Prof. Dr. Roland Fried
M. Sc. Jana König

Wintersemester 2019/2020

Übungen zur Vorlesung **Multivariate Verfahren**

— Blatt Nr. 2 —

Aufgabe P3

Betrachten Sie erneut die bivariate Zufallsvariable $\boldsymbol{Z} = (X, Y)'$ aus Aufgabe H1 mit der gemeinsamen Dichte

$$f(x, y) = \frac{x + y - 1}{18} \; \mathbb{1}_{\{1,2,3\}\times\{0,1,2\}}(x, y).$$

Bestimmen Sie den bedingten Erwartungswert und die bedingte Varianz von X gegeben $Y = y$.

Aufgabe P4

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie jeweils die Eigenwerte und (normierten) Eigenvektoren von A und B.
b) Bestimmen Sie die Determinanten von A und B.
c) Bestimmen Sie jeweils die Spur von A und B.
d) Sind A und B invertierbar? Bestimmen Sie, sofern möglich, jeweils die Inverse.
e) Wie lassen sich die Eigenwerte und Eigenvektoren der inversen Matrix A^{-1} leicht aus den Eigenwerten und Eigenvektoren von A bestimmen?

Aufgabe P5

Sei der Zufallsvektor $(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{Y}')'$ stetig verteilt, d. h. es existiert eine gemeinsame stetige Dichte $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ von $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{Y}$. Zeigen Sie, dass die folgende Aussage gilt:

$$E(E(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X})) = E(\boldsymbol{Y})$$

Tipp: Fassen Sie $E(Y_i|\boldsymbol{X}) = h_i(\boldsymbol{X})$ als Funktion von $\boldsymbol{X}$ auf und zeigen Sie $E(E(Y_i|\boldsymbol{X})) = E(Y_i)$.

Aufgabe H3 (5/10)

Betrachten Sie erneut die bivariate Zufallsvariable $(X_1, X_2)'$ aus Aufgabe P1 mit der gemeinsamen Dichte

$$f(x_1, x_2) = (2 - x_1 - x_2) \; \mathbb{1}_{[0,1]\times[0,1]}(x_1, x_2).$$

Bestimmen Sie den bedingten Erwartungswert und die bedingte Varianz von X_2 gegeben $X_1 = x_1$.

Welche Werte von X_1 haben mehr/weniger Information über den zugehörigen Wert von X_2? Betrachten Sie dazu die Kurve $f(x_1) = Var(X_2|X_1 = x_1)$ mit geeigneter Software (z. B. `R`).

Aufgabe H4 (2/10)

Sei der Zufallsvektor $(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{Y}')'$ stetig verteilt, d. h. es existiert eine gemeinsame stetige Dichte $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ von $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{Y}$. Zeigen Sie, dass die folgende Aussage gilt:

$$E(Var(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X})) + Var(E(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X})) = Var(\boldsymbol{Y})$$

Tipp: Wie in P5 gezeigt, gilt $E(E(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X})) = E(\boldsymbol{Y})$.

Aufgabe H5 (3/10)

Bearbeiten Sie die folgende Aufgabe mit `R` (oder einer anderen geeigneten statistischen Software). Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von AA' und von $A'A$.

b) Bestimmen Sie die Spur von AA' und $A'A$.

c) Bestimmen Sie die Determinante von AA'. Wie hätten Sie die Determinante auch leicht aus den Ergebnissen in Aufgabenteil a) bestimmen können?

d) Ist AA' invertierbar? Falls ja, bestimmen Sie eine Inverse.

e) Bestimmen Sie Spektralzerlegungen von AA' und von $A'A$ gemäß Satz 1.26.

f) Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung von A gemäß Satz 1.30.

g) Bestimmen Sie eine verallgemeinerte Inverse von A gemäß Definition 1.31.

Zur Bearbeitung in `R` können die Funktionen `matrix`, `t`, `diag`, `eigen`, `solve`, `svd`, `ginv` aus dem `MASS`-Paket sowie der Operator `%*%` hilfreich sein. Sollten Ihnen manche hiervon unbekannt sein, empfehlen wir diese nachzuschlagen.

Abgabe der Hausaufgaben bis zum 28.10.2019 12 Uhr. Gruppenarbeit unter Angabe der Gruppenmitglieder möglich, aber pro Person eine eigene handschriftliche Abgabe. Bei Software-Aufgaben schicken Sie bitte zusätzlich zum ausgedruckten Blatt (R-Code inkl. Ergebnisse) den zugehörigen Programmcode an ihren Übungsleiter.

Übung	Mailadresse	Briefkasten
Mittwoch 10:15 - 11:45 Uhr	jkoenig@statistik.tu-dortmund.de	131
Donnerstag 08:30 - 10:00 Uhr	nilsjannik.schuessler@tu-dortmund.de	132