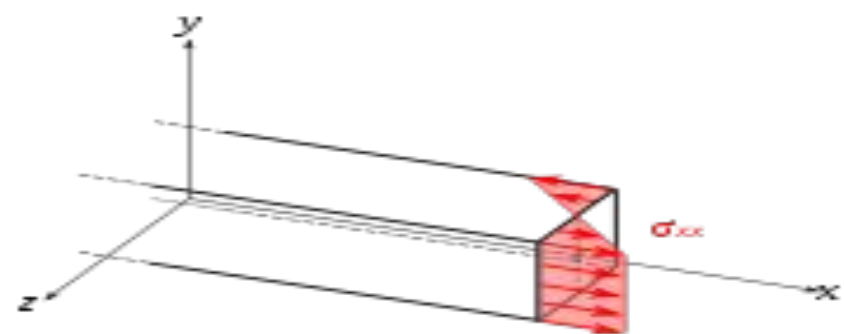
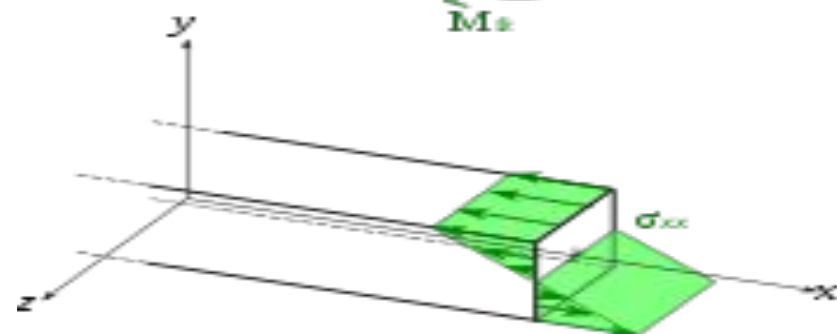
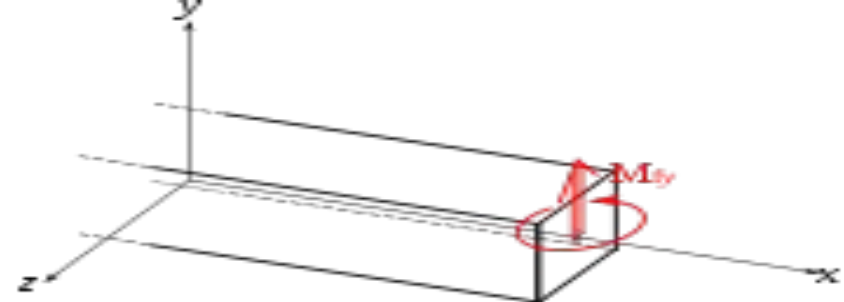
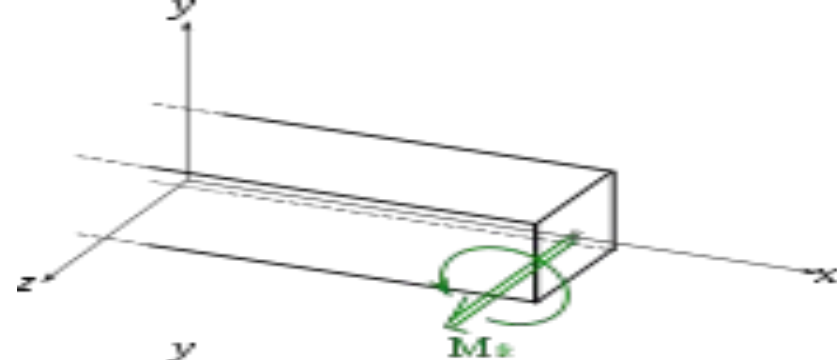
## I- QUELQUES DEFINITION UTILES

La flexion d'une section provoque sur celle-ci une zone comprimée et une zone tendue. Par exemple, pour une poutre isostatique, lorsque le moment est positif, la zone comprimée se trouve en haut et la zone tendue se trouve en bas, les deux zones sont séparées par l'axe neutre. Ceci apparaît clairement sur les diagrammes ci-dessous : (fig1 et fig2)









# I-1 Diagrammes des contraintes à l'ELS

Pour une section quelconque, les diagrammes des contraintes à l'ELS, se présentent comme suit :

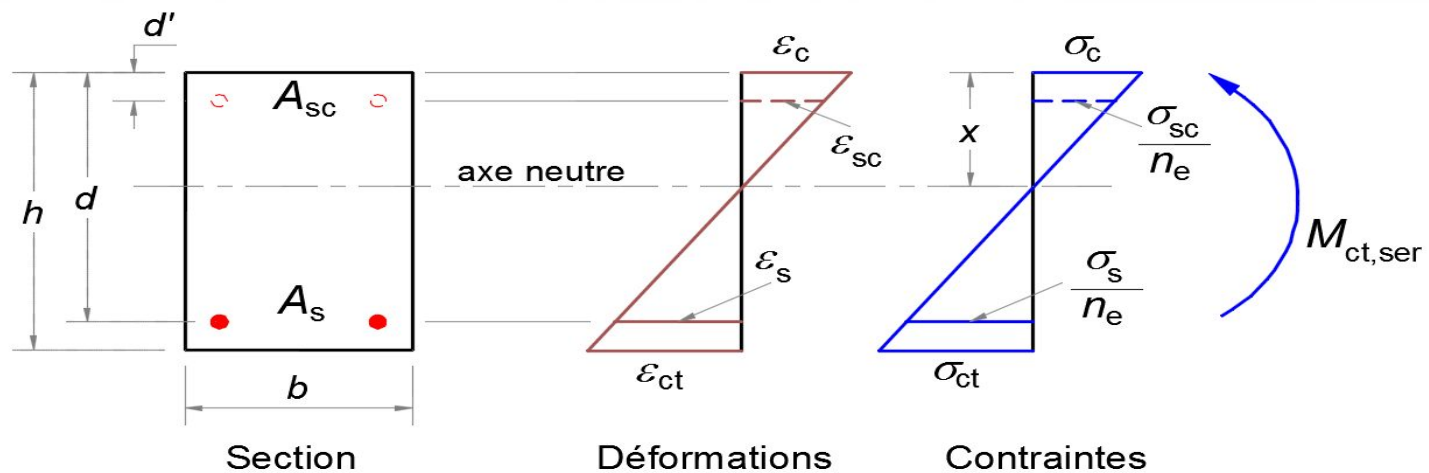
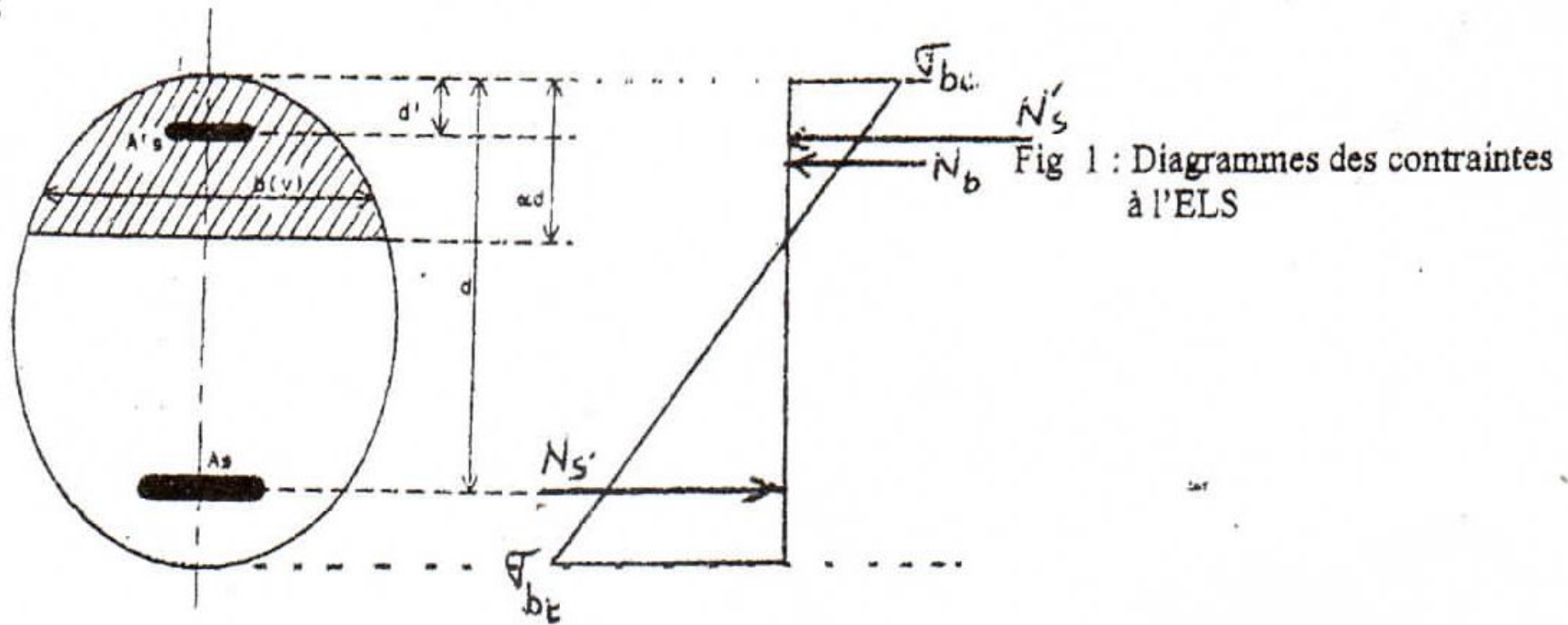


Figure b6-1 : Section rectangulaire soumise à la flexion simple à l'ELS

## I-2 Diagrammes des contraintes et des déformations à l'ELU

Pour une section quelconque, les diagrammes des contraintes et des déformations à l'ELU, se présentent comme suit :

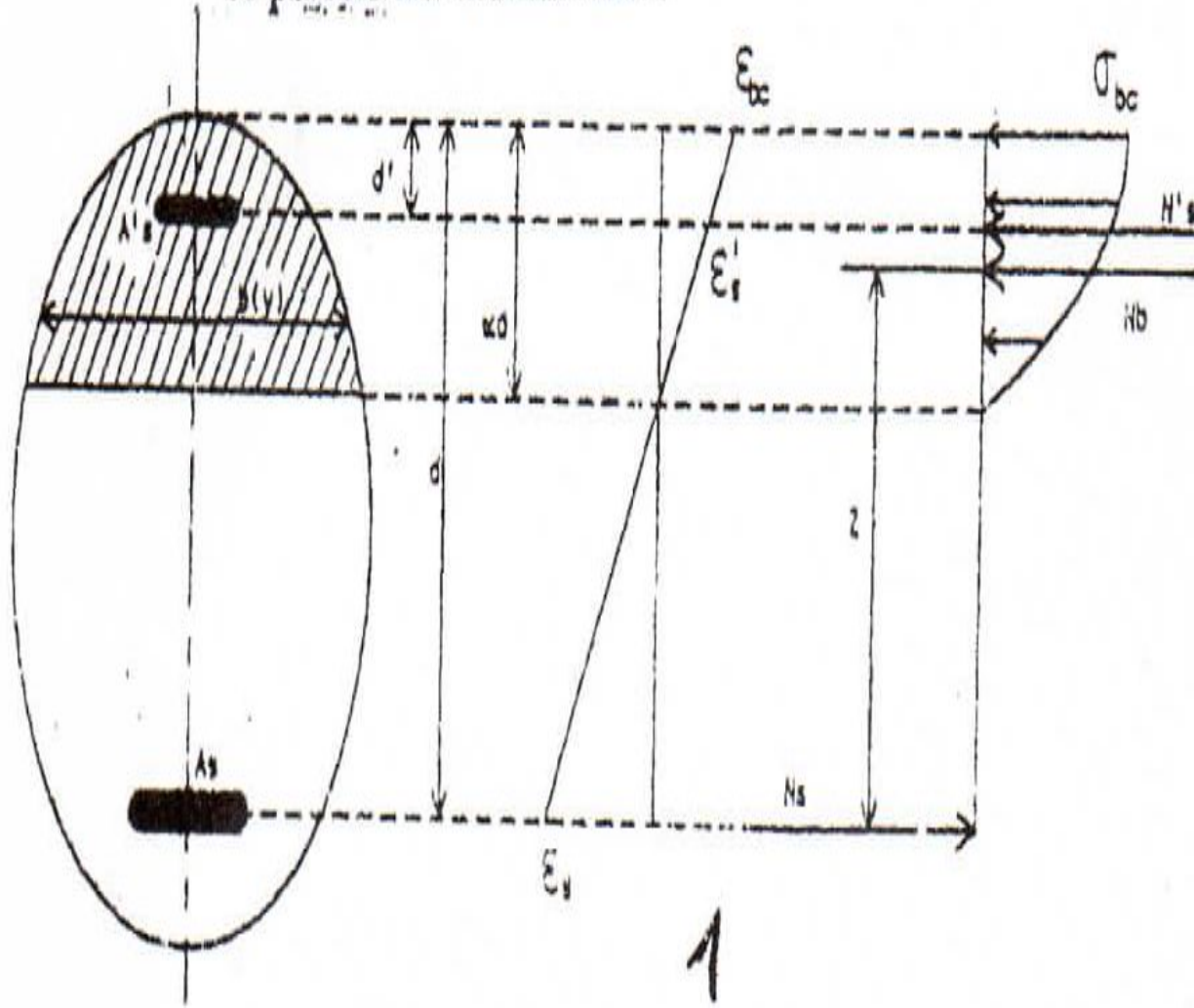


Fig 2 : Diagrammes des contraintes et des déformations à l'ELU.



On considère  $y = \alpha.d$

$y$  = hauteur de la partie comprimée

$d$  = distance entre les aciers tendus et la fibre la plus comprimée.

### I-3 Règle des trois pivots :

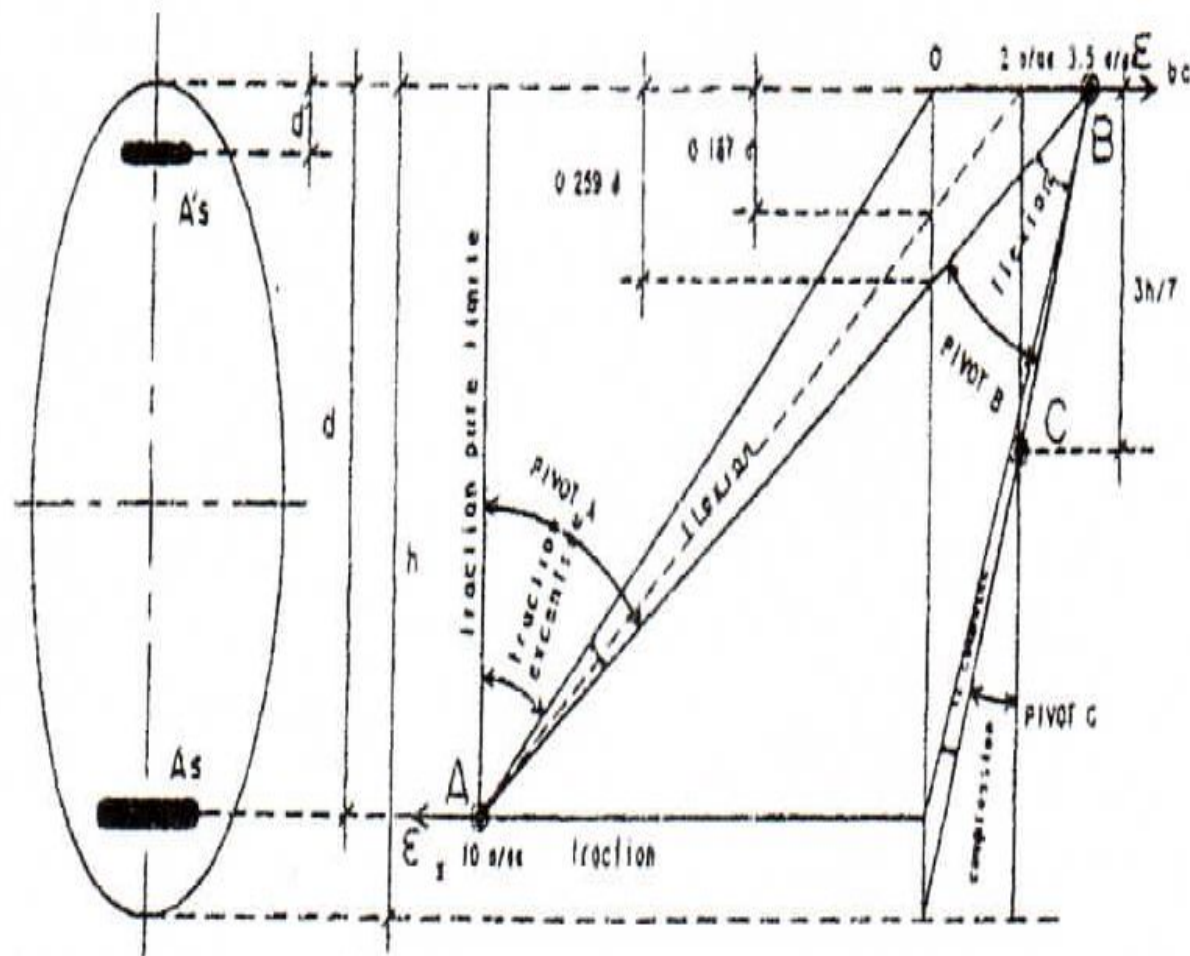


Fig 3 : Règle des trois pivots

flexion simple, la rupture à l'ELU est caractérisée par la formation d'une fissure de traction.

En flexion simple, la rupture à l'ELU peut se faire de deux manières.

- 1<sup>er</sup> cas : Lorsque la déformation dans les aciers dépasse la valeur de 10‰, c'est-à-dire lorsqu'il y a écoulement plastique des aciers.

Dans ce cas :  $\varepsilon_s = 10\text{‰}$  et  $0 \leq \varepsilon_{bc} \leq 3,5\text{‰}$

$$y = \alpha \cdot d \longrightarrow 0 \leq \alpha \leq 0,259$$

Il s'agit ici du pivot A, on fait pivoter l'axe AB sur le point A vers la gauche.

- 2<sup>eme</sup> cas : Lorsque la déformation dans le béton dépasse la valeur de 3,5‰, c'est-à-dire lorsqu'il y a écrasement du béton.

Dans ce cas :  $\varepsilon_{bc} = 3,5\text{‰}$  et  $0 \leq \varepsilon_s \leq 10\text{‰}$

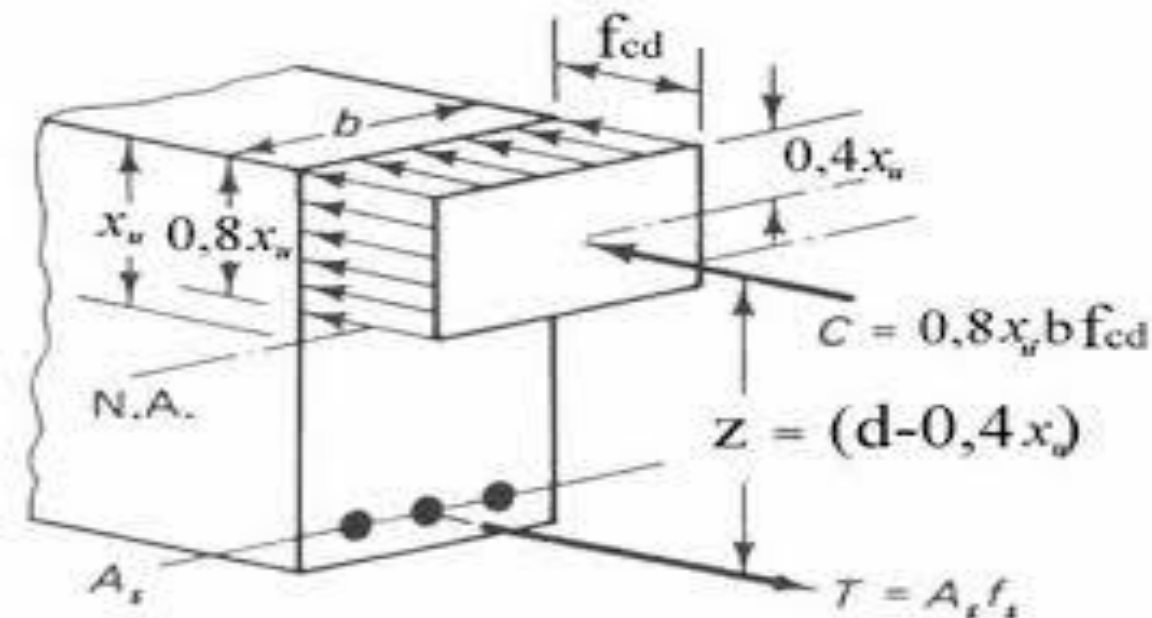
$$y = \alpha \cdot d \longrightarrow 0,259 \leq \alpha \leq 1$$

Il s'agit ici du pivot B, on fait pivoter l'axe AB sur le point B vers la droite.

Remarque :

On rencontre aussi, le pivot A en traction simple et composée et le pivot B en flexion composée. Il existe également un troisième cas, celui du **pivot C**, rencontré en compression simple et composée.

Au **pivot C** :  $2\text{‰} \leq \varepsilon_{bc} \leq 3,5\text{‰}$  sur la fibre la plus comprimée  
 $\varepsilon_{bc} \leq 2\text{‰}$  sur la fibre la moins comprimée





## II - CALCUL A L'ELU

### II-1 EQUILIBRE D'UNE SECTION A L'ELU :

La section est en équilibre sous les efforts résistants dus au béton comprimé et aux aciers tendus et comprimés.

$$N_b + N_s - N'_s = 0 \quad (1) \quad \left\{ \begin{array}{l} N'_s = \text{effort résistant des armatures comprimées} \\ N_s = \text{effort résistant des armatures tendues} \end{array} \right.$$

$$M_u = z.N_b + (d - d')N'_s \quad (2)$$

Avec :

$$\left. \begin{array}{l} N_s = A_s \sigma_s \\ N'_s = A'_s \sigma_{sc} \\ N_b = 0,8 \alpha b d f_{bu} \end{array} \right\} \quad (3)$$

$N_b \longrightarrow$  Obtenue par le calcul de l'intégrale des contraintes de compression sur la surface de béton comprimée. Pour simplification, ce calcul a été effectué en considérant le diagramme parabolique de hauteur  $y$  en un rectangle de hauteur  $0,8y$ . (diagramme rectangle simplifié).

$$N_b = \iint_{B(y)} \sigma_b . dB(y), \quad B(y) = \text{surface de béton comprimé}$$
$$z = d(1 - 0,4\alpha) \quad (4)$$



## II-2 CALCUL DES SECTIONS RECTANGULAIRES

### En fissuration peu préjudiciable (FPP)

En béton armé, on calcule toujours des armatures pour la partie tendue du béton, cependant la partie comprimée peut nécessiter ou non des armatures et ceci selon la résistance du béton et les dimensions de la section. On parle dans ce cas d'armatures tendues  $A_s$  et d'armatures comprimées

$A'_s$

### **II-2-1 SECTIONS RECTANGULAIRES SANS ARMATURES COMPRIMEES**

Les équations (1) et (2) deviennent dans ce cas :

$$0,8\alpha bdf_{bu} - A_s\sigma_s = 0 \quad (5)$$

$$M_u = z.0,8\alpha bdf_{bu} \quad (6)$$

La solution des deux équations, nous permet d'obtenir la section des armatures par :

$$\boxed{A_s = \frac{M_u}{z \cdot \sigma_s}} \quad (7) \quad \text{avec :} \quad \boxed{z = d(1 - 0,4\alpha)} \quad (4)$$

En développant l'équation (6), on obtient :

$$\frac{M_u}{bd^2 f_{bu}} = 0,8\alpha(1 - 0,4\alpha)$$

On appelle  $\mu_{bu}$  le rapport :  $\frac{M_u}{bd^2 f_{bu}} \Rightarrow \mu_{bu} = 0,8\alpha(1 - 0,4\alpha)$  (8)

Et  $\alpha = 1,25 \left[ 1 - \sqrt{1 - 2\mu_{bu}} \right]$  (9)

Si  $\mu_{bu} \leq 0,186, (0 \leq \alpha \leq 0,259) \longrightarrow$  pivot A

Si  $\mu_{bu} > 0,186, (0,259 \leq \alpha \leq 1) \longrightarrow$  pivot B

Selon le pivot et selon la valeur de la déformation des aciers  $\varepsilon_s$ , on peut calculer  $\sigma_s$  par :

$$\sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s} \quad \text{C'est le cas du pivot A}$$

et le pivot B lorsque  $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{se}$  (dans le cas des Fe400,  $\varepsilon_{se} = 1,739 \cong 1,74 \text{ ‰}$ )

$$\sigma_s = E \cdot \varepsilon_s \quad \text{Cas du pivot B lorsque } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{se}$$

## II-2-2 COMMENT SAVOIR SI LA SECTION A BESOIN OU NON D'ARMATURES COMPRIMEES ?

On fait intervenir dans ce cas la notion de moment limite  $M_{lu}$  ou son correspondant en moment limite réduit  $\mu_{lu}$ . Le moment  $M_{lu}$  (ou  $\mu_{lu}$ ) correspond au cas où  $A_{su} = A_{sser}$ . La valeur de  $\mu_{lu}$  par rapport à  $\mu_{bu}$  est déterminante pour savoir si on a besoin ou non de  $A'_s$ .

si  $\mu_{bu} \leq \mu_{lu} \rightarrow A'_s = 0$  le calcul est conduit comme en II-1

si  $\mu_{bu} > \mu_{lu} \rightarrow$  il faut : - soit changer les dimensions de la section  
- soit augmenter la résistance du béton  
- soit **prévoir des armatures comprimées** ( $A'_s \neq 0$ )

Le calcul exacte de  $\mu_{lu}$  est complexe car il dépend de plusieurs paramètres comme  $f_{c28}$ ,  $f_e$ ,  $\theta$ , et  $\gamma = \frac{M_u}{M_{ser}}$ . Il existe des tables qui donnent  $\mu_{lu}$  en fonction de ces paramètres. Il existe également des formules approchées pour des valeurs usuelles de  $f_{c28}$ .

Pour  $\theta = 1$ , on a :

$$\mu_{lu} = 10^{-4} (3440\gamma + 49f_{c28} - 3050) \quad \text{pour FeE400 et } f_{c28} \leq 30MPa$$

$$\mu_{lu} = 10^{-4} (3220\gamma + 51f_{c28} - 3100) \quad \text{pour FeE500 et } f_{c28} \leq 30MPa$$

Si  $\theta \neq 1$ , on a :

$$\mu_{lu}(\theta) = \mu_{lu}.k.\theta \quad \text{où } k = \left(1 - \frac{1-\theta}{8,5}\right)$$



## II-2-3 SECTIONS RECTANGULAIRES AVEC ARMATURES COMPRIMEES

Dans ce cas, les équations d'équilibre (deux équations) sont insuffisantes car il y a trois inconnus :  $A_s$ ,  $A'_s$  et  $\alpha$ . On résout le problème en utilisant un artifice qui consiste à considérer que la section est la superposition de deux sections, la première égale à la section d'origine mais sans  $A'_s$  sollicitée par un moment  $M_1 = M_{lu}$  et armée par  $A_{s1}$  et la deuxième à largeur nulle (ne comportant que les aciers, soumise à  $M = M_{lu} - M_1$ , armée par  $A'_s$  et  $A_s - A_{s1}$  dans le cas où  $A'_s \neq 0$ ).



par un moment  $M_1 = M_{lu}$  et armée par  $A_{s1}$  et la deuxième à largeur nulle (ne comporte pas d'acier), soumise à  $M = M_{lu} - M_1$ , armée par  $A'_s$  et  $A_s - A_{s1}$  dans le cas où  $A'_s \neq 0$ .

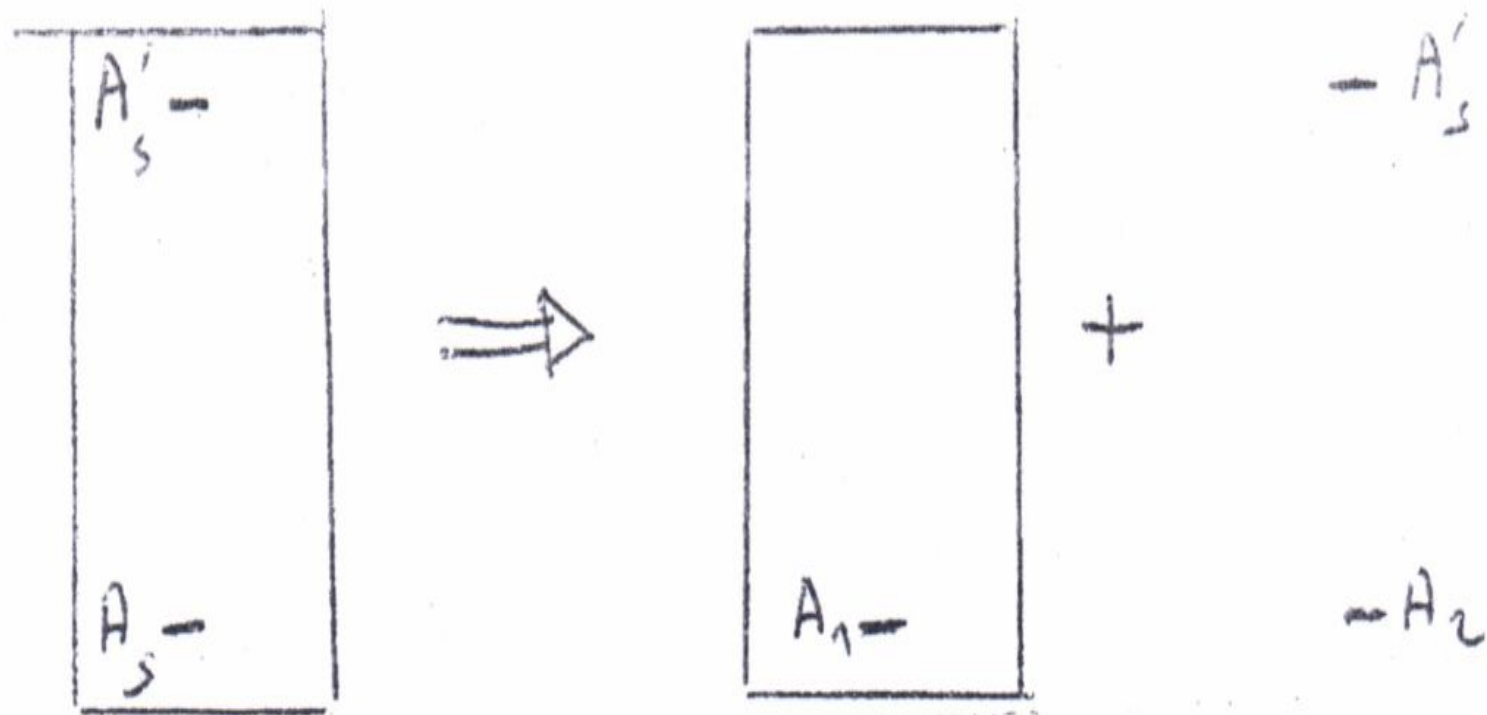


Fig 4 : principe de calcul de section rectangulaire avec  $A'_s$

Les calculs conduisent aux relations suivantes:

$$A'_u = \frac{M_u - M_{lu}}{\sigma_{scl}(d - d')} \quad (10)$$

**Ceci à condition que :**  $M_u - M_{lu} \leq 0,4 M_u$  (11)

**Sinon, il faut redimensionner**

$$A_u = A_1 + A_2 \Rightarrow A_u = \frac{M_{lu}}{z_l \sigma_{sl}} + A'_u \frac{\sigma_{scl}}{\sigma_{sl}} \quad (12)$$

Avec :  $M_{lu} = \mu_{lu} b_0 d^2 f_{bu}$

$$\alpha_l = 1,25 \left[ 1 - \sqrt{1 - 2\mu_{lu}} \right]$$

$$\boxed{z_l = d(1 - 0,4\alpha_l)}$$

$\sigma_s = f(\varepsilon_s) \rightarrow \varepsilon_s \leq \text{ou} \geq \varepsilon_e$  en fonction des pivots A ou B

$\sigma_{sc} = f(\varepsilon_{sc}) \rightarrow \varepsilon_{sc} \leq \text{ou} \geq \varepsilon_e$

Pivot B  $\rightarrow \varepsilon_{bc} = 3,5 \text{ ‰} \Rightarrow \varepsilon_s = 3,5 \frac{1 - \alpha}{\alpha} \text{ ‰}$

$$\varepsilon_{sc} = 3,5 \frac{\alpha - \delta'}{\alpha} \text{ ‰} \quad \text{avec} \quad \delta' = \frac{d'}{d}$$

Les contraintes s'écrivent alors :  $\sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$  ;

$$\sigma_{sc} = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

ou  $\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s$

$$\sigma_{sc} = E_s \cdot \varepsilon_s$$

### III- CALUL A L'ELS

#### Equations d'équilibre à l'ELS

En étudiant l'équilibre de la section, nous retrouvons des équations analogues à celles de l'ELU c.a.d les équations (1) et (2), mais les efforts s'expriment différemment.

$$N_{b,ser} + N'_{s,ser} - N_{s,ser} = 0 \quad (1')$$

$$M_{ser} = z_{ser} \cdot N_{b,ser} + (d - d') N'_{s,ser} \quad (2')$$

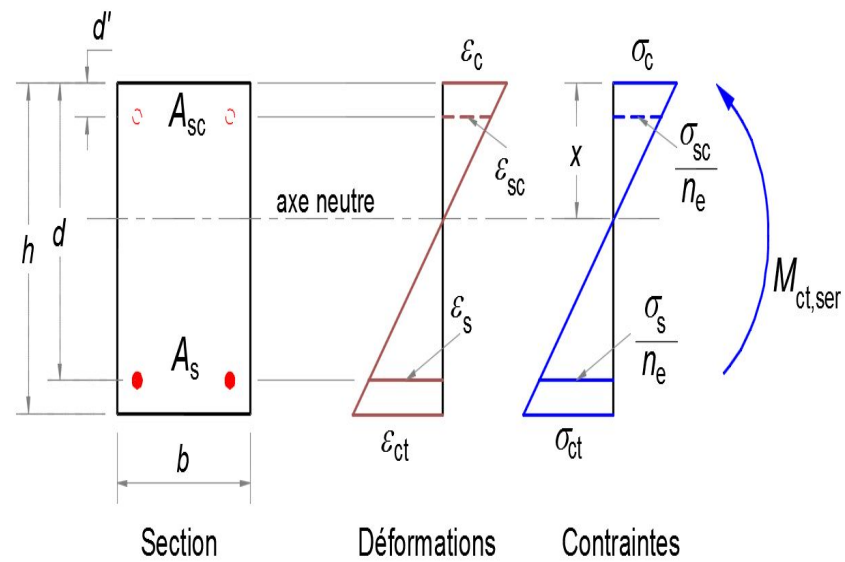
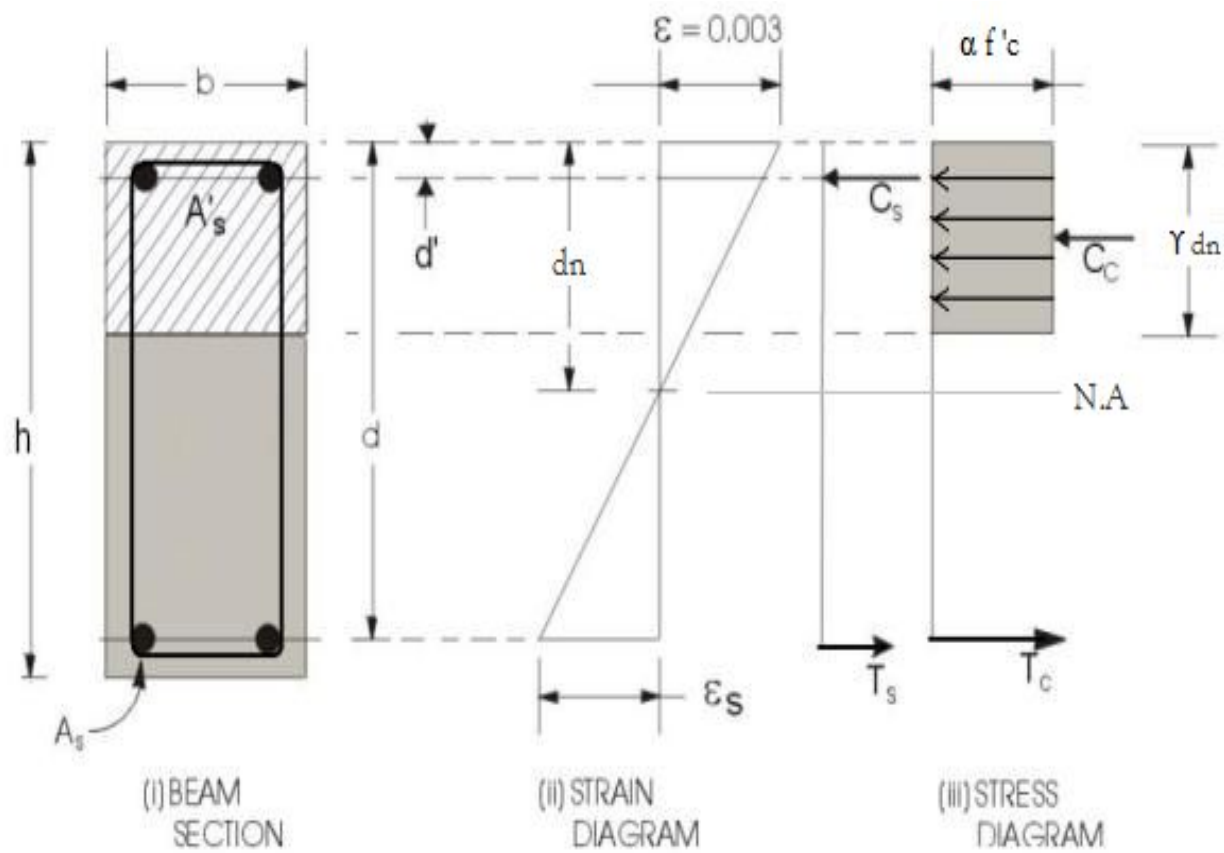
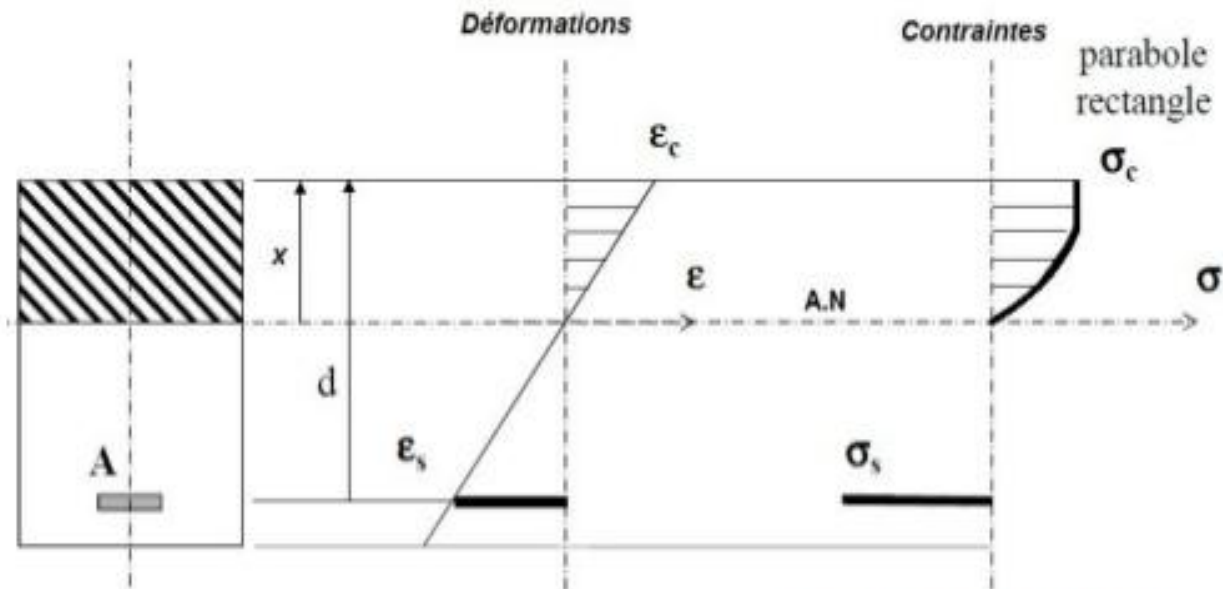


Figure b6-1 : Section rectangulaire soumise à la flexion simple à l'ELS





## Section rectangulaire, sans armature comprimée ( $A'=0$ )

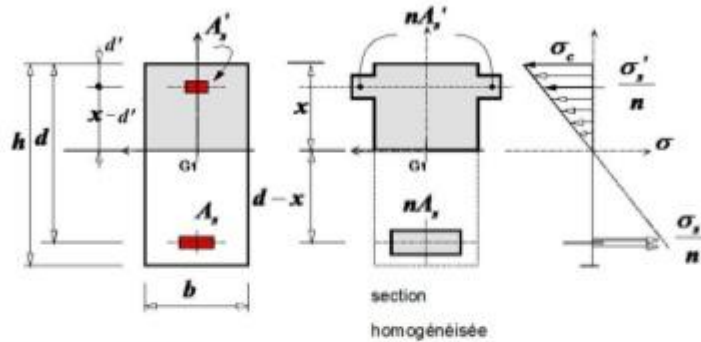


Simplification de la loi de comportement de l'acier

EC2 3.1.7(3)



Marwan SADEK

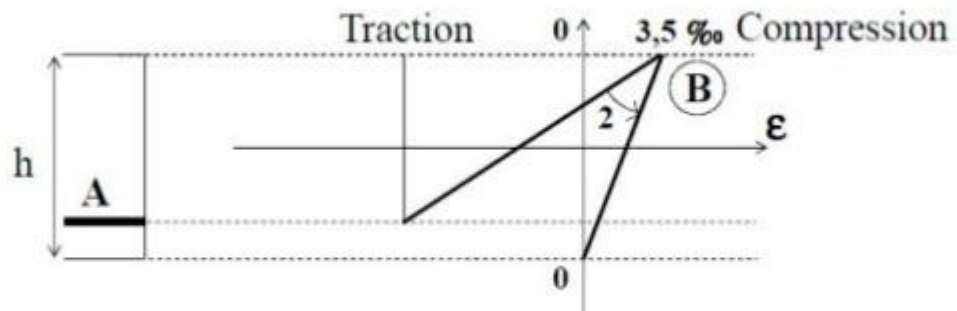


### ➤ Forces internes

- Béton comprimé  $F_c = \sigma_c \cdot b \cdot x / 2 = K \cdot b \cdot x^2 / 2$
- Acier tendu  $A_s$   $F_s = A_s \cdot \sigma_s = n \cdot K \cdot A_s \cdot (d - x)$
- Acier comprimé  $A'_s$   $F'_s = A'_s \cdot \sigma'_s = n \cdot K \cdot A'_s (x - d')$

Marwan SADEK

### ➤ Pivot B (Cas courant)



□ **Béton :**  $\epsilon_c = \epsilon_{cu2} = 3.5\text{‰}$  ,  $\epsilon_{c2} = 2\text{‰}$  (pour  $f_{ck} \leq 50\text{ MPa}$ )  
 $\epsilon_s \leq \epsilon_{ud}$



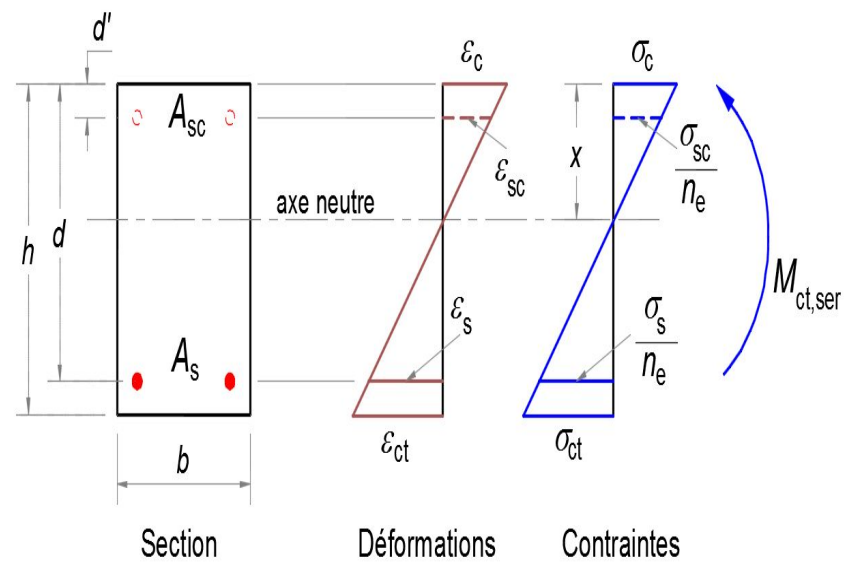
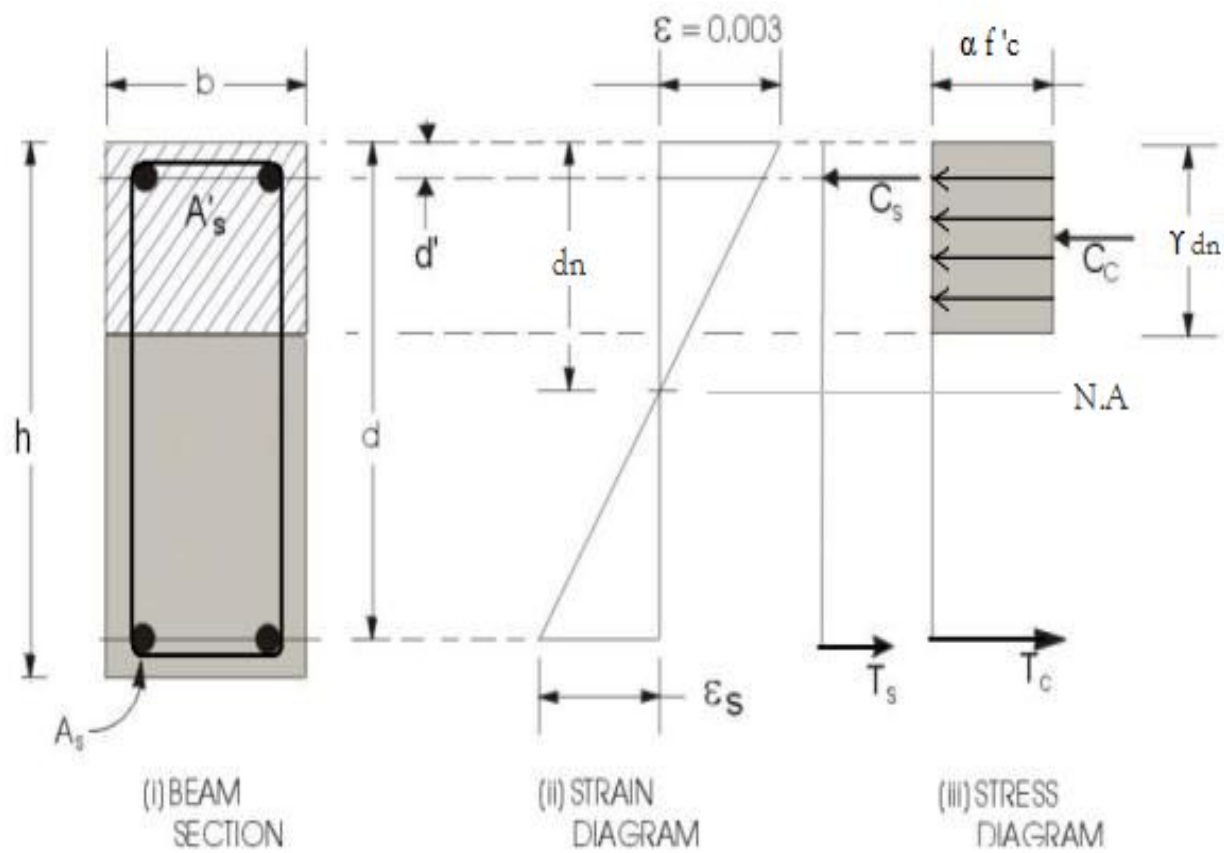


Figure b6-1 : Section rectangulaire soumise à la flexion simple à l'ELS



## II - CALCUL A L'ELU

### II-1 EQUILIBRE D'UNE SECTION A L'ELU :

La section est en équilibre sous les efforts résistants dus au béton comprimé et aux aciers tendus et comprimés.

$$N_b + N_s' - N_s = 0 \quad (1) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_b = \text{résultante des contraintes de compression du béton} \\ N_s' = \text{effort résistant des armatures comprimées} \\ N_s = \text{effort résistant des armatures tendues} \end{array} \right.$$

$$M_u = z.N_s + (d - d')N_s' \quad (2)$$

Avec :

$$\left. \begin{array}{l} N_s = A_s \sigma_s \\ N_s' = A_s' \sigma_{sc} \\ N_b = 0,8 \alpha b d f_{bc} \end{array} \right\} \quad (3)$$

$N_b \longrightarrow$  Obtenue par le calcul de l'intégrale des contraintes de compression sur la surface de béton comprimée. Pour simplification, ce calcul a été effectué en considérant le diagramme parabolique de hauteur  $y$  en un rectangle de hauteur  $0,8y$ . (diagramme rectangle simplifié).

$$N_b = \int_{B(y)} \sigma_b dB(y), \quad B(y) = \text{surface de béton comprimé}$$
$$z = d(1 - 0,4\alpha) \quad (4)$$

Si  $\mu_{bu} \leq 0,186, (0 \leq \alpha \leq 0,259) \longrightarrow$  pivot A

Si  $\mu_{bu} > 0,186, (0,259 \leq \alpha \leq 1) \longrightarrow$  pivot B

Capitule rectangulaire

Selon le pivot et selon la valeur de la déformation des aciers  $\varepsilon_s$ , on peut calculer  $\sigma_s$  par :

$$\sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s} \quad \text{C'est le cas du pivot A}$$

et le pivot B lorsque  $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{se}$  (dans le cas des Fe400,  $\varepsilon_{se} = 1,739 \cong 1,74 \text{ ‰}$ )

$$\sigma_s = E \cdot \varepsilon_s \quad \text{Cas du pivot B lorsque } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{se}$$



## II-2-2 COMMENT SAVOIR SI LA SECTION A BESOIN OU NON D'ARMATURES COMPRIMEES ?

On fait intervenir dans ce cas la notion de moment limite  $M_{lu}$  ou son correspondant en moment limite réduit  $\mu_{lu}$ . Le moment  $M_{lu}$  (ou  $\mu_{lu}$ ) correspond au cas où  $A_{su} = A_{sser}$ . La valeur de  $\mu_{lu}$  par rapport à  $\mu_{bu}$  est déterminante pour savoir si on a besoin ou non de  $A'_s$ .

si  $\mu_{bu} \leq \mu_{lu} \rightarrow A'_s = 0$  le calcul est conduit comme en II-1

si  $\mu_{bu} > \mu_{lu} \rightarrow$  il faut : - soit changer les dimensions de la section

- soit augmenter la résistance du béton

- soit **prévoir des armatures comprimées** ( $A'_s \neq 0$ )