

Blatt 2

Christian Peters

H15)

a)

```
(A <- matrix(c(4, 1, 1, 1, 1, 4), nrow = 2))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    4    1    1
## [2,]    1    1    4
```

```
(ATA <- t(A) %*% A)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]   17    5    8
## [2,]    5    2    5
## [3,]    8    5   17
```

```
(AAT <- A %*% t(A))
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]   18    9
## [2,]    9   18
```

Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen:

```
eigenvaluesATA <- eigen(ATA)$values
eigenvaluesAAT <- eigen(AAT)$values
eigenvaluesATA <- eigen(ATA)$values
eigenvaluesAAT <- eigen(AAT)$values
```

Die Eigenvektoren von $A^T A$ befinden sich in den Spalten dieser Matrix:

```
##      [,1]      [,2]      [,3]
## [1,] -0.6804138  7.071068e-01  0.1924501
## [2,] -0.2721655  1.332268e-15 -0.9622504
## [3,] -0.6804138 -7.071068e-01  0.1924501
```

Die Eigenwerte von $A^T A$ lauten:

```
## [1] 2.700000e+01 9.000000e+00 3.907985e-14
```

Die Eigenvektoren von AA^T befinden sich in den Spalten dieser Matrix:

```
##      [,1]      [,2]
## [1,] 0.7071068 -0.7071068
## [2,] 0.7071068  0.7071068
```

Die Eigenwerte von AA^T lauten:

```
## [1] 27  9
```

b)

Spur von $A^T A$:

```
(sum(diag(ATA)))
```

```
## [1] 36
```

Spur von AA^T :

```
(sum(diag(AAT)))
```

```
## [1] 36
```

c)

Die Determinante entspricht dem Produkt der Eigenwerte. Es ist also $\det(AA^T) = 27 \cdot 9 = 243$.

```
(det(AAT))
```

```
## [1] 243
```

d)

Wegen $\det(AA^T) \neq 0$ ist die Matrix AA^T invertierbar. Die Inverse bestimmt sich wie folgt:

```
(solve(AAT))
```

```
##           [,1]      [,2]
## [1,]  0.07407407 -0.03703704
## [2,] -0.03703704  0.07407407
```

e)

Die Matrix V der Spektralzerlegung von $A^T A$ entspricht der Matrix ihrer Eigenvektoren, die Matrix Λ enthält ihre Eigenwerte als Diagonalelemente.

```
V_ATA <- eigenvectorsATA
Lambda_ATA <- diag(eigenvaluesATA)
```

Probe:

```
(V_ATA %*% Lambda_ATA %*% t(V_ATA))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]   17    5    8
## [2,]    5    2    5
## [3,]    8    5   17
```

Dies funktioniert analog für die Spektralzerlegung von AA^T :

```
V_AAT <- eigenvectorsAAT
Lambda_AAT <- diag(eigenvaluesAAT)
```

Probe:

```
(V_AAT %*% Lambda_AAT %*% t(V_AAT))
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]   18    9
## [2,]    9   18
```