MDI0002 – Matemática Discreta
Aula 04
Álgebra de Conjuntos

Karina Girardi Roggia
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

2020

Álgebra refere-se a cálculos.
Exemplo: números reais e operações aritméticas (adição, multiplicação, ...)

Denominação alternativa para Matemática Discreta.

Conceito formal: será visto mais tarde.
Informalmente: operações definidas sobre um conjunto.

Álgebra de Conjuntos

Operações definidas sobre todos os conjuntos.

- Não Reversíveis: união, intersecção
- Reversíveis: complemento, conjunto das partes, produto cartesiano, união disjunta.

Conceitos importantes

- Diagramas de Venn: representação gráfica
- Paradoxo de Russell: auto-referência

Obs: Lógica $\times$ Álgebra de Conjuntos

Relação direta entre conectivos lógicos e operações sobre conjuntos

Conectivo Lógico	Operação sobre Conjuntos
negação	complemento
disjunção	união
conjunção	intersecção

Relação Lógica	Relação sobre Conjuntos
implicação	contingência
equivalência	igualdade

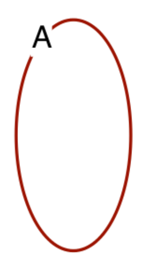
- Largamente conhecidos e utilizados.
- Usam figuras geométricas no plano.

Linguagem Diagramática

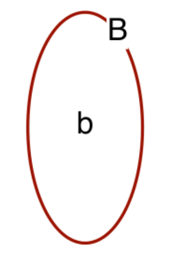
- auxilia entendimento de definições
- facilita desenvolvimento de raciocínios
- permite identificação e compreensão fácil e rápida dos componentes e relacionamentos

Exemplos

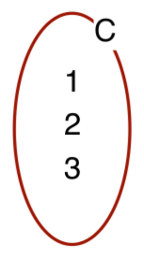
Um dado conjunto A



Um determinado elemento $b \in B$

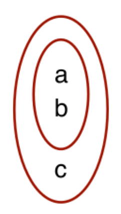


O conjunto $C = \{1, 2, 3\}$

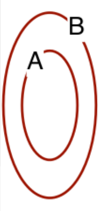


Exemplos

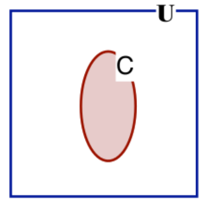
$\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$



$A \subseteq B$



Para dado conjunto universo U, $C \subseteq U$

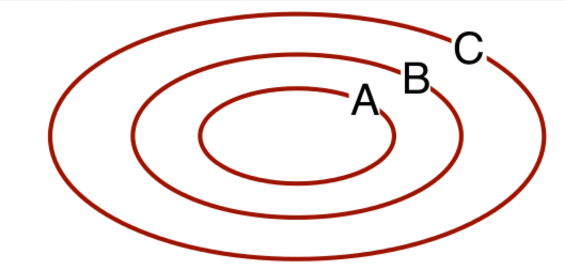


Em geral:

- U é representado por um retângulo
- demais conjuntos por elipses, círculos, etc
- em $C \subseteq U$, conjunto C é destacado para auxiliar visualmente

Aplicação dos Diagramas de Venn

Considere que



pode-se intuir que a noção de subconjunto é transitiva, isto é

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

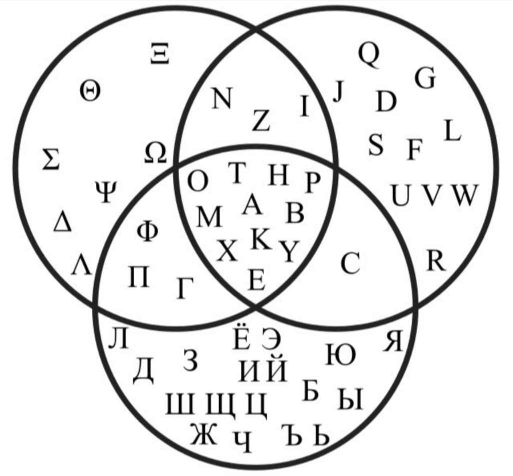
Transitividade da Contingência

Teorema (Transitividade da Contingência)
Suponha A, B e C conjuntos. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

Demonstração:
(Lembrando que $X \subseteq Y$ sse $\forall x \in X, x \in Y$)
Suponha que A, B e C são conjuntos quaisquer com $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$.
Seja $a \in A$. Então:

$$\begin{aligned} & a \in A \Rightarrow && \text{(pela definição de subconjunto e } A \subseteq B\text{)} \\ & a \in B \Rightarrow && \text{(pela definição de subconjunto e } B \subseteq C\text{)} \\ & a \in C && \end{aligned}$$

Portanto, para qualquer $a \in A$, $a \in C$. Logo $A \subseteq C$.


Ξ
Q
Θ
N
J
G
I
D
Z
L
Σ
Ω
S
F
O
T
H
P
Ψ
U V W
M
A
B
Δ
Φ
K
X
Y
C
R
Λ
Π
Γ
E
Л
Ё Э
Я
Д
З
Ю
И Й
Б
Ы
Ш Щ Ц
Ж
Ч
Ъ Ь

Conjunto:

coleção de zero ou mais elementos distintos os quais não possuem qualquer ordem associada

Existem conjuntos de conjuntos. Então...

um conjunto pode ser elemento de si mesmo?

Definição (Conjunto Ordinário)

Conjunto que não pertence a si mesmo.

$$S = \{A \mid A \text{ é um conjunto ordinário}\}$$

Conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos.

- determina uma contradição
- Paradoxo de Russell

Teorema (Paradoxo de Russell)

$$S = \{A \mid A \textit{ é um conjunto ordinário}\}$$

não é conjunto.

Demonstração

Suponha que S **é** conjunto.
S é um elemento de si mesmo?

Caso 1. Suponha que $S \in S$

$S \in S \Rightarrow$	[pela definição de conj. ordinário]
S não é um conjunto ordinário $\Rightarrow$	[pela definição de S]
$S \notin S$	

Caso 2. Suponha que $S \notin S$

$S \notin S \Rightarrow$	[pela definição de conj. ordinário]
S é um conjunto ordinário $\Rightarrow$	[pela definição de S]
$S \in S$	

Absurdo! Logo S não é conjunto.

Paradoxo de Russel

A notação por compreensão

- permite definir algo que não é conjunto
- S seria um subconjunto do conjunto de todos os conjuntos
- como S não é conjunto...

não existe o conjunto de todos os conjuntos

Ou seja: nem toda coleção de elementos constitui um conjunto.

Operações Não Reversíveis

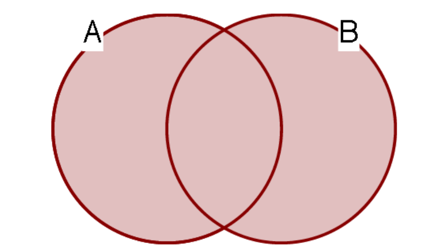
As operações mais comuns nos estudos da Álgebra de Conjuntos.

- União
- Intersecção

Definição (União de Conjuntos)

Dados A e B conjuntos, a união destes, $A \cup B$, é tal que

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

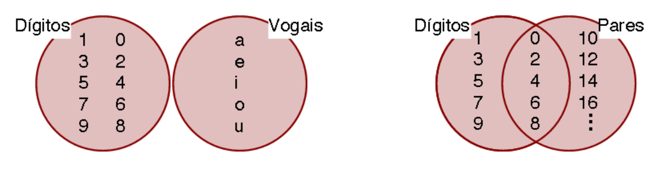


Exemplos

- Digitos $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Vogais $= \{a, e, i, o, u\}$
- Pares $= \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots\}$

$$\text{Digitos} \cup \text{Vogais} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, e, i, o, u\}$$

$$\text{Digitos} \cup \text{Pares} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, \ldots\}$$



Exemplos

- $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x > 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x^2 = x\}$
  $A \cup B = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$
- $\mathbb{R}$ (reais), $\mathbb{Q}$ (racionais), $\mathbb{I}$ (irracionais)
  $\mathbb{R} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{R} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$
- Seja $\mathcal{U}$ o conjunto universo e $A \subseteq \mathcal{U}$
  $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing \qquad \mathcal{U} \cup \varnothing = \mathcal{U}$
  $\mathcal{U} \cup A = \mathcal{U} \qquad \mathcal{U} \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$

Propriedades da União

Elemento Neutro

$$A \cup \varnothing = A = \varnothing \cup A$$

Idempotência

$$A \cup A = A$$

Comutatividade

$$A \cup B = B \cup A$$

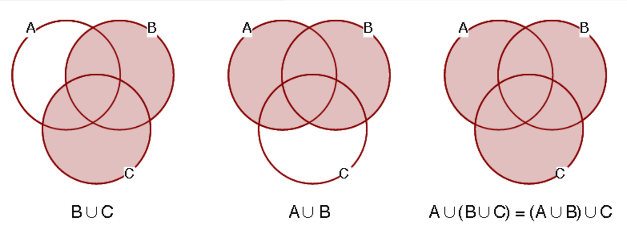
Associatividade

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Teorema (Associatividade da União)

Suponha que A, B e C são conjuntos quaisquer. Então

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$



Demonstração

Suponha que $x \in A \cup (B \cup C)$.

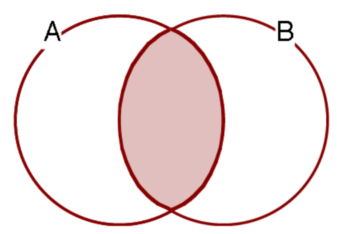
$x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow$	[definição de união]
$x \in A \vee x \in (B \cup C) \Leftrightarrow$	[definição de união]
$x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$	[associatividade de $\vee$]
$(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow$	[definição de união]
$x \in (A \cup B) \vee x \in C \Leftrightarrow$	[definição de união]
$x \in (A \cup B) \cup C$	

Portanto $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Definição (Intersecção de Conjuntos)

Dados A e B conjuntos, a intersecção destes, $A \cap B$, é tal que

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

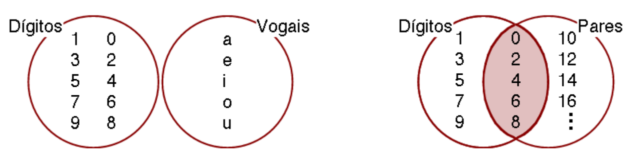


Exemplos

- Digitos $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Vogais $= \{a, e, i, o, u\}$
- Pares $= \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots\}$

$$\text{Digitos} \cap \text{Vogais} = \varnothing$$

$$\text{Digitos} \cap \text{Pares} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$



Exemplos

- $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x > 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x^2 = x\}$
  $A \cap B = \varnothing$
- $\mathbb{R}$ (reais), $\mathbb{Q}$ (racionais), $\mathbb{I}$ (irracionais)
  $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \qquad \mathbb{R} \cap \mathbb{I} = \mathbb{I} \qquad \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$
- Seja $\mathcal{U}$ o conjunto universo e $A \subseteq \mathcal{U}$
  $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing \quad \mathcal{U} \cap \varnothing = \varnothing$
  $\mathcal{U} \cap A = A \quad \mathcal{U} \cap \mathcal{U} = \mathcal{U}$

Propriedades da Intersecção

Elemento Neutro

$$A \cap \mathcal{U} = A = \mathcal{U} \cap A$$

Idempotência

$$A \cap A = A$$

Comutatividade

$$A \cap B = B \cap A$$

Associatividade

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Propriedades da União e da Intersecção

Distributividade da intersecção sobre a união

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

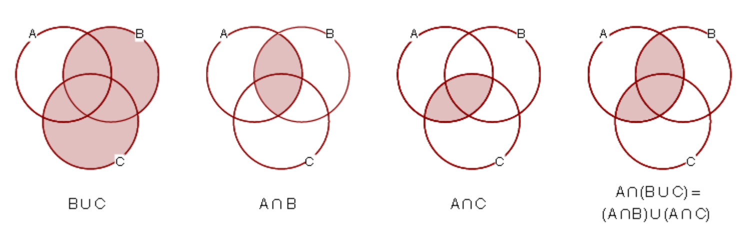
Distributividade da união sobre a intersecção

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Distributividade da intersecção sobre a união

Teorema (Distributividade da intersecção sobre a união)
Suponha que A, B e C são conjuntos quaisquer. Então

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



Suponha que $x \in A \cap (B \cup C)$.

$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow$	[definição de intersecção]
$x \in A \wedge x \in (B \cup C) \Leftrightarrow$	[definição de união]
$x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$	[tautologia]
$(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow$	[definição de intersecção]
$x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \Leftrightarrow$	[definição de união]
$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$	

Portanto $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Operação Reversível:

- a partir do resultado, é possível recuperar os operandos originais

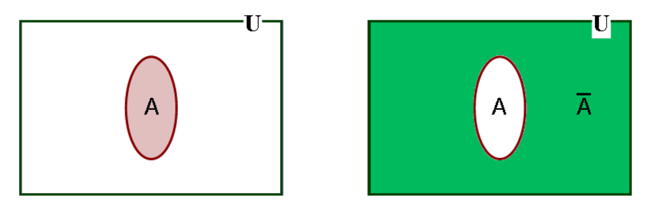
Operações Reversíveis em Álgebras de Conjuntos

- Complemento
- Conjunto das Partes
- Produto Cartesiano
- União Disjunta

Definição (Complemento de um Conjunto)

Dado A um conjunto qualquer, o seu complemento, $\overline{A}$, é tal que

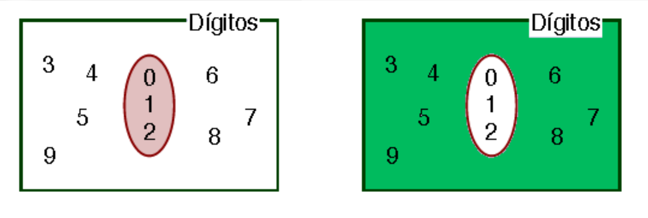
$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$$



Exemplos

- $\mathcal{U} = \text{Digitos} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $A = \{0, 1, 2\}$

$$\overline{A} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$



Exemplos

- $A = \{0, 1, 2\}, U = \mathbb{N}$
  $\overline{A} = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x > 2\}$
- $\mathbb{R}$ conjunto universo
  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{I} \qquad \overline{\mathbb{I}} = \mathbb{Q}$
- Para qualquer conjunto universo $\mathcal{U}$ e $A \subseteq \mathcal{U}$
  $\overline{\varnothing} = \mathcal{U} \qquad \overline{\mathcal{U}} = \varnothing$
  $A \cup \overline{A} = \mathcal{U} \qquad A \cap \overline{A} = \varnothing$

Propriedades com o Complemento

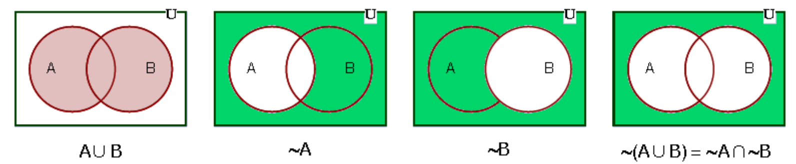
Duplo Complemento

$$\overline{\overline{A}} = A$$

DeMorgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$



Definição (Conjunto das Partes)

Dado A um conjunto qualquer, o seu conjunto das partes, 2^A ou $\mathcal{P}(A)$, é tal que

$$\{X \mid X \subseteq A\}$$

Dados $A = \{a\}, B = \{a, b\}, C = \{a, b, c\}$

- $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$
- $2^{A} = \{\emptyset, \{a\}\}$
- $2^{B} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
- $2^{C} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Dado $D = \{a, \emptyset, \{a, b\}\}$,

$$\begin{aligned} 2^{D} = \quad & \{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset\}, \{\{a, b\}\}, \{a, \emptyset\}, \{a, \{a, b\}\}, \\ & \{\emptyset, \{a, b\}\}, \{a, \emptyset, \{a, b\}\}\} \end{aligned}$$

Número de Elementos de 2^A

Dado X um conjunto finito

- Supondo n o número de elementos de X
- Notação: $|X| = n$
- Então $|2^X| = 2^n$
- ou seja: $|2^X| = 2^{|X|}$

Sabendo-se quem é 2^X, podemos calcular quem é X

- união de todos os conjuntos pertencentes à 2^X

$$X = \bigcup_{A \in 2^X} A$$

Exemplos:

$2^F = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

- $F = \varnothing \cup \{a\} \cup \{b\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}$

$2^G = \{\varnothing, \{\clubsuit\}, \{\diamondsuit\}, \{\heartsuit\}, \{\clubsuit, \diamondsuit\}, \{\clubsuit, \heartsuit\}, \{\heartsuit, \diamondsuit\}, \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}\}$

- $F = \varnothing \cup \{\clubsuit\} \cup \{\diamondsuit\} \cup \{\heartsuit\} \cup \{\clubsuit, \diamondsuit\} \cup \{\clubsuit, \heartsuit\} \cup \{\heartsuit, \diamondsuit\} \cup \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\} = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$

Noção de sequência finita

Sequência de n componentes: n-upla ordenada

- n objetos, em uma ordem fixa
- Par ordenado

$$\langle x, y \rangle \text{ ou } (x, y)$$

- n-upla ordenada

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \text{ ou } (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Não confundir $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ com $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$$\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$$

Definição (Produto Cartesiano)

Sejam A e B conjuntos, o produto cartesiano $A \times B$ é o conjunto

$$A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Notação: Produto cartesiano de um conjunto com ele próprio

$$A \times A = A^2$$

Exemplos

$$A = \{a\}, B = \{a, b\}, C = \{0, 1, 2\}$$

$$A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle\}$$
$$B \times C = \{\langle a, 0\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$$
$$C \times B = \{\langle 0, a\rangle, \langle 0, b\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle\}$$
$$A^2 = \{\langle a, a\rangle\}$$
$$A \times \mathbb{N} = \{\langle a, 0\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle a, 3\rangle, \ldots\}$$

Produto Cartesiano é não associativo

$$A = \{a\}, B = \{a, b\}, C = \{0, 1, 2\}$$

$$\begin{aligned} A \times (B \times C) = \quad & \{\langle a, \langle a, 0\rangle\rangle, \langle a, \langle a, 1\rangle\rangle, \langle a, \langle a, 2\rangle\rangle, \langle a, \langle b, 0\rangle\rangle, \\ & \langle a, \langle b, 1\rangle\rangle, \langle a, \langle b, 2\rangle\rangle\} \\ (A \times B) \times C = \quad & \{\langle\langle a, a\rangle, 0\rangle, \langle\langle a, a\rangle, 1\rangle, \langle\langle a, a\rangle, 2\rangle, \langle\langle a, b\rangle, 0\rangle, \\ & \langle\langle a, b\rangle, 1\rangle, \langle\langle a, b\rangle, 2\rangle\} \end{aligned}$$

Exemplos

Dado A conjunto qualquer

$$\varnothing \times A = \varnothing$$

$$A \times \varnothing = \varnothing$$

$$\varnothing^2 = \varnothing$$

Distributividade do Produto Cartesiano

Sobre a união

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

Sobre a intersecção

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Nem sempre é possível

- Resultado da operação: conjunto vazio
- Não é possível definir todos os operandos originais

Caso $A \times B \neq \varnothing$

$$A = \{x \mid \langle x, y \rangle \in A \times B\}$$

$$B = \{y \mid \langle x, y \rangle \in A \times B\}$$

Exemplos

$\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle\}$

- Operandos: $\{a\}$ e $\{a, b\}$

$\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$

- Operandos: $\{a, b\}$ e $\{a, b\}$

$\{\langle a, 0\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle a, 3\rangle, \ldots\}$

- Operandos: $\{a\}$ e $\mathbb{N}$

$\{\langle\langle a, a\rangle, 0\rangle, \langle\langle a, a\rangle, 1\rangle, \langle\langle a, a\rangle, 2\rangle, \langle\langle a, b\rangle, 0\rangle, \langle\langle a, b\rangle, 1\rangle, \langle\langle a, b\rangle, 2\rangle\}$

- Operandos: $\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle\}$ e $\{0, 1, 2\}$

União Disjunta

Pessoas da família Silva e Souza

- Silva = {João, Maria, José}
- Souza = {Pedro, Ana, José}

$$\text{Silva} \cup \text{Souza} = \{\text{João, Maria, Pedro, Ana, José}\}$$

- José ocorre somente uma vez
- A operação não refleta uma “reunião familiar”
- José Silva não é a mesma pessoa que José Souza

União Disjunta

- Distingue elementos com mesma identificação
- Considera os operandos *conjuntos disjuntos*
- Garante que não existem elementos em comum
  - associa uma identificação do conjunto origem
  - um tipo de “sobrenome”

$$\langle \text{elemento}, \text{identificação da origem} \rangle$$

União Disjunta

Definição (União Disjunta)

Dados A e B conjuntos, sua união disjunta, $A \uplus B$, é o conjunto

$$\begin{aligned} A \uplus B = &\quad \{\langle a, 0\rangle \mid a \in A\} \cup \{\langle b, 1\rangle \mid b \in B\} \\ A \uplus B = &\quad \{a_A \mid a \in A\} \cup \{b_B \mid b \in B\} \end{aligned}$$

Há diversas formas de denotar $A \uplus B$

- Importante é distinguir o conjunto originário

Exemplos

Silva $=$ {João, Maria, José}
Souza $=$ {Pedro Ana, José}

$$\text{Silva} \uplus \text{Souza} = \{\langle\text{João,Silva}\rangle, \langle\text{Maria,Silva}\rangle, \langle\text{José,Silva}\rangle, \langle\text{Ana,Souza}\rangle, \langle\text{Pedro,Souza}\rangle, \langle\text{José,Souza}\rangle\}$$

$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$V = \{a, e, i, o, u\}$
$P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$

$$D \uplus V = \{0_D, 1_D, 2_D, 3_D, 4_D, 5_D, 6_D, 7_D, 8_D, 9_D, a_V, e_V, i_V, o_V, u_V\}$$

$$D \uplus P = \{0_D, 1_D, 2_D, 3_D, 4_D, 5_D, 6_D, 7_D, 8_D, 9_D, 0_P, 2_P, 4_P, \ldots\}$$

Exemplos

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = x\}$

$$A \uplus B = \{0_B, 1_B, 3_A, 4_A, 5_A, \ldots\}$$

$A = \{a, b, c\}$

- $\varnothing \uplus \varnothing = \varnothing$
- $A \uplus \varnothing = \{\langle a, 0\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle c, 0\rangle\}$
- $A \uplus A = \{\langle a, 0\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle c, 0\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 1\rangle\}$

Dado $A \uplus B$

$$A = \{x \mid \langle x, 0\rangle \in A \uplus B\}$$

$$B = \{x \mid \langle x, 1\rangle \in A \uplus B\}$$

Exemplos:

$\{\langle a, 0\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 1\rangle\}$

- Operandos: $\{a, b\}$ e $\{a, b, c\}$

$\varnothing$

- Operandos: $\varnothing$ e $\varnothing$

$\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle\}$

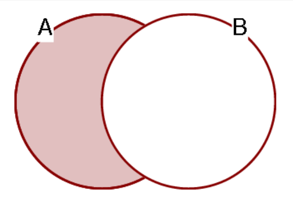
- Operandos: $\varnothing$ e $\{a, b\}$

Mais uma Operação **NÃO** Reversível

Definição (Diferença)

Dados A e B conjuntos, o primeiro conjunto menos o segundo, ou seja, a diferença de A e B é o conjunto

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap \overline{B}$$

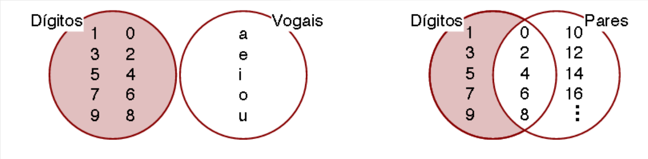


Exemplos

- $\text{Digitos} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $\text{Vogais} = \{a, e, i, o, u\}$
- $\text{Pares} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots\}$

$$\text{Digitos} - \text{Vogais} = \text{Dígitos}$$

$$\text{Digitos} - \text{Pares} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$



Exemplos

- $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x > 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x^2 = x\}$
  $A - B = \{3, 4, 5, 6, \ldots\}$
  $B - A = \{0, 1\}$
- $\mathbb{R}$ (reais), $\mathbb{Q}$ (racionais), $\mathbb{I}$ (irracionais)
  $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{I} \qquad \mathbb{R} - \mathbb{I} = \mathbb{Q} \qquad \mathbb{Q} - \mathbb{I} = \mathbb{Q}$
- Seja $\mathcal{U}$ o conjunto universo e $A \subseteq \mathcal{U}$
  $\varnothing - \varnothing = \varnothing \quad \mathcal{U} - \varnothing = \mathcal{U}$
  $\mathcal{U} - A = \overline{A} \quad \mathcal{U} - \mathcal{U} = \varnothing$