Technische Universität Dortmund
Fakultät Statistik

JProf. Dr. Antonia Arsova

Wintersemester 2019/20

JProf. Dr. Rainer Schüssler

Zeitreihenanalyse
Übungen ARIMA Prozesse

Aufgabe 16

Zeigen Sie, dass bei einem MA(1)-Prozess, $x_t = w_t + \theta w_{t-1}$, gilt:
$|\rho(1)| \leq 1/2$ für alle Werte von θ. Für welche Werte von θ ist $\rho(1)$ minimal bzw. maximal?

Aufgabe 17

Sei $\{w_t; t = 0, 1, \dots\}$ ein WN Prozess mit Varianz σ^2 und $|\phi| < 1$ eine Konstante. Initialisieren wir $x_0 = w_0$ und betrachten den Prozess

$$x_t = \phi x_{t-1} + w_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

Wir können diese Methode nutzen, um einen AR(1) aus simuliertem Weißen Rauschen zu simulieren.

a) Zeigen Sie, dass $x_t = \sum_{j=0}^{t} \phi^j w_{t-j}$ für $t = 0, 1, \dots$.

b) Geben Sie $\mathbb{E}(x_t)$ an.

c) Zeigen Sie, dass, für $t = 0, 1, \dots$, $\operatorname{var}(x_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\left(1 - \phi^{2(t+1)}\right)$.

d) Ist x_t stationär?

e) Argumentieren Sie, dass für $t \to \infty$, der Prozess stationär wird, x_t also asymptotisch stationär ist. *Hinweis*: $\operatorname{cov}(x_{t+h}, x_t) = \phi^h \operatorname{var}(x_t)$.

f) Beschreiben Sie, wie Sie die Resultate nutzen können, um n Beobachtungen eines stationären AR(1)-Prozesses aus i.i.d. N(0,1) Werten zu simulieren.

g) Initialisieren Sie nun $x_0 = w_0/\sqrt{1-\phi^2}$. Ist dieser Prozess stationär? *Hinweis*: Zeigen Sie, dass $var(x_t)$ stationär ist.

Aufgabe 18

Identifizieren Sie die folgenden Modelle als ARMA(p,q) Prozesse und bestimmen Sie, ob sie kausal und/oder invertierbar sind.

a) $x_t = .80x_{t-1} - .15x_{t-2} + w_t - .30w_{t-1}$.

b) $x_t = x_{t-1} - .50x_{t-2} + w_t - w_{t-1}$.

Aufgabe 19

Geben Sie die ACF und PACF der folgenden stationären AR(2) Prozesse an und berechnen Sie die Wurzeln des AR Polynoms. Für Letzteres können den R-Befehl `polyroot` nutzen.

a) $x_t = .70x_{t-1} - .1x_{t-2} + w_t$.

b) $x_t = 1.5x_{t-1} - .75x_{t-2} + w_t$.

c) $x_t = x_{t-1} - .25x_{t-2} + w_t$.

Wie unterscheiden sich die Ergebnisse systematisch?

Aufgabe 20

Betrachten Sie nochmal den Prozess ARMA (1,1) Prozess $x_t = .9x_{t-1} + .5w_{t-1} + w_t$, siehe ARIMA-Folien, Folie 38 ff. Wir hatten den Prozess als MA(∞) und AR(∞) formuliert.

a) Geben Sie für die Darstellung $x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j w_{t-j}$ die ersten 10 Gewichte, $\psi_j, j = 1, \ldots, 10$ aus.

b) Geben Sie für die Darstellung $w_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j x_{t-j}$ die ersten 10 Gewichte, $\pi_j, j = 1, \ldots, 10$, aus.

Sie können dazu den R-Befehl `ARMAtoMA` aus dem Paket astsa nutzen.

Aufgabe 21

Geben Sie die ACF und PACF der folgenden Prozesse in jeweils einer Grafik aus.

i) $x_t = .60x_{t-1} + .9w_{t-1} + w_t$,

ii) $x_t = .60x_{t-1} + w_t$,

iii) $x_t = .9w_{t-1} + w_t$.

Sie können für die Ausgabe der ACF und PACF den R-Befehl `ARMAacf` nutzen.

In welchen Fällen ist es schwierig, die Prozesse anhand der ACF und PACF zu unterscheiden?

Simulieren Sie nun jeweils 100 Beobachtungen aus den drei Prozessen. Sie können dazu den R-Befehl `arima.sim` nutzen. Geben Sie die empirischen ACF und PACF an und vergleichen Sie diese mit den theoretischen ACF und PACF.

Aufgabe 22

Betrachten Sie die folgenden Prozesse:

i) MA(2): $x_t = .50w_{t-1} + .25w_{t-2} + w_t$,

ii) AR(2): $x_t = .50x_{t-1} + .25x_{t-2} + w_t$,

iii) ARMA(1,1): $x_t = .50x_{t-1} + .50w_{t-1} + w_t$.

a) Simulieren Sie Zeitreihen der Länge $T = 1000$ aus den Modellen (i)-(iii). Verwenden Sie dazu keine der in R implementierten Funktionen. Ziehen Sie die Innovationen aus einer Standardnormalverteilung.

Hinweise zur Initialisierung:

- MA-Prozess: Setzen Sie $w_0 = w_{-1} = w_{-2} = 0$.
- AR und ARMA-Prozess: Setzen Sie $x_1 = w_1$ und $x_2 = \phi_1 x_1 + w_2$ bzw. $x_2 = \phi_1 x_1 + \theta_1 w_1 + w_2$. Die Prozesse müssen sich erst einpendeln, simulieren Sie deshalb eine Zeitreihe der Länge $T + 200$ und schneiden Sie dann die ersten 200 Werte ab.

b) Nehmen Sie an, dass zum Zeitpunkt τ ein auffälliger Zufallsschock auftritt, d.h. dass die Innovation zum Zeitpunkt τ dem Term $w_\tau^* = w_\tau + C_\tau$ mit $C_\tau \in \mathbb{R}$ entspricht.

Untersuchen Sie, wie stark sich die Erhöhung der Innovation um den Wert C_τ auf $X_{t+h}, h = 1, 2, 3$ auswirkt. Vergleichen Sie dazu, wie sehr sich der Wert von X_{t+h} von demjenigen Wert unterscheidet, den man erhielte, wenn die Innovation zum Zeitpunkt τ einfach nur w_τ anstatt w_τ^* entspräche.