Problème des cruches I

Ce problème classique montre que, dans certains cas, l'explosion combinatoire peut être entièrement évitée. Plus précisément, une situation intermédiaire semble avoir plusieurs successeurs possibles, mais un seul d'entre eux mérite d'être considéré.

> *On dispose de deux cruches dont les contenances en litres sont respectivement a et b et d'une source inépuisable d'eau. On demande de prélever exactement c litres d'eau en un nombre minimum d'opérations. Les nombres a, b et c sont des entiers naturels distincts tels que $a < b$ et $c < a + b$. On admet qu'une cruche ne permet de prélever avec précision que sa contenance nominale.*

Il existe six manipulations possibles :

1. Remplir la petite cruche.
2. Remplir la grande cruche.
3. Transvaser de la petite cruche vers la grande.
4. Transvaser de la grande cruche vers la petite.
5. Vider la petite cruche.
6. Vider la grande cruche.

Problème des cruches II

Après remplissage, une cruche contient exactement sa contenance nominale. Transvaser une cruche dans l'autre ne modifie pas le contenu global des deux cruches. Un point important est qu'avant et après chaque opération, au plus une des deux cruches peut avoir un contenu autre que nul ou maximal, car toute opération, y compris le transvasement d'une cruche dans l'autre, a pour effet de remplir ou de vider une cruche.

Il est clair qu'à la première étape on a deux possibilités : remplir la petite cruche, ou remplir la grande. On observe aussi qu'à chaque étape ultérieure on n'a qu'une seule possibilité intelligente. En effet, exactement une étape sur deux est un transvasement (en provenance de la cruche pleine, s'il y en a une, ou à destination de la cruche vide sinon) ; ce transvasement a pour effet, soit de vider la cruche de départ, soit de remplir la cruche d'arrivée. Dans le premier cas, l'étape suivante consiste à remplir la cruche vide ; dans le second cas, l'étape suivante consiste à vider la cruche pleine.

Problème des cruches III

On représente une situation par une paire pointée dont les composants sont les contenus de la petite et de la grande cruche, respectivement.

Une situation est dite *initiale* si l'une des cruches est pleine et l'autre vide.

Une situation est dite *intéressante* si l'une des cruches est pleine ou vide tandis que l'autre n'est ni pleine ni vide.

Une situation est *convenable* si elle est initiale ou intéressante.

On définit une fonction **`next-sit`** à quatre arguments : les contenances **`p`** et **`g`** de la petite cruche et de la grande cruche, une situation intéressante **`sit`**, et l'un des symboles **`trans`** et **`in/out`**.

Cette fonction renvoie la seule situation convenable atteignable en un transvasement (si le quatrième argument est **`trans`**) ou en remplissant la cruche vide ou en vidant la cruche pleine (si le quatrième argument est **`in/out`**).

Problème des cruches IV

```
(define next-sit
  (lambda (p g sit op)
    (let ((p1 (car sit)) (g1 (cdr sit)))
      (if (eq? op 'trans)
          (cond ((= p1 p)
                 (let ((dg (- g g1)))
                   (if (> p dg)
                       (cons (- p dg) g)
                       (cons 0 (+ g1 p)))))
                ((= p1 0)
                 (if (> p g1)
                     (cons g1 0)
                     (cons p (- g1 p))))
                ((= g1 g) (cons p (- g1 (- p p1))))
                ((= g1 0) (cons 0 p1)))
          (cond ((= p1 p) (cons 0 g1))
                ((= p1 0) (cons p g1))
                ((= g1 g) (cons p1 0))
                ((= g1 0) (cons p1 g)))))))
```

Problème des cruches V

```
(define seq-sits
  (lambda (p g sit op past)
    (if (member sit past)
        past
        (let ((new-sit
                (next-sit p g sit op))
               (op1
                (if (eq? op 'trans)
                    'in/out
                    'trans)))
          (seq-sits p
                    g
                    new-sit
                    op1
                    (cons sit past))))))
```

[[`(seq-sits p g sit op past)`]] est la liste des situations que l'on peut atteindre au départ de [[`sit`]] en alternant `trans` et `in/out` et sans passer par une situation élément de [[`past`]] ; la première opération effectuée est [[`op`]] et les contenances des cruches sont [[`p`]] et [[`g`]].

Problème des cruches VI

Exemple : cruches de huit et onze litres.
Situations initiales convenables : `(8 . 0)` et `(0 . 11)`.

La fonction `seq-sits` permet de construire toutes les situations que l'on peut obtenir à partir des situations initiales ; on peut utiliser `reverse` pour que ces situations soient énumérées dans l'ordre naturel :

```
(reverse (seq-sits 8 11 '(8 . 0) 'trans '()))       ==>
((8 . 0) (0 . 8) (8 . 8) (5 . 11) (5 . 0) (0 . 5) (8 . 5) (2 . 11)
 (2 . 0) (0 . 2) (8 . 2) (0 . 10) (8 . 10) (7 . 11) (7 . 0) (0 . 7)
 (8 . 7) (4 . 11) (4 . 0) (0 . 4) (8 . 4) (1 . 11) (1 . 0) (0 . 1)
 (8 . 1) (0 . 9) (8 . 9) (6 . 11) (6 . 0) (0 . 6) (8 . 6) (3 . 11)
 (3 . 0) (0 . 3) (8 . 3) (0 . 11) (8 . 11))

(reverse (seq-sits 8 11 '(0 . 11) 'trans '()))      ==>
((0 . 11) (8 . 3) (0 . 3) (3 . 0) (3 . 11) (8 . 6) (0 . 6) (6 . 0)
 (6 . 11) (8 . 9) (0 . 9) (8 . 1) (0 . 1) (1 . 0) (1 . 11) (8 . 4)
 (0 . 4) (4 . 0) (4 . 11) (8 . 7) (0 . 7) (7 . 0) (7 . 11) (8 . 10)
 (0 . 10) (8 . 2) (0 . 2) (2 . 0) (2 . 11) (8 . 5) (0 . 5) (5 . 0)
 (5 . 11) (8 . 8) (0 . 8) (8 . 0) (0 . 0))
```

Problème des cruches VII

Si on souhaite prélever quinze litres, les situations finales adéquates sont `(8 . 7)` et `(4 . 11)` ; on observe dans les listes ci-dessus que 17 étapes sont nécessaires, puisque la paire `(8 . 7)` est le 17ième élément de la première liste ; la paire `(4 . 11)` n'apparaît qu'en 19ième position, dans la seconde liste.

Abstraction faite du dernier élément de chacune d'elles, ces listes sont inverses l'une de l'autre. La longueur commune de ces listes est 36.

Deux situations séparées par un transvasement ne sont pas essentiellement différentes, en ce sens que le contenu total des deux cruches est le même ; il y a donc 18 situations essentiellement différentes, correspondant à tous les contenus totaux possibles, de 1 à 18 litres.

A posteriori, il est évident que, si les contenances des deux cruches sont a et b, il y a au maximum $a + b - 1$ situations intéressantes essentiellement différentes. On peut démontrer qu'il y en a exactement $a + b - 1$ si a et b sont premiers entre eux.