Technische Universität Dortmund
Fakultät Statistik

JProf. Dr. Antonia Arsova

Wintersemester 2019/20

JProf. Dr. Rainer Schüssler

Zeitreihenanalyse
Übungen ARIMA Prozesse

Aufgabe 16

Zeigen Sie, dass bei einem MA(1)-Prozess, $x_t = w_t + \theta w_{t-1}$, gilt:
$|\rho(1)| \leq 1/2$ für alle Werte von θ. Für welche Werte von θ ist $\rho(1)$ minimal bzw. maximal?

Aufgabe 17

Sei $\{w_t; t = 0, 1, \dots\}$ ein WN Prozess mit Varianz σ^2 und $|\phi| < 1$ eine Konstante. Initialisieren wir $x_0 = w_0$ und betrachten den Prozess

$$x_t = \phi x_{t-1} + w_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

Wir können diese Methode nutzen, um einen AR(1) aus simuliertem Weißen Rauschen zu simulieren.

a) Zeigen Sie, dass $x_t = \sum_{j=0}^{t} \phi^j w_{t-j}$ für $t = 0, 1, \dots$.

b) Geben Sie $\mathbb{E}(x_t)$ an.

c) Zeigen Sie, dass, für $t = 0, 1, \dots$, $\operatorname{var}(x_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\left(1 - \phi^{2(t+1)}\right)$.

d) Ist x_t stationär?

e) Argumentieren Sie, dass für $t \to \infty$, der Prozess stationär wird, x_t also asymptotisch stationär ist. *Hinweis*: $\operatorname{cov}(x_{t+h}, x_t) = \phi^h \operatorname{var}(x_t)$.

f) Beschreiben Sie, wie Sie die Resultate nutzen können, um n Beobachtungen eines stationären AR(1)-Prozesses aus i.i.d. N(0,1) Werten zu simulieren.

g) Initialisieren Sie nun $x_0 = w_0/\sqrt{1-\phi^2}$. Ist dieser Prozess stationär? *Hinweis*: Zeigen Sie, dass $var(x_t)$ stationär ist.

Aufgabe 18

Identifizieren Sie die folgenden Modelle als ARMA(p,q) Prozesse und bestimmen Sie, ob sie kausal und/oder invertierbar sind.

a) $x_t = .80x_{t-1} - .15x_{t-2} + w_t - .30w_{t-1}$.

b) $x_t = x_{t-1} - .50x_{t-2} + w_t - w_{t-1}$.

Aufgabe 19

Geben Sie die ACF und PACF der folgenden stationären AR(2) Prozesse an und berechnen Sie die Wurzeln des AR Polynoms. Für Letzteres können den R-Befehl `polyroot` nutzen.

a) $x_t = .70x_{t-1} - .1x_{t-2} + w_t$.

b) $x_t = 1.5x_{t-1} - .75x_{t-2} + w_t$.

c) $x_t = x_{t-1} - .25x_{t-2} + w_t$.

Wie unterscheiden sich die Ergebnisse systematisch?

Aufgabe 20

Betrachten Sie nochmal den Prozess ARMA (1,1) Prozess $x_t = .9x_{t-1} + .5w_{t-1} + w_t$, siehe ARIMA-Folien, Folie 38 ff. Wir hatten den Prozess als MA(∞) und AR(∞) formuliert.

a) Geben Sie für die Darstellung $x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j w_{t-j}$ die ersten 10 Gewichte, $\psi_j, j = 1, \ldots, 10$ aus.

b) Geben Sie für die Darstellung $w_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j x_{t-j}$ die ersten 10 Gewichte, $\pi_j, j = 1, \ldots, 10$, aus.

Sie können dazu den R-Befehl `ARMAtoMA` aus dem Paket astsa nutzen.

Aufgabe 21

Geben Sie die ACF und PACF der folgenden Prozesse in jeweils einer Grafik aus.

i) $x_t = .60x_{t-1} + .9w_{t-1} + w_t$,

ii) $x_t = .60x_{t-1} + w_t$,

iii) $x_t = .9w_{t-1} + w_t$.

Sie können für die Ausgabe der ACF und PACF den R-Befehl `ARMAacf` nutzen.

In welchen Fällen ist es schwierig, die Prozesse anhand der ACF und PACF zu unterscheiden?

Simulieren Sie nun jeweils 100 Beobachtungen aus den drei Prozessen. Sie können dazu den R-Befehl `arima.sim` nutzen. Geben Sie die empirischen ACF und PACF an und vergleichen Sie diese mit den theoretischen ACF und PACF.

Aufgabe 22

Betrachten Sie die folgenden Prozesse:

i) MA(2): $x_t = .50w_{t-1} + .25w_{t-2} + w_t$,

ii) AR(2): $x_t = .50x_{t-1} + .25x_{t-2} + w_t$,

iii) ARMA(1,1): $x_t = .50x_{t-1} + .50w_{t-1} + w_t$.

a) Simulieren Sie Zeitreihen der Länge $T = 1000$ aus den Modellen (i)-(iii). Verwenden Sie dazu keine der in *R* implementierten Funktionen. Ziehen Sie die Innovationen aus einer Standardnormalverteilung.

   Hinweise zur Initialisierung:

- MA-Prozess: Setzen Sie $w_0 = w_{-1} = w_{-2} = 0$.
- AR und ARMA-Prozess: Setzen Sie $x_1 = w_1$ und $x_2 = \phi_1 x_1 + w_2$ bzw. $x_2 = \phi_1 x_1 + \theta_1 w_1 + w_2$. Die Prozesse müssen sich erst einpendeln, simulieren Sie deshalb eine Zeitreihe der Länge $T + 200$ und schneiden Sie dann die ersten 200 Werte ab.

b) Nehmen Sie an, dass zum Zeitpunkt τ ein auffälliger Zufallsschock auftritt, d.h. dass die Innovation zum Zeitpunkt τ dem Term $w_\tau^* = w_\tau + C_\tau$ mit $C_\tau \in \mathbb{R}$ entspricht.

   Untersuchen Sie, wie stark sich die Erhöhung der Innovation um den Wert C_τ auf $X_{t+h}, h = 1, 2, 3$ auswirkt. Vergleichen Sie dazu, wie sehr sich der Wert von X_{t+h} von demjenigen Wert unterscheidet, den man erhielte, wenn die Innovation zum Zeitpunkt τ einfach nur w_τ anstatt w_τ^* entspräche.

Aufgabe 23

Simulieren Sie mithilfe von `arima.sim` die folgenden Prozesse:

i) AR(1): $x_t = .90x_{t-1} + w_t$,

ii) MA(1): $x_t = .90w_{t-1} + w_t$,

mit jeweils 120, 240 und 480 Beobachtungen. Erzeugen Sie die Prozesse sowohl für `set.seed(28)` und `set.seed(30)`. Schätzen Sie die Parameter der Prozesse sowohl mit der Momentenmethode (ohne dabei eine in *R* vorgefertigte Funktion zu verwenden) als auch mit der Maximum Likelihood Methode (hierzu können Sie `sarima` verwenden). Was fällt auf bei den Ergebnissen?

Aufgabe 24

Plotten Sie die Datenreihe `sp500w` mit den wöchentlichen Wachstumsraten des S&P500 und führen Sie einen Augmented Dickey Fuller (ADF) Test auf (schwache) Stationarität der Zeitreihe durch. Bestimmen Sie die geeignete Lag-Ordnung mit dem Akaike-Kriterium (z.B. mit dem R-Befehl `ar`) und nehmen Sie als Obergrenze für die Lag-Ordnung $\left\lfloor (T-1)^{\frac{1}{3}} \right\rfloor$, wobei T die Länge der Zeitreihe bezeichnet. Führen Sie dabei den Test sowohl mit dem R-Befehl `adf.test` aus dem Paket `tseries` als auch mit dem R-Befehl `ur.df` aus dem Paket `urca` durch. Beschreiben Sie Ihre Ergebnisse. Passen Sie anschließend einen geeigneten ARMA(p,d,q) Prozess an und führen Sie Modelldiagnosen durch. Kommentieren Sie die Ergebnisse. Hinweis: Neben Inspektion der ACF und PACF können den R-befehl `auto.arima` aus dem Paket `forecast` nutzen, um eine geeignete Modellordnung zu identifizieren.

Aufgabe 25

Simulieren Sie eine Zeitreihe der Länge $T = 500$ mit einem deterministischen Zeittrend, $x_t = 0.01t + w_t$, plotten Sie die Zeitreihe und führen Sie eine geeignete Spezifikation des ADF-Tests durch.

Aufgabe 26

Simulieren Sie $N = 500$ AR(1) Prozesse der Länge $T = 1000$ mit $x_t = .90x_{t-1} + w_t$ mithilfe von `arima.sim` und schätzen Sie die Parameter anschließend mit der Maximum Likelihood Methode, indem Sie `sarima` verwenden. Geben Sie in einem Fall die korrekte Modellordnung vor, also einen AR(1) Prozess. Im anderen Fall geben Sie einen AR(2) als zu schätzenden Prozess vor. Geben Sie jeweils den geschätzten Mittelwert und die geschätzte Standardabweichung für den, bzw. die, geschätzten AR-Koeffizienten an und stellen Sie Ihre Ergebnisse jeweils in einem Histogramm (`truehist`) dar.

Aufgabe 27

Betrachten Sie das Modell $R_t = \beta_0 + \beta_1 S_{t-6} + \beta_2 D_{t-6} + \beta_3 D_{t-6} S_{t-6} + w_t$, mit den Variablen R_t (*Recruitment*), SOI_t (*Southern Oscillation Index*), D_t (Dummy-Variable: 1, falls $S_t < 0$, 0 sonst). Schätzen Sie die Parameter des Modells und ziehen Sie dabei in Betracht, dass der Fehlerprozess kein Weißes Rauschen sein muss.