Nome: Nicholas Wojciechowski

m = 5

n = 5

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (-2a+5b+c-3d)+(5a-3b+d)x+(-15a+7c-21d)x^2$$

a) Consideramos $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

$$A+B=\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$$T(A+B)=(-2(a+e)+5(b+f)+c+g-3(d+h))+(5(a+e)-3(b+f)+d+h)x+(-15(a+e)+7(c+g)-21(d+h))x^2$$

$$T(A)+T(B)=[(-2a+5b+c-3d)+(5a-3b+d)x+(-15a+7c-21d)x^2]+[(-2e+5f+g-3h)+(5e-3f+h)x+(-15e+7g-21h)x^2]$$

$$=(-2(a+e)+5(b+f)+(c+g)-3(d+h))+((5a+e)-3(b+f)+d+h)x+(-15(a+e)+7(c+g)-21(d+h))x^2$$

Como $T(A+B) = T(A) + T(B)$, vamos verificar se $\alpha T(A) = T(\alpha A)$.

$T(\alpha A) = (-2\alpha a + 5\alpha b + \alpha c - 3\alpha d) + (5\alpha a - 3\alpha b + \alpha d)x + (-15\alpha a + 7\alpha c - 21\alpha d)x^2$.

$\alpha T(A) = \alpha(-2a + 5b + c - 3d) + \alpha(5a - 3b + d)x + \alpha(-15a + 7c - 21d)x^2 =$

$(-2\alpha a + 5\alpha b + \alpha c - 3\alpha d) + (5\alpha a - 3\alpha b + \alpha d)x + (-15\alpha a + 7\alpha c - 21\alpha d)x^2$

Como $T(A+B) = T(A) + T(B)$ e $\alpha T(A) = T(\alpha A)$ podemos concluir que T é uma transformação linear b)

$$\begin{cases} -2a + 5b + c - 3d = 0 \\ 5a - 3b + d = 0 \\ -15a + 7c - 21d = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$c = 2a - 5b + 3d$ $\Rightarrow$ $c = 2a - 5b + 3(3b - 5a)$

$d = 3b - 5a$ $\qquad$ $c = 2a - 5b + 9b - 15a$

$c = -13a + 4b$

Substituindo na última equação temos:

$-15a + 7(-13a + 4b) - 21(3b - 5a)$

$-15a - 91a + 28b - 63b + 105$

$-a - 35b$ $\qquad$ $d = 3b - 5(-35b)$

$a = -35b$

$d = 178b$

$c = -13(-35b) + 4b$

$c = 459b$

Com isso podemos reescrever:

$$u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35b & b \\ 459b & 178b \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} -35 & 1 \\ 459 & 178 \end{bmatrix}, \text{ logo}$$

$$\text{Base}(N(T)) = \left\{ \begin{bmatrix} -35 & 1 \\ 459 & 178 \end{bmatrix} \right\} \text{ e } \text{Dim}(N(T)) = 1$$

c) $p(x) = (-2a+5b+c-3d) + (5a-3b+d)x +$
$(-15a+7c-21d)x^2$

$= a(-2+5x-15x^2) + b(5-3x) + c(1+7x^2) + d(-3+x$
$-21x^2)$

Então:

$Im(T) = ger\{-2+5x-15x^2, 5-3x, 1+7x^2, -3+x-21x^2\}$

Lembrando que no exercício anterior vimos que
$Dim(N(T)) = 1$ e

$Dim(N(T)) + dim(Im(T)) = dim(M(2,2))$ ou
seja:

$1 + dim(Im(T)) = 4 \Rightarrow dim(Im(T)) = 3.$

Com isso sabemos que os geradores são L.D
e teremos que descartar um deles. Para isso
vamos verificar qual é a variável livre do sis-
tema.

$$\begin{cases} -2a+5b+c-3d=0 \\ 5a-3b+d=0 \\ -15a+7c-21d=0 \end{cases}$$

No exercício anterior vimos que b é a variável livre, por isso descartamos o 2º gerador,
logo:

$Base(Im(T)) = \{-2+5x-15x^2, 1+7x^2, -3+x-21x^2\}$ e
$Dim(Im(T)) = 3.$