

# Versuch B14: Tomographie mittels $\gamma$ -Strahlung

## 1 Ziel

In diesem Versuch soll die Zusammensetzung eines Würfels mittels Tomographie bestimmt werden.

## 2 Stichworte

Absorption, Aktivität, Compton-Effekt, Diskriminator,  $\gamma$ -Strahlung, Least-Square-Fit, Multichannelanalyzer, Paarbildung, Photoeffekt, Photomultiplier, radioaktiver Zerfall, Raumwinkel, Szintillationsdetektor

## 3 Theoretische Grundlagen

Die Tomographie ist ein bildgebendes Verfahren, bei dem die räumliche Struktur eines Objektes durch Querschnittsbilder ermittelt wird. Hierbei durchdringen Teilchen oder Strahlung<sup>1</sup> das zu untersuchende Objekt. Die Strahlung wird dabei durch die im Objekt vorkommenden Materialien unterschiedlich stark abgeschwächt, sodaß man aus den gemessenen Intensitäten auf die im Objekt vorhandenen Materialien rückschließen kann. Dies wiederholt man aus unterschiedlichen Richtungen, um so verschiedene Projektionen der gleichen Schicht zu erzeugen. Wiederholt man dieses für verschiedene Schichten, erhält man ein dreidimensionales Abbild des zu untersuchenden Objektes.

In dem vorliegenden Experiment wird ein Würfel aus  $3 \times 3 \times 3$  Elementarwürfeln auf seine Zusammensetzung hin untersucht. Die Intensität

$$N = I_0 e^{-\sum \mu_i d_i} \quad (1)$$

der verwendeten  $\gamma$ -Strahlung nach Durchdringen des Würfels wird dabei durch die Absorptionskoeffizienten  $\mu_i$  und die Wegstrecken  $d_i$  der verschiedenen in Strahlrichtung befindlichen Elementarwürfel gegeben. Bei bekannter Eingangsintensität  $I_0$  und bekannten Ausgangsintensitäten  $N_j$  kann für die j-te Projektion die Gleichung

$$\sum_i \mu_i d_i = \ln \left( \frac{I_0}{N_j} \right) \quad (2)$$

aufgestellt werden. Bei m Messungen einer Schicht kann man durch Lösen eines linearen Gleichungssystems, die Absorptionskoeffizienten  $\mu_i$  und somit die Materialien der

---

<sup>1</sup>In der Medizin werden hierzu häufig Röntgen-Strahlung, Elektronen oder Neutronen verwendet, je nach zu untersuchendem Organ.

n-Elementarwürfel bestimmen. Um die Meßgenauigkeit zu erhöhen mißt man mehr Projektionen als unbekannte Elementarwürfel vorhanden sind. Es gibt also mehr Gleichungen als unbekannte Elementarwürfel, sodaß das Gleichungssystem überbestimmt ist. Zweckmäßigerweise berechnet man die Absorptionskoeffizienten mit Hilfe der Matrixgleichung

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\mu} = \mathbf{I} \quad (3)$$

wobei der Spaltenvektor  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_9)^T$  die Absorptionskoeffizienten der 9 Elementarwürfel enthält, und  $\mathbf{I} = (I_1, \dots, I_m)$  mit  $I_j = \ln(I_0/N_j)$  die gemessenen Intensitäten der m-Projektionen angibt. Die  $9 \times m$  Matrix  $\mathbf{A}$  beschreibt die Würfelgeometrie; die Matrixelemente  $A_{ji}$  hängen dabei von den Kantenlängen der Elementarwürfel und der Reihenfolge der gemessenen Intensitäten und deren Projektionen ab. Es ist daher sinnvoll beim Vermessen verschiedener Würfel immer dieselben Projektionen zu wählen, da dann dieselbe Matrix verwendet werden kann. Im Fall eines überbestimmten Gleichungssystems bei dem die Lösung im Sinne eines Least-Square-Fit bestimmt werden kann, kann man das überbestimmte System auf einen "Linearen Least-Square" reduzieren, indem man die Matrixgleichung (Gl.3) in die "Normalen-Gleichung"

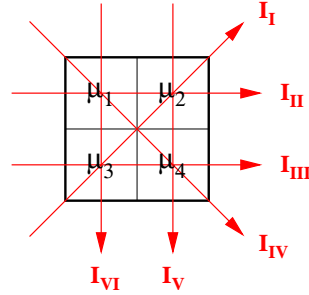
$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\mu} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{I}) \quad (4)$$

überführt, und die Absorptionskoeffizienten  $\mu_i$  über die Gleichung

$$\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{I} \quad (5)$$

bestimmt. Die Varianzen  $\sigma_i^2$  der Absorptionskoeffizienten  $\mu_i$  erhält man aus den Diagonalelementen  $C_{ii}$  der Matrix  $\mathbf{C} = \sigma_I^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ . Dies ist eine Näherung für den Fall, dass alle Einzelmessungen  $I_i$  die selbe Messunsicherheit  $\sigma_I$  haben. Das Verfahren kann auch für den Fall unterschiedlicher Fehler  $\sigma_{I_i}$  erweitert werden.

**Beispiel:** Die nebenstehende Abbildung zeigt eine Schicht eines Würfels bestehend aus  $2 \times 2$  Elementarwürfeln mit den Absorptionskoeffizienten  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  und  $\mu_4$ .  $I_I$  bis  $I_{VI}$  sind die gemessenen Intensitäten, und d ist die Seitenlänge eines Elementarwürfels. Die Matrixgleichung (3) für den  $2 \times 2$  Würfel lautet mit der Abkürzung  $I_j = \ln\left(\frac{I_0}{N_j}\right)$  mit j=(I, II, III, IV, V, VI)



$$d \cdot \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix}.$$

## 4 Vorbereitung

- Vergewissern Sie sich die Funktionsweise eines Szintillationsdetektors sowie eines Diskriminators und eines Multichannelanalyzers (MCA).
- Bei welchen Energien liegen die  $\gamma$ -Linien von  $^{60}\text{Co}$  und  $^{137}\text{Cs}$ ? Wie groß sind die jeweiligen Absorptionskoeffizienten (Gesamt, Photoeffekt, Comptoneffekt) für Aluminium, Blei, Eisen, Messing ( $\text{Cu}_{0.63}\text{Zn}_{0.37}$ ) und Delrin (POM)?<sup>2</sup>
- Überlegen Sie sich, welche Projektionen Sie messen wollen und wie die zugehörige Matrix für eine Ebene eines  $3 \times 3 \times 3$  Würfels aussehen muß. Berechnen Sie die zugehörige Matrix  $\mathbf{C} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ . Falls diese singular ist, müssen Sie andere Projektionen verwenden.
- Berechnen Sie, wieviele gemessene Ereignisse Sie benötigen, um einen relativen statistische Unsicherheit von  $< 3\%$  zu bekommen.

## 5 Aufgaben

- Bestimmen Sie für einen Würfel (Kennzeichnung: 3 bis 5) die Anordnung bzw. Materialien der Elementarwürfel. Messen Sie für eine genauere Fehlerabschätzung die Absorption für den Würfel 1 und den Würfel 2.

## 6 Versuchsaufbau

Abbildung 1 zeigt den experimentellen Aufbau. Ein  $^{60}\text{Co}$  oder ein  $^{137}\text{Cs}$ -Strahler wird vom Assistenten in die Bleihalterung eingebaut. Der kollimierte Strahl trifft auf einen  $3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$  großen Würfel, der aus  $3 \times 3 \times 3$  Elementarwürfeln mit je 1 cm Seitenlänge aufgebaut ist. Die 27 Elementarwürfel werden von einem Aluminiumwürfel mit einer Wandstärke von 1 mm zusammengehalten. Die verschiedenen Aluminium-Würfel sind mit Zahlen von 1 bis 5 gekennzeichnet. Die Würfel mit der Kennzeichnung 1 und 2 bestehen aus nur einem Material und die Würfel mit der Kennzeichnung 3 bis 5 beinhalten Elementarwürfel aus diesen beiden Materialien.

Im Experiment wird aus Zeitgründen nur die mittlere Schicht des Würfels untersucht. Der Würfel kann hierzu um seine z-Achse gedreht, sowie senkrecht zur Strahlrichtung verschoben werden, sodaß die zu untersuchende Schicht aus verschiedenen Richtungen durchstrahlt werden kann.

Der Strahl wird durch den zu untersuchenden Würfel abgeschwächt und von einem NaJ-Detektor nachgewiesen. Die vom Szintillationsdetektor erzeugten Pulse werden von einem Vorverstärker verstärkt, von einem Multichannelanalyzer analysiert und entsprechend ihrer Energie in einem Histogramm aufsummiert. Die Detektorspannung, Vor-

---

<sup>2</sup>Eine gute Quelle für Absorptionskoeffizienten ist neben der Nuklid Karte:  
<http://physics.nist.gov/PhysRefData/Xcom/html/xcom1.html>

verstärkerspannung, Diskriminatorschwellen und die Datenaufnahme werden mit einem PC gesteuert.



Vor dem Experimentieren die Sicherheitshinweise lesen !



## 7 Durchführung und Auswertung

Die Einstellung der Hardware erfolgt über den Computer mit dem Programm “winTMCA32”. Unter dem Menüpunkt “Hardware” - “Einstellungen” können Sie die Detektorspannung auf  $U_{det} = 1000V$ , den Verstärkungsfaktor  $V_{Fein} = 1.5$  des Vorverstärkers und die untere “LLD” und obere Schwelle “ULD” des Diskriminators (zwischen 0 und 255 in beliebigen Einheiten) einstellen.<sup>3</sup> Die Meßzeit können Sie einstellen, indem Sie auf die “Sanduhr” klicken, “Realtime” wählen und die Meßzeit eingeben. Das Programm hört nach der angegebenen Zeit automatisch auf zu messen.

- Nehmen Sie zuerst ein Spektrum der verwendeten Quelle mit dem NaJ-Detektor auf und identifizieren Sie alle Prozesse im Spektrum.

<sup>3</sup>Wenn Sie die Schwellen so einstellen, daß Sie nur den Photopeak messen, können Sie die gemessene Zählrate (“Gros:Zählrate”) direkt im Spektrum ablesen.

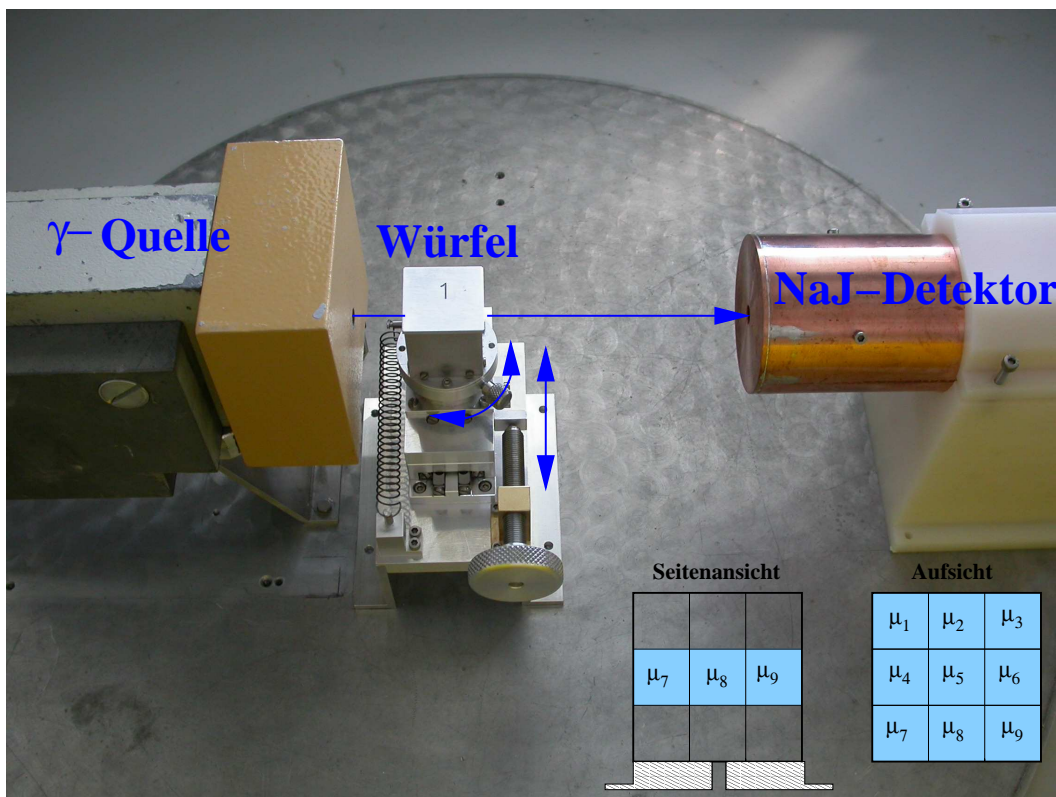


Abbildung 1: Experimenteller Aufbau

- Setzen Sie einen Würfel (Kennzeichnung 1 oder 2) auf die vorgesehene Halterung und schrauben Sie ihn fest.



**Nicht in den Strahlengang fassen!**



- Nehmen Sie für die von Ihnen vorgesehenen Projektionen die Absorptionsspektren auf. Vergessen Sie nicht  $I_0$  zu bestimmen. Wählen Sie Messzeiten von mindestens  $t = 300\text{ s}$  bzw. so, dass die statistische Unsicherheit  $< 3\%$  ist.
- Wiederholen Sie die Messung für den zweiten Würfel sowie für den Würfel unbekannter Zusammensetzung (Kennzeichnung 3 bis 5).
- Bestimmen Sie die Materialien und die Zusammensetzung der Elementarwürfel. Die möglichen Materialien sind Aluminium, Messing ( $\text{Cu}_{0.63}\text{Zn}_{0.37}$ ), Delrin, Blei und Eisen.
- Vergewissern Sie sich, wie die Varianzen der Absorptionskoeffizienten  $\sigma^2(\mu_i) = C_{ii}$  zustandekommen.
- Bestimmen Sie die Absorptionskoeffizienten und diskutieren Sie das Ergebnis. Vergleichen Sie hierbei auch für Würfel 1 und 2 die Varianz der Einzelmessungen und die durch die Ausgleichsrechnung bestimmten Messunsicherheiten.
- Diskutieren Sie unter Anderem welchen Einfluß die Ausdehnung des Strahles und der umgebene Aluminiumkörper haben.

## Literatur

- [1] V. Blobel, E. Lohrmann, Statistische und numerische Methoden der Datenanalyse, Teubner Studienbücher (1998)
- [2] Nuclear Data Tables, Vol. **A7**, p. 257 (1970).
- [3] W.R. Leo, Techniques for Nuclear and particle physics experiments, Springer Verlag.
- [4] Press, Flannery, Teukolsky, Vetterling, Numerical Recipes