Technische Universität Dortmund
Fakultät Statistik

JProf. Dr. Antonia Arsova

Wintersemester 2019/20

JProf. Dr. Rainer Schüssler

Zeitreihenanalyse

Übungsblatt 3

Aufgabe 6 (Exponentielles Glätten: Holt-Winters-Verfahren)

(a) Programmieren Sie eine Funktion, die das Holt-Winters-Verfahren unter Berücksichtigung einer Saisonfigur der Länge 4 bei gegebenen Parametern α, γ und δ auf eine Zeitreihe anwendet. Die Funktion soll **1-Schritt-Prognosewerte** für $t = 5, \ldots, T$ ausgeben und außerdem eine **h-Schritt-Prognose** basierend auf allen vorliegenden Daten für den Zeitpunkt $T + h$.

(b) Betrachten Sie den Datensatz `oepnv.txt` und wenden Sie die Funktion aus (a) auf die Beförderungszahlen an. Verwenden Sie dabei folgende Parametereinstellungen:

(i) $\alpha = 0.5, \gamma = 0.5, \delta = 0.5$

(ii) $\alpha = 0.2, \gamma = 0.3, \delta = 0.2$

(iii) $\alpha = 0.8, \gamma = 0.7, \delta = 0.8$

Stellen Sie die Originalzeitreihe gemeinsam mit den prognostizierten Werten graphisch dar. Welche Parametereinstellungen sind Ihrer Meinung nach am besten für die Prognose der Zeitreihe geeignet?

(c) Erstellen Sie basierend auf allen Daten, die Sie vorliegen haben, Prognosen für die folgenden 4 Quartale ($h = 1, 2, 3, 4$). Verwenden Sie diejenige Parameterkombination, für die Sie sich in Teil (b) als am Besten geeignet entschieden haben. Kommentieren Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 7 (Lokale polynomiale Approximation und gleitende Durchschnitte)

Es wird eine lokale quadratische ($p = 2$) Approximation einer Zeitreihe y_t in einem um den Stützpunkt t symmetrischen Stütztbereich, d.h. $k_1 = k_2 =: k$, $k \geq 2$, durchgeführt. Leiten Sie her, wie die Gewichte des angepassten gleitenden Durchschnitts als Funktion von k und p explizit aussehen.

Hinweis: Nutzen Sie die Cramersche Regel für die Darstellung der i-te Komponente des Lösungsvektors $\hat{\beta}_t$.

Cramersche Regel:
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem mit gleich vielen Gleichungen wie Unbekannten:

$$Ax = b,$$

mit $A = (a_{ij})_{(n \times n)}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$.
Vorausgesetzt, dass A invertierbar ist ($\det(A) \neq 0$), ist das System eindeutig lösbar und die Komponenten x_i des Lösungsvektors sind gegeben durch

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Hierbei ist A_i die Matrix, die gebildet wird, indem die i-te Spalte der Koeffizientenmatrix A durch die rechte Seite des Gleichungssystems b ersetzt wird:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 (Design eines gleitenden Durchschnitts)

a) Bestimmen Sie einen zentrierten gleitenden Durchschitt mit Fensterbreite $2k + 1 = 5$, welcher die Zeitreihe in jedem Fenster lokal durch ein Polynom vom Grad $p = 2$ approximiert. Minimieren Sie hierbei den quadratischen Verlust der Anpassung, wobei Sie von unabhängig identisch verteilten Fehlern ausgehen dürfen mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2.

b) Geben Sie den Varianzreduktionsfaktor für den gleitenden Durchschnitt aus Aufgabenteil (a) an. Wie können Sie diesen interpretieren?

c) Vergleichen Sie den Varianzreduktionsfaktor dieses gleitenden Durchschnitts mit dem in der Vorlesung berechneten für Fensterbreite $2k + 1 = 7$ und einem Polynomgrad von ebenfalls $p = 2$.

d) Überlegen Sie sich, wie ein entsprechender gleitender Durchschnitt für ein Polynom vom Grad $p = 0$ und die Fensterbreite $2k + 1 = 5$ aussieht. Vergleichen Sie seinen Varianzreduktionsfaktor mit dem des gleitenden Mittels gleicher Fensterbreite und Polynomgrad $p = 2$ aus Aufgabenteil (a).