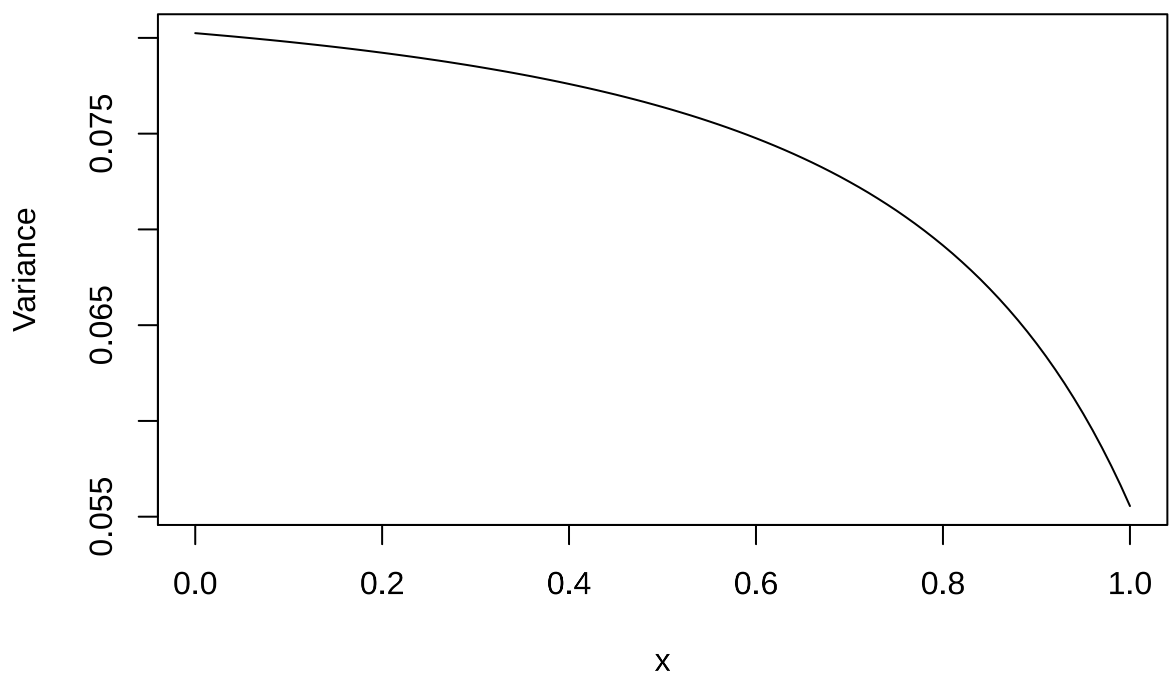
Blatt 2

Christian Peters

H3)

Plotte zunächst die Kurve $f(x_1) = Var(X_2|X_1 = x_1)$:

```
curve((1/12 * x**2 - 3/12 * x + 13/72)/(3/2 - x)**2, xlim = c(0, 1), ylab = 'Variance')
```



Man erkennt also, dass die bedingte Varianz abnimmt, je näher x_1 bei 1 liegt. Dies bedeutet, dass Werte von X_1 in der Nähe von 1 mehr Informationen über X_2 haben als Werte, die weiter von 1 entfernt liegen.

H5)

a)

```
(A <- matrix(c(4, 1, 1, 1, 1, 4), nrow = 2))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    4    1    1
## [2,]    1    1    4
```

```
(ATA <- t(A) %*% A)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
```

```
## [1,]   17    5    8
## [2,]    5    2    5
## [3,]    8    5   17
```

```
(AAT <- A %*% t(A))
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]   18    9
## [2,]    9   18
```

Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen:

```
eigenvectorsATA <- eigen(ATA)$vectors
eigenvaluesATA <- eigen(ATA)$values
eigenvectorsAAT <- eigen(AAT)$vectors
eigenvaluesAAT <- eigen(AAT)$values
```

Die Eigenvektoren von $A^T A$ befinden sich in den Spalten dieser Matrix:

```
print(eigenvectorsATA)
```

```
##            [,1]          [,2]       [,3]
## [1,] -0.6804138  7.071068e-01  0.1924501
## [2,] -0.2721655  1.332268e-15 -0.9622504
## [3,] -0.6804138 -7.071068e-01  0.1924501
```

Die Eigenwerte von $A^T A$ lauten:

```
print(eigenvaluesATA)
```

```
## [1] 2.700000e+01 9.000000e+00 3.907985e-14
```

Die Eigenvektoren von AA^T befinden sich in den Spalten dieser Matrix:

```
print(eigenvectorsAAT)
```

```
##           [,1]       [,2]
## [1,] 0.7071068 -0.7071068
## [2,] 0.7071068  0.7071068
```

Die Eigenwerte von AA^T lauten:

```
print(eigenvaluesAAT)
```

```
## [1] 27  9
```

b)

Spur von $A^T A$:

```
(sum(diag(ATA)))
```

```
## [1] 36
```

Spur von AA^T:

```
(sum(diag(AAT)))
```

```
## [1] 36
```

c)

Die Determinante entspricht dem Produkt der Eigenwerte. Es ist also $det(AA^T) = 27 \cdot 9 = 243$.

```
(det(AAT))
```

```
## [1] 243
```

d)

Wegen $det(AA^T) \neq 0$ ist die Matrix AA^T invertierbar. Die Inverse bestimmt sich wie folgt:

```
(solve(AAT))
```

```
##             [,1]        [,2]
## [1,]  0.07407407 -0.03703704
## [2,] -0.03703704  0.07407407
```

e)

Die Matrix V der Spektralzerlegung von A^TA entspricht der Matrix ihrer Eigenvektoren, die Matrix Λ enthält ihre Eigenwerte als Diagonalelemente.

```
(V_ATA <- eigenvectorsATA)
```

```
##            [,1]          [,2]       [,3]
## [1,] -0.6804138  7.071068e-01  0.1924501
## [2,] -0.2721655  1.332268e-15 -0.9622504
## [3,] -0.6804138 -7.071068e-01  0.1924501
```

```
(Lambda_ATA <- diag(eigenvaluesATA))
```

```
##      [,1] [,2]         [,3]
## [1,]   27    0 0.000000e+00
## [2,]    0    9 0.000000e+00
## [3,]    0    0 3.907985e-14
```

Probe:

```
(V_ATA %*% Lambda_ATA %*% t(V_ATA))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]   17    5    8
## [2,]    5    2    5
## [3,]    8    5   17
```

Dies funktioniert analog für die Spektralzerlegung von AA^T:

```
(V_AAT <- eigenvectorsAAT)
```

```
##           [,1]       [,2]
## [1,] 0.7071068 -0.7071068
## [2,] 0.7071068  0.7071068
```

```
(Lambda_AAT <- diag(eigenvaluesAAT))
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]   27    0
## [2,]    0    9
```

Probe:

```
(V_AAT %*% Lambda_AAT %*% t(V_AAT))
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]   18    9
## [2,]    9   18
```

f)

Gemäß Satz 1.30 lassen sich die Matrizen V, Λ und W wie folgt bestimmen:

```
(V_Singular <- eigenvectorsAAT)
```

```
##           [,1]       [,2]
## [1,] 0.7071068 -0.7071068
## [2,] 0.7071068  0.7071068
```

```
(Lambda_Singular <- diag(sqrt(eigenvaluesAAT)))
```

```
##          [,1] [,2]
## [1,] 5.196152    0
## [2,] 0.000000    3
```

```
(W_Singular <- eigenvectorsATA[, 1:2]) # only choose eigenvectors for non-zero eigenvalues
```

```
##            [,1]          [,2]
## [1,] -0.6804138  7.071068e-01
## [2,] -0.2721655  1.332268e-15
## [3,] -0.6804138 -7.071068e-01
```

Probe:

```
(V_Singular %*% Lambda_Singular %*% t(W_Singular))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]   -4   -1   -1
## [2,]   -1   -1   -4
```

Man beachte, dass die Singulärwertzerlegung nicht eindeutig ist, da auch die Richtungen der Eigenvektoren in V und W nicht eindeutig sind. Daher kann es vorkommen, dass sich wie hier die Vorzeichen unterscheiden.

g)

Gemäß Definition 1.31 ergibt sich die Pseudoinverse zu:

```
(pseudoinverse <- W_Singular %*% diag(1/diag(Lambda_Singular)) %*% t(V_Singular))
```

```
##             [,1]        [,2]
## [1,] -0.25925926  0.07407407
## [2,] -0.03703704 -0.03703704
## [3,]  0.07407407 -0.25925926
```

Auch hier ist wie bei der Singulärwertzerlegung zu beachten, dass die Pseudoinverse aufgrund der willkürlichen Vorzeichen der Eigenvektoren nicht eindeutig ist.