Les mathématiques de la distanciation sociale

CHOUKRANI Omar

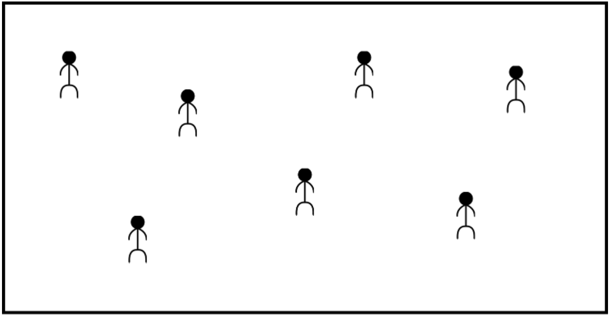
2021-2022 : **Santé, prévention.**

Travail d'**I**nitiative **P**ersonnelle **E**ncadré

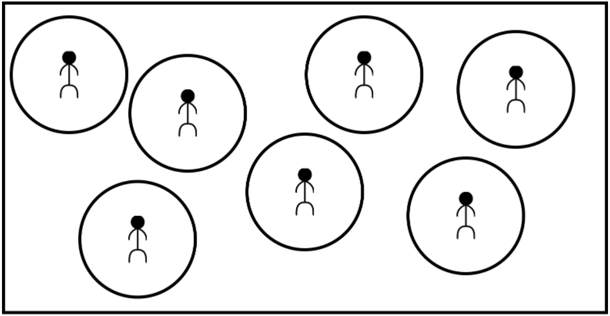
Plan de la présentation

Plan de la présentation

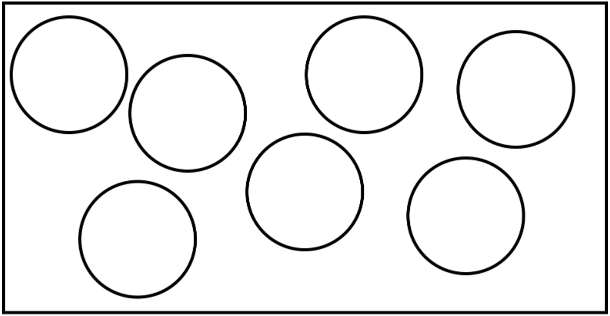
Motivation



Motivation



Motivation



Mais qu'est ce que l'empilement de sphères ?

Plan de la présentation

Définitions

- **Empilement de sphères :**
  C'est toute famille $(S(c_i, R))_{i \in I}$ telle que
  $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow \|c_i - c_j\| \geq 2R$.

Définitions

- **Empilement de sphères :**
  C'est toute famille $(S(c_i, R))_{i \in I}$ telle que
  $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow \|c_i - c_j\| \geq 2R$.

- **Densité d'un empilement de sphères :**
  C'est la proportion d'espace occupée par ces sphères.

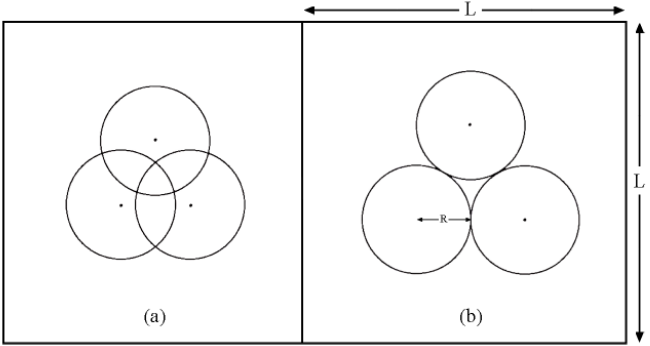
Définitions

- **Empilement de sphères :**
  C'est toute famille $(S(c_i, R))_{i \in I}$ telle que
  $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow \|c_i - c_j\| \geq 2R$.

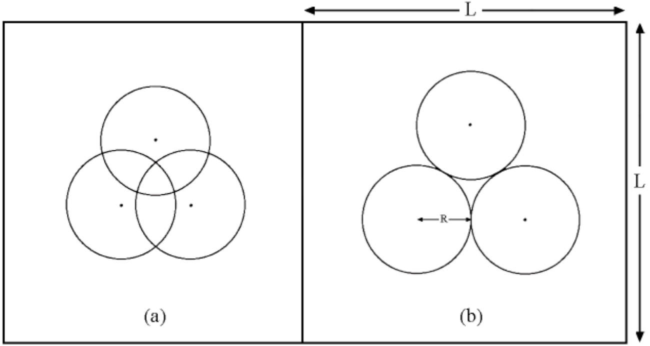
- **Densité d'un empilement de sphères :**
  C'est la proportion d'espace occupée par ces sphères.

- **Empilement compact :**
  Sa densité est maximale.

Exemples

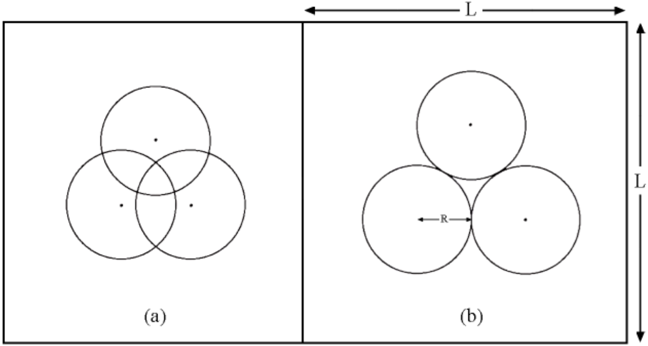


Exemples



(a) NON.

Exemples



(a) NON.

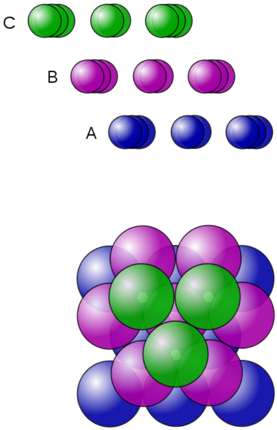
(b) OUI, de densité $\dfrac{3\pi R^2}{L^2}$.

Comment aboutir à un empilement compact ?

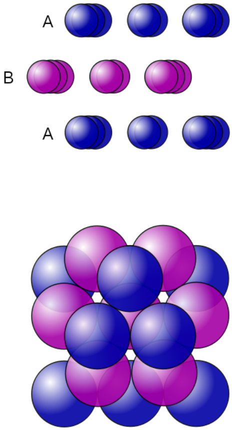
Un peu d'histoire

- **La conjecture de Kepler (1571 – 1630)** :
  L'empilement hexagonal compact et l'empilement cubique
  à faces centrées sont des empilements compacts en dimension 3.

Un peu d'histoire



Cubique à faces centrées ABC



Hexagonal compact ABA

Un peu d'histoire

- **La conjecture de Kepler (1571 – 1630)** :
  L'empilement hexagonal compact et l'empilement cubique à faces centrées sont des empilements compacts en dimension 3.

Un peu d'histoire

- **La conjecture de Kepler (1571 – 1630)** :
  L'empilement hexagonal compact et l'empilement cubique
  à faces centrées sont des empilements compacts en dimension 3.

- **Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)** :
  C'est vrai en réseau régulier !

Un peu d'histoire

- **La conjecture de Kepler (1571 – 1630)** :
  L'empilement hexagonal compact et l'empilement cubique
  à faces centrées sont des empilements compacts en dimension 3.

- **Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)** :
  C'est vrai en réseau régulier !

- En **2015**, avec **Thomas Hales** et **le projet Flyspeck** :
  démonstration formelle de la conjecture.

Théorème

Théorème de Thue

L'empilement hexagonal régulier est le plus dense empilement de sphères dans le plan. La densité correspondante à cet empilement est $\dfrac{\pi}{\sqrt{12}}$.

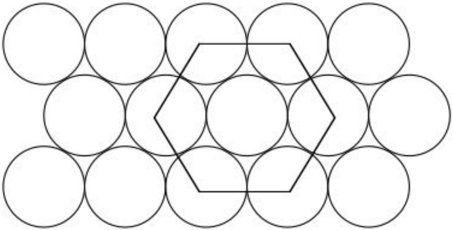


Figure 1: Empilement hexagonal régulier de cercles dans le plan.

Définition

- **Empilement hexagonal :**
  C'est tout empilement de sphères $(S(c_i, R))_{i \in I}$
  tel que : $\{c_i, i \in I\}$ repose sur un réseau hexagonal.

Exemples

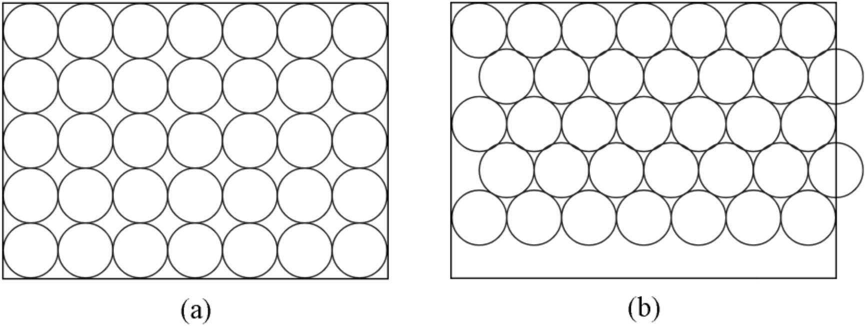


Figure 2:
(a) Empilement carré de 35 cercles dans un rectangle.
(b) Empilement hexagonal de 35 cercles dans un rectangle.

Exemples

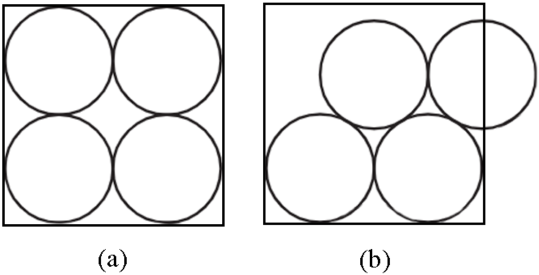


Figure 3:
(a) Empilement carré de 4 cercles dans un carré.
(b) Empilement hexagonal de 4 cercles dans un carré.

Hypothèses d'étude

Nous nous intéresserons aux empilements de sphères :

- Unitaires de $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right)$.

Hypothèses d'étude

Nous nous intéresserons aux empilements de sphères :

- Unitaires de $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right)$.
- Dont le nombre est hexagonal centré.

Hypothèses d'étude

Nous nous intéresserons aux empilements de sphères :

- Unitaires de $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right)$.
- Dont le nombre est hexagonal centré.
- Dans un espace infini (i.e absence d'effet de bord).

Hypothèses d'étude

Nous nous intéresserons aux empilements de sphères :

- Unitaires de $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right)$.
- Dont le nombre est hexagonal centré.
- Dans un espace infini (i.e absence d'effet de bord).
- D'une énergie quadratique minimale.

Plan de la présentation

Nombre hexagonal centré

La suite des nombres hexagonaux centrés est définie par :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \;\; U_n = n^3 - (n-1)^3$

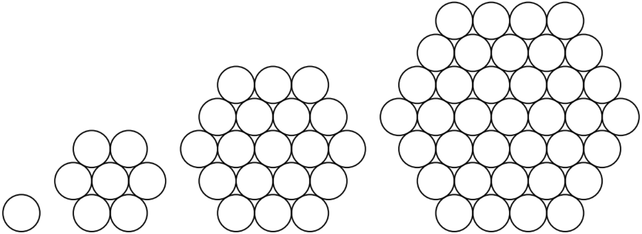


Figure 4: Représentation d'empilements de U_1 resp. U_2, U_3 et U_4 cercles.

Energie quadratique

On appelle énergie quadratique $\zeta(n)$ d'un empliments de $n \geq 2$ sphères $(S(c_1, 1), ..., S(c_n, 1))$:

$$\zeta(n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \|c_i - c_j\|_2^2$$

L'énergie quadratique moyenne $\xi(n)$ correspondante est définie par :

$$\xi(n) = \frac{\zeta(n)}{n}$$

Théorème

Énergie quadratique d'un empilement hexagonal

$$\forall n \geq 2,\ \zeta(U_n) = 4\binom{n}{2}\left(5\binom{n}{2}+1\right)\left(6\binom{n}{2}+1\right)$$

n	U_n	$\zeta(U_n)$	$\xi(U_n)$
1	1	0	0
2	7	168	24
3	19	3648	192
4	37	27528	744
5	61	124440	2040
6	91	414960	4560
7	127	1130808	8904
8	169	2668848	15792
9	217	5655888	26064
10	271	11024280	40680

Figure 5: Valeurs caractéristiques des empilements hexagonaux.

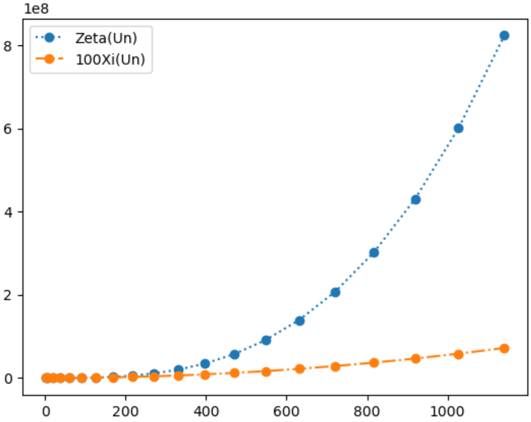


Figure 6: ζ et 100ξ en fonction de U_n pour $n \in [\![1, 20]\!]$.

Est-ce tout empilement optimal à nombre hexagonal de sphères hexagonal ?

Notations

- $S = (S(X_i, 1))_i$ est un empilement de $U_N = n$ sphères.
- $X_i(t_0)$ est le vecteur position associé à la i-ème sphère à l' instant $t_0 \in \mathbb{R}^+$.

- Pour $i \in \{1, \ldots, n\}, t_0 \in \mathbb{R}^+$,

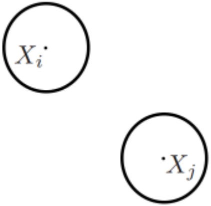
  $X_i(t_0) = X_i(0)$

- Pour $i \in \{1, \ldots, n\}, t_0 \in \mathbb{R}^+$,

$$X_i(t_0) = X_i(0) + W_i(t_0)$$

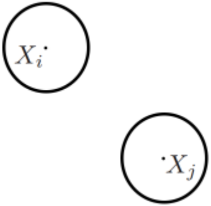
- Pour $i \in \{1, \ldots, n\}, t_0 \in \mathbb{R}^+$,

$$X_i(t_0) = X_i(0) + W_i(t_0) - a \int_0^{t_0} (X_i(t) - X_j(t))\, \mathrm{d}t$$



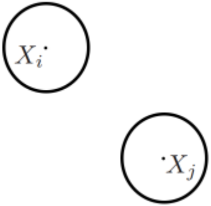
- Pour $i \in \{1, \dots, n\}, t_0 \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} X_i(t_0) = X_i(0) + W_i(t_0) \\ - a \int_0^{t_0} (X_i(t) - X_j(t))\,\mathrm{d}t \\ + \int_0^{t_0} (X_i(t) - X_j(t))\,\mathrm{d}L_{ij}(t) \end{aligned}$$



- Pour $i \in \{1, \ldots, n\}, t_0 \in \mathbb{R}^+$,

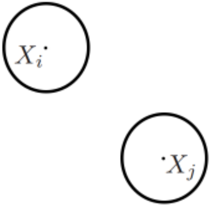
$$X_i(t_0) = X_i(0) + W_i(t_0) - a \int_0^{t_0} (X_i(t) - X_j(t)) \, \mathrm{d}t + \int_0^{t_0} (X_i(t) - X_j(t)) \, \mathrm{d}L_{ij}(t)$$



- $L_{ij}(0) = 0$

- Pour $i \in \{1, \ldots, n\}, t_0 \in \mathbb{R}^+$,

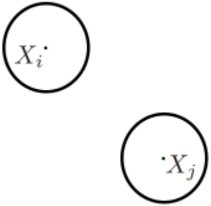
$$X_i(t_0) = X_i(0) + W_i(t_0) - a \int_0^{t_0} (X_i(t) - X_j(t))\,\mathrm{d}t + \int_0^{t_0} (X_i(t) - X_j(t))\,\mathrm{d}L_{ij}(t)$$



- $L_{ij}(0) = 0$
- $L_{ij} \equiv L_{ji}$

- Pour $i \in \{1, \ldots, n\}, t_0 \in \mathbb{R}^+$,

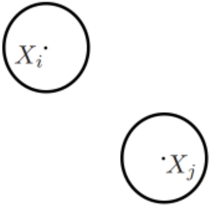
$$X_i(t_0) = X_i(0) + W_i(t_0) - a \int_0^{t_0} (X_i(t) - X_j(t))\,\mathrm{d}t + \int_0^{t_0} (X_i(t) - X_j(t))\,\mathrm{d}L_{ij}(t)$$



- $L_{ij}(0) = 0$
- $L_{ij} \equiv L_{ji}$
- $L_{ii} \equiv 0$

- Pour $i \in \{1, \ldots, n\}, t_0 \in \mathbb{R}^+$,

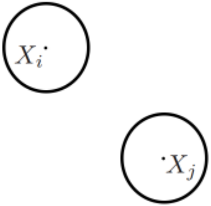
$$X_i(t_0) = X_i(0) + W_i(t_0) - a \int_0^{t_0} (X_i(t) - X_j(t))\,\mathrm{d}t + \int_0^{t_0} (X_i(t) - X_j(t))\,\mathrm{d}L_{ij}(t)$$



- $L_{ij}(0) = 0$
- $L_{ij} \equiv L_{ji}$
- $L_{ii} \equiv 0$
- $L_{ij}(t_0) = \int_0^{t_0} \mathbb{1}_{|X_i(t) - X_j(t)| = 2}\,\mathrm{d}L_{ij}(t)$

- Pour $i \in \{1, \ldots, n\}, t_0 \in \mathbb{R}^+$,

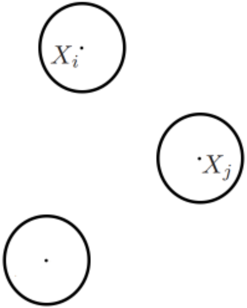
$$X_i(t_0) = X_i(0) + W_i(t_0) - a \int_0^{t_0} (X_i(t) - X_j(t))\,\mathrm{d}t + \int_0^{t_0} (X_i(t) - X_j(t))\,\mathrm{d}L_{ij}(t)$$



- $L_{ij}(0) = 0$ • $L_{ij} \equiv L_{ji}$ • $L_{ii} \equiv 0$
- $L_{ij}(t_0) = \int_0^{t_0} \mathbb{1}_{|X_i(t) - X_j(t)| = 2}\,\mathrm{d}L_{ij}(t)$
- $\int_0^{t_0} \mathbb{1}_{|X_i(t) - X_j(t)| \neq 2}\,\mathrm{d}L_{ij}(t) = 0$

- Pour $i \in \{1, \ldots, n\}, t_0 \in \mathbb{R}^+$,

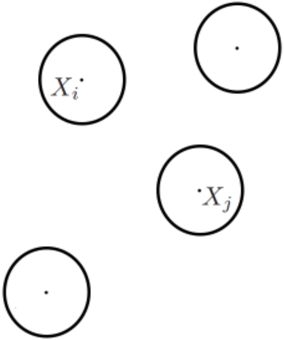
$$X_i(t_0) = X_i(0) + W_i(t_0) - a \sum_{j=1}^{n} \int_0^{t_0} (X_i(t) - X_j(t))\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{n} \int_0^{t_0} (X_i(t) - X_j(t))\,\mathrm{d}L_{ij}(t)$$



- $L_{ij}(0) = 0$ • $L_{ij} \equiv L_{ji}$ • $L_{ii} \equiv 0$
- $L_{ij}(t_0) = \int_0^{t_0} \mathbb{1}_{|X_i(t) - X_j(t)| = 2}\,\mathrm{d}L_{ij}(t)$
- $\int_0^{t_0} \mathbb{1}_{|X_i(t) - X_j(t)| \neq 2}\,\mathrm{d}L_{ij}(t) = 0$

- Pour $i \in \{1, \ldots, n\}, t_0 \in \mathbb{R}^+$,

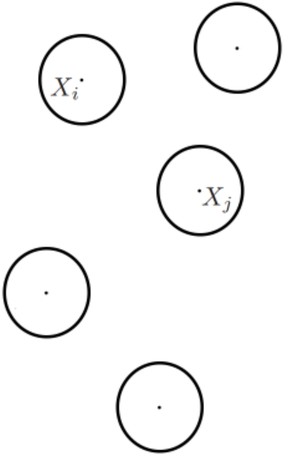
$$X_i(t_0) = X_i(0) + W_i(t_0) - a \sum_{j=1}^{n} \int_0^{t_0} (X_i(t) - X_j(t))\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{n} \int_0^{t_0} (X_i(t) - X_j(t))\,\mathrm{d}L_{ij}(t)$$



- $L_{ij}(0) = 0$
- $L_{ij} \equiv L_{ji}$
- $L_{ii} \equiv 0$
- $L_{ij}(t_0) = \int_0^{t_0} \mathbb{1}_{|X_i(t) - X_j(t)| = 2}\,\mathrm{d}L_{ij}(t)$
- $\int_0^{t_0} \mathbb{1}_{|X_i(t) - X_j(t)| \neq 2}\,\mathrm{d}L_{ij}(t) = 0$

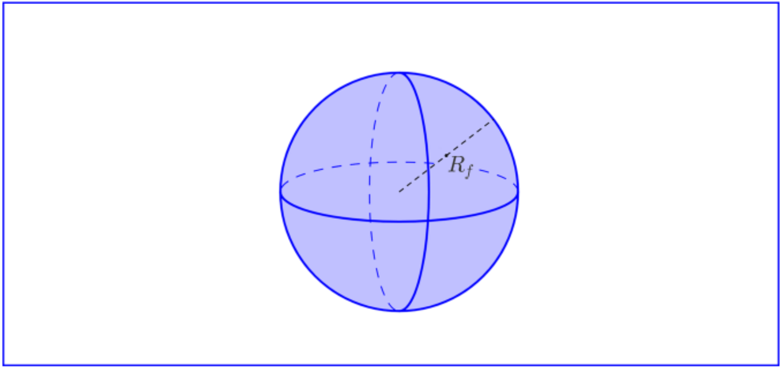
- Pour $i \in \{1, \ldots, n\}, t_0 \in \mathbb{R}^+$,

$$X_i(t_0) = X_i(0) + W_i(t_0) - a\sum_{j=1}^{n} \int_0^{t_0} (X_i(t) - X_j(t))\,\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{n} \int_0^{t_0} (X_i(t) - X_j(t))\,\mathrm{d}L_{ij}(t)$$

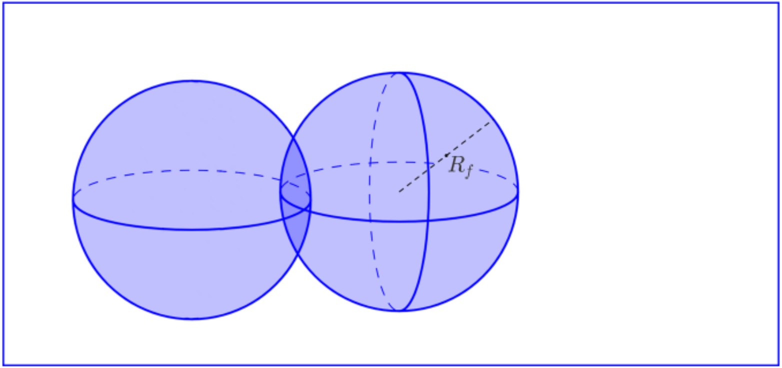


- $L_{ij}(0) = 0$
- $L_{ij} \equiv L_{ji}$
- $L_{ii} \equiv 0$
- $L_{ij}(t_0) = \displaystyle\int_0^{t_0} \mathbb{1}_{|X_i(t) - X_j(t)| = 2}\,\mathrm{d}L_{ij}(t)$
- $\displaystyle\int_0^{t_0} \mathbb{1}_{|X_i(t) - X_j(t)| \neq 2}\,\mathrm{d}L_{ij}(t) = 0$

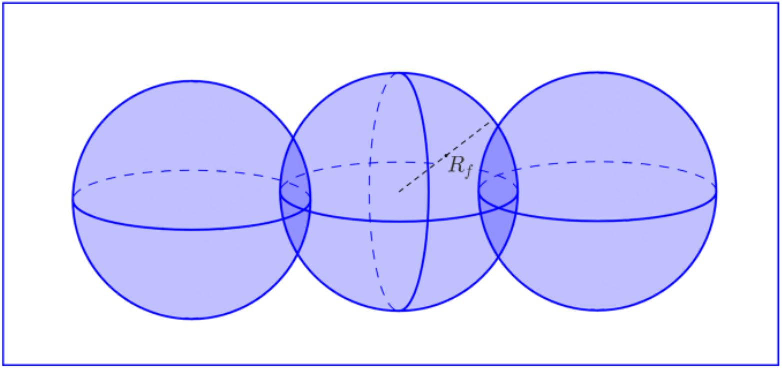
Détection des collisions



Détection des collisions

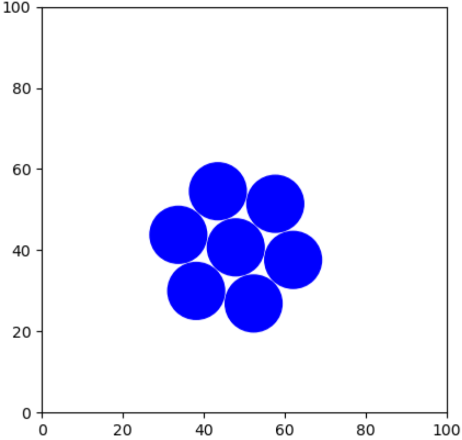


Détection des collisions



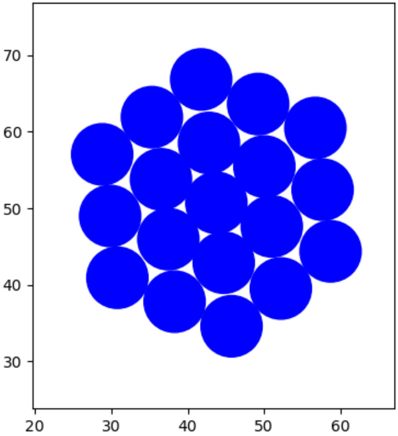
Simulations

- $N = 7$
- $a = 100$
- $rep = 300$
- $rayon = 7$
- $rayonF = 7.7$



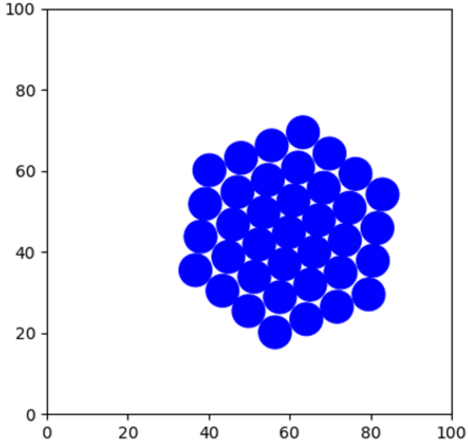
Simulations

- $N = 19$
- $a = 100$
- $rep = 300$
- $rayon = 4$
- $rayonF = 4.9$



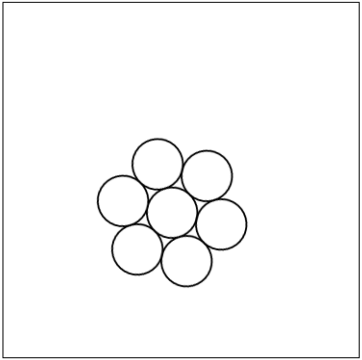
Simulations

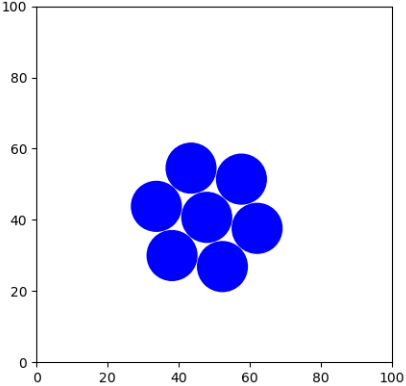
- $N = 37$
- $a = 40$
- $rep = 290$
- $rayon = 4$
- $rayonF = 5$



Plan de la présentation

En fin !





- Théorie
- Simulation

Merci de votre attention !