Minimering n-dimensionelle funktioner

Lad $f(x_1, \ldots, x_n)$ være en to gange differentiabel n-dimensionel funktion defineret på området $[l_1, u_1] \times \cdots \times [l_n, u_n]$. Hvis den har et minimum, er det enten et kritisk punkt eller et kantpunkt.

1. Et kritisk punkt er et punkt hvor gradienten er 0
$$\nabla f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{1}$$
2. Et kantpunkt opfylder at mindst en af koordinaterne ligger yderst i sit interval. Det vil sige at der eksisterer et i, så $x_i = l_i$ eller $x_i = u_i$.

Udtrykket i (1) er det samme som

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f \end{pmatrix} = 0 \tag{2}$$

Et kritisk punkt er et minimum hvis Hessian-matricen er positiv definit (men det er ikke et tjek der er nødvendigt for os at lave).

1-dimensionel tabel

For at minimere en 1-dimensionel tabel skal man finde eventuelle kritiske punkter i hver celle og man skal tjekke kantpunkterne. En celle er kendetegnet ved dets domæne $[l_1, u_1]$. For at finde de kritiske punkter skal man løse

$$\nabla f(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x) = 0 \tag{3}$$

for alle celler. Hvis ikke en løsning til (3) ligger i sin celle, er det ikke et kritisk punkt. Fordi f er et tredjegradspolynomium er ∇f et andengradspolynomium ($ax^2 + bx + c$) har det to analytiske løsninger

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4}$$

Efter man har fundet en række kritiske punkter $x_1, \ldots, x_m$, skal man se hvilken f værdi, de har for at afgøre hvilket et er mindst. Man skal også sammenligne med f værdien for de to kantpunkter. Alle de punkter man skal tjekke kalder vi *minimumskandidater*. Altså er minimum

$$\min\{f(x_1), \ldots, f(x_m), f(l_1), f(u_1)\} \tag{5}$$

2-dimensionelle tabeller

Det globale minimum

For at finde minimum af en todimensionel interpolationstabel skal man igen finde kritiske punkter i hver celle og tjekke randpunkterne. I en todimensionel tabel er en celle defineret ved dets domæne på formen $[l_1, u_1] \times [l_2, u_2]$. Dvs. man skal løse

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \tag{6}$$

for hver celle. Hvis en løsning til (6) ikke ligger i sin celle, er det ikke et kritisk punkt. Da f er todimensionel er det ikke sikkert der er en analytisk løsning til (6). Da skal man bruge en numerisk løsning (måske Newton-Rhapson).

For at tjekke kantpunkterne skal vi finde alle minimumskandidater af de 4 funktioner

$$f(x, l_2) \quad \text{som funktion af } x \tag{7}$$
$$f(x, u_2) \quad \text{som funktion af } x \tag{8}$$
$$f(l_1, y) \quad \text{som funktion af } y \tag{9}$$
$$f(u_1, y) \quad \text{som funktion af } y \tag{10}$$

Det gøres som beskrevet i sektionen *1-dimensionel tabel*. Til sidst tager man alle minimumkandidater fra hhv (6), (7), (8), (9) og (10) og finder minimum blandt dem.

De betingede minimum

Vi holder nu en variabel fast (fx $y = y_0$) og vi prøver at finde minimum over den anden variabel. Dvs. vi er interesseret i at finde

$$\min_{x \in [l_1, u_1]} f(x, y_0) \tag{11}$$

Da vi ikke kender værdien af y_0, bliver minimummet (11) nødt til at afhænge af y_0. Når vi ikke kender y_0 bliver det svært at finde ud af hvilket af minimumskandidaterne, der giver minimum. Derfor foreslår jeg at vi kun udregner minimumskandidaterne og lader udregning af minimum foregå i browseren. For at finde minimumskandidaterne skal vi finde de kritiske punkter samt kantpunkter.

Når vi er i en todimensionel tabel er $f(x, y_0)$ et tredjegradspolynomium og så findes en analytisk løsning til gradienten $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y_0) = 0$. Der er også kun 2 kantpunkter (l_1 og u_1), så mængden af minimumskandidater bliver altså

1. l_1
2. u_1
3. De to løsninger til $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y_0) = 0$ udtrykt som funktion af y_0.