

①

1	$\neg L \vee M$	
2	$M \rightarrow N$	
3	L	
4	$\neg N$	
5	$\neg M$	MT 2,4
6	$\neg L$	DS 1,5
7	\perp	TE 3,6
8	N	IP 4-7
9	$L \rightarrow N$	$\rightarrow I$ 3-8

②

1	$A \rightarrow B$	
2	$B \rightarrow \neg C$	
3	$\neg D \rightarrow E$	
4	$\neg C \rightarrow \neg D$	
5	$\neg E$	
6	$\neg D$	MT 3,5
7	$\neg C$	MT 4,6
8	$\neg B$	MT 2,7
9	$\neg A$	MT 1,8
10	$\neg E \rightarrow \neg A$	$\rightarrow I$ 5-9

③

1	$\neg(H \vee U)$	
2	$\neg(H \vee \neg C)$	
3	$\neg(\neg A)$	
4	$\neg H \wedge \neg C$	Dem 2
5	$\neg C \vee \neg E$	Dem 3
6	$\neg C$	$\wedge E$ 4
7	$\neg E$	DS 4,6
8	$\neg H$	$\wedge E$ 4
9	$\neg H \wedge \neg E$	$\wedge I$ 7,8
10	$\neg(H \vee E)$	Dem 9

④

1	$F \vee F$	
2	$\neg F$	
3	F	DS 1,2
4	\perp	TE 2,3
5	F	IP 2-4
6	F	R 5
7	$F \wedge F$	$\wedge I$ 5,6

⑤

1	O	
2	M	
3	Q	
4	L	
5	O	R 1
6	$L \rightarrow O$	$\rightarrow I$ 4-5
7	$Q \rightarrow (L \rightarrow O)$	$\rightarrow I$ 3-6
8	$M \rightarrow (Q \rightarrow (L \rightarrow O))$	$\rightarrow I$ 2-7

⑥

1	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (R \rightarrow S)$	
2	$R \wedge \neg S$	
3	Q	
4	P	
5	Q	R 3
6	$P \rightarrow Q$	$\rightarrow I$ 4-5
7	$R \rightarrow S$	$\rightarrow E$ 1,6
8	R	$\wedge E$ 2
9	S	$\rightarrow E$ 7,8
10	$\neg S$	$\wedge E$ 2
11	\perp	TE 9,10
12	$\neg Q$	$\neg I$ 3-11

⑦

1	$R \rightarrow (\neg A \vee P)$	
2	$\neg R$	
3	$E \rightarrow F$	
4	$F \leftrightarrow U$	
5	$\neg U$	
6	$\neg U \vee \neg P$	$\vee I$ 5
7	$\neg(\neg A \vee P)$	Dem 6
8	$\neg R$	MT 1,7
9	$\neg E$	DS 2,8
10	F	$\rightarrow E$ 3,9
11	U	$\leftrightarrow E$ 4,10
12	\perp	TE 5,11
13	U	TE IP 5-12

⑩

1	$(L \rightarrow \neg M) \rightarrow P$	
2	$O \wedge \neg P$	
3	$\neg(M \wedge O)$	
4	$\neg M \vee \neg O$	Dem 3
5	$\neg M$	
6	L	
7	$\neg M$	R 5
8	$L \rightarrow \neg M$	$\rightarrow I$ 6-7
9	P	$\rightarrow E$ 1,8
10	$\neg P$	$\wedge E$ 2
11	\perp	TE 9,10
12	$\neg O$	
13	O	$\wedge E$ 2
14	\perp	$\rightarrow E$ 12,13
15	\perp	AC 4,5-11,12-14
16	$M \wedge O$	IP 3-15

⑨

1	$A \wedge (B \vee C)$	
2	A	$\wedge E$ 1
3	$B \vee C$	$\wedge E$ 1
4	B	
5	$A \wedge B$	$\wedge I$ 2,4
6	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$\vee I$ 5
7	C	
8	$A \wedge C$	$\wedge I$ 2,7
9	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$\vee I$ 8
10	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	AC 3,4-6,9

~~⑪~~ ~~$L \rightarrow \neg M$~~ ~~$\rightarrow P$~~

⑧

1	$C \wedge \neg F$	
2	$(P \rightarrow H) \leftrightarrow \neg I$	
3	$H \leftrightarrow \neg F$	
4	P	
5	$\neg F$	$\wedge E$ 1
6	H	$\leftrightarrow E$ 3,5
7	$P \rightarrow H$	$\rightarrow I$ 4-6
8	I	$\leftrightarrow E$ 2,7

⑪

1	$\neg(B \wedge C)$	
2	$D \rightarrow C$	
3	$\neg Q \rightarrow \neg D$	
4	$\neg D$	
5	$\neg Q$	MT 3,4
6	$\neg Q \vee \neg C$	Dem 1
7	$\neg C$	DS 5,6
8	$\neg D$	MT 2,7
9	\perp	TE 4,8
10	$\neg D$	IP 4-9

12	1	$E \rightarrow (F \rightarrow G)$	
	2	E	
	3	$\neg F \rightarrow \neg E$	
	4	$\neg G$	
	5	$F \rightarrow G$	$\rightarrow E$ 1,2
	6	$\neg F$	MT 4,5
	7	$\neg E$	$\rightarrow E$ 3,6
	8	\perp	$\neg E$ 2,7
	9	G	IP 4-8

13	1	$\neg(M \vee N)$	
	2	$\neg\neg(M \leftrightarrow \neg N)$	
	3	$M \leftrightarrow \neg N$	DNE 2
	4	$\neg M \wedge \neg N$	DeM 1
	5	$\neg M$	$\wedge E$ 4
	6	$\neg N$	$\wedge E$ 4
	7	M	$\leftrightarrow E$ 3,6
	8	\perp	$\neg E$ 5,7
	9	$(M \leftrightarrow \neg N)$	IP 2-8

14	1	$(D \rightarrow E) \rightarrow D$	
	2	$\neg D$	
	3	$\neg(D \rightarrow E)$	MT 1,2
	4	$D \rightarrow \neg D$	
	5	$\neg E$	$\neg E$ 3,4
	6	\perp	$\neg E$ 2,4
	7	E	IP 5-6
	8	$D \rightarrow E$	$\rightarrow I$ 4-7
	9	\perp	$\rightarrow E$ 1,8
	10	D	$\neg E$ 3,8

15	1	$B \rightarrow C$	
	2	$\neg C$	
	3	$\neg B$	MT 1,2
	4	$\neg B \vee \neg G$	$\vee I$ 3
	5	$\neg(B \wedge G)$	DeM 4
	6	$\neg C \rightarrow \neg(B \wedge G)$	$\rightarrow I$ 2-5

16	1	$R \rightarrow S$	
	2	$\neg R \rightarrow \neg S$	
	3	R	
	4	S	$\rightarrow E$ 1,3
	5	$\neg S$	
	6	$\neg R$	
	7	$\neg S$	$\rightarrow E$ 2,6
	8	\perp	$\neg E$ 5,7
	9	R	IP 6-8
	10	$R \leftrightarrow S$	$\leftrightarrow I$ 3-4,5-9

17	1	$(Q \rightarrow S) \wedge \neg N$	
	2	$(\neg Q \rightarrow \neg O) \vee N$	
	3	$(\neg S \rightarrow \neg O) \rightarrow L$	
	4	$Q \rightarrow S$	$\wedge E$ 1
	5	$\neg N$	$\wedge E$ 1
	6	$\neg Q \rightarrow \neg O$	DS 2,5
	7	$\neg S$	
	8	$\neg Q$	MT 4,7
	9	O	$\rightarrow E$ 6,8
	10	$\neg S \rightarrow \neg O$	$\rightarrow I$ 7-9
	11	L	$\rightarrow E$ 3,10

18	1	$B \vee \neg C$	
	2	$\neg B \vee \neg C$	
	3	$\neg \neg C$	
	4	B	DS 1,3
	5	$\neg B$	DS 2,3
	6	\perp	TE 4,5
	7	$\neg C$	IP 3-6

19	1	$H \vee (F \vee D)$	
	2	$\neg [D \vee (F \vee H)]$	
	3	$\neg D \wedge \neg (F \vee H)$	Dem 2
	4	$\neg D$	$\wedge E$ 3
	5	$\neg (F \vee H)$	$\wedge E$ 3
	6	$\neg F \wedge \neg H$	Dem 5
	7	$\neg F$	$\wedge E$ 6
	8	$\neg H$	$\wedge E$ 6
	9	$F \vee D$	DS 1,8
	10	D	DS 7,9
	11	\perp	TE 4,10
	12	$D \vee (F \vee H)$	IP 2-11

20	1	$(C \vee E) \vee F$	
	2	$\neg C$	
	3	$\neg E$	
	4	$\neg F$	
	5	$C \vee E$	DS 1,4
	6	$\neg C \wedge \neg E$	$\wedge I$ 2,3
	7	$\neg (C \vee E)$	Dem 6
	8	\perp	TE 5,7
	9	F	IP 4-8
	10	$\neg E \rightarrow F$	$\rightarrow I$ 3-9
	11	$\neg C \rightarrow (\neg E \rightarrow F)$	$\rightarrow I$ 2-10

21	1	$J \wedge (\neg K \rightarrow L)$	
	2	J	$\wedge E$ 1
	3	$\neg K \rightarrow L$	$\wedge E$ 1
	4	$\neg [(J \wedge K) \vee (J \wedge L)]$	
	5	$\neg (J \wedge K) \wedge \neg (J \wedge L)$	Dem 4
	6	$\neg (J \wedge K)$	$\wedge E$ 5
	7	$\neg (J \wedge L)$	$\wedge E$ 5
	8	$\neg J \vee \neg K$	Dem 6
	9	$\neg J \vee \neg L$	Dem 7
	10	$\neg \neg J$	
	11	$\neg J$	DNE 10
	12	\perp	TE 2,11
	13	$\neg \neg J$	IP 10-12
	14	$\neg K$	DS 8,13
	15	$\neg L$	DS 9,13
	16	L	$\rightarrow E$ 3,14
	17	\perp	TE 15,16
	18	$(J \wedge K) \vee (J \wedge L)$	IP 4-17

22	1	$R \leftrightarrow S$	
	2	$(S \vee T) \wedge \neg T$	
	3	$S \vee T$	$\wedge E$ 2
	4	$\neg T$	$\wedge E$ 2
	5	S	DS 3,4
	6	R	$\leftrightarrow E$ 1,5

23	1	$G \leftrightarrow \neg H$	
	2	$\neg H \leftrightarrow I$	
	3	$I \leftrightarrow \neg E$	
	4	$\neg E$	
	5	I	$\leftrightarrow E$ 3,4
	6	$\neg H$	$\leftrightarrow E$ 2,5
	7	G	$\leftrightarrow E$ 1,6
	8	$\neg E \rightarrow G$	$\rightarrow I$ 4-7

24	1	$[M \vee (O \leftrightarrow T)] \wedge N$	
	2	$N \leftrightarrow \neg M$	
	3	B	
	4	N	$\wedge E 1$
	5	$\neg M$	$\leftrightarrow E 2, 4$
	6	$M \vee (O \leftrightarrow T)$	$\wedge E 1$
	7	$O \leftrightarrow T$	$DS 5, 6$
	8	$B \rightarrow (O \leftrightarrow T)$	$\rightarrow I 3-7$

25	1	$\neg S \leftrightarrow C$	
	2	$(F \vee S) \wedge (G \wedge M)$	
	3	$G \rightarrow \neg S$	
	4	$F \vee S$	$\wedge E 2$
	5	$G \wedge M$	$\wedge E 2$
	6	G	$\wedge E 5$
	7	M	$\wedge E 5$
	8	$\neg S$	$\rightarrow E 3, 6$
	9	C	$\leftrightarrow E 1, 8$
	10	$M \wedge C$	$\wedge I 7, 9$

26	1	$(A \wedge B) \leftrightarrow (P \vee D)$	
	2	$(B \wedge A) \wedge \neg D$	
	3	$B \wedge A$	$\wedge E 2$
	4	B	$\wedge E 3$
	5	A	$\wedge E 3$
	6	$A \wedge B$	$\wedge I 4, 5$
	7	$P \vee D$	$\leftrightarrow E 1, 6$
	8	$\neg D$	$\wedge E 2$
	9	P	$DS 7, 8$

27	1	$\neg N$	
	2	$(\neg N \rightarrow L) \wedge [D \leftrightarrow (\neg N \vee A)]$	
	3	$\neg N \rightarrow L$	$\wedge E 2$
	4	L	$\wedge E 1, 3$
	5	$D \leftrightarrow (\neg N \vee A)$	$\wedge E 2$
	6	$\neg N \vee A$	$\vee I 1$
	7	D	$\leftrightarrow E 5, 6$
	8	$L \wedge D$	$\wedge I 4, 7$

28	1	$A \wedge A$	
	2	A	$\wedge E 1$
	3	A	
	4	A	$R 3$
	5	$A \wedge A$	$\wedge I 3, 4$
	6	$(A \wedge A) \leftrightarrow A$	$\leftrightarrow I 1-2, 3-5$

29	1	$M \rightarrow (A \rightarrow R)$	
	2	$\neg A \rightarrow \neg M$	
	3	$L \wedge M$	
	4	M	$\wedge E 3$
	5	$A \rightarrow R$	$\rightarrow E 1, 4$
	6	$\neg A$	
	7	$\neg M$	$\rightarrow E 2, 6$
	8	\perp	$\neg E 4, 7$
	9	A	$IP 6-8$
	10	R	$\rightarrow E 5, 9$

30	1	$\neg(T \rightarrow J \vee K) \rightarrow \neg(L \wedge M)$	
	2	$\neg(T \rightarrow J \vee K) \wedge M$	
	3	$\neg(T \rightarrow J \vee K)$	$\wedge E 2$
	4	$\neg(L \wedge M)$	$\rightarrow E 1, 3$
	5	$L \leftrightarrow M$	
	6	M	$\wedge E 2$
	7	L	$\leftrightarrow E 5, 6$
	8	$L \wedge M$	$\wedge I 6, 7$
	9	\perp	$\neg E 4, 8$
	10	$\neg(L \leftrightarrow M)$	$\neg I 5-9$

31	1	$R \rightarrow (T \rightarrow D)$	
	2	$\neg C \wedge R$	
	3	$\neg C$	$\wedge E 2$
	4	R	$\wedge E 2$
	5	$\neg C \rightarrow D$	$\rightarrow E 1, 4$
	6	D	$\rightarrow E 3, 5$
	7	$\neg C \wedge R$	$\wedge I 4, 6$

32	1	JAK	
	2	J	$\wedge E$ 1
	3	K	$\wedge E$ 1
	4	JvP	$\vee I$ 2
	5	$K \wedge (JvP)$	$\wedge I$ 3,4

33	1	$F \wedge \neg I$	
	2	$H \vee I$	
	3	F	$\wedge E$ 1
	4	$\neg I$	$\wedge E$ 1
	5	H	DS 2,4
	6	$H \wedge F$	$\wedge I$ 3,5

34	1	$[M \vee (C \rightarrow T)] \wedge P$	
	2	$(P \rightarrow \neg M) \wedge C$	
	3	$M \vee (C \rightarrow T)$	$\wedge E$ 1
	4	P	$\wedge E$ 1
	5	$P \rightarrow \neg M$	$\wedge E$ 2
	6	C	$\wedge E$ 2
	7	$\neg M$	$\rightarrow E$ 4,5
	8	$C \rightarrow T$	DS 3,7
	9	T	$\rightarrow E$ 6,8

35	1	$\neg(\neg M \vee \neg B) \wedge P$	
	2	$\neg(\neg M \vee \neg B) \vee \neg P$	$\wedge E$ 1
	3	$\neg(\neg M \vee \neg B) \vee \neg P$	$\vee I$ 2

36	1	E	
	2	$R \vee E$	$\vee I$ 1
	3	$E \vee \neg(N \vee M)$	$\vee I$ 1
	4	$(R \vee E) \wedge (E \vee \neg(N \vee M))$	$\wedge I$ 2,3

37	1	$(O \vee Q) \rightarrow R$	
	2	$(F \wedge Q) \wedge C$	
	3	$F \wedge Q$	$\wedge E$ 2
	4	F	$\wedge E$ 3
	5	Q	$\wedge E$ 3
	6	$O \vee Q$	$\vee I$ 5
	7	R	$\rightarrow E$ 1,6
	8	$F \wedge R$	$\wedge I$ 4,7

38	1	$M \wedge (O \vee N)$	
	2	M	$\wedge E$ 1
	3	$O \vee N$	$\wedge E$ 1
	4	$M \vee D$	$\vee I$ 2
	5	$(O \vee N) \wedge (M \vee D)$	$\wedge I$ 3,4

39	1	$A \vee D$	
	2	$\neg S \rightarrow C$	
	3	$A \rightarrow \neg S$	
	4	$\neg D$	
	5	A	DS 1,4
	6	$\neg S$	$\rightarrow E$ 3,5
	7	C	$\rightarrow E$ 2,6

40	1	$\neg \neg O \wedge \neg \neg S$	
	2	$\neg O \vee \neg \neg T$	
	3	$\neg \neg O$	$\wedge E$ 1
	4	$\neg T$	DS 2,3

41	1	$\neg R \rightarrow P$	
	2	$(F \vee R) \wedge (O \wedge M)$	
	3	$O \rightarrow \neg R$	
	4	$O \wedge M$	$\wedge E$ 2
	5	M	$\wedge E$ 4
	6	O	$\wedge E$ 4
	7	$\neg R$	$\rightarrow E$ 3,6
	8	P	$\rightarrow E$ 1,7

42	1	$(M \wedge L) \rightarrow (P \vee R)$	
	2	$(L \wedge M) \wedge \neg R$	
	3	$L \wedge M$	$\wedge E$ 2
	4	L	$\wedge E$ 3
	5	M	$\wedge E$ 3
	6	$M \wedge L$	$\wedge I$ 4,5
	7	$P \vee R$	$\rightarrow E$ 1,6
	8	$\neg R$	$\wedge E$ 2
	9	P	DS 7,8

43	1	$L \rightarrow [M \rightarrow (\neg N \vee I)]$	
	2	$(M \wedge I) \wedge L$	
	3	L	$\wedge E 2$
	4	$M \rightarrow (\neg N \vee I)$	$\rightarrow E 1, 3$
	5	$M \wedge I$	$\wedge E 2$
	6	M	$\wedge E 5$
	7	$\neg I$	$\wedge E 5$
	8	$\neg N \vee I$	$\rightarrow E 4, 6$
	9	$\neg N$	$DS 7, 8$

44	1	$[(B \vee M) \wedge R] \rightarrow T$	
	2	$M \wedge R$	
	3	M	$\wedge E 2$
	4	R	$\wedge E 2$
	5	$B \vee M$	$\vee I 3$
	6	$(B \vee M) \wedge R$	$\wedge I 4, 5$
	7	T	$\rightarrow E 1, 6$

45	1	$K \wedge \neg L$	
	2	$[\neg(\neg G \wedge \neg H) \vee R] \wedge F$	
	3	$F \rightarrow \neg R$	
	4	$\neg(\neg G \wedge \neg H) \vee R$	$\wedge E 2$
	5	F	$\wedge E 2$
	6	$\neg R$	$\rightarrow E 3, 5$
	7	$\neg(\neg G \wedge \neg H)$	$DS 4, 6$
	8	$Q \vee \neg(\neg G \wedge \neg H)$	$\vee I 7$

46	1	$(A \wedge \neg C) \wedge (E \wedge F)$	
	2	$A \wedge \neg C$	$\wedge E 1$
	3	$E \wedge F$	$\wedge E 1$
	4	A	$\wedge E 2$
	5	E	$\wedge E 3$
	6	F	$\wedge E 3$
	7	$(A \wedge F)$	$\wedge I 4, 6$
	8	$(A \wedge F) \wedge E$	$\wedge I 5, 7$

47	1	$C \wedge (\neg R \wedge S)$	
	2	$M \wedge (\neg R \rightarrow P)$	
	3	C	$\wedge E 1$
	4	$\neg R \wedge S$	$\wedge E 1$
	5	$\neg R$	$\wedge E 4$
	6	$\neg R \rightarrow P$	$\wedge E 2$
	7	P	$\rightarrow E 5, 6$
	8	$P \wedge C$	$\wedge I 3, 7$

48	1	$C \rightarrow [(C \wedge D) \rightarrow (A \rightarrow B)]$	
	2	$D \rightarrow C$	
	3	$D \wedge B$	
	4	D	$\wedge E 3$
	5	C	$\rightarrow E 2, 4$
	6	$(C \wedge D) \rightarrow (A \rightarrow B)$	$\rightarrow E 1, 5$
	7	$C \wedge D$	$\wedge I 4, 5$
	8	$A \rightarrow B$	$\rightarrow E 6, 7$

49	1	$E \rightarrow (F \wedge \neg G)$	
	2	$J \vee \neg H$	
	3	$E \wedge F$	
	4	E	$\wedge E 3$
	5	$F \wedge \neg G$	$\rightarrow E 1, 4$
	6	$\neg G$	$\wedge E 5$

50	1	$(L \wedge B) \wedge (Q \vee F)$	
	2	$\neg Q \wedge [(F \wedge L) \rightarrow R]$	
	3	$L \wedge B$	$\wedge E 1$
	4	L	$\wedge E 3$
	5	$Q \vee F$	$\wedge E 1$
	6	$\neg Q$	$\wedge E 2$
	7	F	$DS 5, 6$
	8	$F \wedge L$	$\wedge I 4, 7$
	9	$(F \wedge L) \rightarrow R$	$\wedge E 2$
	10	R	$\rightarrow E 8, 9$