Отчет по лабораторной работе №3

Модель боевых действий

Горбунова Ярослава Михайловна

2022 Feb 24th

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

1. Рассмотреть три простейшие модели боевых действий – модели Ланчестера
2. Рассмотреть три случая ведения боевых действий:
    1. Боевые действия между регулярными войсками
    2. Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов
    3. Боевые действия между партизанскими отрядами
3. Построить графики изменения численности войск армии Х и армии У для случаев боевых действий между регулярными войсками и боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

2 Задание

2.0.1 Постановка задачи. Модель боевых действий (Вариант 23)

Между страной Х и страной У идет война. Численность состава войск исчисляется от начала войны, и являются временными функциями $x(t)$ и $y(t)$. В начальный момент времени страна Х имеет армию численностью 44 000 человек, а в распоряжении страны У армия численностью в 33 000 человек. Для упрощения модели считаем, что коэффициенты a, b, c, h постоянны. Также считаем $P(t)$ и $Q(t)$ непрерывные функции.

Постройте графики изменения численности войск армии Х и армии У для следующих случаев: 1. Модель боевых действий между регулярными войсками

$$\frac{dx}{dt} = -0,55x(t) - 0,8y(t) + sin(t) + 1$$

$$\frac{dx}{dt} = -0,8x(t) - 0,35y(t) + cos(2t)$$

2. Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

$$\frac{dx}{dt} = -0,43x(t) - 0,79y(t) + sin(2t) + 1$$

$$\frac{dx}{dt} = -0,79x(t)y(t) - 0,23y(t) + cos(2t)$$

3 Теоретическое введение

Модели Ланчестера. В противоборстве могут принимать участие как регулярные войска, так и партизанские отряды. В общем случае главной характеристикой соперников являются численности сторон. Если в какой-то момент времени одна из численностей обращается в нуль, то данная сторона считается проигравшей (при условии, что численность другой стороны в данный момент положительна). Рассмотрим три случая ведения боевых действий: 1. Боевые действия между регулярными войсками 2. Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов 3. Боевые действия между партизанскими отрядами

В первом случае численность регулярных войск определяется тремя факторами [1]: * скорость уменьшения численности войск из-за причин, не связанных с боевыми действиями (болезни, травмы, дезертирство); * скорость потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующих сторон (что связанно с качеством стратегии, уровнем вооружения, профессионализмом солдат и т.п.); * скорость поступления подкрепления (задаётся некоторой функцией от времени).

В этом случае модель боевых действий между регулярными войсками описывается следующим образом [2] (1)

$$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -c(t)x(t) - h(t)y(t) + Q(t)$$

Потери, не связанные с боевыми действиями, описывают члены $-a(t)x(t)$ и $-h(t)y(t)$, члены $-b(t)y(t)$ и $-c(t)x(t)$ отражают потери на поле боя.Коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$ указывают на эффективность боевых действий со стороны у и х соответственно, $a(t)$ и $h(t)$ - величины, характеризующие степень влияния различных факторов на потери. Функции $P(t), Q(t)$ учитывают возможность подхода подкрепления к войскам Х и У в течение одного дня.

Во втором случае в борьбу добавляются партизанские отряды. Нерегулярные войска в отличии от постоянной армии менее уязвимы, так как действуют скрытно, в этом случае сопернику приходится действовать неизбирательно, по площадям, занимаемым партизанами. Поэтому считается, что тем потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан. В результате модель принимает вид (2):

$$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t)$$
$$\frac{dy}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t)$$

В этой системе все величины имею тот же смысл, что и в системе (1).

Модель ведение боевых действий между партизанскими отрядами с учетом предположений, сделанном в предыдущем случаем, имеет вид (3):

$$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)x(t)y(t) + P(t)$$
$$\frac{dy}{dt} = -h(t)y(t) - c(t)x(t)y(t) + Q(t)$$

В простейшей модели борьбы двух противников коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$ являются постоянными. Попросту говоря, предполагается, что каждый солдат армии х убивает за единицу времени с солдат армии у (и, соответственно, каждый солдат армии у убивает b солдат армии х). Также не учитываются потери, не связанные с боевыми действиями, и возможность подхода подкрепления. Состояние системы описывается точкой (x,y) положительного квадранта плоскости. Координаты этой точки, х и у - это численности противостоящих армий. Тогда модель принимает вид (4)

$$\begin{cases} \dot{x} = -by \\ \dot{y} = -cx \end{cases}$$

Figure 3.1: Формула 4

Это - жесткая модель, которая допускает точное решение (5)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{by}{cx}$$

$$cxdx = bydy, cx^2 - by^2 = C$$

Эволюция численностей армий x и y происходит вдоль гиперболы, заданной этим уравнением (рис.1). По какой именно гиперболе пойдет война, зависит от начальной точки.

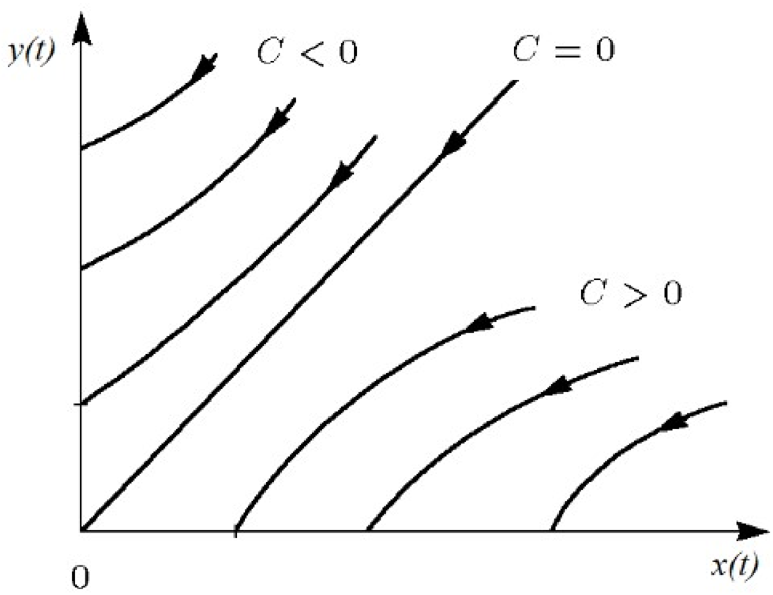

Figure 3.2: рис.1: Жесткая модель войны

Эти гиперболы разделены прямой $\sqrt{c}x = \sqrt{b}y$. Если начальная точка лежит выше этой прямой, то гипербола выходит на ось y. Это значит, что в ходе войны численность армии x уменьшается до нуля (за конечное время). Армия y выигрывает, противник уничтожен.

Если начальная точка лежит ниже, то выигрывает армия x. В разделяющем эти случаи состоянии (на прямой) война заканчивается истреблением обеих армий. Но на это требуется бесконечно большое время: конфликт продолжает тлеть, когда оба противника уже обессилены.

Вывод модели таков: для борьбы с вдвое более многочисленным противником нужно в четыре раза более мощное оружие, с втрое более многочисленным - в девять раз и т. д. (на это указывают квадратные корни в уравнении прямой).

Стоит помнить, что эта модель сильно идеализирована и неприменима к реальной ситуации. Но может использоваться для начального анализа.

Если рассматривать второй случай (война между регулярными войсками и партизанскими отрядами) с теми же упрощениями, то модель (2) принимает вид (6):

$$\frac{dx}{dt} = -by(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cx(t)y(t)$$

Эта система приводится к уравнению (7)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t)\right) = 0,$$

которое при заданных начальных условиях имеет единственное решение (8):

$$\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t) = \frac{b}{2}x^2(0) - cy(0) = C_1$$

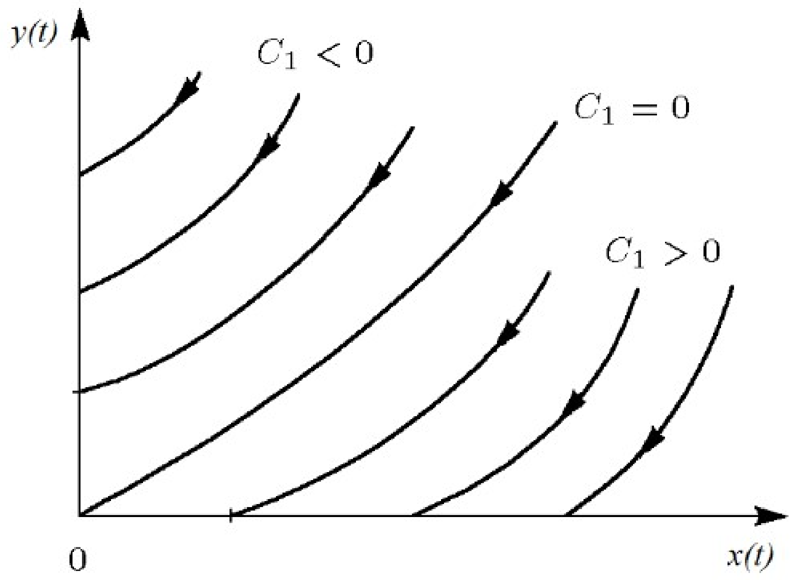

Figure 3.3: рис.2: Фазовые траектории системы (6)

Из рис.2 видно, что при $C_1 > 0$ побеждает регулярная армия, при $C_1 < 0$ побеждают партизаны. Аналогично противоборству регулярных войск, победа обеспечивается не только начальной численностью, но и боевой выучкой и качеством вооружения. При $C_1 > 0$ получаем соотношение $\frac{b}{2}x^2(0) > cy(0)$. Чтобы одержать победу партизанам необходимо увеличить коэффициент c и повысить свою начальную численность на соответствующую величину. Причем это увеличение, с ростом начальной численности регулярных войск ($x(0)$), должно расти не линейно, а пропорционально второй степени $x(0)$. Таким образом, можно сделать вывод, что регулярные войска находятся в более выгодном положении, так как неравенство для них выполняется прим меньшем росте начальной численности войск.

Рассмотренные простейшие модели соперничества соответствуют системам обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, широко распространенным при описании многих естественно научных объектов.

4 Выполнение лабораторной работы

Выполнение работы будем проводить, используя OpenModelica.

1. Напишем программу для построения модели боевых действий между регулярными войсками с заданными начальными условиями (см. задание условие 1) (рис.3)

```
model lab03_1

  parameter Real a = 0.55;
  parameter Real b = 0.8;
  parameter Real c = 0.8;
  parameter Real h = 0.35;

  Real x(start = 44000, unit = "people");
  Real y(start = 33000, unit = "people");

equation

  der(x) = -a*x - b*y + sin(time) + 1;
  der(y) = -c*x - h*y + cos(2 * time);

end lab03_1;
```

Figure 4.1: рис.3: Программа для построения модели боевых действий между регулярными войсками

Результатом симуляции с начальным временем 0 и конечным временем 10 с интервалом 0,2 является следующий график (рис.4):

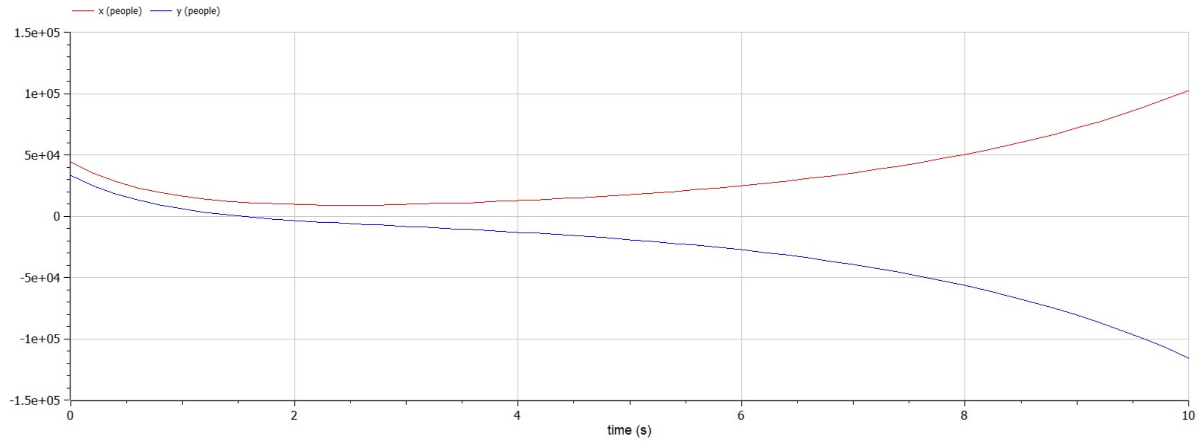

Figure 4.2: рис.4: График изменения численности войск армии X и армии У в случае боевых действий между регулярными войсками

Из графика видно, что с такими начальными данными армия Y проиграет войну, когда time=1,5 (через полтора дня, после её начала).

2. Напишем программу для построения модели боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов с заданными начальными условиями (см. задание условие 2) (рис.5)

```
model lab03_2

  parameter Real a = 0.43;
  parameter Real b = 0.79;
  parameter Real c = 0.79;
  parameter Real h = 0.23;

  Real x(start = 44000, unit = "people");
  Real y(start = 33000, unit = "people");

equation

  der(x) = -a*x - b*y + sin(2*time)+1;
  der(y) = -c*x*y - h*y + cos(2*time);

end lab03_2;
```

Figure 4.3: рис.5: Программа для построения модели боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

Результатом симуляции с начальным временем 0 и конечным временем 0,1 с интервалом 0,002 является следующий (рис.6):

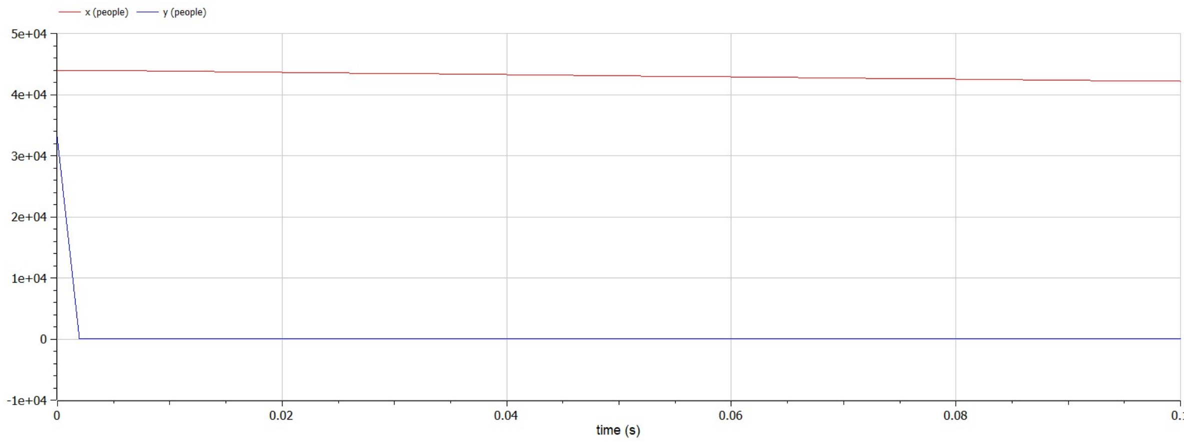

Figure 4.4: рис.6: График изменения численности войск армии X и армии У в случае боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

Из графика видно, что с такими начальными данными армия Y проиграет войну, когда time<0,005 (практически сразу, после начала войны).

5 Выводы

В ходе выполнения работы было сделано следующее:

1. Рассмотрены три простейшие модели боевых действий – модели Ланчестера
2. Рассмотрены три случая ведения боевых действий:

   1. Боевые действия между регулярными войсками
   2. Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов
   3. Боевые действия между партизанскими отрядами

3. Построены графики изменения численности войск армии Х и армии У для случаев боевых действий между регулярными войсками и боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

6 Список литературы

1. Методические материалы курса
2. Определение жертв войн через ланчестерские (https://www.socionauki.ru/journal/articles/130365/)