Prof. Dr. Christiane Tretter Universität Bern

Analysis 2

Serie 7

Differenzierbarkeit, Kurven, Mittelwertsatz Abgabe: Dienstag, 8. April 2014, 8:15

1. Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,\,y) \neq (0,\,0), \\ 0, & (x,\,y) = (0,\,0), \end{cases}$$

in $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und in $(0,0)$ zweimal partiell differenzierbar ist, aber

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,\,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,\,0)\,.$$

Ist f in $(0,0)$ total differenzierbar?

2. a) Skizziere die Spur der *Kardioide*

$$\kappa : [0,\,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \kappa(t) \;=\; ((1-\cos t)\cos t,\; (1-\cos t)\sin t),$$

und berechne ihre Bogenlänge.

b) Sei $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (\mathrm{e}^{ct}\cos t, \mathrm{e}^{ct}\sin t).$$

i) Skizziere die Spur der Kurve f für $c = \frac{1}{2\pi}$ im Bereich $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.

ii) Für $[a,b] \subset \mathbb{R}$ sei $L_{a,b}$ die Bogenlänge der Kurve $f|_{[a,b]}$. Berechne $L_{a,b}$.

iii) Existiert $\lim_{a\to-\infty} L_{a,0}$?

3. Zeige, dass folgende „Verallgemeinerung“ des Mittelwertsatzes aus Analysis 1 für $n \geq 2$ **nicht** gilt: *Ist $f : \mathbb{R} \supset [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b), dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

4. a) Es seien $D_f, D_g \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : D_f \to \mathbb{R}^2$, $g : D_g \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar mit $g(D_g) \subset D_f$. Berechne die Jacobimatrix von $D(f \circ g)$ mit Hilfe der Kettenregel.

b) Was erhält man, wenn $f = \Psi_2$ die Polarkoordinatenabbildung aus Beispiel II.29 ist (mit $D_{\Psi_2} = (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \subset \mathbb{R}^2$), $D_g = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \leq 0\}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (r(x,y),\, \phi(x,y))$ mit

$$r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \phi(x,y) = \left\{ \begin{matrix} \operatorname{sign}(y) \arccos \frac{x}{r}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{matrix} \right\} \in [-\pi,\,\pi]?$$