Natural Deduction Exercises for SD+
PHI 154 (Eliot) Fall 2015

Generally, the second half of these is more difficult than the first. I have tried to include problems that encourage you to practice the derived rules. It will benefit you to do as many as you can until you feel that proving them feels quick and natural.

The following are valid arguments in SL or are theorems that can be proved without premises. Prove them using the natural deduction system for TFL.

1. $\neg L \lor M$
   $\underline{M \to N}$
   $L \to N$

2. $A \to B$
   $B \to \neg C$
   $\neg D \to E$
   $\underline{\neg C \to \neg D}$
   $\neg E \to \neg A$

3. $\neg(H \lor U)$
   $\neg(H \lor \neg C)$
   $\underline{\neg(C \land E)}$
   $\neg(H \lor E)$

4. $\underline{F \lor F}$
   $F \land F$

5. $\underline{O \to space6em}$
   $M \to (Q \to (L \to O))$

6. $(P \to Q) \to (R \to S)$
   $\underline{R \land \neg S}$
   $\neg Q$

7. $R \to (U \land P)$
   $E \lor R$
   $E \to F$
   $\underline{F \leftrightarrow U}$
   U

8. $C \land \neg F$
   $(P \to H) \leftrightarrow I$
   $\underline{H \leftrightarrow \neg F}$
   I

9. $\underline{A \land (B \lor C)}$
   $(A \land B) \lor (A \land C)$

10. $(L \to \neg M) \to P$
    $\underline{O \land \neg P}$
    $M \land O$

11. $\neg(Q \land C)$
    $D \to C$
    $\underline{\neg Q \to \neg D}$
    $\neg D$

12. $E \to (F \to G)$
    E
    $\underline{\neg F \to \neg E}$
    G

13. $\underline{\neg(M \lor N)}$
    $\neg(M \leftrightarrow \neg N)$

14. $\underline{(D \to E) \to D}$
    D

15. $\underline{B \to C}$
    $\neg C \to \neg(B \land G)$

16. $R \to S$
    $\underline{\neg R \to \neg S}$
    $R \leftrightarrow S$

17. $(Q \to S) \land \neg N$
    $(\neg Q \to O) \lor N$
    $\underline{(\neg S \to O) \to L}$
    L

18. $B \lor \neg C$
    $\underline{\neg B \lor \neg C}$
    $\neg C$

19. $\underline{H \lor (F \lor D)}$
    $D \lor (F \lor H)$

20. $\underline{(C \lor E) \lor F}$
    $\neg C \to (\neg E \to F)$

21. $\underline{J \land (\neg K \to L)}$
    $(J \land K) \lor (J \land L)$

22. $R \leftrightarrow S$
    $\underline{(S \lor T) \land \neg T}$
    R

23. $G \leftrightarrow \neg H$
    $\neg H \leftrightarrow I$
    $\underline{I \leftrightarrow \neg E}$
    $\neg E \to G$

24. $[M \lor (O \leftrightarrow T)] \land N$
    $\underline{N \leftrightarrow \neg M}$
    $B \to (O \leftrightarrow T)$

25. $\neg S \leftrightarrow C$
$(F \vee S) \wedge (G \wedge M)$
$\underline{G \rightarrow \neg S}$
$M \wedge C$

26. $(A \wedge B) \leftrightarrow (P \vee D)$
$\underline{(B \wedge A) \wedge \neg D}$
P

27. $\neg N$
$\underline{(\neg N \rightarrow L) \wedge [D \leftrightarrow (\neg N \vee A)]}$
$L \wedge D$

28. Derive $(A \wedge A) \leftrightarrow A$ without premises.

29. $M \rightarrow (A \rightarrow R)$
$\neg A \rightarrow \neg M$
$\underline{L \wedge M}$
R

30. $\neg(\neg J \vee K) \rightarrow \neg(L \wedge M)$
$\underline{\neg(\neg J \vee K) \wedge M}$
$\neg(L \leftrightarrow M)$

31. $R \rightarrow (\neg C \rightarrow D)$
$\underline{\neg C \wedge R}$
$D \wedge R$

32. $\underline{J \wedge K}$
$K \wedge (J \vee P)$

33. $F \wedge \neg I$
$\underline{H \vee I}$
$H \wedge F$

34. $[M \vee (C \rightarrow T)] \wedge P$
$\underline{(P \rightarrow \neg M) \wedge C}$
T

35. $\underline{\neg(\neg M \vee \neg B) \wedge P}$
$\neg(\neg M \vee \neg B) \vee \neg P$

36. $\underline{E}$
$(R \vee E) \wedge (E \vee \neg(N \vee M))$

37. $(O \vee Q) \rightarrow R$
$\underline{(F \wedge Q) \wedge C}$
$F \wedge R$

38. $\underline{M \wedge (O \vee N)}$
$(O \vee N) \wedge (M \vee O)$

39. $A \vee D$
$\neg S \rightarrow C$
$A \rightarrow \neg S$
$\underline{\neg D \rightarrow space4em}$
C

40. $\neg\neg O \wedge \neg\neg S$
$\underline{\neg O \vee \neg T}$
$\neg T$

41. $\neg R \rightarrow P$
$(F \vee R) \wedge (O \wedge M)$
$\underline{O \rightarrow \neg R}$
$M \wedge P$

42. $(M \wedge L) \rightarrow (P \vee R)$
$\underline{(L \wedge M) \wedge \neg R}$
P

43. $L \rightarrow [M \rightarrow (\neg N \vee I)]$
$\underline{(M \wedge \neg I) \wedge L}$
$\neg N$

44. $[(B \vee M) \wedge R] \rightarrow T$
$\underline{M \wedge R \rightarrow space2em}$
T

45. $K \wedge \neg L$
$[\neg(\neg G \wedge \neg H) \vee R] \wedge F$
$\underline{F \rightarrow \neg R}$
$Q \vee \neg(\neg G \wedge \neg H)$

46. $\underline{(A \wedge \neg C) \wedge (E \wedge F)}$
$(A \wedge F) \wedge E$

47. $C \wedge (\neg R \wedge S)$
$\underline{M \wedge (\neg R \rightarrow P)}$
$P \wedge C$

48. $C \rightarrow [(C \wedge D) \rightarrow (A \rightarrow B)]$
$D \rightarrow C$
$\underline{D \wedge B \rightarrow space4em}$
$A \rightarrow B$

49. $E \rightarrow (F \wedge \neg G)$
$J \vee \neg H$
$\underline{E \wedge F \rightarrow space2em}$
$\neg G$

50. $(L \wedge B) \wedge (Q \vee F)$
$\underline{\neg Q \wedge [(F \wedge L) \rightarrow R]}$
R