SEMI-GROUPES D'OPÉRATEURS ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON-HOMOGÈNES

par

Borjan Geshkovski & Charlotte Rodriguez

Résumé. — Ce texte présente une courte introduction aux semi-groupes d'opérateurs, traitant notamment les semi-groupes fortement continus sur un espace de Banach, suivant [**3**]. On montre quelques propriétés des générateurs de ces semi-groupes, par exemple une représentation de la résolvante par une transformée de Laplace et des résultats de densité des domaines. On fait le lien entre ces semi-groupes, leurs générateurs et un problème de Cauchy homogène. Dans le cadre Hilbertien, on montre l'existence d'une solution d'une équation différentielle non-homogène. Finalement, on définit brièvement le concept de semi-groupe holomorphe, suivant [**2**].

Nous remercions notre tuteur Marius Tucsnak de nous avoir proposé ce sujet de stage, pour son aide et sa patience.

Table des matières

PARTIE I
SEMI-GROUPES D'OPÉRATEURS

1. Quelques théorèmes d'analyse fonctionnelle

Nous allons commencer en énonçant quelques théorèmes importants d'analyse fonctionnelle qui seront très utiles par la suite. Les preuves se trouvent dans plusieurs livres, par exemple dans celui de Brézis [**1**].

Notation 1.1. — On notera $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des applications (opérateurs) linéaires bornés sur un espace vectoriel normé X à valeurs dans un espace vectoriel normé Y, c'est-à-dire les applications $\Lambda : X \longrightarrow Y$ telles que

$$\Lambda(x + \lambda y) = \Lambda(x) + \lambda\Lambda(y), \quad \forall x, y \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

et il existe $c > 0$ telle que

$$\|\Lambda x\|_Y \leq c\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

L'espace $\mathcal{L}(X, Y)$ est muni de la norme

$$\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{\|\Lambda x\|_Y}{\|x\|_X}, \quad \forall \Lambda \in \mathcal{L}(X, Y).$$

On note $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$.

On note par I l'opérateur identité $I : x \longmapsto x$. Sur un espace vectoriel normé X, l'opérateur identité est un opérateur linéaire borné : la linéarité découle de la définition de I, et on a de plus $\|Ix\|_X = \|x\|_X$ et par conséquent, $\|I\|_{\mathcal{L}(X)} = 1 < +\infty$.

Théorème 1.2 **(Banach-Steinhaus / Uniform Boundedness Principle)**
Soient X et Y deux espaces de Banach, et $(\Lambda_j)_{j\in J} \subset \mathcal{L}(X, Y)$, où J n'est pas nécessairement dénombrable. Si

$$\sup_{j\in J} \|\Lambda_j x\|_Y < +\infty, \quad \forall x \in X$$

alors

$$\sup_{j\in J} \|\Lambda_j\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < +\infty.$$

Théorème 1.3 **(Théorème de l'application ouverte)**
Soient X et Y deux espaces de Banach et soit $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ surjectif. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\Lambda(B_X(0, 1)) \supset B_Y(0, c). \tag{1}$$

Remarque 1.4. — La relation (1) indique que Λ est une application ouverte, c'est-à-dire que l'image d'un ouvert de X par Λ est un ouvert de Y (et cela justifie le nom du théorème). En effet, soit $\mathcal{O}$ un ouvert de X et montrons que $\Lambda(\mathcal{O})$ est un ouvert. Soit $y_0 \in \Lambda(\mathcal{O})$, alors il existe (par définition de l'image) un $x_0 \in \mathcal{O}$ tel que $\Lambda(x_0) = y_0$. Puisque $\mathcal{O}$ est ouvert, on peut trouver un $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset \mathcal{O}$, que l'on peut réécrire comme $x_0 + B(0, r) \subset \mathcal{O}$. En appliquant Λ, il en suit que

$$y_0 + \Lambda(B(0, r)) \subset \Lambda(\mathcal{O}),$$

et par (1), on a de plus que

$$\Lambda(B(0, r)) \supset B(0, rc).$$

On déduit que

$$B(y_0, rc) \subset \Lambda(\mathcal{O}).$$

***Corollaire 1.1* (Théorème de l'inverse borné)**. — *Soient X et Y deux espaces de Banach et $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijectif. Alors $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.*

***Théorème 1.5* (Théorème du graphe fermé)**. — *Soient X et Y deux espaces de Banach et $\Lambda : X \to Y$ un opérateur linéaire. Alors le graphe de Λ*

$$\mathcal{G}(\Lambda) = \big\{(x, \Lambda x) : x \in X\big\}$$

est fermé dans $X \times Y$ si et seulement si Λ est borné.

2. Semi-groupes fortement continus et leurs générateurs

Dans cette section, nous allons étudier une famille $\mathcal{T} = (T(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés agissant sur un espace de Banach X.

Définition 2.1. — *Soit une famille $\mathcal{T} = (T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$. $\mathcal{T}$ est appelée semi-groupe fortement continu s'il vérifie*

(1) $T(0) = I$

(2) $T(t + s) = T(t)T(s), \quad \forall t, s \geq 0,$

(3) $\lim\limits_{t \to 0,\ t > 0} T(t)x = x, \quad \forall x \in X.$

Ici, $t \geq 0$ signifie $t \in \mathbb{R}_+$. (1) et (2) sont les propriétés qui caractérisent un semi-groupe et (3) désigne la forte continuité.

Remarque 2.2. — On note que l'expression $T(t)T(s)$ ne désigne pas la multiplication usuelle - il s'agit d'une composition de deux applications. Cependant, par la suite on note $T(t)T(s) := T(t) \circ T(s)$.

Considérons la famille $(T(t))_{t\geq 0}$ vérifiant (1) et (2) - on l'appelle *système dynamique*. Ici X est vu comme l'ensemble de tout les états du système, et $T(t), t \geq 0$ comme l'application décrivant le changement d'un état $x \in X$ au temps 0 (car $T(0)x = x$) en l'état $T(t)x$ au temps t. Pour obtenir l'état du système à un temps $t+\tau$ à partir de l'état du système au temps t, on calcule $T(t+\tau)x = T(\tau)T(t)x$.

Notation 2.3. — Afin de simplifier la notation nous allons noter $\lim_{t\downarrow 0}$ au lieu de $\lim_{t\to 0,\ t>0}$.

On définit maintenant une quantité qui caractérise un semi-groupe fortement continu.

Définition 2.4. — *Soit $\mathcal{T}$ un semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach X. On appelle borne de croissance ("growth bound") de $\mathcal{T}$, que l'on note $\omega_0(\mathcal{T})$, la quantité*

$$\omega_0(\mathcal{T}) := \inf_{t\in]0,+\infty[} \frac{\ln \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t}.$$

Remarque 2.5. — On observe que $\omega_0(\mathcal{T}) \in [-\infty, +\infty[$ car ...

Lemme 2.6. — *Soit $\mathcal{T}$ un semi-groupe fortement continu sur X. Alors quel que soit $t_0 > 0$, l'application $t \longmapsto T(t)$ est bornée sur l'intervalle $[0, t_0]$, i.e.*

$$\sup_{t\in[0,t_0]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty.$$

Démonstration. — Comme $\lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sup_{t\in[0,\delta]} \|T(t)x\|_X < +\infty.$$

Cela découle directement de la définition de la limite qui dit que si l'on choisit par exemple $\varepsilon = 5$ alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|T(t)x - x\|_X \leq 5, \quad \forall t \in [0, \delta],$$

ce qui implique que

$$\|x\|_X - 5 \leq \|T(t)x\|_X \leq \|x\|_X + 5.$$

D'après le théorème de Banach-Steinhaus (théorème 1.2),

$$\sup_{t\in[0,\delta]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty.$$

Notons $I_s = [s\delta, (s+1)\delta]$ pour $s \in \mathbb{N}$. En effectuant le changement de variable $t = u - s\delta$ et en utilisant le fait que $\mathcal{T}$ est un semi-groupe, on obtient

$$\begin{aligned}
\sup_{u \in I_s} \|T(u)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \sup_{t \in [0,\delta]} \|T(s\delta)T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq \underbrace{\|T(s\delta)\|_{\mathcal{L}(X)} \sup_{t \in [0,\delta]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}_{:=M_s} \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Posons $n_0 := [\frac{t_0}{\delta}] + 1$. On a $t_0 \leq n_0\delta$, donc $[0, t_0] \subset \bigcup_{s=0\ldots n_0} I_s$ et

$$\begin{aligned}
\sup_{v \in [0,t_0]} \|T(v)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \max_{s=0\ldots n_0-1} \Big(\sup_{u \in I_s} \|T(u)\|_{\mathcal{L}(X)} \Big) \\
&\leq \max_{s=0\ldots n_0-1} M_s \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.7. — *Soit $\mathcal{T}$ un semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach X. Alors*

(a) $\omega_0(\mathcal{T}) = \lim_{t \to \infty} \dfrac{\ln \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t}$,

(b) pour tout $\omega > \omega_0(\mathcal{T})$, il existe un réel $M_\omega \geq 1$ tel que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\omega e^{\omega t}, \qquad \forall t \geq 0,$$

(c) la fonction $\varphi : (t, x) \longmapsto T(t)x$ est continue (pour la topologie produit) de $\mathbb{R}_+ \times X$ dans X.

Démonstration. — Pour (a), on commence par poser

$$p(t) := \ln \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)},$$

où ln désigne le logarithme népérien.

Par ailleurs, pour tout $t, \tau \geq 0$

$$\begin{aligned}
p(t+\tau) &= \ln \|T(t+\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&= \ln \|T(t)T(\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq \ln \big(\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|T(\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \big) \qquad (2) \\
&= \ln \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} + \ln \|T(\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&= p(t) + p(\tau).
\end{aligned}$$

Soit $t \geq 0$. On note $[t]$ la partie entière de t. Cela signifie que $[t]$ vérifie $[t] \in \mathbb{Z}$ et $[t] \leq t < [t] + 1$ (ici $[t] \in \mathbb{N}$ car t est positif). On note $\{t\}$ la partie fractionnaire de t, i.e. $\{t\} = t - [t]$ (donc $\{t\} \in [0, 1[$).

On peut maintenant réécrire $t \geq 0$ comme $[t] + \{t\}$ et utiliser (2) pour majorer $p(t)$ comme suit

$$\begin{aligned} p(t) &= p([t] + \{t\}) \\ &= p(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{[t] \text{ fois}} + \{t\}) \\ &\leq [t]p(1) + p(\{t\}). \end{aligned} \tag{3}$$

On remarque que $p(\{t\})$ est borné sur $\mathbb{R}_+$ car

$$\begin{aligned} \sup_{t\geq 0} \|T(\{t\})\|_{\mathcal{L}(X)} &= \sup_{u\in[0,1[} \|T(u)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \underbrace{\sup_{u\in[0,1]} \|T(u)\|_{\mathcal{L}(X)}}_{:=M} \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

par le lemme 2.6. Donc pour tout $t \geq 0$, $p(\{t\}) \leq \ln M < +\infty$. En divisant par t (t est positif, et on le suppose non nul car on va étudier cette inégalité quand t est grand) dans (3) on obtient

$$\frac{p(t)}{t} \leq \underbrace{\frac{[t]}{t}}_{\leq 1} p(1) + \frac{p(\{t\})}{t} \leq p(1) + \frac{\ln M}{t},$$

que l'on peut réécrire comme

$$\frac{p(t)}{t} - \frac{\ln M}{t} \leq p(1).$$

Pour tout $s > 0$, nous avons

$$\frac{p(t)}{t} \leq p(1) + \sup_{t\geq s} \frac{\ln M}{t} = p(1) + \frac{\ln M}{s}, \quad \forall t \geq s,$$

c'est-à-dire

$$\sup_{t\geq s} \frac{p(t)}{t} \leq p(1) + \frac{\ln M}{s},$$

et donc

$$\sup_{t\geq s} \frac{p(t)}{t} - \frac{\ln M}{s} \leq p(1).$$

En faisant tendre s vers $+\infty$ on obtient

$$\begin{aligned} & \lim_{s\to\infty}\Big(\sup_{t\geq s}\frac{p(t)}{t}-\frac{\ln M}{s}\Big)\leq p(1)\\ \Longleftrightarrow\quad & \lim_{s\to\infty}\sup_{t\geq s}\frac{p(t)}{t}-\lim_{s\to\infty}\frac{\ln M}{s}\leq p(1)\\ \Longleftrightarrow\quad & \underbrace{\lim_{s\to\infty}\big(\sup_{t\geq s}\frac{p(t)}{t}\big)}_{=:\ \limsup_{t\to\infty}\frac{p(t)}{t}}\leq p(1). \end{aligned}$$

Cela implique (en fixant $\varepsilon = 7$) qu'il existe un réel $s > 0$ tel que $\sup_{t\geq s}\frac{p(t)}{t}\leq p(1)+7<+\infty$.

En passant par les mêmes étapes on montre cette inégalité est valable en remplaçant p par la fonction $t\longmapsto p(\alpha t)$, avec $\alpha > 0$. En effet, comme on peut réécrire $t\geq 0$ comme $[t]+\{t\}$, on a $\alpha t=\alpha[t]+\alpha\{t\}$. Alors

$$p(\alpha t)=p(\underbrace{\alpha+\alpha+\ldots+\alpha}_{[t]\text{ fois}}+\alpha\{t\})\leq [t]p(\alpha)+p(\alpha\{t\}). \tag{4}$$

De plus, $p(\alpha\{t\})$ est borné sur $\mathbb{R}_+$ car

$$\sup_{t\geq 0}\|T(\alpha\{t\})\|_{\mathcal{L}(X)}=\sup_{v\in[0,\alpha[}\|T(v)\|_{\mathcal{L}(X)}\leq\sup_{v\in[0,\alpha]}\|T(v)\|_{\mathcal{L}(X)}<+\infty.$$

Enfin, en divisant par t et en prenant la $\limsup$ dans (4) on obtient

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{p(\alpha t)}{t}\leq p(\alpha),$$

ce pour tout $\alpha > 0$. Le changement de variable $v = \alpha t$ donne

$$\limsup_{v\to\infty}\frac{p(v)}{v}\leq\frac{p(\alpha)}{\alpha},\quad \forall\alpha>0,$$

i.e. $\limsup_{v\to\infty}\frac{p(v)}{v}\leq\inf_{\alpha>0}\frac{p(\alpha)}{\alpha}$. L'inégalité dans le sens opposé est également vraie puisque pour tout $v > 0$

$$\frac{p(v)}{v}\geq\inf_{\alpha>0}\frac{p(\alpha)}{\alpha},$$

donc $\limsup_{v\to\infty}\frac{p(v)}{v}\geq\inf_{\alpha>0}\frac{p(\alpha)}{\alpha}$. On a donc montré que

$$\limsup_{v\to\infty}\frac{p(v)}{v}=\inf_{\alpha>0}\frac{p(\alpha)}{\alpha}=:\omega_0(\mathcal{T}).$$

Or, $\limsup_{v\to\infty} \frac{p(v)}{v} \geq \liminf_{v\to\infty} \frac{p(v)}{v}$ par définition. Cela couplé avec le fait que $\liminf_{v\to\infty} \frac{p(v)}{v} \geq \inf_{\alpha>0} \frac{p(\alpha)}{\alpha}$ [(1)] nous permet de déduire (a).

Pour (b) soit $\omega > \omega_0(\mathcal{T})$. On utilise le résultat (a) qui affirme que

$$l := \lim_{v\to\infty} \frac{p(v)}{v} < \omega.$$

Par définition de la limite

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists t_\varepsilon \geq 0 : \forall t \geq t_\varepsilon,\ \left|\frac{p(t)}{t} - l\right| \leq \varepsilon,$$

et par conséquent $\frac{p(t)}{t} \leq l + \varepsilon$. On peut donc choisir ε de sorte que $l + \varepsilon < \omega$. Posons $\varepsilon = \frac{\omega - l}{2}$ (ce ε dépend de ω et il est bien strictement positif car $l < \omega$ par hypothèse). On a alors l'existence de $t_\omega > 0$ tel que pour tout $t \geq t_\omega$

$$\begin{aligned}\frac{p(t)}{t} &\leq\ l + \varepsilon\ =\ l + \frac{\omega - l}{2}\\ &=\ \frac{l+\omega}{2}\ <\ \frac{\omega+\omega}{2}\\ &=\ \omega.\end{aligned}$$

Cela est équivalent à $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t}$. Ainsi on a d'une part pour tout $t \geq t_\omega$, $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} e^{-\omega t} \leq 1$. Et quand $t < t_\omega$ on utilise de nouveau le lemme 2.6 (et le fait que $t \longmapsto e^{-\omega t}$ est continue sur $[0, t_\omega]$ donc bornée sur cet intervalle) pour écrire

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,t_\omega[} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} e^{-\omega t} &\leq \sup_{t\in[0,t_\omega]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} e^{-\omega t}\\ &\leq \Big(\sup_{t\in[0,t_\omega]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\Big)\Big(\sup_{t\in[0,t_\omega]} e^{-\omega t}\Big)\\ &< +\infty.\end{aligned}$$

Ainsi si on pose $M_\omega := \max\Big(1, \sup_{t\in[0,t_\omega]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} e^{-\omega t}\Big)$, pour tout $t \geq 0$, $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} e^{-\omega t} \leq M_\omega$.

Pour (c), soient $t_0 \geq 0$ et $x_0 \in X$ quelconques. On va montrer que φ est continue en (t_0, x_0).

On commence par montrer que l'application $t \longmapsto T(t)x_0$ est continue de $\mathbb{R}_+$ dans X. On sait déjà que cette fonction est continue à droite en 0 (par définition d'un semi-groupe fortement continu). Soit $s_0 > 0$, montrons la continuité à droite puis la continuité à gauche en ce point. Notons $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ une suite qui converge à droite vers s_0 (i.e. en décroissant, donc $s_n > s_0$).

[(1)]En effet, pour tout $v > 0$ nous avons $\inf_{w\geq u} \frac{p(w)}{w} \geq \inf_{\alpha>0} \frac{p(\alpha)}{\alpha}$, puisque on a plus de chance de tomber sur un élément plus petit sur un plus grand ensemble. En passant à la limite quand v tend vers l'infini et en utilisant la définition de lim inf, on déduit l'assertion.

Cela est équivalent à dire que la suite $\big(s_n - s_0\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0. De plus,

$$\begin{aligned}\|T(s_n)x_0 - T(s_0)x_0\|_X &= \|T(s_0 + s_n - s_0)x_0 - T(s_0)x_0\|_X\\ &= \|T(s_0)T(s_n - s_0)x_0 - T(s_0)x_0\|_X\\ &= \|T(s_0)\big(T(s_n - s_0)x_0 - x_0\big)\|_X\\ &\leq \underbrace{\|T(s_0)\|_{\mathcal{L}(X)}}_{<+\infty}\underbrace{\|\big(T(s_n - s_0)x_0 - x_0\big)\|_X}_{\xrightarrow[(s_n-s_0)\downarrow 0]{}0},\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\lim_{n\to\infty} T(s_n)x_0 = T(s_0)x_0$. Notons maintenant $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ une suite qui converge à gauche vers s_0 (i.e. en croissant donc $s_n < s_0$). Cela est équivalent à dire que la suite $(s_0 - s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0. On a

$$\begin{aligned}\|T(s_n)x_0 - T(s_0)x_0\|_X &= \|T(s_n)x_0 - T(s_n + s_0 - s_n)x_0\|_X\\ &= \|T(s_n)x_0 - T(s_n)T(s_0 - s_n)x_0\|_X\\ &= \|T(s_n)\big(x_0 - T(s_0 - s_n)x_0\big)\|_X\\ &\leq \|T(s_n)\|_{\mathcal{L}(X)}\|\big(x_0 - T(s_0 - s_n)x_0\big)\|_X\\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\|T(s_n)\|_{\mathcal{L}(X)}\underbrace{\|\big(x_0 - T(s_0 - s_n)x_0\big)\|_X}_{\xrightarrow[(s_0-s_n)\downarrow 0]{}0},\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\lim_{n\to\infty} T(s_n)x_0 = T(s_0)x_0$. Ici on a utilisé le lemme 2.6 pour avoir

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T(s_n)\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{s_n\in[0,s_0[}\|T(s_n)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sup_{s_n\in[0,s_0]}\|T(s_n)\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty.$$

Montrons maintenant que $(t,x) \longmapsto T(t)x$ est continue en (t_0, x_0). Soient $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ une suite qui converge vers t_0 et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ une suite qui converge vers x_0. On réécrit $T(t_n)x_n - T(t_0)x_0$ comme

$$\begin{aligned}T(t_n)x_n - T(t_0)x_0 &= T(t_n)x_n - T(t_n)x_0 + T(t_n)x_0 - T(t_0)x_0\\ &= T(t_n)(x_n - x_0) + T(t_n)x_0 - T(t_0)x_0.\end{aligned}$$

On remarque que comme $|t_n - t_0| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il existe un réel $M > 0$ tel que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0, M]$ (car une suite qui converge est bornée). Ainsi

$$\begin{aligned}&\|T(t_n)x_n - T(t_0)x_0\|_X\\ &\qquad\leq \|T(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)}\|(x_n - x_0)\|_X + \|T(t_n)x_0 - T(t_0)x_0\|_X\\ &\qquad\leq \underbrace{\sup_{t_n\in[0,M]}\|T(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)}}_{<+\infty \text{ par lem. } 2.6}\underbrace{\|(x_n - x_0)\|_X}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0} + \underbrace{\|T(t_n)x_0 - T(t_0)x_0\|_X}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0},\end{aligned}$$

où on a utilisé la continuité de $t \longmapsto T(t)x_0$. $\square$

Définition 2.8. — *Soit $\mathcal{T}$ un semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach X. $\mathcal{T}$ est appelé exponentiellement stable si $\omega_0(\mathcal{T}) < 0$.*

Définition 2.9. — *Soit $\mathcal{T}$ un semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach X. L'opérateur linéaire*

$$A : \mathcal{D}(A) \to X$$

qui est défini par

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X\colon \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \textit{existe} \right\},$$

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

est appelé le générateur infinitésimal (ou seulement le générateur) de $\mathcal{T}$.

On remarque que la limite considérée dans la définition de $\mathcal{D}(A)$ est une limite au sens de la norme de X, et donc $\mathcal{D}(A)$ est l'ensemble des $x \in X$ tels qu'il existe un élément $l \in X$ (qui dépend de x et a posteriori on le note Ax) de sorte que

$$\left\| \frac{T(h) - I}{h} x - l \right\|_X \xrightarrow[h \downarrow 0]{} 0.$$

Remarque 2.10. — On remarque que $\mathcal{D}(A) \subset X$.

Proposition 2.11. — *Soit $\mathcal{T}$ un semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach X, de générateur A. Alors, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et pour tout $t \geq 0$, on a $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Démonstration. — Soit $x \in \mathcal{D}(A)$ et $t \geq 0$, et soit $\tau > 0$ un réel. On veut montrer que $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et que

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{T(t+\tau)x - T(t)x}{\tau} = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Commençons par regarder la limite du taux d'accroissement quand τ tend vers 0 en décroissant. D'une part on peut réécrire

$$\frac{T(t+\tau)x - T(t)x}{\tau} = \frac{T(\tau+t)x - T(t)x}{\tau} = \frac{T(\tau)\big(T(t)x\big) - T(t)x}{\tau} \tag{5}$$

et d'autre part

$$\frac{T(t+\tau)x - T(t)x}{\tau} = \frac{T(t)T(\tau)x - T(t)x}{\tau} = T(t)\frac{T(\tau)x - x}{\tau}. \tag{6}$$

Or, $\lim_{\tau\downarrow 0}\frac{T(\tau)x-x}{\tau} = Ax < +\infty$ par hypothèse. Donc en passant à la limite dans (6) on obtient

$$\lim_{\tau\downarrow 0}\frac{T(t+\tau)x-T(t)x}{\tau} = T(t)Ax < +\infty.$$

en utilisant la continuité de l'opérateur $T(t)$, $t \geq 0$. Par conséquent, on a aussi avec (5)

$$\lim_{\tau\downarrow 0}\frac{T(\tau)\big(T(t)x\big)-T(t)x}{\tau} < +\infty,$$

ce qui implique que $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et

$$A\big(T(t)x\big) := \lim_{\tau\downarrow 0}\frac{T(\tau)\big(T(t)x\big)-T(t)x}{\tau}.$$

On a obtenu

$$\lim_{\tau\downarrow 0}\frac{T(t+\tau)x-T(t)x}{\tau} = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Il reste à montrer que cette égalité tient toujours lorsque cette fois τ tend vers 0 en croissant (ce qui est équivalent à $-\tau$ tend en décroissant vers 0). Il suffit pour cela de montrer que

$$\lim_{\tau\uparrow 0}\frac{T(t+\tau)x-T(t)x}{\tau} - T(t)Ax = 0.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}
&\frac{T(t+\tau)x-T(t)x}{\tau} - T(t)Ax \\
&\quad= \frac{T(t+\tau)x-T(t+\tau-\tau)x}{\tau} - T(t+\tau)Ax + T(t+\tau)Ax - T(t)Ax \\
&\quad= T(t+\tau)\Big[\frac{x-T(-\tau)x}{\tau} - Ax\Big] + T(t+\tau)Ax - T(t)Ax.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\Big\|\frac{T(t+\tau)x-T(t)x}{\tau} - T(t)Ax\Big\|_X \\
&\leq \|T(t+\tau)\|_{\mathcal{L}(X)}\Big\|\frac{x-T(-\tau)x}{\tau} - Ax\Big\|_X + \|T(t+\tau)Ax - T(t)Ax\|_X \\
&\leq \underbrace{\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\sup_{\tau\in[0,t]}\|T(\tau)\|_{\mathcal{L}(X)}}_{<+\infty \text{ par lemme 2.6}}\underbrace{\Big\|\frac{x-T(-\tau)x}{\tau} - Ax\Big\|_X}_{\xrightarrow[\tau\uparrow 0]{}0} \\
&\quad + \underbrace{\|T(t+\tau)Ax - T(t)Ax\|_X}_{\xrightarrow[\tau\uparrow 0]{}0 \text{ par proposition 2.12}}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.12. — *Soit $\mathcal{T}$ un semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach X, de générateur A. Soit $x_0 \in X$. On définit pour tout $\tau > 0$,*

$$x_\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau T(t)x_0 \,\mathrm{d}t.$$

Alors, $x_\tau \in \mathcal{D}(A)$ et $\lim_{\tau\to 0} x_\tau = x_0$. De plus, $Ax_\tau = \frac{1}{\tau}(T(\tau)x_0 - x_0)$.

Démonstration. — Soit $x_0 \in X$. Commençons par montrer que $\lim_{\tau\to 0} x_\tau = x_0$. On étudie la limite du terme

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau T(t)x_0 \,\mathrm{d}t - x_0 = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (T(t)x_0 - x_0)\,\mathrm{d}t$$

lorsque τ tend vers 0. Or la fonction $t \longmapsto T(t)x_0$ est continue en 0 par hypothèse (la forte continuité du semi-groupe), ce qui implique que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $|t| < \eta$ implique $\|T(t)x_0 - x_0\|_X \leq \varepsilon$. Pour $\tau \leq \eta$ et $|t| \leq \eta$ dans l'intégrale, on a alors

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau T(t)x_0 \,\mathrm{d}t - x_0\Big\|_X &\leq \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|T(t)x_0 - x_0\|_X \,\mathrm{d}t\\ &\leq \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \varepsilon \,\mathrm{d}t\\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

on a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe τ_0 (égal à η) tel que pour tout $\tau \in [0, \tau_0]$, $\|x_\tau - x_0\|_X \leq \varepsilon$.

Soit $\tau > 0$, montrons que $x_\tau \in \mathcal{D}(A)$. On va montrer que

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{T(h)x_\tau - x_\tau}{h} = 0.$$

Pour $h > 0$ quelconque, on a

$$\begin{aligned}\frac{T(h)x_\tau - x_\tau}{h} &= \frac{1}{h}\Big[T(h)\frac{1}{\tau}\int_0^\tau T(t)x_0 \,\mathrm{d}t - \frac{1}{\tau}\int_0^\tau T(t)x_0 \,\mathrm{d}t\Big]\\ &= \frac{1}{h\tau}\Big[\int_0^\tau T(h+t)x_0 \,\mathrm{d}t - \int_0^\tau T(t)x_0 \,\mathrm{d}t\Big]\\ &= \frac{1}{h\tau}\Big[\int_h^{h+\tau} T(u)x_0 \,\mathrm{d}u - \int_0^\tau T(t)x_0 \,\mathrm{d}t\Big],\end{aligned}$$

où on a effectué le changement de variable $u = h+t$. Puis on utilise la relation de Chasles (comme $h \to 0$, on peut le supposer inférieur à τ) pour déduire

$$\begin{aligned}
&\frac{T(h)x_\tau - x_\tau}{h} \\
&= \frac{1}{h\tau}\Big[\int_h^\tau T(u)x_0\,\mathrm{d}u + \int_\tau^{h+\tau} T(u)x_0\,\mathrm{d}u - \int_0^h T(t)x_0\,\mathrm{d}t - \int_h^\tau T(t)x_0\,\mathrm{d}t\Big] \\
&= \frac{1}{h\tau}\Big[\int_\tau^{h+\tau} T(u)x_0\,\mathrm{d}u - \int_0^h T(t)x_0\,\mathrm{d}t\Big].
\end{aligned}$$

Puis un nouveau changement de variable $v = u - \tau$ donne le résultat voulu

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)x_\tau - x_\tau}{h} &= \frac{1}{h\tau}\Big[\int_0^h T(\tau+v)x_0\,\mathrm{d}v - \int_0^h T(t)x_0\,\mathrm{d}t\Big] \\
&= \frac{1}{\tau}\Big[T(\tau)\underbrace{\frac{1}{h}\int_0^h T(v)x_0\,\mathrm{d}v}_{\xrightarrow[h\downarrow 0]{} x_0} - \underbrace{\frac{1}{h}\int_0^h T(t)x_0\,\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[h\downarrow 0]{} x_0}\Big],
\end{aligned}$$

car $T(\tau)$ est continu sur X. □

Remarque 2.13. — La proposition 2.12 ci-dessus montre également que

$$T(t)x - x = A\int_0^\tau T(s)x\,\mathrm{d}s, \quad \forall x \in X.$$

En effet, le x_0 posé dans cette proposition est arbitraire. En remplaçant la notation x_0 par x on obtient $A\frac{1}{\tau}\int_0^\tau t(s)x\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\tau}[T(t)x - x]$, qui est équivalent à $A\int_0^\tau t(s)x\,\mathrm{d}s = T(t)x - x$.

Corollaire 2.1. — *Soit A le générateur d'un semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach X. Alors $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X.*

Démonstration. — Il s'agit de trouver, pour tout $x \in X$, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\|x_n - x\|_X \to 0$ lorsque $n \to \infty$. On peut par exemple choisir la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $y_n = x_{\frac{1}{n}}$, où $x_\tau, \tau > 0$ est donné par la proposition 2.12. Il s'agit bien d'une suite inclue dans $\mathcal{D}(A)$ et elle converge vers x par la proposition 2.12. □

3. Le spectre et la résolvante d'un opérateur

Dans cette partie nous allons énoncer un ensemble de propriétés sur le spectre et les résolvantes d'un opérateur linéaire A (non nécessairement borné) agissant sur un espace de Banach X (plus généralement sur un sous-espace $\mathcal{D}(A) \subset X$) et à valeurs dans un autre espace de Banach Y.

Définition 3.1. — *Soient X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire non borné est une application linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to Y$, définie sur le sous-espace $\mathcal{D}(A) \subset X$ à valeurs dans Y. L'espace $\mathcal{D}(A)$ est appelé le domaine de A.*

On dit que A est borné (continu) s'il existe un opérateur de prolongement $\widetilde{A}$ pour lequel il existe une constante $c \geq 0$ telle que

$$\|\widetilde{A}x\|_Y \leq c\|x\|_X, \quad \forall x \in \overline{\mathcal{D}(A)},$$

et $\widetilde{A}\Big|_{\mathcal{D}(A)} = A$. On note souvent ce prolongement A au lieu de $\widetilde{A}$.

Dans ce texte, l'opérateur A sera souvent le générateur d'un semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach X. Par conséquent, ce sera un opérateur à domaine dense (par la proposition 2.1) et donc cette définition d'opérateur borné coïncide avec la définition usuelle (1.1).

Définition 3.2. — *Soient X et Y deux espaces de Banach, et soit $\mathcal{D}(A)$ un sous-espace de X. Un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \to Y$ est dit fermé si son graphe*

$$\mathcal{G}(A) = \big\{(x, Ax) : x \in \mathcal{D}(A)\big\}$$

est fermé dans $X \times Y$.

Sous ces hypothèses, nous avons les résultats suivants.

Proposition 3.3. — *Un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \to Y$ est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(A)$ telle que*

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} x \quad \textit{et} \quad Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{Y} y,$$

on a

$$x \in \mathcal{D}(A) \quad \textit{et} \quad Ax = y.$$

Démonstration. — Supposons dans un premier temps que A est fermé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(A)$ telle que $x_n \longrightarrow x$ dans X et $Ax_n \longrightarrow y$ dans Y. On remarque que $(x_n, Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{G}(A)$, et comme il est fermé, le couple (x, y) est aussi dans $\mathcal{G}(A)$. Par définition de $\mathcal{G}(A)$, on a $Ax = y$.

Réciproquement, si $(x_n, Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{G}(A)$ qui converge vers (x, y) dans $X \times Y$ et telle que $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$, alors (x, y) est dans $\mathcal{G}(A)$ qui est par conséquent fermé. $\square$

Proposition 3.4. — *Si A est fermé, alors $\mathcal{D}(A)$ est un espace de Banach pour la norme du graphe $\|.\|_{gr}$ définie par*

$$\|x\|_{gr}^2 = \|x\|_X^2 + \|Ax\|_Y^2, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Démonstration. — $\mathcal{D}(A)$ est un espace vectoriel car c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel X. En effet, pour tout $t \geq 0$, $0_X \in \mathcal{D}(A)$ puisque $T(t)0_X = 0_X$ (car $T(t)$ est linéaire de X dans X et donc $\lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)0_X - 0_X}{t} = 0 < +\infty$. De plus, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x, x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$, nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)(x_1+x_2)-(x_1+x_2)}{t} &= \lim_{t\downarrow 0} \Big[\frac{T(t)x_1 - x_1}{t} + \frac{T(t)x_2 - x_2}{t}\Big] \\ &= \underbrace{\lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x_1 - x_1}{t}}_{<+\infty} + \underbrace{\lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x_2 - x_2}{t}}_{<+\infty},\end{aligned}$$

et

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)\lambda x - \lambda x}{t} = \lambda \underbrace{\lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}}_{<+\infty}.$$

$\|.\|_{gr}$ est bien une norme puisque pour $x \in \mathcal{D}(A)$, $\|x\|_{gr} = 0$ implique que $\|x\|_X = 0$ et donc $x = 0_X = 0_{\mathcal{D}(A)}$. De plus, pour $x, y \in \mathcal{D}(A)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, en utilisant la linéarité de A sur $\mathcal{D}(A)$ et les propriétés de la norme sur X on obtient

$$\begin{aligned}\|x+y\|_{gr}^2 = \|x+y\|_X^2 + \|A(x+y)\|_X^2 &\overset{A \text{ linéaire}}{=} \|x+y\|_X^2 + \|Ax+Ay\|_X^2 \\ &\overset{\triangle}{\leq} \|x\|_X^2 + \|y\|_X^2 + 2\|x\|_X\|y\|_X + \|Ax\|_X^2 + \|Ay\|_X^2 + 2\|Ax\|_X\|Ay\|_X \\ &= \|x\|_X^2 + \|Ax\|_X^2 + \|y\|_X^2 + \|Ay\|_X^2 + 2\Big(\|x\|_X\|y\|_X + \|Ax\|_X\|Ay\|_X\Big) \\ &\leq \|x\|_X^2 + \|Ax\|_X^2 + \|y\|_X^2 + \|Ay\|_X^2 + 2\Big(\|x\|_X\|y\|_X + \|Ax\|_X\|Ay\|_X \\ &\qquad + \|x\|_X\|Ay\|_X + \|y\|_X\|Ax\|_X\Big) \\ &= \|x\|_{gr}^2 + \|y\|_{gr}^2 + 2\|x\|_{gr}\|y\|_{gr} \\ &= \Big(\|x\|_{gr} + \|y\|_{gr}\Big)^2,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_{gr}^2 = \|\lambda x\|_X^2 + \|A(\lambda x)\|_X^2 &= \|\lambda x\|_X^2 + \|\lambda Ax\|_X^2 \\ &= |\lambda|^2\|x\|_X^2 + |\lambda|^2\|Ax\|_X^2 = |\lambda|^2\|x\|_{gr}^2.\end{aligned}$$

Il reste à montrer que $(\mathcal{D}(A), \|.\|_{gr})$ est complet. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{D}(A), \|.\|_{gr})$, et montrons qu'elle converge pour la norme du graphe vers un élément $x \in \mathcal{D}(A)$. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N_\varepsilon$, $\|x_n - x_m\|_{gr} \leq \varepsilon$. Cela implique que $\|x_n - x_m\|_X \leq \varepsilon$ et $\|A(x_n - x_m)\|_X = \|Ax_n - Ax_m\|_X \leq \varepsilon$, et donc que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de X et $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de Y. X et Y sont complets, par conséquent il existe deux éléments $x \in X$ et $y \in Y$ tels que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans X et $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y dans Y. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ et A est fermé, la proposition 3.3 donne que $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$. On a donc bien obtenu que

$$\underbrace{\|x_n - x\|_X^2 + \|Ax_n - Ax\|_Y^2}_{=\|x_n-x\|_{gr}^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

Proposition 3.5. — *Soit $A : \mathcal{D}(A) \to Y$ un opérateur linéaire fermé. Alors A est borné si et seulement si $\mathcal{D}(A)$ est fermé.*

Démonstration. — Supposons tout d'abord que $\mathcal{D}(A) \subset X$ est fermé. Puisque X est un espace de Banach, $\mathcal{D}(A)$ l'est aussi, et comme $\mathcal{G}(A)$ est supposé fermé, on déduit que A est un opérateur borné sur $\mathcal{D}(A) = \overline{\mathcal{D}(A)}$ en appliquant le théorème du graphe fermé (Théorème 1.5).

Réciproquement, supposons que A est borné, c'est-à-dire qu'il existe $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(\overline{\mathcal{D}(A)}, Y)$ tel que $\widetilde{A}\Big|_{\mathcal{D}(A)} = A$. Il existe donc une constante $c \geq 0$ telle que

$$\|\widetilde{A}x\|_Y \leq c\|x\|_X, \quad \forall x \in \overline{\mathcal{D}(A)}. \tag{7}$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(A)$ qui converge dans X vers $x \in X$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X et puisque[(2)]

$$\|Ax_n - Ax_m\|_Y \overset{(7)}{\leq} c\|x_n - x_m\|_X, \quad \forall n, m \in \mathbb{N},$$

$(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans Y. De plus, comme Y est un espace de Banach, $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $y \in Y$. En combinant cela et le fait que $x_n \longrightarrow x$ dans X, comme $\mathcal{G}(A)$ est fermé par hypothèse il en suit que $x \in \mathcal{D}(A)$ (et $Ax = y$), et $\mathcal{D}(A)$ est donc fermé.

$\square$

Remarque 3.6. — Tout opérateur $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$ est fermé.

En effet, considérons $(x_n, \Lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{G}(\Lambda)$ qui converge vers (x, y) dans $X \times Y$. On remarque dans un premier temps que $\mathcal{D}(\Lambda) = X$, et donc nous avons immédiatement $x \in \mathcal{D}(\Lambda)$. De plus, comme Λ est continu, nous avons $\Lambda x_n \longrightarrow \Lambda x$ dans Y. Par l'unicité de la limite dans les espaces séparés (de Hausdorff), nous avons $\Lambda x = y$ et $\mathcal{G}(\Lambda)$ est donc fermé.

Remarque 3.7. — Si $A : \mathcal{D}(A) \to Y$, $\mathcal{D}(A) \subset X$ est un opérateur fermé, et si $\Lambda \in \mathcal{L}(X, Y)$, alors $A + \Lambda$ est aussi fermé.

---

(2) On peut appliquer (7) ici car tout les x_n sont des éléments de $\mathcal{D}(A)$, et A et $\widetilde{A}$ coïncident sur $\mathcal{D}(A)$.

Tout d'abord, on note que le domaine de $A+\Lambda$ est à nouveau $\mathcal{D}(A)$ car le domaine de la somme $A+\Lambda$ est l'intersection des domaines de A et de Λ, et $\mathcal{D}(A) \subset X$. On note aussi que par définition de $A+\lambda$

$$(A+\Lambda)x = A + \Lambda x, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

On va appliquer la proposition 3.3. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ qui converge dans X vers un élément $x \in X$ et telle que la suite $((A+\Lambda)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans Y vers un élément $y \in Y$. Montrons que $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$. Comme Λ est continu, $(\Lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans Y vers Λx. Cela nous permet d'obtenir

$$\underbrace{(A+\Lambda)x_n}_{=Ax_n+\Lambda x_n} - \Lambda x_n \xrightarrow[n\to\infty]{Y} y - \Lambda x,$$

i.e. $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans Y vers $y-\Lambda x$. On a donc une suite $(x_n, Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $X \times Y$ vers $(x, y-Px)$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$. Ainsi, comme A est fermé, on a $x \in \mathcal{D}(A)$ et $g - \Lambda x = Ax$, ce qui équivaut à $g = Ax + \Lambda x = (A+\Lambda)x$.

Définition 3.8. — *Soit $A : \mathcal{D}(A) \to X$, $\mathcal{D}(A) \subset X$ un opérateur linéaire non borné. On définit l'ensemble résolvant de A par*

$$\rho(A) = \{s \in \mathbb{C} : sI - A \textit{ est inversible et } (sI-A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$$

Rappelons que l'opérateur $sI - A$ est inversible si et seulement s'il est bijectif, c'est-à-dire injectif : $\ker(sI-A) = \{0_X\}$, et surjectif : $(sI-A)\mathcal{D}(A) = X$. On définit également le spectre de A par

$$\sigma(A) = \rho(A)^c.$$

Finalement, pour tout $s \in \rho(A)$ on définit la résolvante de A par

$$R(s, A) = (sI-A)^{-1}.$$

On peut remarquer que si A était borné, $sI - A$ aussi (comme somme de deux opérateurs bornés). Donc si $sI - A$ est inversible, par le théorème de l'inverse borné, $(sI-A)^{-1}$ est automatiquement borné. Ainsi le spectre d'un opérateur borné se réduit aux points $s \in \mathbb{C}$ telles que $sI - A$ n'est pas inversible.

Remarque 3.9. — Si $\rho(A)$ est non-vide, alors A est fermé.

L'idée principale de la preuve est de remarquer que lorsque $s \in \rho(A)$, nous avons

$$\mathcal{G}(sI-A) = \mathcal{G}((sI-A)^{-1}).$$

En effet, nous avons tout d'abord que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(sI - A)$ et

$$\begin{aligned}\mathcal{G}\big((sI-A)^{-1}\big) &= \big\{\big(x,(sI-A)^{-1}x\big)\colon x \in X\big\}\\ &= \big\{\big((sI-A)x, x\big)\colon x \in \mathcal{D}(A)\big\}\\ &= \mathcal{G}(sI-A),\end{aligned}$$

avec les coordonnées inversées. Or $\mathcal{G}\big((sI-A)^{-1}\big)$ est fermé puisque le graphe d'un opérateur borné est toujours fermé (par la remarque 3.6), et par conséquent, $sI - A$ est fermé. Or comme $A = -(sI - A) + sI$ est la somme d'un opérateur fermé et d'un opérateur borné (puisque sI est borné), A est fermé d'après la remarque 3.7.

Cette remarque peut aussi se reformuler par sa contraposée: *l'ensemble résolvant d'un opérateur non fermé est vide.*

Lemme 3.10 **(Identité de la resolvante).** — *Pour tout $s, \beta \in \rho(A)$, nous avons*

$$R(s,A) - R(\beta,A) = R(s,A)(\beta - s)R(\beta,A).$$

Démonstration. — Nous avons

$$\begin{aligned}(sI-A)^{-1}(\beta I-A)(\beta I-A)^{-1} - (sI-A)^{-1}(sI-A)(\beta I-A)^{-1}\\ = (sI-A)^{-1}(\beta I - A - sI + A)(\beta I-A)^{-1}\\ = R(s,A)(\beta-s)R(\beta,A).\end{aligned}$$

□

Lemme 3.11. — *Soit $\Lambda \in \mathcal{L}(X)$. Si $\|\Lambda\| < 1$, alors $I - \Lambda$ est inversible et*

$$(I-\Lambda)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Lambda^n \quad \textit{et} \quad \|(I-\Lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{1 - \|\Lambda\|_{\mathcal{L}(X)}}.$$

Démonstration. — On pose

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \Lambda^k.$$

Comme $\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, la série $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Lambda^n = \lim_{n\to\infty} S_n$ converge normalement dans $\mathcal{L}(X)$ et donc converge dans $\mathcal{L}(X)$ car $\mathcal{L}(X)$ est complet (car X est un espace de Banach). On a de plus

$$\begin{aligned}S_n(I-\Lambda) &= (I + \Lambda + \ldots + \Lambda^n) - (\Lambda + \Lambda^2 + \ldots \Lambda^{n+1})\\ &= I(I + \Lambda + \ldots + \Lambda^n) - \Lambda(I + \Lambda + \ldots + \Lambda^n)\\ &= (I-\Lambda)S_n,\end{aligned}$$

et donc

$$S_n(I-\Lambda) = (I-\Lambda)S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\Lambda^k - \Lambda^{k+1}\right) = I - \Lambda^{n+1} \tag{8}$$

par télescopage. Pour pouvoir conclure que $S = (I - \Lambda)^{-1}$, on observe ce qui se passe lorsque on fait tendre n vers l'infini. Dans un premier temps, puisque $\|S_n - S\|_{\mathcal{L}(X)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $I - \Lambda$ est borné (car Λ est borné), on a

$$\|S_n(I - \Lambda) - S(I - \Lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|S_n - S\|_{\mathcal{L}(X)} \|I - \Lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Or comme $\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, on a aussi que $\lim_{n\to\infty} S_n(I - \Lambda) = I$ par (8) et donc S est bien un inverse à gauche de $I - \Lambda$. Par le même raisonnement, en utilisant la continuité de $I - \Lambda$ on déduit grâce à (8) que S est aussi un inverse à droite de $I - \Lambda$. Ainsi $I - \Lambda$ est inversible et $(I - \Lambda)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Lambda^n$.

Pour la dernière assertion, on observe que

$$\|(I - \Lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \Big\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \Lambda^n \Big\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\Lambda\|^n_{\mathcal{L}(X)} = \frac{1}{1 - \|\Lambda\|_{\mathcal{L}(X)}}$$

car $\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, et la preuve est close. □

Proposition 3.12. — *Soient $A : \mathcal{D}(A) \to X$, $\mathcal{D}(A) \subset X$ un opérateur linéaire, et $\beta \in \rho(A)$. Si $s \in B\big(\beta, \frac{1}{\|R(\beta,A)\|_{\mathcal{L}(X)}}\big)$ alors $s \in \rho(A)$ et*

$$\|R(s, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{\|R(\beta, A)\|_{\mathcal{L}(X)}}{1 - |s - \beta| \|R(\beta, A)\|_{\mathcal{L}(X)}}.$$

Démonstration. — Si s était dans $\rho(A)$, on aurait

$$(\beta I - A)^{-1} - (sI - A)^{-1} = (s - \beta)(\beta I - A)^{-1}(sI - A)^{-1}$$

c'est-à-dire

$$(sI - A)^{-1} + (s - \beta)(\beta I - A)^{-1}(sI - A)^{-1} = (\beta I - A)^{-1}$$

ce qui équivaut à

$$(sI - A)^{-1}\big[I + (s - \beta)(\beta I - A)^{-1}\big] = (\beta I - A)^{-1}$$

par le lemme 3.10. On s'intéresse maintenant à savoir sous quelles conditions nous pourrons définir par cette relation un candidat pour $(sI - A)^{-1}$.

Soit $s \in B\big(\beta, \frac{1}{\|R(\beta,A)\|_{\mathcal{L}(X)}}\big)$, c'est-à-dire $|s - \beta| < \frac{1}{\|R(\beta,A)\|_{\mathcal{L}(X)}}$. Il en suit que $\|(s - \beta)R(\beta, A)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ et donc $I - (s - \beta)R(\beta, A)$ est inversible et d'inverse borné par le lemme 3.11. Ainsi, on peut poser

$$R(s, A) = (\beta I - A)^{-1}\Big[I + (s - \beta)(\beta I - A)^{-1}\Big]^{-1},$$

qui sera le candidat pour l'inverse. Montrons que $R(s, A)$ est bien l'inverse de $sI - A$.

$$\begin{aligned}\Big[I + (s - \beta)(\beta I - A)^{-1}\Big](\beta I - A) &= (\beta I - A) + (s - \beta)(\beta I - A)^{-1}(\beta I - A)\\ &= \beta I - A + sI - \beta I = sI - A,\end{aligned}$$

et donc en utilisant cette expression de $sI - A$ on a bien $(sI - A)R(s, A) = I$, i.e. $R(s, A)$ est un inverse à droite de $sI - A$. Le raisonnement est similaire pour l'inverse à droite.

Ainsi pour $s \in B\big(\beta, \frac{1}{\|R(\beta,A)\|_{\mathcal{L}(X)}}\big)$, $sI - A$ est inversible et a pour inverse $(sI-A)^{-1} = (\beta I-A)^{-1}\big[I+(s-\beta)(\beta I-A)^{-1}\big]^{-1}$. A partir de cette expression, on majore la norme de $(sI - A)^{-1}$

$$\begin{aligned}
\|(sI - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} &= \Big\|(\beta I - A)^{-1}\Big[I + (s - \beta)(\beta I - A)^{-1}\Big]^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq \|(\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\Big\|\big[I + (s - \beta)(\beta I - A)^{-1}\big]^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(X)} \qquad (9)\\
&= \|(\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\Big\|\big[I - (\beta - s)(\beta I - A)^{-1}\big]^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(X)},
\end{aligned}$$

or $(\beta - s)(\beta I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ car $\beta \in \rho(A)$. De plus, s vérifie $|\beta - s| < \frac{1}{\|R(\beta,A)\|_{\mathcal{L}(X)}}$, ce qui est équivalent à $\|(\beta - s)R(\beta, A)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$. On déduit du lemme 3.11 que

$$\begin{aligned}
\Big\|\big[I - (\beta - s)(\beta I - A)^{-1}\big]^{-1}\Big\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \frac{1}{1 - \|(\beta - s)(\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}} \\
&= \frac{1}{1 - |\beta - s|\|R(\beta, A)\|_{\mathcal{L}(X)}}
\end{aligned}$$

En injectant cela dans (9) on obtient l'inégalité voulue. Ainsi $(sI - A)^{-1}$ est borné sur X, et donc $s \in \rho(A)$. □

Cette proposition affirme entre autre que $\rho(A)$ est un ouvert. Par conséquent, $\sigma(A)$ est un fermé (comme complément d'un ouvert) et nous avons de plus la remarque suivante.

Remarque 3.13. — Soit $\beta \in \rho(A)$. La contraposée du premier résultat de la proposition 3.12 donne que $|s - \beta| \geq \frac{1}{\|R(\beta,A)\|_{\mathcal{L}(X)}}, \quad \forall s \in \sigma(A)$ et ainsi

$$\|R(\beta, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \geq \frac{1}{|\beta - s|}, \quad \forall s \in \sigma(A).$$

On a donc

$$\|R(\beta, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \geq \sup_{s\in\sigma(A)} \frac{1}{|\beta - s|} = \frac{1}{\inf_{s\in\sigma(A)} |\beta - s|}.$$

Proposition 3.14. — *L'application $\mathcal{R} : s \longmapsto R(s, A)$ est holomorphe (analytique) de $\rho(A)$ dans $\mathcal{L}(X)$.*

Démonstration. — On va montrer que pour un élément $\beta \in \rho(A)$ quelconque, $\mathcal{R}$ est développable en série entière sur le petit disque $B(\beta, \frac{1}{\|R(\beta,A)\|_{\mathcal{L}(X)}})$ (il s'agit de la définition de l'analycité). Dans la preuve de la proposition 3.12, on a vu que pour un élément s de ce disque, on a une expression de l'inverse de $sI - A$

$$\begin{aligned}(sI - A)^{-1} &= (\beta I - A)^{-1}\Big[I + (s-\beta)(\beta I - A)^{-1}\Big]^{-1} \\ &= (\beta I - A)^{-1}\Big[I - (\beta - s)(\beta I - A)^{-1}\Big]^{-1}.\end{aligned}$$

Comme $\beta \in \rho(A)$ et $\|(\beta - s)(\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$, on déduit du lemme 3.11 que

$$\Big[I - (\beta - s)(\beta I - A)^{-1}\Big]^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(\beta - s)^k\big[(\beta I - A)^k\big]^{-1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(sI - A)^{-1} &= (\beta I - A)^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty}(\beta - s)^k\big((\beta I - A)^k\big)^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k k!(\beta I - A)^{-(k+1)}}{k!}(s-\beta)^k,\end{aligned}$$

qui est un développement en série entière de la fonction $s \longmapsto (sI - A)^{-1}$ centré au point β. $\square$

Remarque 3.15. — On déduit de la fin de la preuve précédente que pour $\beta \in \rho(A)$ et $s \in B(\beta, \frac{1}{\|R(\beta,A)\|_{\mathcal{L}(X)}})$

$$\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^k(sI - A)^{-1} = (-1)^k k!(\beta I - A)^{-(k+1)}.$$

.

Ou encore pour $s \in \rho(A)$

$$\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^k(sI - A)^{-1} = (-1)^k k!(sI - A)^{-(k+1)}.$$

.

Proposition 3.16. — *Si $A \in \mathcal{L}(X)$, alors $|s| \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$ pour tout $s \in \sigma(A)$.*

Démonstration. — Procédons par l'absurde. Supposons qu'il existe $\lambda \in \sigma(A)$ tel que $|\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$ (λ doit donc être non nul). Il en suit que $\|\frac{A}{\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$. Par le lemme 3.11, $I - \frac{A}{\lambda}$ est inversible et borné, i.e. $\lambda(\lambda I - A)$ est inversible et borné. Cela signifie que $\lambda \in \rho(A)$, ce qui contredit l'hypothèse. $\square$

Ainsi, le spectre d'un opérateur borné est fermé et borné (dans $\mathbb{C}$), donc compact par le théorème de Heine-Borel.

Définition 3.17. — *Pour $A \in \mathcal{L}(X)$, on définit le rayon spectral de A par*

$$r(A) = \max_{s \in \sigma(A)} |s|.$$

Lemme 3.18. — *Soient $A \in \mathcal{L}(X)$ et $r > r(A)$. Alors il existe $m_r \geq 0$ tel que*

$$\|A^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq m_r r^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Démonstration. — Ce résultat n'est pas ici démontré. □

Définition 3.19. — *Soit $A : \mathcal{D}(A) \to X$, $\mathcal{D}(A) \subset X$ un opérateur. On définit de manière itérative l'espace $\mathcal{D}(A^n)$ par*

$$\mathcal{D}(A^n) = \{x \in \mathcal{D}(A) : Ax \in \mathcal{D}(A^{n-1})\}.$$

Notation 3.20. — On note

$$\frac{1}{\sigma(A)} = \left\{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\right\}.$$

Proposition 3.21. — *Soient $A : \mathcal{D}(A) \to X$ et $p \in \mathbb{C}[x]$ un polynôme. Alors*

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)).$$

De plus, si $0 \in \rho(A)$ (i.e. si A est inversible), alors $\sigma(A^{-1}) = \{0\} \cup \frac{1}{\sigma(A)}$ si $\mathcal{D}(A) \neq X$ et $\sigma(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma(A)}$ si $\mathcal{D}(A) = X$.

Démonstration. — Ce résultat n'est pas ici démontré. □

Corollaire 3.1. — *Soient $A : \mathcal{D}(A) \to X$, $\mathcal{D} \subset X$ et $\lambda, s \in \mathbb{C}$ avec $\lambda \neq s$ et $s \in \rho(A)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

$$\begin{aligned} &(a) \quad \lambda \in \sigma(A) \\ &(b) \quad \frac{1}{s - \lambda} \in \sigma(R(s, A)). \end{aligned}$$

Démonstration. — On sait que $s \in \rho(A)$. Cela signifie que $sI - A$ est inversible et $(sI - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, mais aussi que $0 - (sI - A)$ est inversible et $[0 - (sI - A)]^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, et donc $0 \in \rho(sI - A)$. La proposition 3.21 donne donc une nouvelle expression du spectre de $(sI - A)^{-1}$ (en remarquant que $\mathcal{D}(sI - A) = \mathcal{D}(A)$)

$$\sigma((sI - A)^{-1}) = \begin{cases} \{0\} \cup \frac{1}{\sigma(sI - A)} & \text{si } \mathcal{D}(A) \neq X \\ \frac{1}{\sigma(sI - A)} & \text{si } \mathcal{D}(A) = X. \end{cases}$$

Montrons maintenant l'équivalence. Soit $\lambda \in \sigma(A)$ (alors nécessairement $\lambda \neq s$). Par définition du spectre, $\lambda I - A$ n'est pas inversible ou est d'inverse non borné. Cela est équivalent à dire que $-(\lambda I - A)$ n'est pas inversible (car $\lambda I - A$

est inversible si et seulement si $-(\lambda I - A)$ est inversible) ou est d'inverse non borné (car $\|\lambda I - A\|_{\mathcal{L}(X)} = \| - (\lambda I - A)\|_{\mathcal{L}(X)}$). Or on peut réécrire

$$-(\lambda I - A) = sI - \lambda I - sI + A = (s - \lambda)I - (sI - A),$$

et la dernière affirmation est donc équivalente à $s - \lambda \in \sigma(sI - A)$. Comme $s - \lambda \neq 0$, par définition de l'ensemble $\frac{1}{\sigma(sI-A)}$ on a

$$\frac{1}{s-\lambda} \in \frac{1}{\sigma(sI - A)} \quad \Longleftrightarrow \quad s - \lambda \in \sigma(sI - A).$$

Comme $\sigma((sI - A)^{-1}) \setminus \{0\} = \frac{1}{\sigma(sI-A)}$ (quelle que soit l'hypothèse faite sur $\mathcal{D}(A)$) et $\frac{1}{s-\lambda} \neq 0$, on a

$$s - \lambda \in \sigma(sI - A) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{s-\lambda} \in \sigma((sI - A)^{-1}).$$

On a bien montré que $\lambda \in \sigma(A)$ si et seulement si $\frac{1}{s-\lambda} \in \sigma((sI - A)^{-1})$. $\square$

Remarque 3.22. — Si $A \in \mathcal{L}(X)$, alors $r(A^n) = r(A)^n$. En effet, $A^n \in \mathcal{L}(X)$ et

$$r(A^n) = \max_{\lambda \in \sigma(A^n)} |\lambda|.$$

La proposition 3.21 appliquée au polynôme $x \longmapsto x^n$ donne que $\sigma(A^n) = \sigma(A)^n$. Ainsi

$$r(A^n) = \max_{\lambda \in \sigma(A)^n} |\lambda| = \max_{\mu \in \sigma(A)} |\mu^n| = \max_{\mu \in \sigma(A)} |\mu|^n = (\max_{\mu \in \sigma(A)} |\mu|)^n = r(A)^n.$$

On peut détailler l'égalité

$$\max\{|x|^n \colon x \in \sigma(A)\} = (\max\{|x| \colon x \in \sigma(A)\})^n.$$

Posons $f \colon x \longmapsto x^n$ - c'est une fonction continue et croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Comme ici A est borné, $\sigma(A)$ est un compact, et comme les fonctions $|.|$ et f sont continues, les ensembles $|\sigma(A)|$ et $f(|\sigma(A)|)$ sont compacts[(3)] ce qui justifie l'existence des $\max_{\sigma(A)}$. On va montrer "par double inégalité" que

$$\max\{f(|x|) \colon x \in \sigma(A)\} = f(\max\{|x'| : x' \in \sigma(A)\}). \tag{10}$$

Par définition du maximum on a

$$f(|x|) \leq \max\{f(|x'|) : x' \in \sigma(A)\}, \quad \forall x \in \sigma(A).$$

En particulier pour le point $x_0 \in \sigma(A)$ qui réalise le maximum de $\{|\tilde{x}| \colon \tilde{x} \in \sigma(A)\}$ on a

$$f(\max\{|\tilde{x}| \colon \tilde{x} \in \sigma(A)\}) = f(x_0) \leq \max\{f(|x'|) : x' \in \sigma(A)\},$$

(3) L'image d'un compact par une application continue est un compact.

ce qui donne la première inégalité. Toujours par définition du maximum,

$$|x| \leq \max\{|x'| : x' \in \sigma(A)\}, \quad \forall x \in \sigma(A).$$

Comme f est croissante, cela est équivalent à

$$f(|x|) \leq f(\max\{|x'| : x' \in \sigma(A)\}), \quad \forall x \in \sigma(A),$$

i.e. $\max\{f(|x|) \colon x \in \sigma(A)\} \leq f(\max\{|x'| : x' \in \sigma(A)\})$. On a donc montré (10).

Remarque 3.23. — Pour $s \in \rho(A)$, on a

$$r\big((sI - A)^{-1}\big) = \frac{1}{\min_{\lambda \in \sigma(A)} |s - \lambda|}.$$

En effet, $s \in \rho(A)$ donc $(sI - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Par définition

$$r\big((sI - A)^{-1}\big) = \max_{\mu \in \sigma((sI-A)^{-1})} |\mu|$$

Par le changement de variable $\mu = \frac{1}{s-\lambda}$, où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\lambda \neq s$

$$r\big((sI - A)^{-1}\big) = \max_{\frac{1}{s-\lambda} \in \sigma((sI-A)^{-1})} \left|\frac{1}{s - \lambda}\right|$$

D'après le corollaire 3.1, pour un tel λ, il y a équivalence entre $\frac{1}{s-\lambda} \in \sigma\big((sI - A)^{-1}\big)$ et $\lambda \in \sigma(A)$, ainsi

$$r\big((sI - A)^{-1}\big) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} \left|\frac{1}{s - \lambda}\right|,$$

que l'on peut réécrire comme

$$r\big((sI - A)^{-1}\big) = \frac{1}{\min_{\lambda \in \sigma(A)} |s - \lambda|}.$$

On peut également remarquer que comme $(sI - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, la proposition **??** donne $\|(sI - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \geq r\big((sI - A)^{-1}\big)$, et on a donc redémontré l'inégalité de la remarque 3.13 puisque

$$\|(sI - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \geq r\big((sI - A)^{-1}\big) = \frac{1}{\min_{\lambda \in \sigma(A)} |s - \lambda|}.$$

Proposition 3.24 **(Formule de Gelfand)**. — *Si $A \in \mathcal{L}(X)$, alors*

$$r(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}}.$$

Démonstration. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $A \in \mathcal{L}(X)$, on a aussi $A^n \in \mathcal{L}(X)$. Ainsi par la proposition 3.16 et la remarque 3.22 on a $\|A^n\|_{\mathcal{L}(X)} \geq r(A^n) = r(A)^n$, ce qui implique que

$$r(A) \leq \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

i.e. $r(A) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}}$, ou encore $r(A) \leq \inf_{n \geq k} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$$r(A) \leq \underbrace{\lim_{k \to \infty} \inf_{n \geq k} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}}}_{:= \liminf_{n \to \infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}}}. \tag{11}$$

D'autre part par le lemme 3.18 pour tout $r > r(A)$, il existe un réel $m_r \geq 0$ tel que

$$\|A^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq m_r r^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

ce qui implique que

$$\|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}} \leq m_r^{\frac{1}{n}} r = e^{\frac{m_r}{n}} r, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Comme $m_r \geq 0$, la suite $(e^{\frac{m_r}{n}} r)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers r (donc vers une limite finie) quand n tend vers l'infini, ce qui équivaut $\liminf_{n \to \infty} e^{\frac{m_r}{n}} r = \lim_{n \to \infty} e^{\frac{m_r}{n}} r = \limsup_{n \to \infty} e^{\frac{m_r}{n}} r$. On a donc

$$\limsup_{n \to \infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}} \overset{6.20}{\leq} \limsup_{n \to \infty} e^{\frac{m_r}{n}} r = \lim_{n \to \infty} e^{\frac{m_r}{n}} r = r, \quad \forall r > r(A).$$

Donc

$$\limsup_{n \to \infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}} \leq r, \quad \forall r > r(A), \tag{12}$$

et cela implique que

$$\limsup_{n \to \infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}} \leq r(A). \tag{13}$$

En effet, notons $c := \limsup_{n \to \infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}}$ et supposons par l'absurde que $r(A) < c$. Si on pose $r_0 = \frac{r(A)+c}{2}$, on a d'une part que $r_0 < c$, et d'autre part le fait que $r_0 > r(A)$ implique par (12) que $c \leq r_0$. Ainsi $c \leq r_0 < c$, ce qui est une contradiction.

On a donc obtenu

$$r(A) \overset{(11)}{\leq} \liminf_{n \to \infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)} \overset{\text{déf.}}{\leq} \limsup_{n \to \infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)} \overset{(13)}{\leq} r(A),$$

et par conséquent

$$r(A) = \liminf_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)} = \limsup_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)} = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|_{\mathcal{L}(X)}. \qquad \square$$

Remarque 3.25. — Soit $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X avec une borne de croissance ω_0. Alors

$$r(T(t)) = e^{\omega_0 t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{14}$$

En effet, nous avons par la formule de Gelfand (3.24) que

$$r(T(t)) = \lim_{n\to\infty} \|T(t)^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}}$$

pour tout $t \geq 0$. Il en suit que

$$\begin{aligned}\ln r(T(t)) &= \ln \lim_{n\to\infty} \|T(t)^n\|_{\mathcal{L}(X)}^{\frac{1}{n}} \overset{\ln\in C(\mathbb{R}^+)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \|T(t)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \|T(nt)\|_{\mathcal{L}(X)} = t \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \ln \|T(\tau)\|_{\mathcal{L}(X)} \overset{2.7\,(a)}{=} t\omega_0,\end{aligned}$$

pour tout $t \geq 0$, ce qui prouve (14).

Définition 3.26. — *Soient $A : \mathcal{D}(A) \to X$, $\mathcal{D}(A) \subset X$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. λ est une valeur propre de A s'il existe $x_\lambda \in \mathcal{D}(A) \setminus \{0\}$ tel que $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$. On appelle x_λ vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. L'ensemble de toutes les valeurs propres de A*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists x_\lambda \in \mathcal{D}(A) \setminus \{0\},\ Ax_\lambda = \lambda x_\lambda\}$$

est appelé spectre ponctuel de A.

Proposition 3.27. — *Soient $A : \mathcal{D}(A) \to X$, $\mathcal{D} \subset X$ et $\lambda, s \in \mathbb{C}$ avec $\lambda \neq s$ et $s \in \rho(A)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

$$\begin{aligned}&(a) \quad \lambda \in \sigma_p(A)\\ &(b) \quad \frac{1}{s-\lambda} \in \sigma_p(R(s,A)).\end{aligned}$$

Si (a) et (b) sont vérifiées, alors les vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ sont les mêmes que les vecteurs propres de $R(s,A)$ associées à la valeur propre $\frac{1}{s-\lambda}$.

Démonstration. — Soit $\lambda \in \sigma_p(A)$, donc il existe $x_\lambda \in \mathcal{D}(A)$ non nul tel que tel que $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$. On observe que

$$sx_\lambda - Ax_\lambda - sx_\lambda = -\lambda x_\lambda$$

pour $s \in \rho(A)$, c'est-à-dire

$$(sI - A)x_\lambda = (s - \lambda)x_\lambda.$$

En appliquant $R(s, A) = (sI - A)^{-1}$ sur les deux côtés de l'égalité, cela est équivalent à

$$x_\lambda = (sI - A)^{-1}(s - \lambda)x_\lambda,$$

et par linéarité de la résolvante, nous avons

$$\frac{1}{s-\lambda}x_\lambda = (sI - A)^{-1}x_\lambda.$$

Donc l'assertion $\lambda \in \sigma_p(A)$ est équivalente à $\frac{1}{s-\lambda} \in \sigma_p(R(s, A))$. De plus, $\frac{1}{s-\lambda}$ reste associée au vecteur propre x_λ. □

4. Les résolvantes d'un générateur de semi-groupe fortement continu et l'espace $\mathcal{D}(A^\infty)$

Dans cette section, $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach X. On examine certaines propriétés des résolvantes de son générateur A. On définit l'espace $\mathcal{D}(A^\infty)$ et on montre qu'il est dense dans X.

Définition 4.1. — *Pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, on définit la transformée de Laplace de f par*

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{15}$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que cette intégrale converge absolument, c'est-à-dire

$$\int_0^\infty e^{-t\Re(s)}|f(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

Lorsque f est localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans un espace de Banach X, on substitue le module dans la condition précédente par la norme sur X. Dans ce cas, pour définir la transformée de Laplace de f on s'intéresse donc à savoir si $s \in \mathbb{C}$ est tel que

$$\int_0^\infty e^{-t\Re(s)}\|f(t)\|_X\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

Une courte présentation de la théorie de l'intégration des fonctions mesurables à valeurs dans un espace de Banach est faite dans la partie 7.

Notation 4.2. — Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on note

$$\mathbb{C}_\alpha = \{s \in \mathbb{C} \colon \Re(s) > \alpha\}.$$

Proposition 4.3. — *Soit $\mathcal{T}$ un semi-groupe fortement continu sur X, de générateur A. Alors, pour tout $s \in \mathbb{C}_{\omega_0(\mathcal{T})}$, on a $s \in \rho(A)$ (par conséquent A est fermé [4]) et*

$$(sI - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-st}T(t)x \,\mathrm{d}t, \quad \forall x \in X.$$

Démonstration. — Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > \omega_0(\mathcal{T})$. Il s'agit de montrer que pour un tel s, on peut trouver un inverse linéaire borné sur X pour $sI - A$ (et puis de l'expliciter). Pour tout $\omega_0(\mathcal{T}) < \omega < \Re(s)$ l'intégrale dans l'énoncé est absolument convergente car

$$\begin{aligned}
\Big\| \int_0^\infty e^{-st}T(t)x \,\mathrm{d}t\Big\|_X &\leq \int_0^\infty e^{-\Re(s)t}\|T(t)x\|_X \,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^\infty e^{-\Re(s)t}\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_X \,\mathrm{d}t \\
&\leq \Big(M_\omega \int_0^\infty e^{-t(\Re(s)-\omega)} \,\mathrm{d}t\Big)\|x\|_X,
\end{aligned}$$

et $\Re(s) - \omega > 0$. Ainsi l'opérateur $R(s, A) : x \longmapsto \int_0^\infty e^{-st}T(t)x \,\mathrm{d}t$ est linéaire (par linéarité de l'intégrale et du semi-groupe) et borné sur X. Montrons qu'il est bien l'inverse de $sI - A$. Dans un premier temps, soient $h > 0$ et $x \in X$ quelconques. On a

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h}R(s, A)x &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-st}T(t + h)x \,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-st}T(t)x \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-s(\tau-h)}T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-st}T(t)x \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{e^{sh}}{h}\int_h^\infty e^{-s\tau}T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau + \frac{e^{sh}}{h}\int_0^h e^{-st}T(t)x \,\mathrm{d}t \\
&\quad - \frac{e^{sh}}{h}\int_0^h e^{-st}T(t)x \,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-st}T(t)x \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{e^{sh} - 1}{h}\int_0^\infty e^{-st}T(t)x \,\mathrm{d}t - \frac{e^{sh}}{h}\int_0^h e^{-st}T(t)x \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Comme exp est dérivable en 0,

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{sh} - 1}{h} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}e^{sh}\Big|_{h=0} = s,$$

[4] Car dans ce cas, son ensemble résolvant est non vide et on applique la remarque 3.9.

et comme la fonction $t \longmapsto e^{-st}T(t)x$ est continue de $\mathbb{R}_+$ dans X, un argument similaire à celui utilisé pour la proposition 2.12 donne

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h e^{-st}T(t)x\,\mathrm{d}t = e^{-s0}T(0)x = x. \tag{16}$$

En prenant la limite quand h tend vers 0, on déduit (par les calculs qui précedent) que

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(h)-I}{h} R(s,A)x = sR(s,A)x - x, \tag{17}$$

ce qui implique que $R(s,A)x \in \mathcal{D}(A)$ (car la partie droite de l'égalité est dans X) et

$$AR(s,A)x = \lim_{h\to 0} \frac{T(h)-I}{h} R(s,A)x.$$

En réarrangeant les termes dans (17), on déduit que $(sI - A)R(s,A)x = x$ et donc $R(s,A)$ est bien un inverse à droite de $sI - A$. Soit maintenant $x \in \mathcal{D}(A)$. $\mathcal{T}$ et $R(s,A)$ commutent, car pour $u \geq 0$ et $x \in X$, $T(u)x \in X$ et

$$\begin{aligned} R(s,A)T(u)x &= \int_0^\infty e^{-st}T(t)T(u)x\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st}T(u)T(t)x\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty T(u)e^{-st}T(t)x\,\mathrm{d}t = T(u)\int_0^\infty e^{-st}T(t)x\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

et donc nous obtenons d'une manière similaire au calcul précédent que pour un $h > 0$ quelconque,

$$R(s,A)\frac{T(h)-I}{h}x = \frac{e^{sh}-1}{h}R(s,A) - \frac{e^{sh}}{h}\int_0^h e^{-st}T(t)x\,\mathrm{d}t. \tag{18}$$

En passant à la limite quand h tend vers 0 dans (18), nous avons

$$R(s,A)\lim_{h\to 0}\frac{T(h)-I}{h}x = sR(s,A)x - x.$$

En effet, en partant de (17), nous avons

$$\begin{aligned} sR(s,A)x - x &= \lim_{h\to 0}\frac{T(h)-I}{h}R(s,A)x \\ &= \lim_{h\to 0} R(s,A)\frac{T(h)-I}{h}x \\ &= R(s,A)\lim_{h\to 0}\frac{T(h)-I}{h}x, \end{aligned}$$

par continuité de la résolvante. Ayant pris $x \in \mathcal{D}(A)$, on peut conclure que $R(s,A)Ax = sR(s,A)x - x$, c'est-à-dire $R(s,A)(sI - A)x = x$ (par linéarité de $R(s,A)$). Ainsi $R(s,A)$ est un inverse à gauche de $sI - A$. Donc $s \in \rho(A)$ et $R(s,A) = (sI - A)^{-1}$. □

Remarque 4.4. — On peut donc conclure que le générateur d'un semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach est un opérateur fermé.

Remarque 4.5. — Cette proposition montre que $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ est uniquement déterminé par son générateur A. En effet, si on note par ξ_x l'application qui à $t \in \mathbb{R}_+$ associe $T(t)x$ pour $x \in X$ quelconque, nous avons par la proposition précédente que

$$(sI - A)^{-1}x = (\mathcal{L}\xi_x)(s), \quad \forall s \in \mathbb{C}_{\omega_0(\mathcal{T})}.$$

Comme ξ_x est continue sur $\mathbb{R}_+$ par la proposition 2.7 (c), la formule de Post-Widder affirme qu'elle est uniquement déterminé par sa transformée de Laplace.

Corollaire 4.1. — *Soit $\mathcal{T}$ un semi-groupe fortement continu sur X, de générateur A. Soient ω et M_ω vérifiant le point* (2) *de la proposition 2.7, Alors*

$$\|(sI - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_\omega}{\Re(s) - \omega}, \quad \forall s \in \mathbb{C}_\omega.$$

Démonstration. — Soit $x \in X$ quelconque et $s \in \mathbb{C}_\omega$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\|(sI - A)^{-1}x\|_X &\overset{4.3}{=} \Big\| \int_0^\infty e^{-st}T(t)x \,\mathrm{d}t\Big\|_X \\
&\leq \int_0^\infty e^{-\Re(s)t}\|T(t)x\|_X \,\mathrm{d}t \\
&\leq M_\omega\Big(\int_0^\infty e^{-t(\Re(s)-\omega)} \,\mathrm{d}t\Big)\|x\|_X \\
&= \Big(\frac{M_\omega}{\Re(s) - \omega}\Big)\|x\|_X.
\end{aligned}$$

Ayant pris $x \in X$ quelconque, en passant au supremum sur tout les $x \in X$ dans l'inégalité on déduit le résultat souhaité. $\square$

Remarque 4.6. — La proposition 2.7 garantit l'existence de tels ω et M_ω.

On a souvent besoin d'approcher des élément de X par des éléments de $\mathcal{D}(A)$ d'une façon naturelle. La proposition 2.12 donne une façon de faire cela. Une autre manière est donnée par la proposition suivante.

Proposition 4.7. — *Supposons que $\mathcal{D}(A)$ est un sous-espace dense de X et supposons que $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow X$ est tel qu'il existe $\lambda_0 \geq 0$ et $m > 0$ tels que $]\lambda_0, +\infty[\subset \rho(A)$ et*

$$\|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq m, \quad \forall \lambda > \lambda_0. \tag{19}$$

Alors on a

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(\lambda I - A)^{-1}x = x, \quad \forall x \in X. \tag{20}$$

Démonstration. — Soient $\psi \in \mathcal{D}(A)$ et $\lambda > \lambda_0$. Nous avons

$$\lambda(\lambda I - A)^{-1}\psi = (\lambda I - A)^{-1}(\lambda\psi - A\psi + A\psi) = (\lambda I - A)^{-1}A\psi + \psi$$

par linéarité de $(\lambda I - A)^{-1}$. De plus,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}A\psi\|_X \overset{(19)}{\leq} \frac{m}{\lambda}\|A\psi\|_X \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$$

car $\|A\psi\|_X < +\infty$ et donc (20) tient pour tout $\psi \in \mathcal{D}(A)$. Maintenant soient $x \in X$ et $\varepsilon > 0$ petit, et choisissons $\psi \in \mathcal{D}(A)$ de sorte que $\|\psi - x\|_X < \varepsilon$ (on a le droit de choisir un tel ψ car $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X). Il en suit que

$$\begin{aligned}\|\lambda(\lambda I - A)^{-1}x - x\|_X &\leq \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}x - \lambda(\lambda I - A)^{-1}\psi\|_X \\ &\quad + \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\psi - \psi\|_X + \|\psi - x\|_X \\ &\overset{(19)}{\leq} (m+1)\|x - \psi\|_X + \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\psi - \psi\|_X.\end{aligned}$$

Ayant rendu arbitrairement petit le premier terme (à droite) de l'inégalité, et ayant montré que (20) tient pour tout $\psi \in \mathcal{D}(A)$, la preuve est close en choisissant λ suffisamment grand. □

Remarque 4.8. — Si A est le générateur d'un semi-groupe fortement continu sur X, alors A satisfait les hypothèses de cette proposition. En effet, le corollaire 4.1 donne l'inégalité

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_\omega}{\Re(\lambda) - \omega} = \frac{M_\omega}{\lambda - \omega},$$

pour λ un réel strictement positif. Cela est équivalent à

$$\|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_\omega}{1 - \frac{\omega}{\lambda}},$$

et en choisissant λ_0 suffisamment grand, par exemple $\lambda_0 = \frac{\omega}{2}$, on obtient pour tout $\lambda > \lambda_0$

$$\frac{\omega}{\lambda} < \frac{1}{2} \iff 1 - \frac{\omega}{\lambda} < \frac{1}{2} \iff \frac{1}{1 - \frac{\omega}{\lambda}} < 2.$$

Ainsi pour tout $\lambda > \lambda_0$, $\|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq m$, avec $m = 2M_\omega > 0$.

Notation 4.9. — Pour une application x, on note $x \in E(I; X)$ pour dire que x à la propriété de l'espace E sur I et est à valeurs dans X. Par exemple, pour dire que x est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, on notera $x \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{C})$.

Proposition 4.10. — *Soient $\mathcal{T} = ((T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X de générateur A, et $x_0 \in \mathcal{D}(A)$. Considérons la fonction $x : t \mapsto T(t)x_0$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{D}(A)$. Alors $x \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A))$ si on munit $\mathcal{D}(A)$ de la norme du graphe, et on a de plus $x \in C^1(\mathbb{R}_+; X)$.*

De plus, x est l'unique fonction qui vérifie la régularité énoncée et qui est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Au(t), \quad \forall t \geq 0 \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \tag{21}$$

Démonstration. — Il s'agit dans un premier temps de montrer que pour tout $t_0 \geq 0$,

$$\|x(t) - x(t_0)\|_{gr}^2 \xrightarrow[t\to t_0]{} 0. \tag{22}$$

Par la proposition 2.7 (c), x est continue de $\mathbb{R}_+$ dans X pour tout $x_0 \in X$, donc $\|x(t) - x(t_0)\|_X \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$. De plus, puisque

$$Ax(t) = AT(t)x_0 \overset{2.11}{=} T(t)Ax_0,$$

et comme $Ax_0 \in X$, Ax est aussi continue de $\mathbb{R}_+$ dans X par la proposition 2.7 (c), donc $\|Ax(t) - Ax(t_0)\|_X \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$. Grâce au ces deux observations,

$$\|x(t) - x(t_0)\|_{gr}^2 = \|x(t) - x(t_0)\|_X^2 + \|Ax(t) - Ax(t_0)\|_X^2 \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$$

et on déduit (22). Ainsi $x \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A))$.

Dans un second temps, par la proposition 2.11 $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Nous avons par construction que $x(0) = T(0)x_0 = x_0$, et comme $Ax \in C(\mathbb{R}_+; X)$, on a $\dot{x} \in C(\mathbb{R}_+; X)$, c'est-à-dire $x \in C^1(\mathbb{R}_+; X)$.

Il nous reste à montrer que x est l'unique fonction ayant ces propriétés. Soit $z : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{D}(A)$, telle que $z \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A)) \cap C^1(\mathbb{R}_+; X)$ et $\dot{z}(t) = Az(t)$, $z(0) = x_0$. Soit $t \geq 0$ quelconque. Pour tout $\tau \in [0, t]$, nous avons

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\big(T(t-\tau)z(\tau)\big) = T(t-\tau)Az(\tau) - T(t-\tau)Az(\tau) = 0$$

puisque A et $\mathcal{T}$ commutent. Ainsi, la fonction $\tau \mapsto T(t-\tau)z(\tau)$ est constante. Par conséquent,

$$z(t) = T(t-t)z(t) = T(t-0)z(0) = T(t)x_0 = x(t)$$

ce qui clos la démonstration. □

Cette proposition nous permet de dire qu'il existe une unique solution classique du problème de Cauchy homogène (21) : elle est donnée par le semi-groupe fortement continu généré par l'opérateur agissant dans l'équation.

Lemme 4.11. — *Pour tout $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $T(t)\mathcal{D}(A^n) \subset \mathcal{D}(A^n)$.*

Démonstration. — On procède par récurrence. Nous avons déjà établi le cas $n = 1$ dans la proposition 2.11. Supposons que $T(t)\mathcal{D}(A^n) \subset \mathcal{D}(A^n)$ et montrons que cela tient au rang $n+1$. Soit $x \in \mathcal{D}(A^{n+1})$, c'est-à-dire $x \in \mathcal{D}(A)$ est tel que $Ax \in \mathcal{D}(A^n)$, et montrons que $T(t)x \in \mathcal{D}(A^{n+1})$, c'est-à-dire $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et $A(T(t)x) \in \mathcal{D}(A^n)$. Par la proposition 2.11, $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ (car $\mathcal{D}(A^n) \subset \mathcal{D}(A)$). Il nous reste à montrer que $A(T(t)x) \in \mathcal{D}(A^n)$. Comme $AT(t)x = T(t)Ax$ par la proposition 2.11, en utilisant le fait que $Ax \in \mathcal{D}(A^n)$ on conclut par hérédité. □

On peut remarquer que les espaces $\mathcal{D}(A^n)$ sont emboîtés, c'est-à-dire $\mathcal{D}(A^n) \subset \mathcal{D}(A^k)$ quand $k \leq n$. On définit l'espace

$$\mathcal{D}(A^\infty) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{D}(A^n)$$

et on montre le résultat de densité suivant.

Proposition 4.12. — *Soit A le générateur d'un semi-groupe fortement continu sur X. Alors $\mathcal{D}(A^\infty)$ est dense dans X.*

Notation 4.13. — Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Nous notons par $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ l'espace des fonctions infiniment dérivables à support compact, c'est-à-dire

$$\mathcal{D}(\mathcal{O}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathcal{O}) \colon \exists \mathcal{K} \subset \mathcal{O} \text{ compact, } \mathit{supp}\varphi \subset \mathcal{K}\}.$$

Cet espace se note aussi $C_c^\infty(\mathcal{O})$.

Démonstration. — Commençons par introduire les notations. Notons $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe fortement continu généré par A. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$ on définit de X dans lui-même, l'opérateur

$$\mathcal{I}_\varphi : x_0 \longmapsto \int_0^1 \varphi(t)T(t)x_0 \,\mathrm{d}t.$$

Pour simplifier la notation, on considère pour $x_0 \in X$ la fonction $x : t \mapsto T(t)x_0$ de $\mathbb{R}_+$ dans X (définie dans la proposition précédente).

On peut montrer que $\mathcal{I}_\varphi$ est un opérateur linéaire borné sur X. En effet, la linéarité provient de la linéarité de l'intégrale et de l'opérateur $T(t), t \geq 0$. Quant à la bornétude, on observe que pour $x_0 \in X$,

$$\|\mathcal{I}_\varphi x_0\|_X \leq \underbrace{\sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t)| \sup_{t\in[0,1]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}_{<+\infty} \|x_0\|_X,$$

par la continuité de φ sur le compact $[0,1]$ et par le lemme 2.6.

Nous allons d'abord travailler avec des éléments $x_0 \in \mathcal{D}(A)$. Pour $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$, nous avons

$$\begin{aligned}\Big\| \int_0^1 \varphi(t)x(t)\,\mathrm{d}t\Big\|_{gr}^2 &= \Big\| \int_0^1 \varphi(t)x(t)\,\mathrm{d}t\Big\|_X^2 + \Big\|A\int_0^1 \varphi(t)x(t)\,\mathrm{d}t\Big\|_X^2\\ &= \Big\| \int_0^1 \varphi(t)x(t)\,\mathrm{d}t\Big\|_X^2 + \Big\| \int_0^1 \varphi(t)\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t\Big\|_X^2\\ &\leq \big(\sup_{t\in[0,1]}|\varphi(t)| \sup_{t\in[0,1]}\|x(t)\|_X\big)^2 + \big(\sup_{t\in[0,1]}|\varphi(t)| \sup_{t\in[0,1]}\|\dot{x}(t)\|_X\big)^2\\ &< +\infty,\end{aligned}$$

car $\varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$ et x, $\dot{x}$ sont continues sur $[0,1]$ d'après la proposition précédente. Cela prouve que $\mathcal{I}_\varphi x_0$ peut être considéré comme une intégrale sur $\mathcal{D}(A)$ ($\mathcal{I}_\varphi x_0$ est une intégrale qui converge absolument dans $\mathcal{D}(A)$), et aussi que $\mathcal{I}_\varphi x_0 \in \mathcal{D}(A)$ (car $A\mathcal{I}_\varphi x_0$ existe). On peut réécrire $A\mathcal{I}_\varphi x_0$ de la façon suivante

$$\begin{aligned}A\mathcal{I}_\varphi x_0 = A\int_0^1 \varphi(t)T(t)x_0\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \varphi(t)AT(t)x_0\,\mathrm{d}t\\ \overset{2.11}{=} \int_0^1 \varphi(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)x_0\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \varphi(t)\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

De plus, en intégrant par parties (les fonctions φ et x sont continûment dérivables sur $]0,1[$) nous avons

$$A\mathcal{I}_\varphi x_0 = \int_0^1 \varphi(t)\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\varphi(t)x(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 \varphi'(t)x(t)\,\mathrm{d}t = -\mathcal{I}_{\varphi'}x_0,$$

pour tout $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, car le support de φ est inclus dans un compact dans $]0,1[$. Or comme $\varphi' \in \mathcal{D}(]0,1[)$, $\mathcal{I}_{\varphi'}$ est un opérateur linéaire borné sur X, et donc $-\mathcal{I}_{\varphi'}$ aussi. Ainsi,

$$\|A\mathcal{I}_\varphi x_0\|_X = \|-\mathcal{I}_{\varphi'}x_0\|_X \leq \|-\mathcal{I}_{\varphi'}\|_{\mathcal{L}(X)}\|x_0\|_X, \quad \forall x_0 \in \mathcal{D}(A).$$

Comme $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X (par la proposition 2.1), $A\mathcal{I}_\varphi$ a un unique prolongement linéaire borné $\widetilde{A\mathcal{I}_\varphi}$ sur X. Comme ce prolongement est unique, $\widetilde{A\mathcal{I}_\varphi} = -\mathcal{I}\varphi'$ sur X. On a donc montré que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$,

$$\mathcal{I}_\varphi x_0 \in \mathcal{D}(A), \quad \forall x_0 \in \mathcal{D}(A),$$

et

$$\exists\ \widetilde{A\mathcal{I}_\varphi} \in \mathcal{L}(X) \text{ tel que } \widetilde{A\mathcal{I}_\varphi}\Big|_{\mathcal{D}(A)} = A\mathcal{I}_\varphi, \quad \text{où } \widetilde{A\mathcal{I}_\varphi} = -\mathcal{I}_{\varphi'}.$$

Maintenant travaillons avec des éléments $x_0 \in X$. Prenons $\varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$ et $x_0 \in X$ quelconques, par densité de $\mathcal{D}(A)$ dans X (proposition 2.1) il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ qui converge dans X vers x_0. On a déjà vu que

$(\mathcal{I}_\varphi x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$, car $x_n \in \mathcal{D}(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, comme $\widetilde{A\mathcal{I}_\varphi}$ et $\mathcal{I}_\varphi$ sont continues de X dans X,

$$\mathcal{I}_\varphi x_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} \mathcal{I}_\varphi x_0$$

et

$$A\mathcal{I}_\varphi x_n = \widetilde{A\mathcal{I}_\varphi} x_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} \widetilde{A\mathcal{I}_\varphi} x_0.$$

Ainsi la suite

$$\Big((\mathcal{I}\varphi x_n, A\mathcal{I}_\varphi x_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}(A)$$

converge dans $X\times X$ vers $(\mathcal{I}_\varphi x_0, \widetilde{A\mathcal{I}_\varphi} x_0)$. Comme A est fermé (par la remarque 4.4), $\mathcal{I}_\varphi x_0 \in \mathcal{D}(A)$ et $A\mathcal{I}_\varphi x_0 = \widetilde{A\mathcal{I}_\varphi} x_0 = -\mathcal{I}_{\varphi'} x_0$. On a donc montré que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$

$$\mathcal{I}_\varphi x_0 \in \mathcal{D}(A), \quad \forall x_0 \in X \qquad \text{et} \qquad A\mathcal{I}_\varphi x_0 = -\mathcal{I}_{\varphi'} x_0, \quad \forall x_0 \in X.$$

Grâce à cela, on va pouvoir obtenir l'inclusion

$$\operatorname{Im}(\mathcal{I}_\varphi) \subset \mathcal{D}(A^\infty). \tag{23}$$

Soit $x_0 \in X$, montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $\varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$ alors $\mathcal{I}_\varphi x_0 \in \mathcal{D}(A^n)$. On a vu précédemment que si $\varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$ alors $\mathcal{I}_\varphi x_0 \in \mathcal{D}(A)$, ainsi le cas $k = 1$ est vrai. Supposons maintenant que si $\varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$ alors $\mathcal{I}_\varphi x_0 \in \mathcal{D}(A^k)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$, prouvons que $\mathcal{I}_\varphi x_0 \in \mathcal{D}(A^{n+1}) = \{z \in \mathcal{D}(A) \colon Az \in \mathcal{D}(A^n)\}$. On sait déjà que $\mathcal{I}_\varphi x_0 \in \mathcal{D}(A)$, il reste donc à voir que $A\mathcal{I}_\varphi x_0 \in \mathcal{D}(A^n)$. L'identité démontrée plus haut donne

$$A\mathcal{I}_\varphi x_0 = -\mathcal{I}_{\varphi'} x_0 = \mathcal{I}_{-\varphi'} x_0.$$

Or l'hypothèse de récurrence implique que $\mathcal{I}_{-\varphi'} x_0 \in \mathcal{D}(A^k)$ puisque $-\varphi' \in \mathcal{D}(]0,1[)$. Ainsi, $A\mathcal{I}_\varphi x_0 \in \mathcal{D}(A^n)$. Donc (23) est démontré.

Pour finir, pour tout réel $\tau \in]0,1[$, on définit la fonction $\psi_\tau \in L^2(]0,1[)$

$$\psi_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \text{si } t \in]0,\tau[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

i.e. $\psi_\tau : t \longmapsto \frac{1}{\tau}\chi_{]0,\tau[}(t)$. De la même façon que pour des fonctions de $\mathcal{D}(]0,1[)$, on définit de X dans X l'opérateur

$$\mathcal{I}_{\psi_\tau} : x_0 \longmapsto \int_0^1 \psi_\tau(t) T(t) x_0 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau T(t) x_0 \,\mathrm{d}t.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in X$. On sait d'après la proposition 2.12 que $\mathcal{I}_{\psi_\tau} x_0 \xrightarrow[\tau\to 0]{} x_0$ dans X. Par conséquent il existe un certain $\tilde{\tau} > 0$ (ne dépendant que du choix de ε et de x_0) tel que $\|\mathcal{I}_{\psi_{\tilde{\tau}}} x_0 - x_0\|_X \le \varepsilon$. Par ailleurs, comme $\mathcal{D}(]0,1[)$ est dense dans $L^2(]0,1[)$ et $\psi_{\tilde{\tau}} \in L^2(]0,1[)$, il existe une fonction $f \in \mathcal{D}(]0,1[)$ (elle ne dépend aussi que de ε et x_0) telle que $\|\psi_{\tilde{\tau}} - f\|_{L^2(]0,1[)} \leq \varepsilon$. Or on sait maintenant que $\mathcal{I}_f x_0 \in \mathcal{D}(A^\infty)$ et de plus

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{I}_f x_0 - x_0\|_X &\leq \|\mathcal{I}_f x_0 - \mathcal{I}_{\psi_{\tilde{\tau}}} x_0\|_X + \|\mathcal{I}_{\psi_{\tilde{\tau}}} x_0 - x_0\|_X \\
&= \Big\| \int_0^1 [f(t) - \psi_{\tilde{\tau}}(t)] T(t) x_0 \,\mathrm{d}t \Big\|_X + \|\mathcal{I}_{\psi_{\tilde{\tau}}} x_0 - x_0\|_X \\
&\leq \int_0^1 |f(t) - \psi_{\tilde{\tau}}(t)| \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x_0\|_X \,\mathrm{d}t + \|\mathcal{I}_{\psi_{\tilde{\tau}}} x_0 - x_0\|_X \\
&\leq \sup_{u \in [0,1]} \|T(u)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x_0\|_X \int_0^1 |f(t) - \psi_{\tilde{\tau}}(t)| \,\mathrm{d}t + \|\mathcal{I}_{\psi_{\tilde{\tau}}} x_0 - x_0\|_X \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sup_{u \in [0,1]} \|T(u)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x_0\|_X \|f - \psi_{\tilde{\tau}}\|_{L^2} + \|\mathcal{I}_{\psi_{\tilde{\tau}}} x_0 - x_0\|_X \\
&\leq \underbrace{\Big(\sup_{u \in [0,1]} \|T(u)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x_0\|_X + 1 \Big)}_{<+\infty} \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x_0 \in X$, il existe un élément $\mathcal{I}_f x_0 \in \mathcal{D}(A^\infty)$ tel que $\|\mathcal{I}_f x_0 - x_0\|_X \leq \varepsilon$.

□

Définition 4.14. — *Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute collection finie d'intervalles disjoints $(a_k, b_k)_{k=1\ldots n}$ de $[a,b]$,*

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \leq \delta \Longrightarrow \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| \leq \varepsilon.$$

Définition 4.15. — *Soient $]a,b[\subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et X un espace de Banach. L'espace de Sobolev $H^1(]a,b[;X)$ consiste des fonctions $f :]a,b[\to X$ absolument continues telles que $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \in L^2(]a,b[;X)$.*

***Exemple 4.16* (Semi-groupe shift gauche)**. — Soit $X = L^2(\mathbb{R}_+)$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $f \in X$, définissons

$$T(t)f : x \longmapsto f(x+t)$$

de $\mathbb{R}_+$ dans X. On peut tout d'abord remarquer que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ pour tout $t \geq 0$. En effet, on observe que pour tout $f \in X$ et $t \geq 0$,

$$\|T(t)f\|_X^2 = \int_0^\infty |f(x+t)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_t^\infty |f(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \leq \|f\|_X^2,$$

et par conséquent $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$. Démontrons que $\mathcal{T} = (T(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu. Soient $f \in X$ et $x \in \mathbb{R}_+$ quelconques. Nous avons tout d'abord

$$T(0)f(x) = f(x+0) = f(x),$$

et donc $T(0) = I$ (plus précisément I_X). Pour $t, s \geq 0$, on a aussi

$$T(t+s)f(x) = f((x+s)+t) = T(t)f(x+s) = T(t)T(s)f(x),$$

ce qui implique que $T(t+s) = T(t)T(s)$. Il nous reste à montrer la forte continuité, donc montrer que

$$\int_0^\infty |T(t)f(x) - f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \underset{t\downarrow 0}{\longrightarrow} 0, \quad \forall f \in X.$$

Nous allons raisonner par densité. Soit $\psi \in X \cap C_c^1(\mathbb{R}_+)$ quelconque (ψ est donc à support compact, c'est-à-dire il existe $\xi \geq 0$ tel que $\psi(x) = 0$ pour tout $x \geq \xi$). Nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |T(t)\psi(x) - \psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x &= \int_0^\infty |\psi(x+t) - \psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^\xi |\psi(x+t) - \psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x \\ &\leq \xi \sup_{x\in[0,\xi]} |\psi(x+t) - \psi(x)|^2.\end{aligned}$$

Par le théorème de Heine[(5)], ψ est uniformément continue sur $[0, \xi]$ et donc le dernier terme de l'inégalité tend vers 0 quand $t \downarrow 0$ [(6)]. En utilisant la densité de $X \cap C_c^1(\mathbb{R}_+)$ dans X, pour $\varepsilon > 0$ et $f \in X$ arbitraires, on peut choisir $\psi \in X \cap C_c^1(\mathbb{R}_+)$ de sorte que $\|\psi - f\|_X < \varepsilon$. Il en suit que en choisissant t suffisamment petit (de sorte que $\|T(t)\psi - \psi\|_X < \varepsilon$),

$$\begin{aligned}\|T(t)f - f\|_X &\leq \|T(t)f - T(t)\psi\|_X + \|T(t)\psi - \psi\|_X + \|\psi - f\|_X \\ &\leq \underbrace{\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}_{\leq 1} \|f - \psi\|_X + \|T(t)\psi - \psi\|_X + \|\psi - f\|_X \\ &\leq 3\varepsilon.\end{aligned}$$

$\mathcal{T}$ est donc un semi-groupe fortement continu sur X.

---

(5) *Théorème (Heine): Soient X un espace métrique compact et Y un espace métrique. Toute application continue de X dans Y est uniformément continue.*

(6) En effet, la définition de la continuité uniforme de f est

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists\eta > 0 \, : \, \forall x, y \in \mathbb{R}_+, \; |x-y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Cela peut se réécrire via le changement de variable $t = |y - x|$ par

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists\eta > 0 \, : \, \forall x, t \in \mathbb{R}_+, \; t \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x+t)| \leq \varepsilon,$$

ce qui est équivalent à

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists\eta > 0 \, : \, \forall t \in \mathbb{R}_+, \; t \leq \eta \Longrightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f(x) - f(x+t)| \leq \varepsilon.$$

Essayons maintenant d'expliciter le générateur de $\mathcal{T}$. Dans un premier temps, puisque $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ pour tout $t \geq 0$, on a $\ln \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 0$ et par conséquent $\omega_0(\mathcal{T}) \leq 0$. Cela nous permet de dire que $1 \in \rho(A)$ (puisque d'après la proposition 4.3 nous avons $\mathbb{C}_0 \subset \rho(A)$) et pour tout $f \in X$,

$$[(I-A)^{-1}f](x) = \int_0^\infty e^{-t} f(x+t)\,\mathrm{d}t = e^x \int_x^\infty e^{-\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}_+$. Notons $\varphi := [(I-A)^{-1}f]$, on peut montrer que φ est continue (Appendice, Proposition 6.21) sur $\mathbb{R}_+$ et donc l'égalité est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. On réécrit l'expression de φ

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= e^x \int_0^\infty e^{-\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi - e^x \int_0^x e^{-\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= e^x \varphi(0) - \int_0^x e^{x-\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \end{aligned} \tag{24}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Cela montre que φ est localement absolument continue et

$$\varphi'(x) = \varphi(x) - f(x) \tag{25}$$

pour presque tout $x \geq 0$ [(7)]. Puisque $f \in X$ (par hypothèse) et $\varphi \in X$ (car $(I-A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$), il en suit que $\varphi' \in X$, et donc $\varphi \in H^1(\mathbb{R}_+)$. Cela montre que $\mathcal{D}(A) \subset H^1(\mathbb{R}_+)$. Puisque $\varphi = (I-A)^{-1}f$, nous avons $A\varphi = \varphi - f$, et en comparant avec (25), il en suit que

$$A\varphi = \varphi', \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A).$$

Démontrons que $\mathcal{D}(A) = H^1(\mathbb{R}_+)$. Supposons par l'absurde que l'inclusion $\mathcal{D}(A) \subset H^1(\mathbb{R}_+)$ est stricte. Cela veut dire qu'il existe $\psi \in H^1(\mathbb{R}_+)$ tel que $\psi \notin \mathcal{D}(A)$. Posons $f = \psi - \psi'$ et $\varphi = (I-A)^{-1}f$. Alors $f \in X$ et $\varphi \in \mathcal{D}(A)$, donc on peut appliquer $(I-A)$ dans la définition de φ pour obtenir $\varphi - \varphi' = f$. Si on note $\eta = \psi - \varphi$, on a $\eta \in H^1(\mathbb{R}_+)$ (car $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ et $\psi \in H^1(\mathbb{R}_+)$) et $\eta' = \eta$. Puisque $c\exp \notin H^1(\mathbb{R}_+)$ pour $c \neq 0$, on a nécessairement $c = 0$ et donc $\eta = 0$. Ainsi $\varphi = \psi$ et $\psi \in \mathcal{D}(A)$, ce qui est une contradiction. Donc

$$\mathcal{D}(A) = H^1(\mathbb{R}_+).$$

---

(7) En effet, fixons $b \in \mathbb{R}_+^*$ et définissons les fonctions $g : \xi \mapsto e^{x-\xi}\varphi(\xi)$ et $h : \xi \mapsto -e^{x-\xi}f(\xi)$. On observe que l'équation (24) est équivalente à

$$g(x) - g(0) = \int_0^x h(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad \forall x \in [0,b].$$

Comme $h \in L^1([0,b])$, cela montre que g est absolument continue sur $[0,b]$ (car la fonction exp est absolument continue sur $[0,b]$ et le produit de deux fonctions absolument continues est une fonction absolument continue). Donc φ est absolument continue sur $[0,b]$. De plus $h = g'$ presque partout, ainsi

$$-e^{x-\xi}f(\xi) = -e^{x-\xi}\varphi(\xi) + e^{x-\xi}\varphi'(\xi) \iff \varphi'(\xi) = \varphi(\xi) - f(\xi).$$

étudions le spectre de A. Rappelons que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A s'il existe $x_\lambda \in \mathcal{D}(A) \setminus \{0\}$ telle que $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$ (c'est-à-dire l'opérateur $\lambda I - A$ n'est pas injectif). En utilisant l'expression de A on peut déduire que le demi-plan ouvert $\{\lambda \in \mathbb{C}\colon \Re(\lambda) < 0\}$ est inclus dans $\sigma_p(A)$ (l'ensemble des valeurs propres de A). En effet pour $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(\lambda) < 0$,

$$Af = \lambda f \iff f' = \lambda f.$$

Il existe bien une solution non nulle à cette équation qui appartient à $\mathcal{D}(A) = H^1(\mathbb{R}_+)$, c'est par exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_\lambda(\xi) = e^{\lambda\xi}$. Comme $\sigma(A)$ est fermé et $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$, le demi-plan fermé $\{\lambda \in \mathbb{C}\colon \Re(\lambda) \leq 0\}$ est inclus dans $\sigma(A)$ (et par contraposée $\rho(A) \subset \mathbb{C}_0$). Finalement, puisque $\mathbb{C}_0 \subset \rho(A)$, on a

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \Re(\lambda) \leq 0\}.$$

***Exemple 4.17* (Semi-groupe de la chaleur).** — Soit $X = L^2(\mathbb{R})$ et pour tout $t > 0$ et $f \in X$ définissons

$$T(t)f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\sigma)^2}{4t}} f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$$

de $\mathbb{R}$ dans X.

On pose $T(0) = I$. Nous allons montrer que $\mathcal{T}$ est un semi-groupe fortement continu sur X. En appliquant, pour tout $t \geq 0$, la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ (en espace) à la définition de $\mathcal{T}$, on obtient

$$(\mathcal{F}T(t)f)(\xi) = e^{-\xi^2 t}(\mathcal{F}f)(\xi), \tag{26}$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$. Cette équation nous permet de vérifier que $(T(t))_{t\geq 0}$ est bien un semi-groupe. Pour tout $s, t \geq 0$,

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}T(s+t)f)(\xi) &\overset{(26)}{=} e^{-\xi^2(s+t)}(\mathcal{F}f)(\xi) = e^{-\xi^2 s}e^{-\xi^2 t}(\mathcal{F}f)(\xi)\\ &\overset{(26)}{=} e^{-\xi^2 s}(\mathcal{F}T(t)f)(\xi)\\ &\overset{(26)}{=} (\mathcal{F}T(s)T(t)f)(\xi),\end{aligned}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et $f \in X$. En appliquant la transformée de Fourier inverse, nous avons

$$(T(s+t)f)(x) = (T(s)T(t)f)(x).$$

Il reste à montrer la forte continuité du semi-groupe, c'est-à-dire montrer que pour tout $f \in X$,

$$\int_{\mathbb{R}} |T(h)f(\xi) - f(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \underset{h\downarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

En utilisant le théorème de Plancherel, nous avons (à une constante près en fonction de comment $\mathcal{F}$ est définie)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |T(h)f(\xi) - f(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{F}T(h)f)(\xi) - (\mathcal{F}f)(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \\ &\overset{(26)}{=} \int_{\mathbb{R}} |e^{-\xi^2 h}(\mathcal{F}f)(\xi) - (\mathcal{F}f)(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} |(e^{-\xi^2 h} - 1)(\mathcal{F}f)(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

et ce dernier terme converge vers 0 lorsque $h \downarrow 0$ par le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

On remarque que par le théorème de Plancherel, $\|T(t)f\|_X = \|\mathcal{F}T(t)f\|_X$ et $\|f\|_X = \|\mathcal{F}f\|_X$ pour tout $f \in X$. Or pour tout $f \in X$,

$$\|\mathcal{F}T(t)f\|_X^2 \overset{(26)}{=} \int_{\mathbb{R}} |e^{-\xi^2 t}(\mathcal{F}f)(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \leq \int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{F}f)(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi = \|\mathcal{F}f\|_X^2,$$

et donc $\|\mathcal{F}T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ i.e. $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ pour tout $t \geq 0$.

Explicitons maintenant la formule du générateur de $\mathcal{T}$, via sa transformée de Fourier. Comme $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$, on peut voir que

$$\omega_0(\mathcal{T}) = \lim_{t \to \infty} \frac{\ln \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} \leq 0.$$

Ainsi par la proposition 4.3, $1 \in \rho(A)$ et

$$(I - A)^{-1} f = \int_0^\infty e^{-t} T(t) f \,\mathrm{d}t,$$

pour tout $f \in X$ (il s'agit d'une intégrale dans X), et en appliquant $\mathcal{F}$ on obtient

$$\mathcal{F}(I - A)^{-1} f = \mathcal{F} \int_0^\infty e^{-t} T(t) f \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-t} \mathcal{F}T(t) f \,\mathrm{d}t,$$

car $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(X)$ (l'intégration est encore dans X). Pour $f \in X$ et $\xi \in \mathbb{R}$, on a donc l'expression

$$\big(\mathcal{F}(I - A)^{-1} f\big)(\xi) = \int_0^\infty e^{-t} (\mathcal{F}T(t)f)(\xi) \,\mathrm{d}t \overset{(26)}{=} \int_0^\infty e^{-t} e^{-\xi^2 t} (\mathcal{F}f)(\xi) \,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, pour $f \in X$ on obtient

$$\big(\mathcal{F}(I - A)^{-1} f\big)(\xi) = \frac{1}{\xi^2 + 1} (\mathcal{F}f)(\xi), \quad \text{p.p. } \xi \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(A)$, l'application $(I - A)^{-1} \colon X \longmapsto \mathcal{D}(A)$ étant bijective, il existe un unique $f \in X$ tel que

$$\varphi = (I - A)^{-1} f.$$

D'une part, en appliquant $\mathcal{F}(I - A)$ on obtient

$$\mathcal{F}\varphi - \mathcal{F}A\varphi = \mathcal{F}f \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}A\varphi = \mathcal{F}\varphi - \mathcal{F}f,$$

c'est-à-dire $(\mathcal{F}A\varphi)(\xi) = (\mathcal{F}\varphi)(\xi) - (\mathcal{F}f)(\xi)$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$. D'autre part, (27) s'écrit aussi

$$(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \frac{1}{\xi^2 + 1}(\mathcal{F}f)(\xi),$$

ce qui est équivalent à

$$(\xi^2 + 1)(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi) \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathcal{F}\varphi)(\xi) - (\mathcal{F}f)(\xi) = -\xi^2(\mathcal{F}\varphi)(\xi).$$

Par conséquent, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ on obtient la formule suivante pour le générateur de $\mathcal{T}$

$$(\mathcal{F}A\varphi)(\xi) = -\xi^2(\mathcal{F}\varphi)(\xi), \qquad \text{p.p. } \xi \in \mathbb{R}. \tag{28}$$

Puisque $\mathcal{F}$ transforme la dérivation en produit, on peut déduire que $A = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$. Pour finir, déterminons le domaine de A. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(A)$, comme précédemment on peut écrire

$$\varphi = (I - A)^{-1} f,$$

avec $f \in X$. Par conséquent, $A\varphi = \varphi - f \in X$ (puisque $\varphi \in \mathcal{D}(A) \subset X$ et $f \in X$) et donc $\mathcal{F}A\varphi \in X$. En utilisant l'expression du générateur (28) on observe que cela implique que

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^4 |(\mathcal{F}\varphi)(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi < +\infty.$$

Ainsi

$$\mathcal{D}(A) \subset \Big\{\varphi \in X \colon \int_{\mathbb{R}} \xi^4 |(\mathcal{F}\varphi)(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi < +\infty\Big\}.$$

Réciproquement, soit $\varphi \in X$ telle que la fonction $g : \xi \mapsto -\xi^2(\mathcal{F}\varphi)(\xi)$ soit dans X. On observe que[(8)]

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{e^{-h.^2}\mathcal{F}f - \mathcal{F}f}{h} = g,$$

la limite étant au sens de X, et donc cette limite existe (dans X). Puisque $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(X)$, en utilisant (26) il n'est pas difficile à voir que cela est équivalent à dire que

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)\varphi - \varphi}{h}$$

existe (dans X). Ainsi $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ et donc

$$\mathcal{D}(A) = \Big\{\varphi \in X \colon \int_{\mathbb{R}} \xi^4 |(\mathcal{F}\varphi)(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi < +\infty\Big\}.$$

[(8)] Cela peut se montrer par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, en utilisant le fait que exp est dérivable en 0 et $\mathcal{F}f \in X$.

On remarque qu'il s'agit de l'espace de Sobolev $H^2(\mathbb{R})$. Le semi-groupe de la chaleur est donc généré par $(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}, H^2(\mathbb{R}))$, et la fonction $u : (t,x) \longmapsto (T(t)f)(x)$ satisfait *l'équation de la chaleur* (en une dimension)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

5. Sous-espaces invariants pour les semi-groupes

Dans cette section on dérive quelques résultats concernant des sous-espaces invariantes pour les semi-groupes, et les restrictions des semi-groupes sur ces sous-espaces invariants.

Définition 5.1. — *Soit $\mathcal{T}$ un semi-groupe fortement continu de générateur A. Soit V un sous-espace vectoriel de X non nécessairement fermé. La partie de A dans V, notée A_V est la restriction de A sur le domaine*

$$\mathcal{D}(A_V) = \{x \in \mathcal{D}(A) \cap V : Ax \in V\}.$$

V est dit invariant par $\mathcal{T}$ si $T(t)x \in V$ pour tout $x \in V$ et pour tout $t \geq 0$.

Remarque 5.2. — Si V est invariant par $\mathcal{T}$, alors $\overline{V}$ l'est aussi.

En effet, pour $x \in \overline{V}$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de V qui converge vers x dans X. Comme pour $t \geq 0$ l'application $T(t)$ est continue de X dans X, on a

$$T(t)x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T(t)x$$

dans X. On a donc trouvé une suite $(T(t)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de V qui converge dans X vers $T(t)x$. Ainsi $T(t)x \in \overline{V}$.

Remarque 5.3. — Si V_1 et V_2 sont invariants par $\mathcal{T}$, alors $V_1 \cap V_2$ et $V_1 + V_2$ le sont aussi.

En effet, pour $t \geq 0$ et $y \in V_1 \cap V_2$, par hypothèse $T(t)y \in V_1$ et $T(t)y \in V_2$, donc $T(t)y \in V_1 \cap V_2$. Par ailleurs, pour $t \geq 0$, si $y \in V_1 + V_2$ on peut réécrire $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in V_1$ et $y_2 \in V_2$. La linéarité de $T(t)$ sur X donne que

$$T(t)y = T(t)(y_1 + y_2) = T(t)y_1 + T(t)y_2 \ \in V_1 + V_2,$$

puisque $T(t)y_1 \in V_1$ et $T(t)y_2 \in V_2$ par hypothèse.

***Lemme 5.4* (Formule de Post-Widder)**. — *Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ telle que sa transformée de Laplace $\mathcal{L}f$ existe sur un certain demi-plan droit de $\mathbb{C}$. Si f est continue au point $\tau > 0$, alors*

$$f(\tau) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Big(\frac{n}{\tau}\Big)^{n+1} \Big(\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^n \mathcal{L}f\Big)\Big(\frac{n}{\tau}\Big).$$

Démonstration. — Ce résultat n'est pas ici démontré. □

Proposition 5.5. — *Si $\mathcal{T}$ est un semi-groupe fortement continu sur X, avec générateur A, alors*

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty} \Big(I - \frac{t}{n}A\Big)^{-n} x, \quad \forall t > 0,\ x \in X. \tag{29}$$

Démonstration. — Soient $x \in X$ et $t > 0$. On définit la fonction $f : t \mapsto T(t)x$ sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans X. Cette fonction est continue de $\mathbb{R}_+$ dans X (elle appartient donc à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$). De plus, pour $s \in \mathbb{C}_{\omega_0(\mathcal{T})}$,

$$(sI - A)^{-1}x = (\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty e^{-st}T(t)x \,\mathrm{d}t < +\infty,$$

Nous avons

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\Big(\frac{n}{t}\Big)^{n+1}\Big(\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^n \mathcal{L}f\Big)\Big(\frac{n}{t}\Big)$$

par la formule de Post-Widder. On remplace la dérivée de $\mathcal{L}f$ avec l'expression donnée par la remarque 3.15

$$\Big(\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^n \mathcal{L}f\Big)(s) \quad = \quad \Big(\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^n (sI - A)^{-1}\Big)(x) \quad = \quad (-1)^n n!(sI - A)^{-(n+1)}x,$$

et cela donne

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\Big(\frac{n}{t}\Big)^{n+1}(-1)^n n!\Big(\frac{n}{t}I - A\Big)^{-(n+1)} x \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{t}{n}\Big(\frac{n}{t}I - A\Big)\Big)^{-(n+1)} x \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{t}{n}\Big(\frac{n}{t}I - A\Big)\Big)^{-n}\Big(\frac{t}{n}\Big(\frac{n}{t}I - A\Big)\Big)^{-1} x \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big(I - \frac{t}{n}A\Big)^{-n}\ \frac{n}{t}\Big(\frac{n}{t}I - A\Big)^{-1} x. \end{aligned}$$

Par ailleurs, A étant le générateur d'un semi-groupe fortement continu sur X, la proposition **??** donne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{t}\Big(\frac{n}{t}I - A\Big)^{-1} x = x.$$

Ainsi on obtient le résultat voulu

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \Big(I - \frac{t}{n}A\Big)^{-n} x \qquad . \tag{30}$$

□

Notation 5.6. — Nous allons noter par $\rho_\infty(A)$ la partie connexe de $\rho(A)$ contenant un demi-plan droit.

Proposition 5.7. — *Dans cette proposition, X est un espace de Hilbert, c'est-à-dire un espace vectoriel normé muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle_X$ et complet pour la norme $\|.\|_X := \sqrt{\langle .,. \rangle_X}$.*

Soient $\mathcal{T}$ un semi-groupe fortement continu sur X, de générateur A, et V un sous-espace vectoriel fermé de X. Les assertions suivantes sont équivalentes

(a) *V est invariant par $\mathcal{T}$.*

(b) *Il existe $s_0 \in \rho_\infty(A)$ tel que $(s_0 I - A)^{-1} V \subset V$.*

(c) *Pour tout $s \in \rho_\infty(A)$, on a $(sI - A)^{-1} V \subset V$.*

De plus, si une (et donc toutes) des conditions est vérifiée, alors la restriction de $\mathcal{T}$ sur V, notée $\mathcal{T}^V$, est un semi-groupe fortement continu sur V. Nous avons

$$A(\mathcal{D}(A) \cap V) \subset V$$

et le générateur de $\mathcal{T}^V$ est la restriction de A sur $\mathcal{D}(A) \cap V$.

Remarque 5.8. — Sous les hypothèses du dernier paragraphe ("*De plus ..*") de la proposition ci-dessus, nous avons

$$A\big|_{\mathcal{D}(A)\cap V} = A_V.$$

En effet, puisque $A(\mathcal{D}(A) \cap V) \subset V$, si $x \in \mathcal{D}(A) \cap V$ alors on a déjà $Ax \in V$. Donc $\mathcal{D}(A) \cap V = \mathcal{D}(A_V) = \{x \in \mathcal{D}(A) \cap V : Ax \in V\}$.

Démonstration. — On remarque tout d'abord que $(V, \|.\|_X)$ est un espace de Hilbert (car il est fermé dans le Hilbert X). Dans cette preuve, on considère que la convergence dans V est la convergence au sens de la norme de X.

Montrons que (a) implique (b). On suppose que V est invariant par $\mathcal{T}$. Choisissons $s_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > \omega_0(\mathcal{T})$. Soit $x \in V$, on cherche à obtenir que $(s_0 I - A)^{-1} x \in V$. D'après la proposition 4.3, $s_0 \in \rho(A)$ et

$$(s_0 I - A)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-s_0 t} T(t) x \, \mathrm{d}t$$

dans X. Or on sait par hypothèse que pour tout $t \geq 0$, $T(t)x \in V$. Posons $f(t) = e^{-s_0 t} T(t) x$. On sait que f est une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans V pour la norme induite par X (car $\mathcal{T}$ est fortement continue et exp est continue sur $\mathbb{R}$), et V est un espace de Hilbert. Ainsi f est la limite dans V (pour la norme induite par X) d'une suite de fonctions simples $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans V et

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-s_0 t} T(t) x \, \mathrm{d}t &= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty g_n(t) \, \mathrm{d}t \qquad \text{dans } X \\ &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{N_n} a_{n,k} \mu(E_{n_k})}_{\in V} \quad \text{dans } X. \end{aligned}$$

Cette limite appartient à V puisque V est fermé dans X.

Montrons que (b) implique (c). On considère l'orthogonal de V

$$V^{\perp} := \{w \in X \colon \langle v, w\rangle_X = 0 \ \ \forall v \in V\}.$$

Soient $x \in V$ et $w \in V^{\perp}$. On définit la fonction f de $\rho_\infty(A)$ dans $\mathbb{C}$ par

$$f(s) = \big\langle (sI - A)^{-1}x, w\big\rangle_X.$$

L'objectif ici est de prouver que f est nulle, car on aurait ainsi montré que pour tout $s \in \rho_\infty(A)$

$$\big\langle (sI - A)^{-1}x \ , w\big\rangle_X = 0 \quad \forall w \in V^{\perp},$$

c'est-à-dire que $(sI - A)^{-1}x \in (V^{\perp})^{\perp} = \overline{V} = V$ (car V est fermé). On sait par la proposition 3.14 que la fonction $s \longmapsto (sI - A)^{-1}$ est analytique de $\rho_\infty(A)$ dans $\mathcal{L}(X)$. Par conséquent pour tout $s \in \rho_\infty(A)$ il existe un petit disque D_s centré en s tel que

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\lambda - s)^k \quad \forall \lambda \in D_s.$$

Pour ce même s, on a

$$\begin{aligned}
f(\lambda) = \big\langle (\lambda I - A)^{-1}x, w\big\rangle_X &= \Big\langle \sum_{k=0}^{+\infty} \ a_k x \ (\lambda - s)^k, w\Big\rangle_X \\
&= \Big\langle \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \ a_k x \ (\lambda - s)^k, w\Big\rangle_X \\
&\overset{\text{cont.}}{=} \lim_{N\to\infty} \Big\langle \sum_{k=0}^{N} \ a_k x \ (\lambda - s)^k, w\Big\rangle_X \\
&\overset{\text{lin.}}{=} \lim_{N\to\infty} \ \sum_{k=0}^{N} \big\langle a_k x \ , w\big\rangle_X (\lambda - s)^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \ \underbrace{\big\langle a_k x \ , w\big\rangle_X}_{\in\mathbb{C}} (\lambda - s)^k,
\end{aligned}$$

pour tout $\lambda \in D_s$. Cela prouve que f est analytique de $\rho_\infty(A)$ dans $\mathbb{C}$. De plus,

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ \underbrace{\big\langle a_k x \ , w\big\rangle_X}_{\in\mathbb{C}} (\lambda - s)^k, \qquad \forall \lambda \in D_{s_0}. \tag{31}$$

D'après la remarque 3.15, les application a_k dans (31) sont plus précisément

$$a_k = \Big(\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^k (.I - A)^{-1}\Big)(s_0) = (-1)^k k!(s_0 I - A)^{-(k+1)}.$$

Or $x \in V$, donc appliquer $k+1$ fois l'hypothèse (b) donne $(s_0 I - A)^{-(k+1)} \in V$. Comme $w \in V^\perp$, $\langle a_k x \ , w\rangle_X = 0$ dans (31). On a ainsi montré que f s'annule sur le disque ouvert D_{s_0}. f étant holomorphe sur $\rho_\infty(A)$, d'après le théorème des zéros isolés f est nulle sur $\rho_\infty(A)$.

Montrons que (c) implique (a). D'après la proposition 5.5,

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty} \Big(I - \frac{t}{n}A\Big)^{-n} x = \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{t}{n}\Big(\frac{n}{t}I - A\Big)\Big)^{-n} x = \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{n}{t}\Big)^n \Big(\frac{n}{t}I - A\Big)^{-n} x.$$

Pour n suffisamment grand, $\frac{n}{t} \in \rho_\infty(A)$. Ainsi par hypothèse $\big(\frac{n}{t}I - A\big)^{-n} x \in V$ et aussi $\big(\frac{n}{t}\big)^n\big(\frac{n}{t}I - A\big)^{-n} x \in V$ (puisque V est un espace vectoriel). V étant fermé, on obtient $T(t)x \in V$. Donc V est invariant par $\mathcal{T}$.

Démontrons le dernier paragraphe de la proposition. $\mathcal{T}^V$ est un semi-groupe car comme $T(0) = I$ on a

$$T(0)\big|_V = I$$

et comme $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s \geq 0$ on a

$$T(t+s)\big|_V = T(t)T(s)\big|_V = T(t)\big|_V T(s)\big|_V, \ \forall t, s \geq 0$$

(pour la dernière égalité on utilise le fait que $T(s)\big|_V \in V$, $\forall x \in V$ par l'hypothèse (a)). $\mathcal{T}^V$ est fortement continu sur V car comme $\lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x$ dans X, $\forall x \in X$, on a pour tout $x \in V$

$$T(t)x \in V \quad \text{et} \quad \lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x \quad \text{dans } X.$$

Cela signifie que pour tout $x \in V$, $\lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x$ dans V.

Soit $x \in \mathcal{D}(A) \cap V$, alors par (a) pour tout $h \geq 0$, $\frac{T(h)-I}{h} x \in V$. Ainsi

$$Ax := \lim_{h\downarrow 0} \frac{T(h) - I}{h} x \in V,$$

car V est fermé. On a bien montré que $A(\mathcal{D}(A) \cap V) \subset V$.

Notons B le générateur du semi-groupe $\mathcal{T}^V$ fortement continu sur V (on note son domaine $\mathcal{D}(B)$). Par définition du générateur

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(B) :=& \Big\{x \in V\colon \lim_{h\downarrow 0} \frac{T(h)\big|_V - I}{h} x \textit{ existe dans } V\Big\} \\
=& \Big\{x \in V\colon \lim_{h\downarrow 0} \frac{T(h) - I}{h} x \textit{ existe dans } V\Big\} \\
\overset{(a) \text{ et } V \text{ fermé}}{=}& \Big\{x \in V\colon \lim_{h\downarrow 0} \frac{T(h) - I}{h} x \textit{ existe dans } X\Big\} \\
=& V \cap \Big\{x \in X\colon \lim_{h\downarrow 0} \frac{T(h) - I}{h} x \textit{ existe dans } X\Big\} \\
=& V \cap \mathcal{D}(A).
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathcal{D}(B)$,

$$Bx \;:=\; \lim_{h\downarrow 0} \frac{T(h)\big|_V - I}{h} x \;=\; \lim_{h\downarrow 0} \underbrace{\frac{T(h) - I}{h} x}_{\in V \text{ par } (a)} \quad \in V,$$

car V est fermé. Cela signifie que Bx, qui est la limite dans V de $\frac{T(h)|_V - I}{h} x$, existe. □

Définition 5.9. — *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, tels que $X \subset Y$. Si l'opérateur identité $I : x \longmapsto x$ est un opérateur borné (continu) de X dans Y, c'est-à-dire s'il existe $c > 0$ telle que*

$$\|x\|_Y \leq c\|x\|_X, \quad \forall x \in X$$

alors on dit que X s'injecte continûment dans Y et on note $X \hookrightarrow Y$.

Proposition 5.10. — *Soient V et X deux espaces de Banach tels que $V \hookrightarrow X$. Soit $\mathcal{T}$ un semi-groupe fortement continu sur X, de générateur A.*

Si V est invariant par $\mathcal{T}$ et si la restriction de $\mathcal{T}$ sur V, notée $\mathcal{T}^V := (T(t)\big|_V)_{t\geq 0}$ est fortement continue sur V, alors le générateur de $\mathcal{T}^V$ est A_V (la partie de A dans V).

Réciproquement, si A_V est le générateur d'un semi-groupe fortement continu $\mathcal{T}^V = (T^V(t))_{t\geq 0}$ sur V, alors V est invariant par $\mathcal{T}$ et pour tout $t \geq 0$, $T^V(t)$ est la restriction de $T(t)$ sur V.

Démonstration. — Supposons que V est invariant par $\mathcal{T}$ et que $\mathcal{T}^V := (T(t)\big|_V)_{t\geq 0}$ est fortement continu sur V. On note B le générateur de $\mathcal{T}^V$ et $\mathcal{D}(B)$ son domaine. L'objectif est de prouver que $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A_V)$ et que sur ce domaine $B = A_V$. On commence par choisir $s \in \mathbb{C}$ qui vérifie $\Re(s) > \omega_0(\mathcal{T})$

et $\Re(s) > \omega_0(\mathcal{T}^V)$. Ainsi par la proposition 4.3, $s \in \rho(A)$ et $s \in \rho(B)$. De plus, pour $x \in X$ (et donc en particulier pour $x \in V$)

$$(sI - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-st}T(t)x\,\mathrm{d}t \qquad \text{dans } X,$$

et pour $x \in V$

$$\begin{aligned}(sI - B)^{-1}x &= \int_0^\infty e^{-st}T(t)\big|_V x\,\mathrm{d}t \quad \text{dans } V\\ &= \int_0^\infty e^{-st}T(t)x\,\mathrm{d}t \qquad \text{dans } V.\end{aligned}$$

Comme V s'injecte continûment dans X,

$$\int_0^\infty e^{-st}T(t)xdt \quad \text{dans } V \quad = \quad \int_0^\infty e^{-st}T(t)xdt \quad \text{dans } X.$$

Cela implique que pour tout $x \in V$,

$$(sI - A)^{-1}x = (sI - B)^{-1}x. \tag{32}$$

On remarque que par définition,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(B) &:= \Big\{x \in V\colon \lim_{h\downarrow 0}\frac{T(h)\big|_V - I}{h}x \quad \textit{existe dans } V\Big\}\\ &= \Big\{x \in V\colon \lim_{h\downarrow 0}\frac{T(h) - I}{h}x \quad \textit{existe dans } V\Big\}\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(A_V) :&= \Big\{x \in \mathcal{D}(A) \cap V\colon Ax \in V\Big\}\\ &= \Big\{x \in V\colon \lim_{h\downarrow 0}\frac{T(h) - I}{h}x \quad \textit{existe dans } X \textit{ et } Ax \in V\Big\}.\end{aligned}$$

Pour obtenir $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A_V)$, montrons la double inclusion. Soit $x \in \mathcal{D}(A_V)$, comme $x \in \mathcal{D}(A)$ et $(sI - A)$ est inversible sur $\mathcal{D}(A)$ on peut réécrire x par

$$x = (sI - A)^{-1}(sI - A)x.$$

Comme $x \in \mathcal{D}(A_V)$, on a $Ax \in V$ et donc $(sI - A)x \in V$. Cela permet d'appliquer (32), ce qui donne

$$(sI - A)^{-1}(sI - A)x = (sI - B)^{-1}(sI - A)x.$$

Or $(sI - B)^{-1}$ est défini sur V et est à valeurs dans $\mathcal{D}(B)$. Par conséquent $(sI - B)^{-1}(sI - A) \in \mathcal{D}(B)$, c'est-à-dire $x \in \mathcal{D}(B)$. Ainsi, $\mathcal{D}(A_V) \subset \mathcal{D}(B)$.

Maintenant prenons $x \in \mathcal{D}(B)$. On sait déjà que $x \in V$. On sait également qu'il existe un élément noté $Bx \in V$ tel que

$$\Big\|\frac{T(h) - I}{h}x - Bx\Big\|_V \xrightarrow[h\downarrow 0]{} 0.$$

Comme V s'injecte continûment dans X, $Bx \in X$ et

$$\left\| \frac{T(h)-I}{h}x - Bx \right\|_X \xrightarrow[h\downarrow 0]{} 0, \quad \text{i.e.} \quad Bx = \lim_{h\downarrow 0} \frac{T(h)-I}{h}x \ \text{ dans } X.$$

Par définition de A

$$Ax := \lim_{h\downarrow 0} \frac{T(h)-I}{h}x \ \text{ dans } X.$$

L'unicité de la limite implique que $Ax = Bx \in V$. Ainsi $x \in \mathcal{D}(A_V)$ et alors $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A_V)$. On en conclue que $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A_V)$.

Il reste à montrer que $B = A_V$ sur $\mathcal{D}(A_V)$. Soit $x \in \mathcal{D}(A_V)$. Comme précédemment on peut le réécrire

$$x = (sI-A)^{-1}(sI-A)x \overset{(32)}{=} (sI-B)^{-1}(sI-A)x.$$

On obtient alors en appliquant $(sI-B)$,

$$(sI-B)x = (sI-A)x,$$

qui est équivalent en simplifiant à $Bx = Ax$. Or $x \in \mathcal{D}(A_V)$ donc $A_V x := A\big|_{\mathcal{D}(A_V)} x = Ax = Bx$.

Montrons maintenant la réciproque. On suppose que A_V est le générateur d'un semi-groupe que l'on note pour le moment $\mathcal{J} := (J(t))_{t\geq 0}$. L'objectif est de montrer que V est alors invariant par $\mathcal{T}$ et que $\mathcal{J}$ est la restriction de $\mathcal{T}$ sur V (i.e. $\forall t \geq 0,\ J(t) = T(t)\big|_V$).

Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > \omega_0(\mathcal{T})$ et $\Re(s) > \omega_0(\mathcal{J})$. D'après la proposition 4.3 $s \in \rho(A_V)$, l'application $(sI-A_V)^{-1}$ est définie sur V et à valeurs dans $\mathcal{D}(A_V)$. Soit $x \in V$, pour ce point il existe une unique image $y \in \mathcal{D}(A_V)$, c'est-à-dire

$$\exists\,!\ y \in \mathcal{D}(A_V) \mid y = (sI-A_V)^{-1}x.$$

Ainsi

$$x \ = \ (sI-A_V)y \ = \ sy - A\big|_{\mathcal{D}(A_V)} y \ \overset{y\in\mathcal{D}(A_V)}{=} \ sy - Ay \ = \ (sI-A)y,$$

ce qui équivaut à

$$y = (sI-A)^{-1}x,$$

puisque s appartient aussi à l'ensemble résolvant de A (toujours par la proposition 4.3). On a donc obtenu que

$$(sI-A_V)^{-1}x = (sI-A)^{-1}x, \quad \forall x \in V. \tag{33}$$

Or la proposition 4.3 donne également

$$(sI-A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-st}T(t)x\,\mathrm{d}t \quad (\text{dans } X), \quad \forall x \in X \tag{34}$$

$$\text{et} \quad (sI-A_V)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-st}J(t)x\,\mathrm{d}t \quad (\text{dans } V), \quad \forall x \in V.$$

Mais aussi, comme V s'injecte continûment dans X,

$$
\begin{aligned}
(sI - A_V)^{-1}x &= \int_0^\infty e^{-st} J(t)x \,\mathrm{d}t \quad (\text{dans } V) \\
&= \int_0^\infty e^{-st} J(t)x \,\mathrm{d}t \quad (\text{dans } X), \quad \forall x \in V.
\end{aligned} \tag{35}
$$

Ainsi, le résultat (33) combiné avec (34) et (35) donne pour $x \in V$

$$\int_0^\infty e^{-st} T(t)x \,\mathrm{d}t \quad (\text{dans } X) \quad = \int_0^\infty e^{-st} J(t)x \,\mathrm{d}t \quad (\text{dans } X).$$

Si on définit les fonctions $f\colon t \longmapsto T(t)x$ et $g\colon t \longmapsto J(t)x$, qui sont continues sur $\mathbb{R}_+$, l'égalité que l'on vient d'obtenir correspond alors à

$$(\mathcal{L}f)(s) = (\mathcal{L}g)(s) \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathcal{L}(f-g))(s) = 0,$$

où s appartient au demi-plan ouvert droit délimité par $\max(\omega_0(\mathcal{T}), \omega_0(\mathcal{J}))$. La fonction $f-g$ étant continue sur $\mathbb{R}_+$, elle appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, donc le lemme 5.4 donne une expression de $f-g$ en fonction de sa transformée de Laplace

$$(f-g)(t) \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} \underbrace{(\mathcal{L}(f-g))^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right)}_{=0,\text{ pour } n \text{ grand}} \;=\; 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Ainsi $T(t)x = J(t)x$, pour tout $x \in V$ et pour tout $t \geq 0$, ce qui signifie que $T(t)|_V = J(t)$ pour tout $t \geq 0$. Il en découle que V est invariant par $\mathcal{T}$ puisque si on prend $t \geq 0$ et $x \in V$ alors

$$T(t)x = T(t)\big|_V x = J(t)x \in V,$$

puisque $J(t)$ est à valeurs dans V.

□

6. Les espaces X_1 et X_{-1}

Nous introduisons ici les espaces X_1 et X_{-1} et on énonce (sans démontrer) quelques propriétés de ces espaces, que l'on rencontrera dans la partie suivante. Par la suite, on suppose que X est un espace de Hilbert.

Définition 6.1. — *Soit $A : \mathcal{D}(A) \to X$ un opérateur linéaire à domaine dense (cela veut dire que $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X). L'adjoint de A noté A^* est un opérateur défini sur le domaine*

$$\mathcal{D}(A^*) = \left\{ y \in X\colon \sup_{x\in\mathcal{D}(A), x\neq 0} \frac{|\langle Ax, y\rangle_X|}{\|x\|_X} < +\infty \right\}$$

Par le théorème de représentation de Riesz, on définit A^* comme l'unique opérateur tel que

$$\langle Ax, y\rangle_X = \langle x, A^*y\rangle_X, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A),\ y \in \mathcal{D}(A^*).$$

Proposition 6.2. — *Si $A : \mathcal{D}(A) \to X$ est un opérateur linéaire fermé à domaine dense, alors $\mathcal{D}(A^*)$ est dense dans X.*

Une propriété intéressante de cet opérateur (qu'on utilisera pour une des définitions qui suivent) est que lorsque $A : \mathcal{D}(A) \to X$ est à domaine dense et d'ensemble résolvant non vide, alors si $s \in \rho(A)$, on a $\overline{s} \in \rho(A^*)$. Un autre résultat important est le suivant

Proposition 6.3. — *Soit $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur X de générateur A. Alors $\mathcal{T}^* = (T(t)^*)_{t\geq 0}$ est aussi un semi-groupe fortement continu sur X, et son générateur est A^*.*

Le semi-groupe fortement continu $\mathcal{T}^*$ est appelé *semi-groupe adjoint.*

Définition 6.4. — *Soient V, Z deux espaces de Hilbert. Un opérateur $\Lambda \in \mathcal{L}(V, Z)$ est appelé isomorphisme (ou bien unitaire) de V dans Z si $\Lambda^*\Lambda = I_V$ et $\Lambda\Lambda^* = I_Z$.*

Définition 6.5. — *Soit $A : \mathcal{D}(A) \to X$ un opérateur linéaire à domaine dense, tel que $\rho(A) \neq \emptyset$. Pour tout $\beta \in \rho(A)$, l'espace $\mathcal{D}(A)$ muni de la norme*

$$\|x\|_1 = \|(\beta I - A)x\|_X \quad \forall x \in \mathcal{D}(A),$$

est un espace que l'on note X_1.

On définit l'espace X_{-1} comme le complété de X par rapport à la norme

$$\|x\|_{-1} = \|(\beta I - A)^{-1}x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Finalement, on note X_1^d l'espace $\mathcal{D}(A^*)$ muni de la norme

$$\|x\|_1^d = \|(\overline{\beta} I - A^*)x\|_X \quad \forall x \in \mathcal{D}(A^*),$$

où $\beta \in \rho(A^*)$.

Proposition 6.6. — *L'espace $(X_1, \|.\|_1)$ est un espace de Hilbert. Les normes générées comme ci-dessus pour des $\beta \in \rho(A)$ différents sont équivalentes à la norme du graphe et $X_1 \hookrightarrow X$. Finalement, si $\Lambda \in \mathcal{L}(X)$ est tel que $\Lambda\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A)$ (i.e. $\mathcal{D}(A)$ est invariant par Λ), alors $\Lambda \in \mathcal{L}(X_1)$.*

Proposition 6.7. — *L'espace $(X_1^d, \|.\|_1^d)$ est un espace de Hilbert. On identifie X_{-1} avec le dual de X_1^d. De plus, si $\Lambda \in \mathcal{L}(X)$ est tel que $\Lambda^*\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(A^*)$, alors Λ admet un unique prolongement borné $\widetilde{\Lambda} \in \mathcal{L}(X_{-1})$.*

Proposition 6.8. — *Soit $A : \mathcal{D}(A) \to X$ un opérateur linéaire à domaine dense avec $\rho(A) \neq \emptyset$, et soit $\beta \in \rho(A)$. Alors $A \in \mathcal{L}(X_1, X)$ et A admet un unique prolongement borné $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(X, X_{-1})$. De plus,*

$$(\beta I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X_1), \qquad (\beta I - \widetilde{A})^{-1} \in \mathcal{L}(X_{-1}, X),$$

(en particulier, $\beta \in \rho(\widetilde{A})$) et ces deux opérateurs sont unitaires.

Proposition 6.9. — *En utilisant la notation de la proposition précédente, supposons que A est générateur d'un semi-groupe fortement continu $\mathcal{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ sur l'espace de Hilbert X. La restriction de $T(t)$ sur X_1 (considéré comme un opérateur dans $\mathcal{L}(X_1)$) est l'image de $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ par l'opérateur unitaire $(\beta I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X_1)$. Ainsi, ces opérateurs forment un semi-groupe fortement continu sur X_1, dont le générateur est la restriction de A sur $\mathcal{D}(A^2)$.*

L'opérateur $\widetilde{T}(t) \in \mathcal{L}(X_{-1})$ est l'image de $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ par l'opérateur unitaire $(\beta I - \widetilde{A}) \in \mathcal{L}(X, X_{-1})$. Ainsi, ces prolongements forment un semi-groupe fortement continu $\widetilde{\mathcal{T}} = (\widetilde{T}(t))_{t\geq 0}$ sur X_{-1}, dont le générateur est A.

PARTIE II
SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON-HOMOGÉNES DANS UN ESPACE DE HILBERT

Par la suite, X est un espace de Hilbert que l'on identifie avec son dual, et on utilise la notation A, $\mathcal{T}$ pour les prolongements du générateur et du semi-groupe fortement continu introduits précédemment.

Dans cette partie, on considère l'équation différentielle non-homogène

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t)$$

où f est une fonction donnée. On clarifie ce que veut dire être solution d'une telle équation différentielle, et on donne quelques résultats basiques d'existence et unicité de la solution.

Définition 6.10. — *Considérons l'équation differentielle*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \tag{36}$$

avec $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; X_{-1})$. *Une solution de* (36) *dans* X_{-1} *est une fonction*

$$x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; X) \cap C(\mathbb{R}_+; X_{-1})$$

qui satisfait l'équation suivante dans X_{-1} *:*

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \left[Ax(\sigma) + f(\sigma)\right] \mathrm{d}\sigma, \quad \forall t \geq 0. \tag{37}$$

Un tel x est aussi appelé solution forte de (36) dans X_{-1}, puisque (37) implique que x est absolument continue à valeurs dans X_{-1} et (36) tient pour presque tout $t > 0$, où la dérivée est calculée par rapport la norme de X_{-1}. L'équation (36) n'admet pas nécessairement ce type de solution.

Proposition 6.11. — *Soit* x *une solution de* (36) *dans* X_{-1} *et notons* $x_0 := x(0)$. *Alors* x *est donné par*

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-\sigma)f(\sigma) \,\mathrm{d}\sigma, \quad \forall t \geq 0. \tag{38}$$

En particulier, pour tout $x_0 \in X$ *il existe au plus une solution de* (36) *dans* X_{-1} *qui satisfait la condition initiale* $x(0) = x_0$.

Démonstration. — Soient $t \geq 0$ et $\varphi \in \mathcal{D}(A^{*2})$ quelconques. On définit la fonction g de $[0,t]$ dans $\mathbb{C}$ par

$$g(\sigma) = \langle T(t-\sigma)x(\sigma), \varphi\rangle_{X_{-1},X_1^d}$$

En passant $T(t-\sigma)$ à droite dans le crochet de dualité et en utilisant le fait que la fonction $\sigma \mapsto T(t-\sigma)^*\varphi$ est dans $C^1([0,t], X_1^d)$ par la proposition

?? (puisque le semi-groupe adjoint est un semi-groupe fortement continu, et X_1^d est par définition le domaine de son générateur), on déduit que g est une fonction absolument continue. Calculons sa dérivée (p.p. $\sigma \in [0,t]$)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} g(\sigma) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \langle T(t-\sigma)x(\sigma), \varphi\rangle_{X_{-1},X_1^d} \\
&= \Big\langle -\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}T\Big)(t-\sigma)x(\sigma) + T(t-\sigma)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}x\Big)(\sigma), \varphi\Big\rangle_{X_{-1},X_1^d} \\
&\overset{(36),2.11}{=} \langle -T(t-\sigma)Ax(\sigma) + T(t-\sigma)(Ax(\sigma) + f(\sigma)), \varphi\rangle_{X_{-1},X_1^d} \\
&= \langle T(t-\sigma)f(\sigma), \varphi\rangle_{X_{-1},X_1^d}.
\end{aligned}$$

En intégrant de 0 à t, on obtient

$$g(t) - g(0) = \Big\langle \int_0^t T(t-\sigma)f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma, \varphi\Big\rangle_{X_{-1},X_1^d},$$

c'est-à-dire pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(A^{*2})$

$$\langle x(\sigma), \varphi\rangle_{X_{-1},X_1^d} - \langle T(t)x(\sigma), \varphi\rangle_{X_{-1},X_1^d} = \Big\langle \int_0^t T(t-\sigma)f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma, \varphi\Big\rangle_{X_{-1},X_1^d}.$$

Ayant pris $\varphi \in \mathcal{D}(A^{*2})$ quelconque, par densité de $\mathcal{D}(A^{*2})$ dans X_1^d on déduit que l'égalité précédente est vraie pour tout $\varphi \in X_1^d$, i.e.

$$x(t) - T(t)x(0) = \int_0^t T(t-\sigma)f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \quad \text{dans } X_{-1}.$$

□

Définition 6.12. — *La fonction $x : \mathbb{R}_+ \to X_{-1}$ définie dans* (38) *est appellée solution mild de* (36) *correspondant à la donnée initiale $x_0 \in X$ et la fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; X_{-1})$.*

Dans la dernière proposition, nous avons montré que si x est solution de (36) dans X_{-1}, alors x est une solution mild de (36), lorsque f est localement intégrable. La réciproque est fausse en général, mais le théorème suivant montre que lorsque $f \in H^1$, la solution mild de (36) est une solution dans X_{-1} de (36) - elle est de plus une fonction continue à valeurs dans X.

Théorème 6.13. — *Soient $x_0 \in X$ et $f \in H^1(\mathbb{R}_+^*; X_{-1})$. Alors* (36) *admet une unique solution dans X_{-1}, notée x qui satisfait $x(0) = x_0$. De plus, cette solution est telle que*

$$x \in C(\mathbb{R}_+; X) \cap C^1(\mathbb{R}_+; X_{-1})$$

et satisfait (36) *dans le sens classique pour tout $t \geq 0$.*

Démonstration. — On notera $A = A_{\mathcal{T}}$ et $\mathcal{S} = (S(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe shift-gauche sur $L^2(\mathbb{R}_+; X_{-1})$ (défini pour $X = \mathbb{C}$ dans l'exemple **??**). Nous avons montré dans l'exemple que le générateur de $\mathcal{S}$ est l'opérateur de dérivation $A_{\mathcal{S}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, qui a pour domaine $\mathcal{D}(A_{\mathcal{S}}) = H^1(\mathbb{R}_+^*; X_{-1})$. Pour tout $\tau \geq 0$, on définit l'opérateur $\Phi_\tau \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}_+, X_{-1}); X_{-1})$ par

$$\Phi_\tau : f \longmapsto \int_0^\tau T(\tau - \sigma) f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma.$$

Soient $x_0 \in X$ et $f \in H^1(\mathbb{R}_+^*; X_{-1})$ (f appartient donc également à $L^2(\mathbb{R}_+; X_{-1})$ et à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; X_{-1})$). La solution mild x de (36) correspondant à x_0 et f est donc

$$x(t) = T(t)x_0 + \Phi_t f, \quad \forall t \geq 0.$$

On pose $\mathcal{X} := X_{-1} \times L^2(\mathbb{R}_+; X_{-1})$ et on définit pour tout $t \geq 0$ l'opérateur

$$Q(t) := \begin{bmatrix} T(t) & \Phi_t \\ 0 & S(t) \end{bmatrix}.$$

On peut montrer que $\mathcal{Q} = (Q(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu. On sait déjà que $(T(t))_{t\geq 0}$ et $(S(t))_{t\geq 0}$ sont des semi-groupes fortement continus sur X_{-1} et sur $L^2(\mathbb{R}_+; X_{-1})$ respectivement. Nous avons

$$Q(0) = \begin{bmatrix} T(0) & \Phi_0 \\ 0 & S(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{X_{-1}} & \Phi_0 \\ 0 & I_{L^2(\mathbb{R}_+; X_{-1})} \end{bmatrix}.$$

Or pour $f \in L^2(\mathbb{R}_+; X_{-1})$,

$$\Phi_0 = \int_0^0 T(0 - \sigma) f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = 0.$$

Donc on a bien $Q(0) = I_{\mathcal{X}}$. Pour la seconde propriété, on prend $t, s \geq 0$ et on a d'une part

$$Q(t+s) = \begin{bmatrix} T(t+s) & \Phi_{t+s} \\ 0 & S(t+s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(t)T(s) & \Phi_{t+s} \\ 0 & S(t)S(s) \end{bmatrix}.$$

D'autre part,

$$Q(t)Q(s) = \begin{bmatrix} T(t) & \Phi_t \\ 0 & S(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) & \Phi_s \\ 0 & S(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(t)T(s) & T(t)\Phi_s + \Phi_t S(s) \\ 0 & S(t)S(s) \end{bmatrix}.$$

Afin d'obtenir $Q(t+s) = Q(t)Q(s)$, il reste à montrer que $\Phi_{t+s} = T(t)\Phi_s + \Phi_t S(s)$. On calcule donc pour $f \in L^2(\mathbb{R}_+; X_{-1})$

$$\begin{aligned}
(T(t)\Phi_s + \Phi_t S(s))f &= T(t)\big(\Phi_s f\big) + \Phi_t\big(S(s)f\big) \\
&= T(t)\int_0^s T(s-\sigma)f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma + \int_0^t T(t-\xi)\big(S(s)f\big)(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&\overset{T(t)\in\mathcal{L}(X_{-1})}{=} \int_0^s T(t+s-\sigma)f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma + \int_0^t T(t-\xi)f(s+\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&\overset{\zeta=s+\xi}{=} \int_0^s T(t+s-\sigma)f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma + \int_s^{t+s} T(t+s-\zeta)f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \int_0^{t+s} T(t+s-\sigma)f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \Phi_{t+s}f,
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu. Pour montrer la forte continuité, on prend $g \in \mathcal{X}$, i.e.

$$g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } g_1 \in X_{-1},\ g_2 \in L^2(\mathbb{R}_+; X_{-1}),$$

et on cherche à montrer que $\lim_{h\downarrow 0} Q(h)g = g$ dans $\mathcal{X}$. On a

$$\begin{aligned}
\|Q(h)g - g\|_{\mathcal{X}}^2 &= \left\| \begin{bmatrix} T(h) & \Phi_h \\ 0 & S(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{X}}^2 \\
&= \left\| \begin{bmatrix} T(h)g_1 - g_1 + \Phi_h g_2 \\ S(h)g_2 - g_2 \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{X}}^2 \\
&= \|T(h)g_1 - g_1 + \Phi_h g_2\|_{X_{-1}}^2 + \|S(h)g_2 - g_2\|_{L^2(\mathbb{R}_+;X_{-1})}^2.
\end{aligned}$$

Lorsque $h \downarrow 0$, $T(h)g_1$ converge dans X_{-1} vers g_1 et $S(h)g_2$ converge dans $L^2(\mathbb{R}_+; X_{-1})$ vers g_2. Pour obtenir $\|Q(h)g - g\|_{\mathcal{X}}^2 \xrightarrow[h\downarrow 0]{} 0$, il reste donc à montrer que $\Phi_h g_2$ converge vers 0 dans X_{-1} (on l'admet ici). On note $A_{\mathcal{Q}}$ le générateur de $\mathcal{Q}$, qui est de domaine $\mathcal{D}(A_{\mathcal{Q}})$ défini comme suit

$$\mathcal{D}(A_{\mathcal{J}}) := \left\{ g \in \mathcal{X} \colon \lim_{h\downarrow 0} \frac{Q(h) - I}{h} g \textit{ existe dans } \mathcal{X} \right\}.$$

Or, avec la même notation que précédemment, pour $g \in \mathcal{X}$

$$\frac{J(h) - I}{h} g = \frac{1}{h}\left(\begin{bmatrix} T(h) & \Phi_h \\ 0 & S(h) \end{bmatrix} - I \right) \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T(h)g_1 - g_1}{h} + \frac{\Phi_h g_2}{h} \\ \frac{S(h)g_2 - g_2}{h} \end{bmatrix}.$$

On sait que si $g_1 \in \mathcal{D}(A_{\mathcal{T}}) = X$ et $g_2 \in \mathcal{D}(A_{\mathcal{S}}) = H^1(\mathbb{R}_+^*; X_{-1})$,

$$A_{\mathcal{T}} g_1 := \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)g_1 - g_1}{h} \quad \text{existe dans } X_{-1}$$

$$\text{et} \quad A_{\mathcal{S}} g_2 := \lim_{h \downarrow 0} \frac{S(h)g_2 - g_2}{h} \quad \text{existe dans } L^2(\mathbb{R}_+; X_{-1}).$$

Le domaine de $A_{\mathcal{Q}}$ semble donc être

$$\mathcal{D}(A_{\mathcal{Q}}) = X \times H^1(\mathbb{R}_+^*; X_{-1}). \tag{39}$$

Pour que (39) soit vérifié, il reste à montrer que

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\Phi_h g_2}{h} \quad \text{existe dans } X_{-1} \tag{40}$$

sans condition supplémentaire sur g_2, c'est-à-dire en supposant seulement que $g_2 \in L^2(\mathbb{R}_+; X_{-1})$ (car cela impliquerait que pour $g \in \mathcal{X}$, il y a équivalence entre $g \in X \times H^1(\mathbb{R}_+^*; X_{-1})$ et $\lim_{h \downarrow 0} \frac{Q(h)-I}{h} g$ existe dans $\mathcal{X}$). La limite (40) semble être $g_2(0)$ - démontrons cela. Nous avons

$$\frac{\Phi_h g_2}{h} - g_2(0) = \frac{1}{h} \int_0^h T(h-\sigma) g_2(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma - g_2(0) = \frac{1}{h} \int_0^h T(h-\sigma)(g_2(\sigma) - g_2(0))\,\mathrm{d}\sigma.$$

Comme on étudiera les quantités suivantes lorsque $h \downarrow 0$, on suppose dès maintenant que $h \leq h_0$, avec $h_0 \in \mathbb{R}_+$ fixé. D'après le lemme 2.6

$$\sup_{\xi \in [0,h]} \|T(h-\xi)\|_{\mathcal{L}(X_{-1})} = \sup_{s \in [0,h]} \|T(s)\|_{\mathcal{L}(X_{-1})} \leq \underbrace{\sup_{s \in [0,h_0]} \|T(s)\|_{\mathcal{L}(X_{-1})}}_{:= M_0} < +\infty.$$

On obtient la majoration suivante

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h} \int_0^h \|T(h-\sigma)(g_2(\sigma) - g_2(0))\|_{X_{-1}}\,\mathrm{d}\sigma \\
&\quad \leq \frac{1}{h} \int_0^h \|T(h-\sigma)\|_{\mathcal{L}(X_{-1})} \|g_2(\sigma) - g_2(0)\|_{X_{-1}}\,\mathrm{d}\sigma \\
&\quad \leq \sup_{\xi \in [0,h]} \|T(h-\xi)\|_{\mathcal{L}(X_{-1})} \frac{1}{h} \int_0^h \|g_2(\sigma) - g_2(0)\|_{X_{-1}}\,\mathrm{d}\sigma \\
&\quad \leq M_0 \, \frac{1}{h} \int_0^h \|g_2(\sigma) - g_2(0)\|_{X_{-1}}\,\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}$$

Comme $g_2 \in L^2(\mathbb{R}_+; X_{-1})$, la fonction $\sigma \longmapsto \|g_2(\sigma) - g_2(0)\|_{X_{-1}}$ appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$. Ainsi d'après le théorème de dérivation de Lebesgue

$$\frac{1}{h} \int_0^h \|g_2(\sigma) - g_2(0)\|_{X_{-1}}\,\mathrm{d}\sigma \underset{h \downarrow 0}{\longrightarrow} \|g_2(0) - g_2(0)\|_{X_{-1}} = 0.$$

On a donc bien obtenu

$$\left\|\frac{\Phi_h g_2}{h} - g_2(0)\right\|_{X_{-1}} \leq \frac{1}{h}\int_0^h \|T(h-\sigma)(g_2(\sigma)-g_2(0))\|_{X_{-1}} d\sigma \underset{h\downarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

On a directement l'expression de $A_{\mathcal{Q}}$ pour $g \in \mathcal{D}(A_{\mathcal{Q}})$

$$A_{\mathcal{Q}} g := \lim_{h\downarrow 0} \frac{J(h)-1}{h} g = \lim_{h\downarrow 0} \begin{bmatrix} \frac{T(h)g_1 - g_1}{h} + \frac{\Phi_h g_2}{h} \\ \frac{S(h)g_2 - g_2}{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\mathcal{T}} g_1 + g_2(0) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} g_2 \end{bmatrix}.$$

On peut montrer que sur $\mathcal{D}(A_{\mathcal{Q}})$, les normes $\|.\|_{gr}$ et $\|.\|_{X\times H^1(\mathbb{R}_+^*;X_{-1})}$ sont équivalentes (admis ici). Par la suite on utilisera donc sur $\mathcal{D}(A_{\mathcal{J}})$ la norme $\|.\|_{X\times H^1(\mathbb{R}_+^*;X_{-1})}$.

On a $\begin{bmatrix} x_0 \\ f \end{bmatrix} \in \mathcal{D}(A_{\mathcal{Q}})$. Définissons la fonction q par

$$q(t) := Q(t)\begin{bmatrix} x_0 \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(t) & \Phi_t \\ 0 & S(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(t)x_0 + \Phi_t f \\ S(t)f \end{bmatrix}.$$

La proposition 4.10 nous dit que

$$q \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A_{\mathcal{Q}})) \cap C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{X}).$$

De plus on observe que la première composante de q est la solution mild x de (36) correspondant à la donnée initiale x_0 et la fonction f. Par conséquent,

$$x \in C(\mathbb{R}_+; X) \cap C^1(\mathbb{R}_+; X_{-1}).$$

On veut maintenant montrer que x est une solution de (36) dans X_{-1}. On sait déjà que $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; X) \cap C(\mathbb{R}_+; X_{-1})$, il reste donc à montrer que

$$x(t) - x(0) = \int_0^t [Ax(\sigma) - f(\sigma)]\,\mathrm{d}\sigma, \quad \forall t \geq 0 \tag{41}$$

Selon la remarque 2.13, comme $\begin{bmatrix} x_0 \\ f \end{bmatrix} \in \mathcal{X}$, on a pour tout $t \geq 0$.

$$Q(t)\begin{bmatrix} x_0 \\ f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ f \end{bmatrix} = A_{\mathcal{Q}} \int_0^t Q(\sigma)\begin{bmatrix} x_0 \\ f \end{bmatrix} \mathrm{d}\sigma.$$

La quantité à gauche de l'égalité se réécrit

$$Q(t)\begin{bmatrix} x_0 \\ f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(t)x_0 + \Phi_t f - x_0 \\ S(t)f - f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) - x_0 \\ S(t)f - f \end{bmatrix},$$

et celle de droite se réécrit

$$\begin{aligned}
A_{\mathcal{Q}} \int_0^t Q(\sigma) \begin{bmatrix} x_0 \\ f \end{bmatrix} \mathrm{d}\sigma &= \int_0^t A_{\mathcal{Q}} Q(\sigma) \begin{bmatrix} x_0 \\ f \end{bmatrix} \mathrm{d}\sigma \\
&= \int_0^t A_{\mathcal{Q}} \begin{bmatrix} T(\sigma)x_0 + \Phi_\sigma f \\ S(\sigma)f \end{bmatrix} \mathrm{d}\sigma \\
&= \int_0^t A_{\mathcal{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(\sigma) \\ S(\sigma)f \end{bmatrix}}_{\in \mathcal{D}(A_{\mathcal{Q}})} \mathrm{d}\sigma \\
&= \int_0^t \begin{bmatrix} A_{\mathcal{T}} x(\sigma) + (S(\sigma)f)(0) \\ A_{\mathcal{S}} S(\sigma)f \end{bmatrix} \mathrm{d}\sigma \\
&= \int_0^t \begin{bmatrix} A_{\mathcal{T}} x(\sigma) + f(\sigma) \\ A_{\mathcal{S}} S(\sigma)f \end{bmatrix} \mathrm{d}\sigma,
\end{aligned}$$

où cette intégrale est au sens de $\mathcal{X}$. Ainsi on a

$$\begin{bmatrix} x(t) - x_0 \\ S(t)f - f \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} A_{\mathcal{T}} x(\sigma) + f(\sigma) \\ A_{\mathcal{S}} S(\sigma)f \end{bmatrix} \mathrm{d}\sigma,$$

soit en regardant la première composante

$$x(t) - x_0 = \int_0^t [A_{\mathcal{T}} x(\sigma) + f(\sigma)] \,\mathrm{d}\sigma \quad (\text{dans } X_{-1}).$$

On a bien obtenu (41). De plus,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \quad \text{p.p. } t \geq 0,$$

et donc pour tout $t \geq 0$ puisque x est continue. □

Remarque 6.14. — Si x est la solution mild de (36) qui corresponde á la donnée initiale $x_0 \in X$ et la fonction f, alors sa transformée de Laplace est

$$(\mathcal{L}x)(s) = (sI - A)^{-1} \big[x(0) + \mathcal{L}f(s)\big],$$

et elle existe pour tout $s \in \mathbb{C}_{\omega_0(\mathcal{T})}$ tel que $(\mathcal{L}f)(s)$ existe.

PARTIE III
SEMI-GROUPES HOLOMORPHES

Soit X un espace de Banach. Pour $A \in \mathcal{L}(X)$ on peut définir

$$e^{tA} := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n, \quad \forall t \geq 0.$$

Il s'agit d'une série qui converge absolument pour tout $t \geq 0$, et donc qui converge par complétude de X. Cette définition a donc bien un sens et e^{tA} est un opérateur borné sur X.

Si on considère $A : \mathcal{D}(A) \to X$ (avec $\mathcal{D}(A) \subset X$) un opérateur linéaire non borné, on ne peut pas définir e^{tA} de cette manière puisque on ne sait pas que la série converge sauf si $t = 0$. On peut considérer la définition alternative

$$e^{tA} := \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial U} e^{\lambda t} R(\lambda, A) \, \mathrm{d}\lambda.$$

L'opérateur A peut être non borné, ainsi $\sigma(A)$ peut l'être aussi. Donc le chemin $+\partial U$ qui entoure $\sigma(A)$ sera non borné, et on aura besoin de conditions supplémentaires pour que cette intégrale converge.

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Rappelons qu'un *chemin* dans $\mathbb{C}$ est une application $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, continue et C^1 par morceaux. Le chemin γ est dit *simple* si γ est injective - cela veut donc dire que γ n'a pas de croisements. γ est appelé *lacet* (ou *contour*) si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Définition 6.15. — *Un opérateur linéaire fermé $A : \mathcal{D}(A) \to X$ est dit sectoriel (d'angle δ) s'il existe $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$ tel que le secteur*

$$\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta} := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \colon |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \setminus \{0\}$$

soit inclus dans $\rho(A)$, et si pour tout $0 < \varepsilon < \delta$ il existe $M_\varepsilon \geq 1$ tel que

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \overline{\Sigma}_{\frac{\pi}{2}+\delta-\varepsilon} \setminus \{0\}. \tag{42}$$

Définition 6.16. — *Soit $A : \mathcal{D}(A) \to X$ un opérateur sectoriel (d'angle δ) à domaine dense. Définissons $T(0) := I$ et*

$$T(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\mu z} R(\mu, A) \, \mathrm{d}\mu \quad \forall z \in \Sigma_\delta, \tag{43}$$

où γ est un chemin C^1 par morceaux dans $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta}$, allant de $\infty e^{-i(\frac{\pi}{2}+\delta')}$ au $\infty e^{i(\frac{\pi}{2}+\delta')}$, pour un certain $\delta' \in]|\arg z|, \delta[$.

Proposition 6.17. — *Soit $A : \mathcal{D}(A) \to X$ un opérateur sectoriel (d'angle δ) à domaine dense. Alors $(T(z))_{z\in\Sigma_\delta}$ est une famille d'opérateurs linéaires bornés sur X qui satisfait les propriétés suivantes*

(*i*) $\|T(z)\|_{\mathcal{L}(X)}$ *est uniformément bornée pour tout* $z \in \Sigma_{\delta'}$, *si* $0 < \delta' < \delta$.

(*ii*) $z \mapsto T(z)$ *est holomorphe sur* Σ_δ *à valeurs dans* $\mathcal{L}(X)$.

(*iii*) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ *pour tout* $z_1, z_2 \in \Sigma_\delta$.

(*iv*) $z \mapsto T(z)$ *est fortement continue sur* $\Sigma_{\delta'} \cup \{0\}$ *si* $0 < \delta' < \delta$.

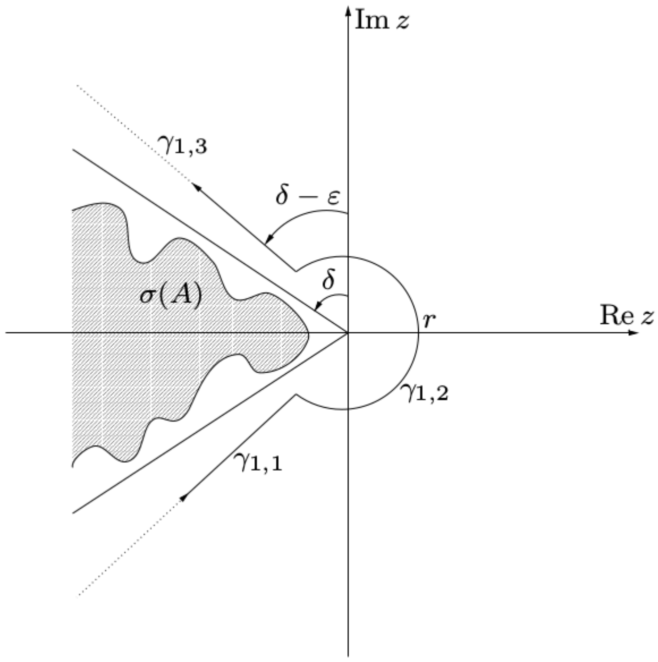

Figure 1: Le chemin γ_1 dans le plan complexe.

Démonstration. — Soit $\delta' \in]0, \delta[$. On commence par vérifier que pour tout $z \in \Sigma_{\delta'}$, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\mu z} R(\mu, A)\,\mathrm{d}\mu \tag{44}$$

converge dans $\mathcal{L}(X)$. Comme A est sectoriel d'angle δ, le secteur $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta}$ est inclu dans $\rho(A)$. Or on sait que l'application $\mu \longmapsto e^{\mu z}R(\mu, A)$ est holomorphe sur $\rho(A)$ (par la proposition 3.14), elle l'est donc en particulier holomorphe sur $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta}$. Donc si l'intégrale (44) existe, alors par le théorème (intégral) de Cauchy, elle ne dépend par du choix de γ. On définit donc un chemin γ_r

constitué de trois parties de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\gamma_{r,1} &:= \{\rho e^{-i(\frac{\pi}{2}+\delta-\varepsilon)}\colon \rho \in [r,+\infty]\},\\
\gamma_{r,2} &:= \Big\{re^{i\alpha}\colon \alpha \in \Big[-\Big(\frac{\pi}{2}+\delta-\varepsilon\Big), \frac{\pi}{2}+\delta-\varepsilon\Big]\Big\},\\
\gamma_{r,3} &:= \{\rho e^{i(\frac{\pi}{2}+\delta-\varepsilon)}\colon \rho \in [r,+\infty]\},
\end{aligned}$$

avec $\varepsilon := \frac{\delta-\delta'}{2}$ et $r := \frac{1}{|z|}$. Regardons d'abord pour $\mu \in \gamma_{r,3}$. On sait que $\arg(z) \in]-\delta', \delta'[$ et $\arg(\mu) = \frac{\pi}{2}+\delta-\varepsilon$. Ainsi

$$\mu z = |\mu|e^{i\arg(\mu)}|z|e^{i\arg(z)} = |\mu z|e^{i(\arg(\mu)+\arg(z))} \iff \frac{\mu z}{|\mu z|} = e^{i(\arg(\mu)+\arg(z))},$$

avec

$$\arg(\mu)+\arg(z) \ \in \ \Big]\frac{\pi}{2}+\delta-\varepsilon-\delta', \frac{\pi}{2}+\delta-\varepsilon+\delta'\Big[\ \subset \ \Big]\frac{\pi}{2}+\varepsilon, \frac{3\pi}{2}-\varepsilon\Big[.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{|\mu z|}\Re(\mu z) = \Re(\frac{\mu z}{|\mu z|}) = \cos(\arg(\mu)+\arg(z)) \leq \cos\Big(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\Big),$$

où on a utilisé le fait que la fonction cos admet un maximum en $\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ sur l'intervalle $]\frac{\pi}{2}+\varepsilon, \frac{3\pi}{2}-\varepsilon[$. D'où $\Re(\mu z) \leq |\mu z|\cos(\frac{\pi}{2}+\varepsilon) = -|\mu z|\sin\varepsilon$ Cela nous donne pour $\mu \in \gamma_{r,3}$,

$$|e^{\mu z}| = e^{\Re(\mu z)} \leq e^{-|\mu z|\sin\varepsilon}.$$

De façon similaire on peut obtenir la même majoration pour $\mu \in \gamma_{r,1}$. Par conséquent pour $\mu \in \gamma_{r,1}\cup\gamma_{r,3}$, on a la majoration suivante

$$\|e^{\mu z}R(\mu,A)\|_{\mathcal{L}(X)} = |e^{\mu z}|\|R(\mu,A)\|_{\mathcal{L}(X)} \overset{(42)}{\leq} e^{-|\mu z|\sin(\varepsilon)}\frac{M_\varepsilon}{|\mu|}.$$

D'autre part pour $\mu \in \gamma r_2$, comme $|\mu z| = 1$, on a $\Re(\mu z) \leq 1$ et ainsi $|e^{\mu z}| = e^{\Re(\mu z)} \leq e$. Cela donne l'estimation

$$\|e^{\mu z}R(\mu,A)\|_{\mathcal{L}(X)} = |e^{\mu z}|\|R(\mu,A)\|_{\mathcal{L}(X)} \overset{(42)}{\leq} e\frac{M_\varepsilon}{|\mu|} = eM_\varepsilon|z|.$$

On utilise l'inégalité triangulaire et la relation de Chasles pour majorer

$$\Big\|\int_{\gamma_r} e^{\mu z}R(\mu,A)\,\mathrm{d}\mu\Big\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{k=1}^{3}\Big\|\int_{\gamma_{r,k}} e^{\mu z}R(\mu,A)\,\mathrm{d}\mu\Big\|_{\mathcal{L}(X)}.$$

On peut paramétrer $\gamma_{r,3}$ et $\gamma_{r,1}$ de la façon suivante:

$$\gamma_{r,3} : \begin{cases} [\frac{1}{|z|}, +\infty[& \to \mathbb{C}\\ \qquad\rho & \mapsto \rho e^{i\arg\mu}\end{cases}$$

et

$$\gamma_{r,1} : \begin{cases} [\frac{1}{|z|}, +\infty[& \to \mathbb{C} \\ \rho & \mapsto \rho e^{-i \arg \mu} \end{cases}.$$

Nous avons donc $\gamma'_{r,3}(t) = e^{i \arg \mu}$ et $\gamma'_{r,1}(t) = e^{-i \arg \mu}$ et par conséquent

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{r,3}} \|e^{\mu z} R(\mu, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \, \mathrm{d}\mu &\leq M_\varepsilon \int_{\gamma_{r,3}} e^{-|\mu z| \sin \varepsilon} \frac{1}{|\mu|} \, \mathrm{d}\mu \\ &= M_\varepsilon \int_{\frac{1}{|z|}}^{\infty} e^{-|\rho e^{i \arg \mu} z| \sin \varepsilon} \frac{|e^{i \arg \mu}|}{|\rho e^{i \arg \mu}|} \, \mathrm{d}\rho \\ &= M_\varepsilon \int_{\frac{1}{|z|}} e^{\rho |z| \sin \varepsilon} \frac{1}{\rho} \, \mathrm{d}\rho \\ &= M_\varepsilon \int_1^\infty e^{-\sin \varepsilon} \frac{1}{\rho} \, \mathrm{d}\rho. \end{aligned}$$

Avec le même calcul, on obtient la même estimation pour l'intégrale sur $\gamma_{r,1}$. Pour $\gamma_{r,2}$, on a

$$\begin{aligned} &\int_{\gamma_{r,2}} \|e^{\mu z} R(\mu, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \, \mathrm{d}\mu \leq e M_\varepsilon |z| \int_{\gamma_{r,3}} \mathrm{d}\mu \\ &\leq e M_\varepsilon |z| \frac{2\pi}{|z|} = 2\pi e M_\varepsilon. \end{aligned}$$

On en conclue ainsi que pour tout $z \in \Sigma_{\delta'}$,

$$\left\| \int_{\gamma_r} e^{\mu z} R(\mu, A) \, \mathrm{d}\mu \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2 M_\varepsilon \int_1^\infty \frac{1}{\rho} e^{-\rho \sin \varepsilon} \, \mathrm{d}\rho + 2\pi e M_\varepsilon.$$

Cela montre que l'intégrale qui défini $T(z)$ converge dans $\mathcal{L}(X)$ pour $z \in \Sigma_{\delta'}$. Ainsi les opérateurs $T(z)$ sont bien définis et vérifient (i).

Les calculs précédents assurent (on admet cela) que l'application $z \mapsto T(z)$ est holomorphe pour tout $z \in \Sigma_\delta = \bigcup_{\delta'=0}^{\delta} \Sigma_{\delta'}$. Nous avons donc montré (ii).

Vérifions la propriété de semi-groupe (iii). Soit $c > 0$ tel que

$$\gamma \cap \gamma' := \gamma_1 \cap (\gamma_1 + c) \neq \emptyset$$

où $\gamma_1 = \gamma_r$ avec $r = 1$ (défini précédemment). On suppose que γ se trouve à gauche de γ'. Alors pour $z_1, z_2 \in \Sigma_{\delta'}$, nous avons

$$\begin{aligned}
T(z_1)T(z_2) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\mu z_1} R(\mu, A)\,\mathrm{d}\mu\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} e^{\lambda z_2} R(\lambda, A)\,\mathrm{d}\lambda\right)\\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\gamma\int_{\gamma'} e^{\mu z_1} e^{\lambda z_2} R(\mu, A) R(\lambda, A)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda\\
&\overset{3.10}{=} \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\gamma\int_{\gamma'} \frac{e^{\mu z_1} e^{\lambda z_2}}{\lambda - \mu}[R(\mu, A) - R(\lambda, A)]\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\mu z_1} R(\mu, A)\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{e^{\lambda z_2}}{\lambda - \mu}\,\mathrm{d}\lambda\Big)\,\mathrm{d}\mu\\
&\quad - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} e^{\lambda z_2} R(\lambda, A)\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{-e^{\mu z_1}}{\mu - \lambda}\,\mathrm{d}\mu\Big)\,\mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}$$

En refermant les chemins γ et γ' à gauche par des arcs de cercles de rayons de plus en plus grands, et en utilisant le fait que γ est à gauche de γ', nous avons

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{\mu z_1}}{\lambda - \mu}\,\mathrm{d}\mu = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{e^{\lambda z_2}}{\lambda - \mu}\,\mathrm{d}\lambda = e^{\mu z_2}$$

par le théorème de Cauchy. On en déduit que

$$\begin{aligned}
T(z_1)T(z_2) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} e^{\mu z_1} R(\lambda, A) e^{\mu z_2}\,\mathrm{d}\mu\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} e^{\mu(z_1+z_2)} R(\lambda, A)\,\mathrm{d}\mu\\
&= T(z_1 + z_2).
\end{aligned}$$

Cela montre *(iii)*. *(iv)* n'est pas ici démontré.

□

Si dans la définition 6.16 on ne considère que les valeurs $z \in \mathbb{R}_+$, alors d'après la proposition précédente, $(T(z))_{z\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur X. Nous allons voir que son générateur est l'opérateur duquel on était parti.

Proposition 6.18. — *Le générateur du semi-groupe fortement continu défini par* (43) *est l'opérateur sectoriel* $(A, \mathcal{D}(A))$.

Démonstration. — Le résultat n'est pas ici démontré. □

Définition 6.19. — *Une famille d'opérateurs* $(T(z))_{z\in\Sigma_\delta\cup\{0\}} \subset \mathcal{L}(X)$ *est appelée semi-groupe holomorphe (d'angle* $\delta \in]0, \frac{\pi}{2}]$*) si*

$$(i)\ T(0) = I \text{ et } T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \Sigma_\delta.$$

$$(ii) \text{ L'application } z \longmapsto T(z) \text{ est holomorphe sur } \Sigma_\delta.$$

$$(iii)\ \lim_{z\to 0,\ z\in\Sigma_\delta} T(z)x = x, \quad \forall x \in X \text{ et } 0 < \delta' < \delta.$$

Si de plus,

$$(iv)\ \|T(z)\|_{\mathcal{L}(X)} \text{ est borné sur } \Sigma_{\delta'}, \quad \forall 0 < \delta' < \delta,$$

on appelle $(T(z))_{z\in\Sigma_\delta\cup\{0\}}$ *un semi-groupe holomorphe borné.*

PARTIE IV
ANNEXE

Remarque 6.20. — Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives telles que $a_n \le b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

En effet, pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque nous avons

$$a_k \overset{\text{hyp.}}{\le} b_k \le \sup_{j\ge n} b_j, \quad \forall k \ge n.$$

Donc

$$a_k \le \sup_{j\ge n} b_j, \quad \forall k \ge n \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{k\ge n} a_k \le \sup_{j\ge n} b_j$$

On a donc

$$0 \le \underbrace{\sup_{j\ge n} b_j - \sup_{k\ge n} a_k}_{=:u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

et on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'élément

$$u := \lim_{n\to\infty} \sup_{j\ge n} b_j - \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} a_k,$$

car $(\sup_{j\ge n} b_j)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sup_{k\ge n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites décroissantes et minorées (par 0 car on travaille avec des suites positives). Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, on a

$$0 \le u = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} a_k}_{=:\limsup_{n\to\infty} a_n} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sup_{j\ge n} b_j}_{=:\limsup_{n\to\infty} b_n}. \tag{45}$$

En effet, si on supposait par l'absurde que $u < 0$, alors pour $\varepsilon = -\frac{u}{2} > 0$, par définition de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers u on aurait l'existence de $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que $|u_{N_\varepsilon} - u| \le -\frac{u}{2}$. Cela implique notamment que $u_{N_\varepsilon} \le -\frac{u}{2} + u < 0$, et contredit le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive. On déduit par (45) le résultat souhaité :

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Proposition 6.21. — *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. La fonction*

$$\varphi(x) = e^x \int_x^\infty e^{-\xi} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

est continue pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration. — La fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$, donc pour avoir le résultat voulu il suffit de montrer que la fonction

$$x \longmapsto \int_x^\infty e^{-\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ une suite qui converge par la droite vers $x \in \mathbb{R}$ (la preuve est identique pour la continuité à gauche). Montrons que

$$\int_{x_n}^\infty e^{-\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_x^\infty e^{-\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{46}$$

c'est-à-dire que

$$\Big|\int_{x_n}^\infty e^{-\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \int_x^\infty e^{-\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{x_n}^\infty & e^{-\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \int_x^\infty e^{-\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big| \\
&= \Big|\int_0^\infty [\chi_{[x_n,+\infty[}(\xi) - \chi_{[x,+\infty[}(\xi)] e^{-\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big| \\
&= \Big|\int_0^\infty \chi_{[x,x_n[}(\xi) e^{-\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big| \\
&\le \int_0^\infty \underbrace{\chi_{[x,x_n[}(\xi) e^{-\xi}|f(\xi)|}_{:=g_n(\xi)}\,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

On cherche à appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Les fonctions g_n sont mesurables, $|g_n|$ est majorée presque partout par la fonction $\xi \longmapsto e^{-\xi}|f(\xi)|$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz). On n'obtient pas la convergence presque partout de g_n vers 0, mais on l'obtient pour une sous-suite $(g_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela on remarque que

$$\|\chi_{[x,x_n[}\|_{L^1(\mathbb{R})} = \mu([x,x_n[) = |x - x_n| = x - x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Donc par le corollaire du théorème de Riesz-Ficher $(\chi_{[x,x_n[})_{n\in\mathbb{N}}$ et donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent une sous-suite qui converge presque partout vers 0. Ainsi le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne que

$$\int_0^\infty g_{\varphi(n)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Cela prouve que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge par la droite vers x, il existe une sous-suite extraite de la suite $(\int_0^\infty g_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0.

Il reste à montrer que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge par la droite vers x, la suite $(\int_0^\infty g_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Supposons que ce n'est pas le cas. Il existe alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers la droite vers x et il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N \text{ tel que } \int_0^\infty g_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi > \varepsilon_0,$$

ce qui implique que l'on peut extraire la sous-suite $(\int_0^\infty g_{\psi(n)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^\infty g_{\psi(n)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi > \varepsilon_0. \tag{47}$$

On peut alors mettre à jour une contradiction puisque d'une part, comme $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, on a alors aussi $x_{\psi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Or par conséquent, ce que l'on vient de montrer précédemment donne l'existence d'une sous-suite $(\int_0^\infty g_{\psi\circ\varphi(n)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0. Mais d'autre part, du fait de (47), cette sous-suite vérifie également

$$\int_0^\infty g_{\psi\circ\varphi(n)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi > \varepsilon_0 > 0. \qquad \square$$

7. Plus sur les semi-groupes fortement continus

Nous allons donner quelques résultats qui permettent de vérifier qu'un semi-groupe d'opérateurs bornés sur un espace de Banach est fortement continu.

Lemme 7.1. — *Soit X un espace de Banach et $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ un compact. Soit $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}(X)$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Pour tout $x \in X$, l'application $t \longmapsto F(t)x$ est continue de $\mathcal{K}$ dans X.*

(b) $\sup\limits_{t\in\mathcal{K}} \|F(t)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$, *et il existe une partie D dense dans X telle que pour tout $x \in D$ l'application $t \longmapsto F(t)x$ est continue de $\mathcal{K}$ dans X.*

(c) *Pour tout compact $\mathcal{C} \subset X$, l'application $(t, x) \longmapsto F(t)x$ est uniformement continue de $\mathcal{K} \times \mathcal{C}$ dans X.*

Démonstration. — Montrons tout d'abord que (c) implique (a). Soit $x \in X$ quelconque. Remarquons que $\{x\}$ est un compact de X. Par (c), l'application $t \mapsto F(t)x$ est uniformément continue de $\mathcal{K}$ dans X, et par conséquent elle est continue de $\mathcal{K}$ dans X. Ayant pris $x \in X$ quelconque, on déduit (a).

Pour (a) implique (b), soit $x \in X$. Puisque $\mathcal{K}$ est compact et l'application $t \mapsto F(t)x$ est continue, on a

$$\sup_{t\in\mathcal{K}} \|F(t)x\|_X < +\infty.$$

Le théorème de Banach-Steinhaus nous donne que

$$\sup_{t\in\mathcal{K}} \|F(t)\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty,$$

et on prend $D = X$ pour déduire (b).

Montrons que (b) implique (c). Par (b), il existe $M > 0$ tel que

$$\sup_{t\in\mathcal{K}} \|F(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\mathcal{C} \subset X$ un compact. Puisque $\mathcal{C}$ est un compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $(x_1, \ldots, x_m) \in D$[(9)], et

$$\mathcal{C} \subset \bigcup_{i=1}^{m} B\big(x_i, \frac{\varepsilon}{M}\big).$$

Par (b) on sait de plus que pour tout $x_i \in D$, l'application $t \mapsto F(t)x_i$ est continue de $\mathcal{K}$ dans X. Or $\mathcal{K}$ est compact, donc par le théorème de Heine, $t \mapsto F(t)x_i$ est uniformément continue sur $\mathcal{K}$. Donc il existe $\delta > 0$ tel que

[(9)] Puisque $\mathcal{C} \subset \overline{D}$, on a $\mathring{\mathcal{C}} \subset D$. On commence par recouvrir $\mathring{\mathcal{C}}$ avec toutes les boules de centre $x \in D$, $\mathcal{C}$ est donc inclus dans ce même recouvrement de boules ouvertes en augmentant le rayon, puis on peut extraire un sous-recouvrement fini puisque $\mathcal{C}$ est compact.

pour tout $t, s \in \mathcal{K}$, $|t - s| < \delta$ implique $\|F(t)x - F(s)x\|_X < \varepsilon$. Il nous reste à montrer qu'on peut avoir une continuité uniforme sur $\mathcal{C}$ aussi - il s'agit donc de trouver $\tilde{\delta}_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathcal{C}$, $\|x - y\|_X < \tilde{\delta}_\varepsilon$ implique $\|F(t)x - F(s)y\|_X < \varepsilon$. Si on choisit $\tilde{\delta}_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{M}$, nous avons, pour tout j et $x, y \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned}
\|F(t)x - F(s)y\|_X &\leq \|F(t)x - F(t)x_j\|_X + \|F(t)x_j - F(s)x_j\|_X \\
&\quad + \|F(s)x_j - F(s)x\|_X + \|F(s)x - F(s)y\|_X \\
&\leq \underbrace{\|F(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}_{\leq M} \underbrace{\|x - x_j\|_X}_{< \frac{\varepsilon}{M}} + \underbrace{\|F(t)x_j - F(s)x_j\|_X}_{< \varepsilon} \\
&\quad + \underbrace{\|F(s)\|_{\mathcal{L}(X)}}_{\leq M} \underbrace{\|x_j - x\|_X}_{< \frac{\varepsilon}{M}} + \underbrace{\|F(s)\|_{\mathcal{L}(X)}}_{\leq M} \underbrace{\|x - y\|_X}_{< \frac{\varepsilon}{M}} \\
&< 4\varepsilon,
\end{aligned}$$

et la preuve est close. □

Proposition 7.2. — *Soit X un espace de Banach et $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe d'opérateurs bornés sur X. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *$(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu.*

(*b*) $\lim\limits_{t \downarrow 0} T(t)x = x, \quad \forall x \in X.$

(*c*) *Il existe $\delta > 0, M \geq 1$ et il existe une partie D dense dans X tels que :*

  (*i*) $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \quad \forall t \in [0, \delta]$

  (*ii*) $\lim\limits_{t \downarrow 0} T(t)x = x, \quad \forall x \in D.$

Démonstration. — Pour montrer que (a) implique (c). On commence par montrer que (a) implique (c, i) par l'absurde en supposant que $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu et que

$$\exists M \geq 1 \text{ et } \exists \delta > 0 \text{ tels que } \forall t \in [0, \delta],\ \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$$

est faux, c'est-à-dire que

$$\forall M \geq 1 \text{ et } \forall \delta > 0, \exists t_{M,\delta} \in [0, \delta] \text{ tel que } \|T(t_{M,\delta})\|_{\mathcal{L}(X)} > M.$$

Cela implique que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall \delta > 0, \exists t_{n,\delta} \in [0, \delta] \text{ tel que } \|T(t_{n,\delta})\|_{\mathcal{L}(X)} > n$$

En fixant $\delta = \frac{1}{n}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \text{soit } \delta = n^{-14}, \exists t_n \in [0, n^{-14}] \text{ tel que } \|T(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)} > n$$

Ainsi, on a trouvé une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ qui converge vers 0 telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|T(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)} = +\infty$$

On a donc une famille $\{T(t_n) : n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathcal{L}(X)$ qui n'est pas bornée. La contraposée du théorème de Banach-Steinhaus (théorème 1.2) donne l'existence d'un $x \in X$ tel que la famille $\{T(t_n)x : n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est pas bornée. Par hypothèse l'application $t \longmapsto T(t)x$ est continue à droite en 0. Alors, comme $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0, $T(t_n)x \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Cela implique que $\{T(t_n)x : n \in \mathbb{N}^*\}$ est bornée. Il y a donc contradiction et (a) implique $(c), (i)$. Ensuite, pour montrer que (a) implique $(c), (ii)$, il suffit de choisir $D = X$ car par hypothèse pour tout $x \in X$, $\lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x$.

Pour montrer que (c) implique (b), on pose $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ une suite qui converge vers 0 et on va montrer que pour tout $x \in X$, $\lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x$. Posons

$$\mathcal{K}\colon = \{t_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$

$\mathcal{K} \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathcal{K}$ est compact [10]. On va chercher à vérifier la troisième assertion du lemme 7.1 pour obtenir le résultat voulu. Le point (c) de la proposition donne l'existence d'une partie D dense dans X telle que pour tout $x \in D$ l'application $t \longmapsto T(t)x$ est continue en 0. Or,

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}, \quad \text{si } u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u, \text{ alors } u = 0 \tag{48}$$

(admis ici). Par conséquent l'application $t \longmapsto T(t)x$ est continue de $\mathcal{K}$ dans X. Il reste à montrer que

$$\sup_{t\in\mathcal{K}} \|T(t)\| < \infty.$$

Comme $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, il existe $N_\delta \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\delta$, $t_n \in [0, \delta]$. Pour ces n on a alors aussi $\|T(t_n)\| \leq M$. Ainsi pour tout $t \in K$,

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \max(M, \max_{m=0\ldots N_\delta - 1} \|T(t_m)\|_{\mathcal{L}(X)}).$$

Alors d'après le lemme 7.1, pour tout $x \in X$, l'application $t \longmapsto T(t)x$ est continue de $\mathcal{K}$ dans X. Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} T(t_n)x = T(0)x = x.$$

Pour montrer que (b) implique (a). Soit $t_0 > 0$ et $x \in X$, on va montrer la continuité à droite et à gauche en t_0. Posons $h = t - t_0$. Lorsque $t \downarrow t_0$, h et strictement positif et $h \downarrow 0$. Donc par hypothèse

$$\lim_{h\downarrow 0} T(h)x = x \tag{49}$$

[10] Si on a un recouvrement quelconque de $\mathcal{K}$, au moins l'un des ouverts du recouvrement contient 0 et donc contient également l'ensemble $\{t_n : n \geq n_0\}$ pour un certain rang n_0, car la suite $(t_n)_n$ converge vers 0; en choisissant cet ouvert-là ainsi qu'un ouvert pour chacun des points $t_0, t_1, \ldots, t_{n_0-1}$ restants, on a un sous-recouvrement fini de $\mathcal{K}$

Or

$$\begin{aligned}\|T(t)x - T(t_0)x\|_X &= \|T(t_0 + t - t_0)x - T(t_0)x\|_X \\ &= \|T(t_0)T(h)x - T(t_0)x\|_X \\ &= \|T(t_0)(T(h)x - x)\|_X \\ &\leq \|T(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)} \underbrace{\|T(h)x - x\|_X}_{\xrightarrow[h\downarrow 0]{} 0 \text{ par } (49)}\end{aligned}$$

Cela implique que $\lim_{t\downarrow t_0} T(t)x = T(t_0)x$. Lorsque $t \uparrow t_0$, $-h$ et strictement positif et $-h \downarrow 0$. Donc par hypothèse

$$\lim_{-h\downarrow 0} T(-h)x = x \tag{50}$$

Or

$$\begin{aligned}\|T(t)x - T(t_0)x\|_X &= \|T(t_0 + t - t_0)x - T(t_0)x\|_X \\ &= \|T(t_0 + h)x - T(t_0 + h - h)x\|_X \\ &= \|T(t_0 + h)x - T(t_0 + h)T(-h)x\|_X \\ &= \|T(t_0 + h)(x - T(-h)x)\|_X \\ &\leq \|T(t_0 + h)\|_{\mathcal{L}(X)} \underbrace{\|x - T(-h)x\|_X}_{\xrightarrow[h\downarrow 0]{} 0 \text{ par } (50)}.\end{aligned}$$

On peut conclure que $\lim_{t\uparrow t_0} T(t)x = T(t_0)x$ car

$$\sup_{h\in[-t_0,0]} \|T(t_0 + h)\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{t\in[0,t_0]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$$

par le lemme 2.6. □

Proposition 7.3. — *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu. Il existe des constantes $w \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{wt}, \quad \forall t \geq 0. \tag{51}$$

Démonstration. — Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu. En particulier, pour tout $x \in X$, l'application $t \mapsto T(t)x$ est continue sur $[0, 1]$, et donc bornée sur $[0, 1]$. Par conséquent, pour tout $x \in X$ il existe $M_1 > 0$ tel que

$$\sup_{t\in[0,1]} \|T(t)x\|_X \leq M_1,$$

et par le théorème de Banach-Steinhaus, il existe $M_2 > 0$ tel que

$$\sup_{t\in[0,1]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_2.$$

Afin d'avoir $M \geq 1$, prenons $M = \max(1, M_2)$ et ainsi

$$\sup_{t \in [0,1]} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M.$$

Puisque $\mathbb{R}_+ = \bigcup_{n \in N} [n, n+1[$, on écrit $t \in \mathbb{R}_+$ comme $t = s + n$, avec $s \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$. Ainsi à $t \in \mathbb{R}_+$ fixé,

$$\begin{aligned} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|T(s+n)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|T(s)T(n)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|T(s)T(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{=n})\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \underbrace{\|T(s)\|_{\mathcal{L}(X)}}_{\leq M} \underbrace{\|T(1)\|^n_{\mathcal{L}(X)}}_{\leq M^n} \\ &= M^{n+1}. \end{aligned}$$

De plus, $M^{n+1} = MM^n = Me^{n \ln M}$ (c'est pour cela qu'on a besoin de la condition $M \geq 1$). Puisque $t \geq n$, on a $e^{n \ln M} \leq e^{t \ln M}$. On prend $w = \ln M$ et on déduit le résultat souhaité.

$\square$

Définition 7.4. — *Soit* $(T(t))_{t \geq 0}$ *un semi-groupe fortement continu.*

- $(T(t))_{t \geq 0}$ *est appelé borné si on peut prendre* $w = 0$ *dans* (51).
- $(T(t))_{t \geq 0}$ *est "de contraction" si on peut prendre* $w = 0$ *et* $M = 1$ *dans* (51).
- $(T(t))_{t \geq 0}$ *est appelé isométrique si* $\|T(t)x\|_X = \|x\|_X$ *pour tout* $t \geq 0$ *et* $x \in X$.

8. Intégrale de Bochner

On donne ici une très courte introduction à la théorie de l'intégration de Lebesgue pour des fonctions à valeurs dans un espace de Banach, suivant [**4**]. Par la suite, soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré (où μ est une mesure σ-finie) et X un espace de Banach.

Définition 8.1. — *Un ensemble $F \subset X$ est dit séparable s'il existe un ensemble dénombrable $F_0 \subset X$ tel que $F \subset \overline{F_0}$.*

Définition 8.2. — *Une fonction $f : \Omega \to X$ est dite simple si et seulement si pour un certain $n \in \mathbb{N}$, il existent des vecteurs distincts $b_1, \dots b_n$ de X et des ensembles $A_1, \dots A_n$ de $\mathcal{A}$ disjoints, tous de mesure finie, tels que*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}(x) b_k,$$

pour tout $x \in \Omega$. En particulier, $\operatorname{Im} f$ est fini.

Soit $f : \Omega \to X$ une fonction simple. On définit *l'intégrale de Bochner* de f par

$$\int_\Omega f(x) \, \mathrm{d}\mu(x) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) b_k.$$

Définition 8.3. — *Une fonction $f : \Omega \to X$ est dite fortement mesurable s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions simples de Ω dans X telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \|f(.) - f_n(.)\|_X = 0$$

ponctuellement presque partout sur Ω. Dans ce cas, la fonction $\|f(.)\|_X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ est $\mathcal{A}$-mesurable.

Définition 8.4. — *Une fonction $f : \Omega \to X$ est dite Bochner-intégrable si elle est fortement mesurable et si pour une certaine suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions simples de Ω dans X, nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f(x) - f_n(x)\|_X \, \mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

Dans ce cas, on définit l'intégrale de Bochner de f sur un ensemble $J \subset \Omega$ $\mathcal{A}$-mesurable par

$$\int_J f \, \mathrm{d}\mu \overset{\text{déf}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \chi_J \, \mathrm{d}\mu.$$

La limite est prise au sens de la norme de X - elle existe est est indépendante de la choix de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 8.5 **(Critére d'intégration de Bocnher)**
Une fonction $f : \Omega \to X$ fortement mesurable est Bochner intégrable si et seulement si

$$\int_{\Omega} \|f(x)\|_X \, \mathrm{d}\mu(x) < +\infty.$$

Proposition 8.6. — *Soit $f : \Omega \to X$ Bochner-intégrable et $J \in \mathcal{A}$. Alors*

$$\Big\| \int_J f \, \mathrm{d}\mu \Big\|_X \leq \int_J \|f(x)\|_X \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Proposition 8.7. — *Soit $f : \Omega \to X$ Bochner-intégrable. Alors*

$$\int_{\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k} f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{A_k} f \, \mathrm{d}\mu$$

pour toute suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'ensembles disjoints $\mathcal{A}$-mesurables de Ω, tous de mesure finie. De plus,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \colon \forall J \in \mathcal{A}, \quad \mu(J) < \delta \Longrightarrow \Big\| \int_J f \, \mathrm{d}\mu \Big\|_X < \varepsilon.$$

Cette dernière propriété indique que f est μ-absolument continue.

Théorème 8.8 **(Convergence dominée de Lebesgue)**
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions Bochner-intégrables de Ω dans X qui converge ponctuellement (i.e. simplement) presque partout sur $J \in \mathcal{A}$ vers une certaine fonction $f : \Omega \to X$. S'il existe $g : \Omega \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\|f_n(.)\|_X \leq g \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

presque partout sur J et si

$$\int_J g \, \mathrm{d}\mu < +\infty,$$

alors f est Bochner-intégrable et

$$\lim_{n\to\infty} \int_J f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_J f \, \mathrm{d}\mu.$$

Théorème 8.9. — *Soient Y un espace de Banach et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire fermé. Si $f : \Omega \to X$ est Bochner-intégrable et $T \circ f$ est Bochner-intégrable, alors pour tout $J \in \mathcal{A}$,*

$$\int_J T \circ f \, \mathrm{d}\mu = T\Big(\int_J f \, \mathrm{d}\mu \Big).$$

Si T est un opérateur borné, alors on peut observer que $T \circ f$ est automatiquement Bochner-intégrable - il suffit de majorer l'intégrande par la norme de T dans la définition.

Ce théorème nous permet de justifier certains calculs. En particulier, on observe qu'il s'applique au générateur d'un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t\geq 0}$ (puisqu'il s'agit d'un opérateur fermé) mais aussi à l'opérateur $T(t)$, à $t \geq 0$ fixe.

Références

[1] Haim Brezis, *Analyse Fonctionelle*, Masson, 1983.
[2] Klaus-Jochen Engel et Rainer Nagel, *A Short Course on Operator Semigroups*, Springer, 2006.
[3] Marius Tucsnak et George Weiss, *Observation and Control for Operator Semigroups*, Birkhäuser, 2009.
[4] Kosaku Yosida, *Functional Analysis*, Springer, 1980.

Juillet 2017

Borjan Geshkovski & Charlotte Rodriguez, *Master 1 Analyse, EDP, Probabilités, Université de Bordeaux.*