Lad som sædvanlig $U(F_I) = p_d(a, \psi_{F_I}) - p_d(a, \psi_0)$ og $U_* = U(F_{\{1,\dots,N\}})$. Som tidligere er faktorsvarene ψ_{F_I} defineret således at det er det er de faktorsvar der giver den laveste $p_d(a, \psi)$ samtidig med at for $i \in I$ er $\psi_i = F_i$ - altså at vi har indsat de indtastede faktorsvar på alle index i ψ, I. Definer

$$S(F_I) = U(F_I) - \sum_{J \subseteq I, J \neq \emptyset, J \neq I} S(F_J)$$

Så gælder

$$U(F_I) = \sum_{J \subseteq I, J \neq \emptyset} S(F_i)$$

Dog er ikke alle $S(F_i)$'erne positive og kan derfor ikke bruges i dekompositionen. Dog påstår jeg

Proposition 1. *Definer*

$$V(F_i) = \sum_{J \subseteq \{1,\dots,N\}, J \neq \emptyset, i \in J} \frac{S(F_J)}{|J|} \tag{1}$$

for alle $i = 1, \dots, N$. Da er

$$V(F_i) \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} V(F_i) = U_* \tag{3}$$

Bevis. Beviset er ikke lavet, men det er understøttet af simulationer. □

Proposition **??** siger at $V(F_i)$'erne kan dekomponere U_*. Formen (**??**) kan fortolkes som at hver eneste faktor “arver” fra alle de interaktioner, hvor den indgår. Arven deles ligeligt mellem efterkommere.

Lemma 1. *Der gælder*

$$S(F_I) = \sum_{J \subseteq I, J \neq \emptyset} (-1)^{|J|+|I|} U(F_J) \tag{4}$$

Bevis. Kan laves (og er lavet) med induktion. □

Lemma 2. *Vi kan skrive*

$$V(F_i) = \sum_{K \subseteq \{1,\dots,N\}, K \neq \emptyset} U(F_K) a_K \tag{5}$$

hvor

$$a_K = \begin{cases} \sum_{s=0}^{N-|K|} (-1)^s \frac{1}{|K|+s} \binom{N-|K|}{s} & \text{hvis } i \in K \\ \sum_{s=1}^{N-|K|} \frac{1}{|K|+s} \binom{N-|K|-1}{s-1} (-1)^s & \text{hvis } i \notin K \end{cases} \tag{6}$$

Bevis. Formlen kan ses ved at skrive

$$
\begin{aligned}
V(F_i) &= \sum_{J\subseteq\{1,\dots,N\},J\neq\emptyset,i\in J} \frac{S(F_J)}{|J|} \\
&= \sum_{J\subseteq\{1,\dots,N\},J\neq\emptyset,i\in J} \frac{1}{|J|} \sum_{K\subseteq J,K\neq\emptyset} (-1)^{|J|+|K|} U(F_K) \\
&= \sum_{K\subseteq\{1,\dots,N\},K\neq\emptyset} \left(U(F_K) \sum_{J,K\subseteq J,i\in J} (-1)^{|J|+|K|} \frac{1}{|J|} \right)
\end{aligned}
$$

Vi kan derfor konkludere at a_K findes og er lig med

$$
a_K = \sum_{J,K\subseteq J,i\in J} (-1)^{|J|+|K|} \frac{1}{|J|} \tag{7}
$$

Det kan vi skrive om ved at stratificere efter $|J|$.

$$
\begin{aligned}
a_K &= \sum_{s=0}^{N} \sum_{J,K\subseteq J,i\in J,|J|=s} (-1)^{s+|K|} \frac{1}{s} \\
a_K &= \sum_{s=0}^{N} (-1)^{s+|K|} \frac{1}{s} \#\big\{J, K\subseteq J, i\in J, |J|=s\big\}
\end{aligned}
$$

Mængden $\big\{J, K\subseteq J, i\in J, |J|=s\big\}$ er tom hvis $s<|K|$. Den er også tom hvis $i\notin K$ og $|s|=K$. Hvis $i\in K$ og $s\geq|K|$ kan vi vælge elementerne $J\setminus K$ uniformt fra $\{1,\dots,N\}\setminus K$. Det giver $\binom{N-|K|}{s-|K|}$ muligheder. Dvs.

$$
\begin{aligned}
a_K &= \sum_{s=|K|}^{N} (-1)^{s+|K|} \frac{1}{s} \binom{N-|K|}{s-|K|} \\
&= \sum_{s=|K|}^{N} (-1)^{s-|K|} \frac{1}{s} \binom{N-|K|}{s-|K|} \\
&= \sum_{s=0}^{N-|K|} (-1)^{s} \frac{1}{s+|K|} \binom{N-|K|}{s}
\end{aligned}
$$

Hvis $i\notin K$, består alle elmenter i $\big\{J, K\subseteq J, i\in J, |J|=s\big\}$ af foreningen af K, $\{i\}$ og et antal indices fra $\{1,\dots,N\}\setminus(K\cup\{i\})$. Disse indices skal igen vælges uniformt, og hvis der skal være s elementer i J, kan det gøres på

$\binom{N-|K|-1}{s-|K|-1}$ måder. Alt i alt får vi

$$
\begin{aligned}
a_K &= \sum_{s=|K|+1}^{N} (-1)^{s+|K|} \frac{1}{s} \binom{N-|K|-1}{s-|K|-1} \\
&= \sum_{s=1}^{N-|K|} (-1)^{s} \frac{1}{s+|K|} \binom{N-|K|-1}{s-1}
\end{aligned}
$$

□

0.0.1 Multiplikativitet

I vores framework sker det ofte at der er multiplikativ effekt mellem riskratiotables.

$$p_d(a,\psi) = P_d(a) \cdot \frac{1}{\prod_{i=n}^{n} \mathrm{mult}_i} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{RR}_i(\psi) \tag{8}$$

hvor RR_i er en samlet riskratiotabel for den i'te riskfactor group. Definer nu

$$\mathcal{F}_i = \{\text{faktorer i den } i\text{'te riskfactor group}\} \tag{9}$$

$$U_i(F_I \cap \mathcal{F}_i) = \mathrm{RR}_i(\psi_{F_I \cap \mathcal{F}_i}) \tag{10}$$

$$C = P_d(a) \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \mathrm{mult}_i} \tag{11}$$

hvor $\psi_{F_I \cap \mathcal{F}_i}$ skal forstås som den ψ-vektor der giver den laveste værdi af RR_i-tabellen under betingelsen at ψ har input-faktorsvarene for alle faktorer i F_I. (Som input i RR_i-tabellen er det lidt overflødigt at skrive $F_I \cap \mathcal{F}_i$ og ikke bare F_I, da RR_i tabellen i forvejen ignorer alle faktorer der ikke har noget med den at gøre). Vi kan derfor skrive

$$p_d(a,\psi_{F_I}) = C \cdot \prod_{i=1}^{n} U_i(F_I \cap \mathcal{F}_i) \tag{12}$$

For at udnytte denne konstruktion bedst muligt ændrer vi også notation

$$
\begin{aligned}
\tilde{U}(F_I) &:= \frac{p_d(a,\psi_{F_I})}{C} = \prod_{i=1}^{n} U_i(F_I \cap \mathcal{F}_i) \\
\tilde{S}(F_I) &= \tilde{U}(F_I) - \sum_{J \subseteq I, J \neq I} \tilde{S}(F_J)
\end{aligned}
$$

Noter at

a. Nu eksisterer $\tilde{U}(F_\emptyset)$ og $\tilde{S}(F_\emptyset)$ og er trivielle

$$\tilde{U}(F_\emptyset) = \tilde{S}(F_\emptyset) = 1 \tag{13}$$

b. Forbindelsen mellem det gamle U og det nye $\tilde{U}$ er

$$U(F_I) = C \cdot \left[\tilde{U}(F_I) - \tilde{U}(F_\emptyset)\right] \tag{14}$$

c. Sammenhængen mellem $\tilde{S}$ og S er

$$S(F_I) = C \cdot \tilde{S}(F_I) \quad I \neq \emptyset \tag{15}$$

Sammenhængen (**??**) retfærdiggør også definitionen

$$\tilde{V}(F_i) = \sum_{J \subseteq \{1,\ldots,N\}, J \neq \emptyset, i \in J} \frac{\tilde{S}(F_J)}{|J|}, \tag{16}$$

fordi med dette $\tilde{V}(F_i)$ kan vi nemt finde $V(F_i) = C \cdot \tilde{V}(F_i)$. Vi kan også lave en tilde-version af Lemma **??**

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(F_I) &= \frac{1}{C} \sum_{J \subseteq I, J \neq \emptyset} (-1)^{|I|+|J|} U(F_J) \\
&= \sum_{J \subseteq I, J \neq \emptyset} (-1)^{|I|+|J|} \left[\tilde{U}(F_J) - \tilde{U}(F_\emptyset)\right] \\
&= \sum_{J \subseteq I, J \neq \emptyset} (-1)^{|I|+|J|} \tilde{U}(F_J) - (-1)^{|I|} U(F_\emptyset) \sum_{J \subseteq I, I \neq \emptyset} (-1)^{|J|} \\
&= \sum_{J \subseteq I, J \neq \emptyset} (-1)^{|I|+|J|} \tilde{U}(F_J) - (-1)^{|I|} U(F_\emptyset) \sum_{s=1}^{|I|} (-1)^{|J|} \binom{|I|}{s} \\
&= \sum_{J \subseteq I, J \neq \emptyset} (-1)^{|I|+|J|} \tilde{U}(F_J) \\
&\quad -(-1)^{|I|} U(F_\emptyset) \left(\left[\sum_{s=0}^{|I|} (-1)^{|J|} \binom{|I|}{s} 1^{|I|-|J|} \right] - 1 \right) \\
&= \sum_{J \subseteq I, J \neq \emptyset} (-1)^{|I|+|J|} \tilde{U}(F_J) - (-1)^{|I|} U(F_\emptyset) \big(-1\big) \\
&= \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|I|+|J|} \tilde{U}(F_J)
\end{aligned}$$

Vi har altså udledt dette korrolar til Lemma **??**.

Korollar 1. *Der gælder*

$$\tilde{S}(F_I) = \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|J|+|I|} \tilde{U}(F_J) \tag{17}$$

Vi kan også udlede en tilde-version af Lemma **??**. Hvis vi følger udregningen

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(F_i) &= \sum_{J \subseteq \{1,\ldots,N\}, J \neq \emptyset, i \in J} \frac{\tilde{S}(F_J)}{|J|} \\
&= \sum_{J \subseteq \{1,\ldots,N\}, J \neq \emptyset, i \in J} \frac{1}{|J|} \sum_{K \subseteq J} (-1)^{|J|+|K|} \tilde{U}(F_K) \\
&= \sum_{K \subseteq \{1,\ldots,N\}} \left(\tilde{U}(F_K) \sum_{J, K \subseteq J, i \in J} (-1)^{|J|+|K|} \frac{1}{|J|} \right) \qquad (18)
\end{aligned}$$

Vi ser straks at koefficienterne for $\tilde{U}(F_K), K \neq \emptyset$ er de samme som i Lemma **??**. Lad os nu betrage $a_\emptyset$. Som i beviset for Lemma **??** kan vi se at koefficienten for $a_\emptyset$ er

$$\begin{aligned}
a_\emptyset &= \sum_{s=1}^{|N|} \frac{1}{s} (-1)^s \#\{J, J \subseteq \emptyset, i \in J, |J| = s\} \\
&= \sum_{s=1}^{|N|} \frac{1}{s} (-1)^s \#\{J, i \in J, |J| = s\}
\end{aligned}$$

Et J i mængden $\{J, i \in J, |J| = s\}$ kan vælges på $\binom{N-1}{s-1}$ måder, da der er så mange forskellige valg af elementer som ikke er i. Det giver

$$a_\emptyset = \sum_{s=1}^{|N|} \frac{1}{s} (-1)^s \binom{N-1}{s-1} \tag{19}$$

Alt i alt kan vi konkludere følgende korollar

Korollar 2. *Vi kan skrive*

$$\tilde{V}(F_i) = \sum_{K \subseteq \{1,\ldots,N\}} \tilde{U}(F_K) a_K \tag{20}$$

hvor

$$a_K = \begin{cases} \sum_{s=0}^{N-|K|} (-1)^s \frac{1}{|K|+s} \binom{N-|K|}{s} & \text{hvis } i \in K \\ \sum_{s=1}^{N-|K|} \frac{1}{|K|+s} \binom{N-|K|-1}{s-1} (-1)^s & \text{hvis } i \notin K \end{cases} \tag{21}$$

Udregningen af (**??**) er umiddelbart af kompleksitet $O(2^N)$ hvor N er antallet af faktorer. Det kan godt være lang tid hvis der er mange riskfactor grupper, så vi ønsker at finde en hurtigere måde at udregne det på. Antag som før at der er n grupper. Så kan vi skrive

$$\tilde{V}(F_i) = \sum_{K \subseteq \{1,\ldots,N\}} a_K \prod_{j=1}^{n} U_j(F_K \cap \mathcal{F}_j)$$

Vi kan nu bruge at a kun afhænger af K gennem $|K|$ samt sandhedsværdien af $i \in K$. Notationsmæssigt indfører vi derfor $a_s(i \in K)$ og $a_s(i \notin K)$, som står for a_K-koefficienten når $|K| = s$ og i hhv. ligger og ikke ligger i K.

$$\begin{aligned} \tilde{V}(F_i) = \sum_{s=0}^{N} \Bigg(& a_s(i \in K) \sum_{\substack{K \subseteq \{1,\ldots,N\}, \\ |K|=s, i \in K}} \prod_{j=1}^{n} \tilde{U}_j(F_K \cap \mathcal{F}_j) \\ & + a_s(i \notin K) \sum_{\substack{K \subseteq \{1,\ldots,N\}, \\ |K|=s, i \notin K}} \prod_{j=1}^{n} \tilde{U}_j(F_K \cap \mathcal{F}_j) \Bigg) \end{aligned} \tag{22}$$

Lad nu $j(i)$ være den af de n riskfactor groups hvor i ligger. Antag uden tab af generalitet at $j(i) = 1$. På grund af vores riskfactor struktur har vi sammenhængen $\{1, \ldots, N\} = \mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_n$, hvilket vi kan bruge til at skrive

$$\sum_{\substack{K \subseteq \{1,\ldots,N\}, \\ |K|=s, i \in K}} \prod_{j=1}^{n} \tilde{U}_j(F_K \cap \mathcal{F}_j) \tag{23}$$

$$= \sum_{\substack{s_1,\ldots,s_n \in \{0,\ldots,N\}, \\ s_1+\cdots+s_n=s}} \sum_{\substack{K_1 \subseteq \mathcal{F}_1, \\ |K_1|=s_1, i \in K_1}} \sum_{\substack{K_2 \subseteq \mathcal{F}_2, \\ |K_2|=s_2}} \cdots \sum_{\substack{K_n \subseteq \mathcal{F}_n, \\ |K_n|=s_n}} \prod_{j=1}^{n} \tilde{U}_j(F_{K_j} \cap \mathcal{F}_j) \tag{24}$$

$$\begin{aligned} = & \sum_{s_1 \in \{0,\ldots,N\}} \sum_{\substack{K_1 \subseteq \mathcal{F}_1, \\ |K_1|=s_1, i \in K_1}} \tilde{U}_1(F_{K_1}) \sum_{s_2 \in \{0,\ldots,N\}} \sum_{\substack{K_2 \subseteq \mathcal{F}_2, \\ |K_2|=s_2}} \tilde{U}_2(F_{K_2}) \cdots \\ & \cdots \sum_{\substack{K_n \subseteq \mathcal{F}_2, \\ |K_n|=s-s_1-\cdots-s_{n-1}}} \tilde{U}_n(F_{K_n}) \end{aligned} \tag{25}$$

Dette udtryk er meget nyttigt da det i høj grad kan splittes op i produkter af summer. Lad for alle $s = 0, \dots, N$

$$\beta_{s,j} = \sum_{\substack{K \subseteq \mathcal{F}_j, \\ |K|=s}} \tilde{U}_j(F_K), \quad j = 1, \dots, n \tag{26}$$

$$\beta_{s,J} = \sum_{\substack{s_j \in \{0,\dots,N\}, \\ \sum_J s_j = s}} \left(\prod_{j \in J} \beta_{s_j,j} \right), \quad J \subseteq \{1, \dots, n\} \tag{27}$$

$$\alpha_{s,j,i} = \sum_{\substack{K \subseteq \mathcal{F}_j, \\ i \in K, |K|=s}} \tilde{U}_j(F_K), \quad j = 1, \dots, n, i \in \mathcal{F}_j \tag{28}$$

$$\alpha_{s,j,i^*} = \sum_{\substack{K \subseteq \mathcal{F}_j, \\ i \notin K, |K|=s}} \tilde{U}_j(F_K), \quad j = 1, \dots, n, i \in \mathcal{F}_j \tag{29}$$

Definer ligeledes for kvotienterne a_K i Korollar **??**,

$$a_s^* = \sum_{x=1}^{N-s} (-1)^x \frac{1}{s+x} \binom{N-s-1}{x-1} \tag{30}$$

$$a_s = \sum_{x=0}^{N-s} (-1)^x \frac{1}{s+x} \binom{N-s}{x} \tag{31}$$

Da kan vi udregne

$$V(F_i) = \sum_{s=0}^{N} \sum_{s_1=0}^{N} \beta_{s-s_1,\{1,\dots,N\}\setminus\{j_i\}} (\alpha_{s_1,j_i,i} a_s + \alpha_{s_2,j_i,i^*} a_s^*) \tag{32}$$