Wstęp do uczenia maszynowego

Estymacja parametrów

Ewa Szczurek + Bartek Wilczyński (modyfikacje)

bartek@mimuw.edu.pl
Instytut Informatyki
Uniwersytet Warszawski

23 lutego 2024

UNIWERSYTET WARSZAWSKI

WYDZIAŁ MATEMATYKI, INFORMATYKI I MECHANIKI

Informacje organizacyjne

- Materiały dostępne na moodle:
  `https://moodle.mimuw.edu.pl/course/view.php?id=2052`
  kod: S8KwJ810
- Dopisywanie do grup/zmiany grup:
  `http://tinyurl.com/2rsuzzv4` Deadline 1. III 2024
- Bardzo proszę o informacje o osobach wyrejestrowujących się z przedmiotu vai e-mail.
- kontakt do mnie: pokój 5770, `bartek@mimuw.edu.pl`, konsultacje środy 8:30 - 10:00, w innych terminach można się umawiać via e-mail
- Możliwość zadawania pytań także via moodle, do wszystkich prowadzących
- Organizacja labów luźno powiązana z wykładem (niektóre grupy będą miały inny rozkład tygodni niż wykład).

Kryteria zaliczenia

- dwa projekty zaliczeniowe, równo cenne (po 30 pktów)
- Egzamin pisemny (40 punktów)
- Ocena z aktywności na laboratoriach (10 pktów, zależy od prowadzącego grupę laboratoryjną)
- minimum 60punktów na zaliczenie

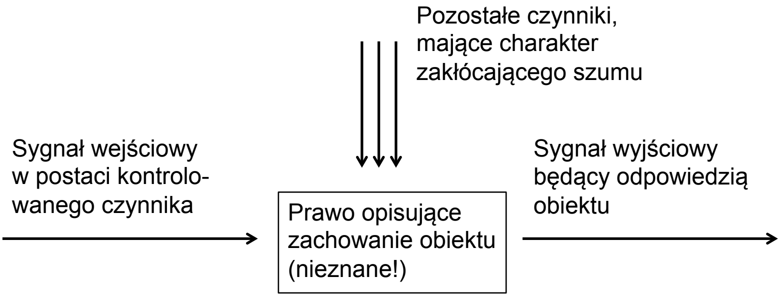
Plan wykładów

1. 27 II - Estymacja parametrow
2. 5 III - Testowanie hipotez
3. 12 III - Testowanie wielu hipotez
4. 19 III - Uczenie statystyczne
5. 26 III i 2 IV - przerwa
6. 9 IV Regresja liniowa (1)
7. 16 IV - Regresja liniowa (2)
8. 23 IV - Metody klasyfikacji
9. 30 IV - Repróbkowanie, wybór modelu
10. 7 V - Regularyzacja, redukcja wymiaru
11. 14 V - Metody drzewiaste
12. 21 V - SVM
13. 28 V - Sieci neuronowe
14. 4 VI - Redukcja wymiaru dokładniej
15. 11 VI - Analiza skupień

Eksperymenty

Eksperyment

- podstawowe narzędzie badawcze
- cel: ustalenie prawa działania danego zjawiska/badanego obiektu



Eksperymenty losowe

Eksperyment losowy

- Przy powtórzeniach eksperymentu tej samej wartości wejściowej odpowiadają różne wartości wyjściowe.
- Częstość pojawiania się danej odpowiedzi stabilizuje się wraz ze wzrostem liczby powtórzeń eksperymentu.

Zatem częstość pojawiania się każdej odpowiedzi może być ustalona z dowolną dokładnością poprzez wykonanie odpowiednio dużej liczby powtórzeń eksperymentu.

Przykład: rzut monetą

- Załóżmy, że moneta jest dokładnie symetryczna.
- Wynik doświadczenia polegającego na rzucie monetą nie jest zdeterminowany.
- Przy zwiększaniu liczby rzutów n, częstość wypadania orłów p_n zbiega do 0.5.

Tablica : Wyniki rzutów monetą

n	100	1000	10000	100000
p_n	0.5300	0.4960	0.4964	0.4975

Probabilistyczny model eksperymentu losowego

- Określenie przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω (zbioru wszystkich możliwych wyników doświadczenia).
- Zadanie na niej rodziny zdarzeń F, (podzbiorów Ω, które z góry wyróżnia eksperymentator; często przyjmujemy rodzinę wszystkich podzbiorów Ω. Gdy $\Omega = \mathbf{R}$, najczęściej przyjmujemy F równe rodzinie zbiorów borelowskich $F = \mathcal{B}(\mathbf{R})$).
- Zadanie miary prawdopodobieństwa P (przyporządkowanie każdemu zdarzeniu $A \in F$ liczby $P(A)$ spełniającej aksjomaty prawdopodobieństwa).

Przestrzeń probabilistyczna

Przestrzeń probabilistyczna

Trójka (Ω, F, P) gdzie Ω przestrzeń zdarzeń elementarnych, F rodzina zdarzeń, P miara prawdopodobieństwa.

Przestrzeń statystyczna

Przestrzeń statystyczna

Trójka $(\Omega, F, \mathcal{P})$, gdzie $\mathcal{P}$ to rodzina miar probabilistycznych, $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$, a Θ to jakaś przestrzeń parametrów.

Przestrzeń statystyczna-intuicja:

- Opis *możliwych* mechanizmów rządzących eksperymentem.

Statystyka pomaga odpowiedzieć na pytanie: Jak wybrać przestrzeń probabilistyczną, będącą sensownym modelem danego eksperymentu losowego?

Kanoniczna przestrzeń próbkowa (wygodny wybór przestrzeni Ω)

- Niech obserwacje: zmienne losowe $Y_1, \dots, Y_n$.
- Ω: zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia, zatem $\omega = (y_1, \dots, y_n)$.
- Przyjmujemy: zmienne losowe Y_i to funkcje określone na przestrzeni próbkowej Ω wzorem $Y_i(\omega) = y_i$.
- W ten sposób wektor losowy $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ spełnia $Y(\omega) = \omega$.
- Wtedy rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni Ω tożsamy z łącznym rozkładem prawdopodobieństwa obserwacji, tzn dla $B \in F$

$$P_\theta(B) = P_\theta(Y \in B).$$

Nomenklatura

n elementowa próba losowa

$Y_1, \ldots, Y_n$ zmienne (wektory) losowe (odpowiadające n wartościom obserwowanym w eksperymencie).

Próba prosta

$Y_1, \ldots, Y_n$ zmienne niezależne i o identycznym rozkładzie.

Realizacja próby losowej

$y_1 = Y_1(\omega), \ldots, y_n = Y_n(\omega)$ - liczby (wektory), wartości próby losowej odpowiadające zdarzeniu elementarnemu $\omega \in \Omega$.

Podstawowe zadania statystyki: identyfikacja miary probabilistycznej

Estymacja punktowa

Oszacowanie θ za pomocą funkcji, której

- argumenty to obserwacje Y
- wartości to poszczególne wartości parametru $\theta \in \Theta$.

Estymacja przedziałowa

Oszacowanie θ za pomocą funkcji, której

- argumenty to obserwacje Y
- wartości to podzbiory przestrzeni parametrów Θ.

Podstawowe zadania statystyki: identyfikacja miary probabilistycznej

Testowanie hipotez

Wyznaczenie zbiorów rozłącznych $\Theta_1, \Theta_2 \subset \Theta$, $\Theta_1 \cup \Theta_2 = \Theta$, wykonanie eksperymentów losowych i na ich podstawie podjęcie decyzji, w którym ze zbiorów Θ_1, Θ_2 znajduje się θ.

Statystyka

Statystyka

Zmienna losowa $T : \Omega \to \mathbb{R}$ i funkcja t taka, że
$T(\omega) = t(Y_1(\omega), \dots, Y_n(\omega))$.

Intuicja: statystyka "podsumowuje" dane.

Przykład statystyki 1: średnia z próby

Średnia z próby $X_1, \ldots, X_n$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

gdzie $X_1, \ldots, X_n$ - próba losowa.

- Jeżeli $\mathbb{E}[X_i] = \theta$ dla $i = 1, \ldots, n$ to $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \theta$.
- Jeżeli $X_1, \ldots, X_n$ - próba prosta, oraz $\mathrm{Var}\,[X_i] = \sigma^2 < \infty$ to

$$\mathrm{Var}\left[\bar{X}_n\right] = \mathrm{Var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sigma^2.$$

Przykład statystyki 2: wariancja z próby

Wariancja z próby $X_1, \ldots, X_n$, przy $\mathbb{E}[X_i] = \theta$ dla $i = 1, \ldots, n$ i θ znanym

$$\hat{S}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \theta)^2.$$

Jeżeli $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2$ dla $i = 1, \ldots, n$ to $\mathbb{E}[\hat{S}_n^2] = \sigma^2$.

Wariancja z próby $X_1, \ldots, X_n$, przy $\mathbb{E}[X_i] = \theta$ dla $i = 1, \ldots, n$ i θ nieznanym

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Wykorzystuje się też statystykę $S_n^{*2} = \frac{n}{n-1} S_n^2$.

Estymatory

Zauważmy, że dla próby losowej $X_1, \ldots, X_n$ w modelu opisanym za pomocą przestrzeni statystycznej $(\Omega, F, \mathcal{P})$, gdzie $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$, rozkład statystyki $T = t(X_1, \ldots, X_n)$ na ogół zalezy od θ. Zatem obserwacje T można wykorzystać do wnioskowania o (estymacji) θ.

Estymator parametru $\theta \in \Theta$

Każda statystyka $t(X_1, \ldots, X_n)$, przyjmująca wartości z przestrzeni parametrów Θ.

Estymatory nieobciążone

Estymator nieobciążony

Estymator $\theta_n = \theta_n(X_1, \ldots, X_n)$ parametru θ z próby losowej $X_1, \ldots, X_n$, taki, że

$$\mathbb{E}[\theta_n] = \theta.$$

Przykład 1 cd: średnia z próby

Jeżeli $\mathbb{E}[X_i] = \theta$ dla $i = 1, \ldots, n$ to średnia z próby jest estymatorem nieobciążonym parametru θ.

Przykład 2 cd: wariancja z próby

Estymator wariancji z próby $X_1, \ldots, X_n$, przy $\mathbb{E}[X_i] = \theta$ i $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2$ dla $i = 1, \ldots, n$ i θ znanym

Estymator

$$\hat{S}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \theta)^2$$

jest estymatorem nieobciążonym parametru σ^2.

$$\begin{aligned}
E[\hat{S}_n^2] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[(X_i - \theta)^2] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbb{E}[X_i^2] - 2\,\mathbb{E}[X_i]\theta + \theta^2 \right] \\
&= \frac{1}{n} \cdot n \left[\mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2 \right] = \sigma^2
\end{aligned}$$

Przykład 2 cd: wariancja z próby

Estymator wariancji z próby $X_1, \ldots, X_n$, przy $\mathbb{E}[X_i] = \theta$ i $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2$ dla $i = 1, \ldots, n$ i θ nieznanym

Załóżmy dodatkowo, że X_i niezależne.

- Zachodzi
$$\mathbb{E}[S_n^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$
zatem S_n^2 **nie** jest nieobciążonym estymatorem σ^2.
- Nieobciążonym estymatorem jest $S_n^{*2} = \frac{n}{n-1} S_n^2$, dla którego
$$\mathbb{E}[S_n^{*2}] = \mathbb{E}[\frac{n}{n-1} S_n^2] = \sigma^2.$$

Estymatory efektywne

Przykład 1 cd: wariancja estymatora średniej z próby prostej

Zauważmy, że

$$\mathrm{Var}\left[\bar{X}_n\right] = \frac{1}{n}\sigma^2 < \mathrm{Var}\left[\bar{X}_{n-1}\right] = \frac{1}{n-1}\sigma^2.$$

A zatem $\bar{X}_n$ ma mniejszy rozrzut wokół estymowanego parametru θ niż $\bar{X}_{n-1}$.

Estymator efektywny

Estymator o najmniejszej wariancji (nie zawsze istnieje).

Pożądane estymatory: nieobciążone i efektywne

Obciążenie estymatora (ang. bias)

$b(\theta_n) = \mathbb{E}[\theta_n] - \theta.$

Przykład

Przez wzrost obciążenia łatwo zredukować wariancję. Np estymator $\theta_c = c$ dla jakiegokolwiek $c \in \Theta$ ma wariancję równą 0 i obciążenie $b(\theta_c) = c - \theta.$

Estymatory zgodne

Niech

- $X_1, X_2, \dots$ - ciąg niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, zależącym od parametru rzeczywistego $\theta \in \Theta$.
- $\theta_n = \theta_n(X_1, \dots, X_n)$ - estymator parametru $\theta \in \Theta$.

Estymator zgodny

Estymator θ_n parameteru θ jest zgodny, jeśli dla każdego $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P(|\theta_n - \theta| \geq \epsilon) = 0$$

Interpretacja: dla wystarczająco dużch liczności próby estymator przyjmuje z dużym prawdopodobieństwem wartości bliskie estymowanemu parametrowi θ.

Przypomnienie: nierówność Czebyszewa

Nierówność Czebyszewa

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\sigma_X) \leq \frac{1}{t^2}$$

dla dowolnego $t > 0$.

- Przyjmijmy σ_X, czyli odchylenie standardowe zmiennej X, za jednostkę rozrzutu.
- Prawdopodbieństwo zdarzenia polegającego na tym, że zmienna X odchyli się od wartości oczekiwanej $\mathbb{E}[X]$ o więcej niż t jednostek, jest nie większe niż $\frac{1}{t^2}$.

Estymatory zgodne

Przykład: średnia arytmetyczna $\bar{X}_n$ z próby

Niech

- $X_1 \ldots, X_n$ - próba prosta
- $\mathbb{E}[X_1] = \theta, \mathrm{Var}[X_1] = \sigma^2 < \infty$
- Zachodzi $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \theta$ i $\mathrm{Var}[\bar{X}_n] = \sigma^2/n$

Z nierówności Czebyszewa, przyjmując $t = \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}$, otrzymujemy

$$P(|\bar{X}_n - \theta| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}.$$

Stąd, $\bar{X}_n$ jest zgodnym estymatorem wartości oczekiwanej θ.
Ta własność zachodzi dla dowolnych zmiennych losowych, ciągłych i skokowych, o skończonej wariancji.

Estymatory mocno zgodne

Niech

- $X_1, X_2, \ldots$ - ciąg niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, zależącym od parametru rzeczywistego $\theta \in \Theta$.
- $\theta_n = \theta_n(X_1, \ldots, X_n)$ - estymator parametru $\theta \in \Theta$

Estymator mocno zgodny

Estymator θ_n jest mocno zgodny, jeśli

$$P(\lim_{n \to \infty} \theta_n = \theta) = 1$$

Interpretacja: z prawdopodobieństwem 1 realizacje estymatora dążą, przy $n \to \infty$, do estymowanego parametru.

Estymatory mocno zgodne

Przykład: średnia arytmetyczna $\bar{X}_n$ z próby

- $X_1 \ldots, X_n$ - próba prosta
- $\mathbb{E}[X_1] = \theta$

Można pokazać, że średnia arytmetyczna $\bar{X}_n$ jest mocno zgodnym estymatorem wartości oczekiwanej θ

$$P(\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n = \theta) = 1$$

Każdy estymator mocno zgodny jest zgodnym estymatorem, ale nie na odwrót.

Przypomnienie: Dystrybuanta zmiennej losowej

Dystrybuanta zmiennej losowej X

Funkcja dana wzorem

$$F_X(t) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}) = P_X(\{x : x \leq t\}) = P(X \leq t)$$

Dla X zmiennej ciągłej o gęstości f

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx.$$

Estymatory mocno zgodne

Przykład: dystrybuanta empiryczna z próby

- $X_1 \ldots, X_n$ - próba prosta
- dystrybuanta empiryczna F_n jest średnią arytmetyczną zmiennych zerojedynkowych $\mathbf{1}_{(-\infty,s)}(X_i)$, $F_n(s) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(-\infty,s)}(X_i)$
- zachodzi $P(\mathbf{1}_{(-\infty,s)}(X_i)) = F(s)$ oraz $\mathbb{E}(F_n(s)) = F(s)$.

$F_n(s)$ jest mocno zgodnym estymatorem dystrybuanty

$$P\left(\lim_{n\to\infty} F_n(s) = F(s)\right) = 1$$

dla każdego $s \in R$.

Estymator największej wiarogodności (ang. maximum likelihood estimator; MLE)

- Niech $X_1, \ldots, X_n$ – próba prosta, w której rozkład zależy od nieznanego parametru $\theta \in \mathbb{R}^k$.
- $x_1, \ldots, x_n$ – obserwacje $X_1, \ldots, X_n$
- p_θ – gęstość rozkładu X_1, gdy X_1 ciągła ($p_\theta(x) = f_{X_1}(x)$), lub rozkład prawdopodobieństwa, gdy skokowa ($p_\theta(x) = P(\{\omega : X_1(\omega) = x\})$).

Funkcja wiarogodności

$$L(x_1, \ldots, x_n, \theta) = p_\theta(x_1) \cdot \ldots \cdot p_\theta(x_n)$$

Estymator największej wiarogodności

Taki estymator $\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ parametru θ, dla którego funkcja wiarogodności $L(x_1, \ldots, x_n, \hat{\theta})$ osiąga największą wartość.

Estymator największej wiarogodności

- Funkcja wiarogodności L osiąga maksimum w tym samym punkcie co funkcja $l = \ln(L)$ (ln jest funkcją ściśle rosnącą).
- Korzystamy z tego faktu jako uproszczenia rachunków przy wyznaczaniu estymatora

Estymator największej wiarogodności

Przykład: estymator średniej i wariancji rozkładu normalnego

- $X_1 \ldots, X_n$ - próba prosta z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$ o nieznanym parametrze $\theta = (\mu, \sigma^2)$.
- $L(x_1 \ldots, x_n, \theta) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$
- $l(x_1 \ldots, x_n, \theta) = -n\ln(\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 + \ln\left[(2\pi)^{-n/2}\right]$

Estymator największej wiarogodności

Przykład cd: estymator średniej i wariancji rozkładu normalnego

- Teraz maksymalizujemy $l(x_1 \ldots, x_n, \theta)$: liczymy pochodne cząstkowe i przyrównujemy do zera.

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \frac{\sum_i x_i}{\sigma^2} - \frac{n\mu}{\sigma^2}.$$

  $\frac{\partial l}{\partial \mu} = 0$ zachodzi dla $\hat{\mu} = \frac{\sum_i x_i}{n} = \bar{x}_n$.
  Zaś $\frac{\partial l}{\partial(\sigma^2)} = 0$ zachodzi dla $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2$.
- Łatwo pokazać, że w punkcie $\hat{\theta} = (\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ funkcja $l(\theta)$ osiąga maksimum globalne
- Zatem $\hat{\theta} = (\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ jest estymatorem największej wiarogodności parametru θ.

Kwantyle

Kwantyl rzędu p $(0 < p < 1)$

Dla zmiennej losowej X typu ciągłego o dystrybuancie F i gęstości f, kwantylem rzędu p nazywamy każdą liczbę x_p spełniającą którykolwiek z równoważnych warunków:

$$
\begin{aligned}
F(x_p) &= p \\
P(X \leq x_p) &= p \\
\int_{-\infty}^{x_p} f(x)dx &= p.
\end{aligned}
$$

Mediana

Kwantyl rzędu $p = 0.5$.

Estymacja przedziałowa

Przedział ufności dla parametru $\theta \in \Theta$ i próby $X_1, \ldots, X_n$ na poziomie ufności $1 - \alpha$, $(0 < \alpha < 1)$

Przedział (θ_1, θ_2) taki, że

- $\theta_1 = \theta_1(X_1, \ldots, X_n)$ oraz $\theta_2 = \theta_2(X_1, \ldots, X_n)$ - funkcje próby losowej $X_1, \ldots, X_n$.
- $P\left(\theta_1(X_1, \ldots, X_n) < \theta < \theta_2(X_1, \ldots, X_n)\right) = 1 - \alpha$.

W drugim punkcie mówimy o prawdopodobieństwie, bo końce przedziału θ_1 i θ_2 są zmiennymi losowymi!

Długość przedziału ufności

Długość przedziału ufności

Różnica $l_n = \theta_2(X_1, \ldots, X_n) - \theta_1(X_1, \ldots, X_n)$.

Najbardziej dokładna estymacja przedziałowa to ta, która daje najkrótszy przedział ufności.

Uniwersalny przedział ufności

Przykład: przedział ufności na podstawie nierówności Czebyszewa.

- $X_1 \ldots, X_n$ - próba prosta, $\mathbb{E}[X_1] = \theta, \mathrm{Var}[X_1] = \sigma^2 < \infty$
- Zachodzi $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \theta$ i $\mathrm{Var}[\bar{X}_n] = \sigma^2/n$
- Z nierówności Czebyszewa, przyjmując $t = \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}$ mamy

$$P(\bar{X}_n - \epsilon < \theta < \bar{X}_n + \epsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

- Przyjmijmy σ^2 za jednostkę w układzie współrzędnych, w których rejestrowane są realizacje próby.
- Aby poziom ufności wynosił co najmniej 0.99, musimy mieć $n\epsilon^2 \geq 100$.
- Przyjmując optymalne (dające najkrótszy przedział) $\epsilon = 10/\sqrt{n}$

$$P(\bar{X}_n - 10/\sqrt{n} < \theta < \bar{X}_n + 10/\sqrt{n}) \geq 0.99.$$

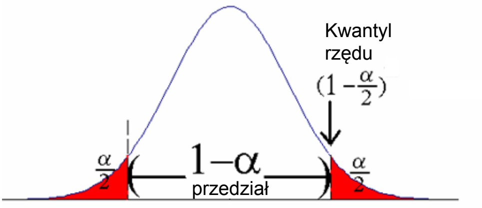
Uniwersalny przedział ufności

Przykład cd: przedział ufności na podstawie nierówności Czebyszewa.

- Przedział ufności z tego przykładu ma długość $l_n = 20/\sqrt{n}$
- Aby $l_n = 0.2$ musimy dokonać 10000 obserwacji.

Niech $X_1, \ldots, X_n$ próba losowa prosta z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$ o **nieznanym** μ i **znanym** σ.

- Statystyka $\bar{X}_n$ ma rozkład $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$
- Standardyzacja: zmienna losowa $U = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ ma rozkład $N(0,1)$
- Znajdziemy u_1 i u_2 takie, że $P(u_1 < U < u_2) = 1 - \alpha$ dla zadanego α.
- Intuicja:



Przedziały ufności dla wartości oczekiwanej.Model 1

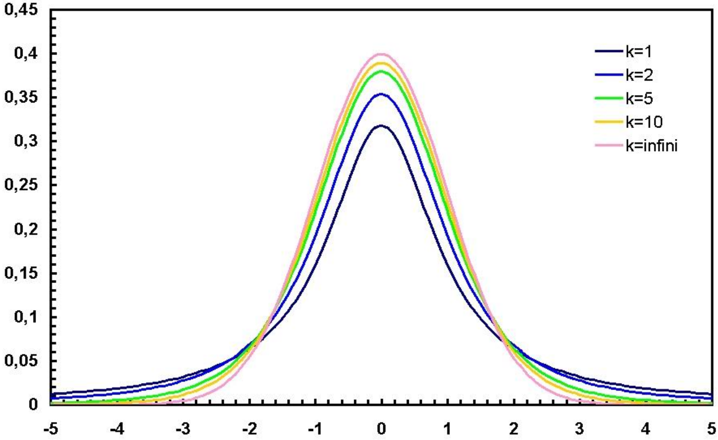
- Bierzemy α_1, α_2 takie, że $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ i $\alpha_1, \alpha_2 > 0$
- przyjmujemy $u_1 = q(\alpha_1), u_2 = q(1-\alpha_2)$, gdzie $q(\alpha_1)$ i $q(1-\alpha_2)$ są kwantylami rzędu α_1 i $1-\alpha_2$ zmiennej U.
- Wówczas mamy

$$P\left(q(\alpha_1) < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} < q(1-\alpha_2)\right) = 1 - \alpha.$$

Najkrótszy przedział ufności dla μ otrzymujemy dla $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$, postaci:

$$\left(\bar{X}_n - q\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n - q\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$
$$\left(\bar{X}_n - q\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + q\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Funkcja gęstości rozkładu t-studenta



Przedziały ufności dla wartości oczekiwanej. Model 2

Niech $X_1, \ldots, X_n$ próba losowa prosta z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$ o **nieznanych** μ i σ.

- Zmienna losowa $\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n-1}$, gdzie $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ ma rozkład t-Studenta o $n-1$ stopniach swobody.
- Niech $t(\alpha, n-1)$ - kwantyl rzędu α tego rozkładu. Wówczas

$$P\left(t\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right) < \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n-1} < t\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n-1\right)\right) = 1 - \alpha.$$

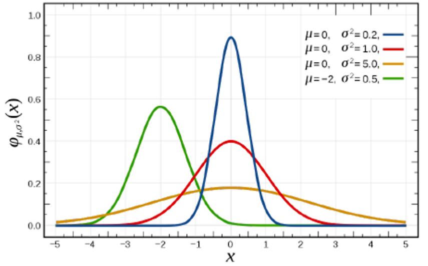
i z faktu $t(\alpha/2, n-1) = -t(1-\alpha/2, n-1)$ otrzymujemy przedział ufności na poziomie $1-\alpha$ dla μ

$$\left(\bar{X}_n - t\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n-1\right)\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}, \bar{X}_n + t\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n-1\right)\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}\right)$$

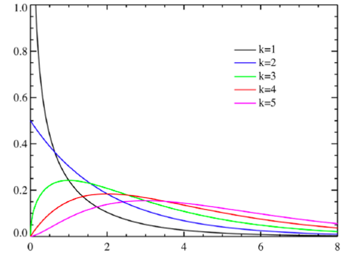
Porównanie funkcji gęstości: normalny, chi-kwadrat

Wykresy gęstości

rozkładu normalnego



rozkładu χ^2



Przedziały ufności dla wariancji

Niech $X_1, \ldots, X_n$ próba losowa prosta z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$ o **nieznanych** μ i σ.

- Zmienna losowa $\chi^2 = \frac{nS_n^2}{\sigma^2}$ ma rozkład chi-kwadrat o $(n-1)$ stopniach swobody.
- Niech $\chi^2(\alpha, n-1)$ - kwantyl rzędu α tego rozkładu. Wówczas

$$P\left(\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right) < \frac{nS_n^2}{\sigma^2} < \chi^2\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)\right) = 1-\alpha.$$

Otrzymujemy przedział ufności na poziomie $1-\alpha$ dla σ^2 postaci

$$\left(\frac{nS_n^2}{\chi^2\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}, \frac{nS_n^2}{\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)}\right).$$

Podsumowanie poznanych pojęć

- Eksperyment losowy
- Próba losowa
- Statystyka
- Estymator
- Estymator nieobciążony
- Estymator efektywny
- Estymator zgodny
- Estymator największej wiarogodności
- Kwantyl
- Estymacja przedziałowa