

Übungen zur Vorlesung **Multivariate Verfahren**

— Blatt Nr. 8 —

Aufgabe P15

Wir wollen die Schätzung eines orthogonalen Faktorenmodells durchführen. Betrachten Sie das orthogonale Faktorenmodell mit der Varianzzerlegung $\Sigma = \mathbf{L}\mathbf{L}' + \mathbf{V}$ mit einem Faktor. Gegeben sei die geschätzte Korrelationsmatrix

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1 & 1/10 \\ -1/4 & 1/10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Startschätzung für die Ladungsmatrix \mathbf{L} mit der *Hauptfaktorenmethode*:

Bestimmen Sie zunächst eine Startschätzung für \mathbf{V} , indem die Kommunalität durch die maximale quadrierte Korrelationen geschätzt wird. Bestimmen Sie anschließend mittels der geschätzten Diagonalmatrix \mathbf{V} eine Schätzung für \mathbf{L} .

Erklären Sie, wie man ausgehend von den Startschätzungen bessere Schätzungen für \mathbf{V} sowie \mathbf{L} erhalten kann.

Hinweis: Die Eigenwerte der Matrix $\hat{\Sigma}$ sind 1.3071, 1.1000 und 0.5929 mit den zugehörigen Eigenvektoren $(0.7550, 0.4637, -0.4637)'$, $(0, 0.7071, 0.7071)'$ und $(0.6557, -0.5339, 0.5339)'$. Hiervon ausgehend können auch die Eigenwerte und -vektoren von Matrizen des Typs $\hat{\Sigma} - cI$ bestimmt werden.

Aufgabe P16

Vierzig Testpersonen werden gebeten, jeweils drei verschiedene Aufgaben zu lösen. Die erreichten Punktzahlen werden als unabhängige Realisierungen einer dreidimensional normalverteilten Zufallsvariablen $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)'$ modelliert. Wir beobachten:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 6.1 \\ 6.0 \\ 4.0 \end{pmatrix}, \quad S_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1.0 & -1.0 \\ 1.0 & 4.0 & -2.0 \\ -1.0 & -2.0 & 4.0 \end{pmatrix}.$$

Wir interessieren uns für den Zusammenhang zwischen der letzten Aufgabe und den ersten beiden Aufgaben. Führen Sie eine kanonische Korrelationsanalyse zwischen $(X_1, X_2)'$ und X_3 durch, d.h. bestimmen Sie das erste Paar kanonischer Variablen und deren kanonische Korrelation.

Aufgabe H17 (5/10)

Die Datei `psych_results.txt` enthält die Selbsteinschätzung zu 11 Charaktereigenschaften (wie Faulheit, Verantwortungsbewusstsein, Schüchternheit) auf einer Skala von 1-9 für 240 Testpersonen. Es liegt nahe, dass einige der Eigenschaften durch gemeinsame Faktoren erklärt werden können. Führen Sie daher eine Faktorenanalyse der standardisierten Daten durch.

- Untersuchen Sie, wie viele Faktoren für diese Daten angemessen sind. Neben den im Skript angegebenen Kriterien können Sie dazu auch die Struktur der Kovarianzmatrix betrachten, die sich z.B. mit der Funktion `corrplot` aus dem gleichnamigen Paket visualisieren lässt.
- Führen Sie eine Faktorenanalyse mit drei Faktoren ohne Rotation durch und stellen Sie die Merkmale grafisch dar, indem Sie die Ladungen für je zwei Faktoren in ein Diagramm zeichnen.
- Führen Sie eine Faktorenanalyse mit drei Faktoren und Varimax-Rotation durch. Stellen Sie die Merkmale wieder grafisch dar und interpretieren Sie die Faktoren.
- Betrachten und beurteilen Sie, wie gut die Faktorenanalyse aus c) die Korrelationsmatrix erklärt.

Hinweis: Eine ML-Faktorenanalyse kann in R mittels der Funktion `factanal` durchgeführt werden.

Aufgabe H18 (Nachklausur WS (09/10) (5/10)

Seien X, U und V unabhängig mit $X \sim N_p(0, \Sigma)$ und $U \sim N_p(0, I) \sim V$. Seien weiter $Y = AX + U$ und $Z = BX + V$ für unbekannte orthogonale $p \times p$ -Matrizen A und B . Bestimmen Sie die kanonischen Variablen und kanonischen Korrelationen für Y und Z . Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Bestimmen Sie die Kovarianzmatrizen $Cov(Y, Z)$ von Y und Z .
- Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und Eigenvektoren von $A\Sigma A' + I$ und Σ her.
- Bestimmen Sie die kanonischen Variablen und kanonischen Korrelationen für Y und Z . Wenden Sie hierfür Bemerkung 6.6 an.

Abgabe der Hausaufgaben bis zum 09.12.2019 12 Uhr. Gruppenarbeit unter Angabe der Gruppenmitglieder möglich, aber pro Person eine eigene handschriftliche Abgabe. Bei Software-Aufgaben schicken Sie bitte **zusätzlich** zum ausgedruckten Blatt (R-Code inkl. Ergebnisse) den zugehörigen Programmcode an ihren Übungsleiter.

Übung	Mailadresse	Briefkasten
Mittwoch 10:15 - 11:45 Uhr	jkoenig@statistik.tu-dortmund.de	131
Donnerstag 08:30 - 10:00 Uhr	nilsjannik.schuessler@tu-dortmund.de	132