The Bootstrap

Learning outcomes:

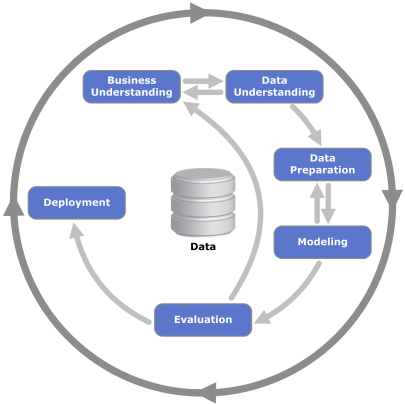


Figure: The CRISP-DM process.

- Define the three steps of bootstrapping;
- Define confidence intervals;
- Specify a bootstrap procedure to estimate a confidence interval.

Recall sampling: Definitions

- **Population**: a 'complete' group of N objects, items, entities, or events of interest – e.g. all adults living in the US;
- **Sample**: a selected subset of n individuals from a population – e.g. 5,000 US adults appearing in a poll;
- **Summary Statistic**: a summary of the information in a set of observations – e.g. mean, median, mode, etc.;
- **Census**: a counting of all elements of the population;
- **Sampling**: the act of collecting a sample of size n from a population of size N;
  - sample only when we can't perform a census;
  - typically the sample size $n << N$;
- **Sample Statistic**: a summary statistic computed from a sample that estimates the unknown population parameter.

Recall sampling: A simple example – marbles in a bag

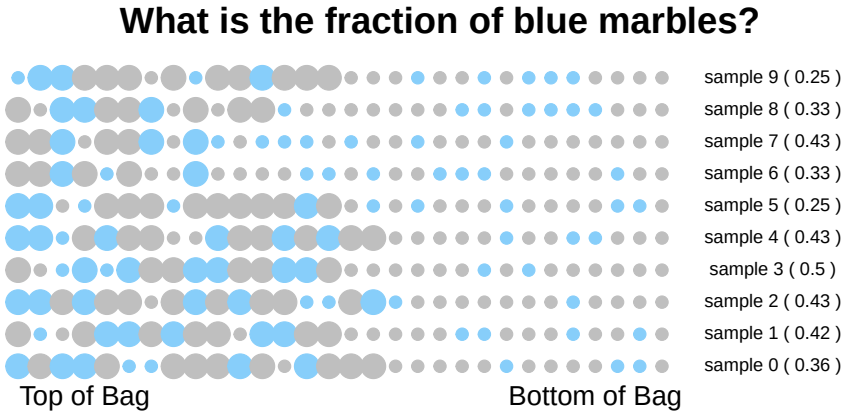
- Consider a bag full of marbles;
  - the number of marbles in the bag is unknown;
  - there are multiple but unknown colors of marbles in the bag;
  - the fraction of any particular color of marbles in the bag is unknown;

- Questions we could ask:
  - How many marbles are in the bag?
  - How many colors of marbles are in the bag?
  - **What is the fraction of blue marbles in the bag?**

- Assume we can't just dump the bag out or remove marbles from it permanently – can we devise a process to answer any of these questions?

- What about the following:
  1. Stick a hand in the top of the bag and pull out handful of marbles;
  2. Observe them;
  3. Return them to the bag and then mix;
  4. Repeat.

Bootstrapping is REALLY similar to this!



What is bootstrapping?

- Let's return to the marbles in a bag experiment with a slight modification – suppose we know there are 30 marbles and we want to know the fraction of blue marbles;
  1. Sample marbles **with replacement**:
     - 1.1 Stick a hand in the bag and pull out a marble;
     - 1.2 Observe whether it is blue;
     - 1.3 Return it to the bag and mix;
     - 1.4 Repeat this 30 times – these 30 observations will be one bootstrap sample;
  2. Compute the fraction of blue marbles you observed in your bootstrap sample;
  3. Repeat steps 1 and 2 many (1000s of) times.

- This is all bootstrapping is – sample from your data with replacement, compute the statistic you are interested in, repeat!

Confidence Intervals – most common application of bootstrapping!

- We'd like to measure the variation of a statistic (e.g. the βs in a regression);
  - Want to be able to say: 'effect of x on y is $\beta \pm z$;
  - Typical way to do this is to use a **confidence interval**;

- A 95% confidence interval is a region around the statistic, a plus/minus:
  - **Interpretation 1**: there is a 95% probability that the 95% confidence interval calculated using a future sample will include the true population parameter;
  - **Interpretation 2**: the region contains values that are not statistically significantly different from the point estimate at the 0.05 level;

Using Bootstrapping to Estimate Confidence Intervals

- Three steps:
  1. Sample from the original data (or bag of marbles) with replacement and compute the stat of interest 1000 times;
  2. Sort the results from smallest to largest;
  3. Take the 25th and 975th results from this sorted list – these are the boundaries of your confidence interval;

- But we have other ways of thinking about the error in our inferences (e.g. p-values) so why do this?

Using Bootstrapping to Estimate Confidence Intervals

- Three steps:
  1. Sample from the original data (or bag of marbles) with replacement and compute the stat of interest 1000 times;
  2. Sort the results from smallest to largest;
  3. Take the 25th and 975th results from this sorted list – these are the boundaries of your confidence interval;

- But we have other ways of thinking about the error in our inferences (e.g. p-values) so why do this?
  - Some statistics do not have things like *p*-values that are computable using equations (e.g. medians, model performance metrics);

Using Bootstrapping to Estimate Confidence Intervals

- Three steps:
  1. Sample from the original data (or bag of marbles) with replacement and compute the stat of interest 1000 times;
  2. Sort the results from smallest to largest;
  3. Take the 25th and 975th results from this sorted list – these are the boundaries of your confidence interval;

- But we have other ways of thinking about the error in our inferences (e.g. p-values) so why do this?
  - Some statistics do not have things like *p*-values that are computable using equations (e.g. medians, model performance metrics);
  - Some problems in regression will compromise the *p*-value but we can easily get a sense of whether to reject the null with bootstrapped CIs.

Step 1: sample w/ replacement from the marble bag 1000 times

```
  [1] 0.2333 0.4667 0.3333 0.3667 0.3000 0.4000 0.3000 0.2000 0.5333 0.3667 0.3000 0.2333 0.3667 0.3000 0.2667 0.3333 0.1667 0.1667 0.3000 0.2000 0.4333 0.4667 0.3333 0.3333 0.3000 0.4000
 [27] 0.3000 0.4000 0.4000 0.3333 0.2000 0.3667 0.3000 0.5000 0.3667 0.2000 0.3000 0.2333 0.3667 0.3333 0.4333 0.3667 0.2333 0.3000 0.2667 0.3000 0.1333 0.4667 0.3333 0.5000 0.4333 0.3333
 [53] 0.3333 0.3000 0.3667 0.3667 0.3333 0.2333 0.3667 0.4667 0.2667 0.2333 0.3000 0.3667 0.2667 0.3333 0.3667 0.3000 0.2667 0.3000 0.4333 0.3333 0.2333 0.2333 0.2667 0.4333 0.4333 0.3667
 [79] 0.1667 0.5000 0.3667 0.2667 0.4000 0.4000 0.3333 0.3667 0.3000 0.5000 0.4000 0.2667 0.2000 0.3333 0.2667 0.2667 0.3667 0.3667 0.2333 0.3667 0.2667 0.4000 0.2000 0.1667
[105] 0.3000 0.3000 0.3333 0.3000 0.3667 0.4000 0.2667 0.2333 0.2667 0.3667 0.3000 0.2667 0.4000 0.2667 0.3000 0.3333 0.3333 0.3000 0.2333 0.5000 0.4333 0.3667 0.3333 0.4333 0.4667 0.3000
[131] 0.2667 0.1667 0.3667 0.2667 0.3000 0.3000 0.3667 0.3333 0.2667 0.3000 0.2333 0.2000 0.5333 0.3667 0.5333 0.4000 0.3667 0.2667 0.2667 0.3667 0.3000 0.4000 0.4000 0.3000 0.2000 0.4000
[157] 0.2333 0.3333 0.3000 0.4000 0.3000 0.3667 0.5000 0.3000 0.2333 0.2667 0.3667 0.3000 0.2333 0.3333 0.2000 0.1667 0.4333 0.4000 0.2667 0.1667 0.3333 0.4667 0.3333 0.3667 0.4333 0.3667
[183] 0.3333 0.2000 0.3667 0.3000 0.1333 0.3667 0.4000 0.4333 0.2667 0.2333 0.3333 0.5000 0.4667 0.4333 0.3667 0.2333 0.4667 0.3000 0.5000 0.3333 0.3667 0.2667 0.2667 0.3333 0.3667 0.4000
[209] 0.3333 0.3000 0.2333 0.3667 0.2000 0.4333 0.4000 0.3333 0.4000 0.2667 0.1667 0.3667 0.3000 0.2667 0.3667 0.3333 0.4667 0.4667 0.3667 0.3000 0.3000 0.3333 0.2667 0.4667 0.2667 0.3000
[235] 0.4333 0.3667 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3667 0.3333 0.3333 0.1667 0.2333 0.4000 0.3667 0.4667 0.2000 0.2000 0.2333 0.3667 0.4667 0.2667 0.3000 0.3000 0.4000 0.2667 0.3000 0.3333
[261] 0.3000 0.3000 0.2000 0.3333 0.2333 0.2333 0.3000 0.3667 0.2333 0.2333 0.2667 0.3667 0.3000 0.3667 0.3333 0.2667 0.2667 0.3333 0.4000 0.3333 0.1333 0.1333 0.3667 0.3000 0.3000 0.3667
[287] 0.2667 0.2000 0.3333 0.4000 0.3333 0.3000 0.1333 0.4333 0.2333 0.3333 0.3000 0.2333 0.1333 0.3000 0.3667 0.4000 0.2667 0.3000 0.4000 0.3333 0.3000 0.2667 0.3667 0.2333 0.3667 0.4667
[313] 0.4000 0.3667 0.1667 0.3667 0.2667 0.2000 0.4000 0.3333 0.4000 0.3333 0.5333 0.4000 0.3667 0.3333 0.4333 0.3000 0.3333 0.3333 0.3667 0.3000 0.3000 0.3333 0.4000 0.3333 0.3000 0.2667 0.2000
[339] 0.2667 0.2333 0.3333 0.2333 0.4000 0.4667 0.2333 0.3667 0.3333 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.2333 0.3667 0.2333 0.3333 0.4000 0.5000 0.1667 0.1667 0.2333 0.4000 0.3333 0.2667 0.3333
[365] 0.4000 0.3667 0.3667 0.3333 0.3667 0.3000 0.3000 0.4000 0.3000 0.2333 0.3000 0.3333 0.2000 0.3667 0.2333 0.3667 0.3333 0.3333 0.3333 0.2333 0.4667 0.4333 0.4000 0.5667 0.5000 0.3000
[391] 0.4000 0.3000 0.3333 0.2333 0.2000 0.4000 0.4333 0.3333 0.3000 0.2333 0.1667 0.4000 0.4333 0.3000 0.3000 0.3000 0.4667 0.4333 0.4667 0.2000 0.3333 0.3000 0.3667 0.3667 0.3333 0.2667
[417] 0.3000 0.3333 0.2667 0.4000 0.4667 0.3667 0.3000 0.2667 0.4000 0.3667 0.3333 0.4667 0.2667 0.4000 0.3333 0.4667 0.3000 0.2667 0.3667 0.3667 0.5000 0.4333 0.2667 0.4000 0.5667 0.3667
[443] 0.2667 0.3000 0.3333 0.2000 0.3667 0.3333 0.4333 0.2667 0.3000 0.3667 0.4000 0.3667 0.3000 0.4333 0.2667 0.3333 0.3000 0.3333 0.3000 0.3667 0.3000 0.4000 0.3667 0.4667 0.4000 0.4000
[469] 0.3000 0.3000 0.3333 0.3000 0.4000 0.4000 0.2333 0.4333 0.2333 0.2000 0.3667 0.2333 0.3000 0.2667 0.4333 0.3333 0.4000 0.4333 0.2333 0.2000 0.2333 0.4667 0.3333 0.2667 0.2333 0.3333
[495] 0.4667 0.3333 0.2667 0.3667 0.3667 0.3333 0.3667 0.2667 0.3667 0.4000 0.2667 0.2000 0.4000 0.2667 0.3667 0.4333 0.5000 0.2333 0.2000 0.4333 0.4000 0.4333 0.2667 0.2333 0.3333 0.3667
[521] 0.4000 0.4000 0.4667 0.2667 0.2333 0.4667 0.4000 0.3333 0.3000 0.2000 0.2333 0.3000 0.4000 0.2667 0.4667 0.4000 0.3000 0.4000 0.3000 0.4000 0.4000 0.2667 0.3333 0.3667 0.3000 0.4000
[547] 0.4000 0.3333 0.4000 0.3000 0.4000 0.2333 0.4333 0.4000 0.2667 0.3000 0.1667 0.2333 0.2333 0.3333 0.3000 0.5000 0.5667 0.4000 0.3333 0.4333 0.2333 0.2333 0.4333 0.3000 0.3000 0.3000
[573] 0.3667 0.5333 0.3667 0.3667 0.2667 0.3333 0.4000 0.5000 0.4333 0.1667 0.3667 0.2333 0.4000 0.2333 0.3333 0.4000 0.3667 0.5667 0.4333 0.3000 0.1667 0.3667 0.2333 0.3667 0.4000 0.3000
[599] 0.3333 0.3333 0.2333 0.2667 0.4000 0.3667 0.3667 0.4000 0.3333 0.2667 0.3667 0.4000 0.3333 0.4667 0.3333 0.3667 0.3000 0.3667 0.3000 0.4333 0.1667 0.2333 0.3667 0.2333 0.3667 0.2000
[625] 0.2667 0.4667 0.2000 0.3000 0.3667 0.2333 0.2667 0.3667 0.3333 0.3667 0.3667 0.3667 0.2333 0.4333 0.2667 0.3333 0.1333 0.4000 0.2000 0.4000 0.2667 0.3333 0.3333 0.3333 0.3000 0.3667
[651] 0.3667 0.3667 0.4000 0.3000 0.2333 0.5667 0.2667 0.3000 0.3333 0.3333 0.3667 0.2000 0.4667 0.3000 0.2333 0.3333 0.3000 0.2667 0.2333 0.3667 0.3000 0.3667 0.4000 0.3000 0.3000 0.3333
[677] 0.3333 0.3000 0.4000 0.1667 0.2333 0.2667 0.3000 0.4000 0.4000 0.3333 0.4000 0.4333 0.4000 0.2667 0.4333 0.3000 0.2667 0.2333 0.5333 0.2667 0.3000 0.3333 0.3667 0.3333 0.3333 0.3333
[703] 0.4333 0.4333 0.5000 0.5667 0.2333 0.3667 0.3000 0.5333 0.3667 0.4000 0.4667 0.3667 0.3333 0.3333 0.1667 0.2667 0.3333 0.4667 0.3333 0.5000 0.3000 0.2667 0.3667 0.2333 0.2333 0.3333
[729] 0.5333 0.3000 0.4333 0.5667 0.4667 0.3000 0.1333 0.2667 0.4000 0.5000 0.5000 0.3000 0.4667 0.3667 0.2000 0.3000 0.5333 0.4333 0.2333 0.3333 0.4667 0.3333 0.4000 0.4000 0.2000 0.4667
[755] 0.3000 0.3667 0.2333 0.3000 0.2000 0.2333 0.2667 0.2667 0.4000 0.3333 0.3333 0.3000 0.1667 0.2667 0.4000 0.4000 0.3333 0.4000 0.3667 0.2667 0.5000 0.3333 0.3667 0.1667 0.3000 0.3000
[781] 0.4000 0.1667 0.2333 0.2000 0.2333 0.2667 0.2000 0.3333 0.4000 0.3667 0.3667 0.3000 0.4000 0.3333 0.3000 0.3000 0.3000 0.2667 0.3000 0.3333 0.4333 0.4000 0.3333 0.3333 0.4667 0.4667
[807] 0.3667 0.3000 0.3000 0.3000 0.3667 0.3000 0.3667 0.3667 0.3333 0.3000 0.4667 0.2333 0.4000 0.3667 0.4000 0.5000 0.2667 0.3333 0.3333 0.2333 0.3333 0.3667 0.2333 0.3333 0.4333 0.2333
[833] 0.4667 0.4000 0.4333 0.4333 0.2000 0.3333 0.4000 0.3667 0.4000 0.3667 0.1333 0.4333 0.2000 0.3667 0.3000 0.3667 0.2000 0.2333 0.2667 0.3000 0.2000 0.3667 0.3333 0.2000 0.3333 0.3667
[859] 0.3667 0.3000 0.2667 0.1333 0.3333 0.3333 0.1333 0.3667 0.3667 0.2667 0.3000 0.4000 0.3667 0.3000 0.2667 0.3667 0.4333 0.3000 0.2667 0.3000 0.3000 0.3000 0.2667 0.2667 0.2667 0.3667
[885] 0.3000 0.3667 0.3333 0.2333 0.3333 0.3333 0.4000 0.3333 0.4333 0.4333 0.5000 0.4667 0.4000 0.1667 0.2667 0.3000 0.2333 0.3000 0.4667 0.2000 0.3333 0.4667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667
[911] 0.3333 0.3333 0.4333 0.2333 0.4667 0.2667 0.1667 0.2000 0.4000 0.3667 0.2333 0.4000 0.2667 0.3667 0.2667 0.2667 0.3333 0.3667 0.3667 0.3333 0.3667 0.5000 0.3667 0.3000 0.2333 0.2000
[937] 0.3667 0.4333 0.4000 0.3667 0.4000 0.4000 0.4333 0.4000 0.3000 0.2667 0.5333 0.3667 0.4667 0.3000 0.0667 0.2333 0.3667 0.3667 0.3000 0.4667 0.3667 0.2333 0.4333 0.2667 0.4000 0.2333
[963] 0.3000 0.2667 0.3333 0.4000 0.4333 0.1667 0.3000 0.5000 0.3333 0.4000 0.3333 0.3667 0.2333 0.2000 0.4000 0.3000 0.2333 0.2333 0.2333 0.4000 0.4000 0.4333 0.0333 0.4667 0.2333 0.4667
[989] 0.3000 0.3333 0.3000 0.4333 0.2667 0.3667 0.1667 0.3000 0.2667 0.3000 0.4333 0.2333
```

Step 2: sort

```
  [1] 0.0333 0.0667 0.1333 0.1333 0.1333 0.1333 0.1333 0.1333 0.1333 0.1333 0.1333 0.1333 0.1333 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667
 [27] 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000
 [53] 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000
 [79] 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333
[105] 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333
[131] 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333
[157] 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667
[183] 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667
[209] 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667
[235] 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667
[261] 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000
[287] 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000
[313] 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000
[339] 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000
[365] 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000
[391] 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000
[417] 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333
[443] 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333
[469] 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333
[495] 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333
[521] 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333
[547] 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333
[573] 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667
[599] 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667
[625] 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667
[651] 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667
[677] 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667
[703] 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667
[729] 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000
[755] 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000
[781] 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000
[807] 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000
[833] 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4333 0.4333 0.4333
[859] 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333
[885] 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333
[911] 0.4333 0.4333 0.4333 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667
[937] 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.5000 0.5000
[963] 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5333 0.5333 0.5333 0.5333 0.5333
[989] 0.5333 0.5333 0.5333 0.5333 0.5333 0.5667 0.5667 0.5667 0.5667 0.5667 0.5667 0.5667 0.5667
```

Step 3: take the 25th and 975th – $[0.1667, 0.5]$

```
  [1] 0.0333 0.0667 0.1333 0.1333 0.1333 0.1333 0.1333 0.1333 0.1333 0.1333 0.1333 0.1333 0.1333 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667
 [27] 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.1667 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000
 [53] 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000
 [79] 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2000 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333
[105] 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333
[131] 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333
[157] 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2333 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667
[183] 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667
[209] 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667
[235] 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667
[261] 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.2667 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000
[287] 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000
[313] 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000
[339] 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000
[365] 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000
[391] 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000
[417] 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3000 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333
[443] 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333
[469] 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333
[495] 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333
[521] 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333
[547] 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333
[573] 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3333 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667
[599] 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667
[625] 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667
[651] 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667
[677] 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667
[703] 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667
[729] 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.3667 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000
[755] 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000
[781] 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000
[807] 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000
[833] 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4000 0.4333 0.4333 0.4333
[859] 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333
[885] 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333 0.4333
[911] 0.4333 0.4333 0.4333 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667
[937] 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.4667 0.5000 0.5000
[963] 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5000 0.5333 0.5333 0.5333 0.5333 0.5333
[989] 0.5333 0.5333 0.5333 0.5333 0.5333 0.5667 0.5667 0.5667 0.5667 0.5667 0.5667 0.5667 0.5667
```

There are MANY different kinds of bootstrapping

- **Case resampling**: basic, **percentile**, studentized, accelerated, etc.;
- Smooth bootstrapping;
- Bayesian bootstrapping;
- Parametric bootstrapping;
- Residual resampling;
- Wild bootstrapping;
- Gaussian process bootstrapping;
- Block bootstrapping;
- Bag of little bootstraps;
- etc., etc., etc...

Why does this work?

- Situation: you have a **sample** (S) from a **population** (P);
- Goal: **make inferences about a population** parameter (e.g. the mean of P) from the sample (e.g. the mean of S);
  - P is unknown;
  - P's parameter (e.g. the mean) is unknown;
  - Error of S's parameter as an estimate of P's parameter is unknown;
  - The data in S IS known!

Why does this work?

- Situation: you have a **sample** (S) from a **population** (P);
- Goal: **make inferences about a population** parameter (e.g. the mean of P) from the sample (e.g. the mean of S);
  - P is unknown;
  - P's parameter (e.g. the mean) is unknown;
  - Error of S's parameter as an estimate of P's parameter is unknown;
  - The data in S IS known!
- Strategy: treat S as though it's a "population" and the bootstrap data set B drawn with replacement from S as a new "sample";
  - Now everything is known!
  - The error – the difference between the "population" parameter and the "sample" parameter is measurable.