DMC Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión

Matemáticas para la Economía II

Tema 1
Funciones reales de varias variables

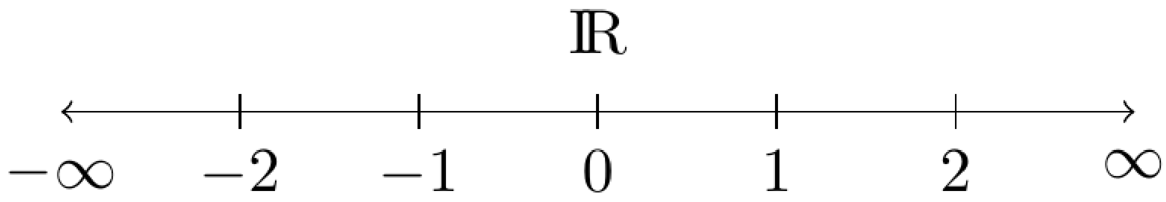
Christian González
Dpto. Métodos Cuantitativos, ULPGC
Curso 20/21

Tema 1: Funciones reales de varias variables

1. Funciones de varias variables

Nociones topológicas en $\mathbb{R}^n$

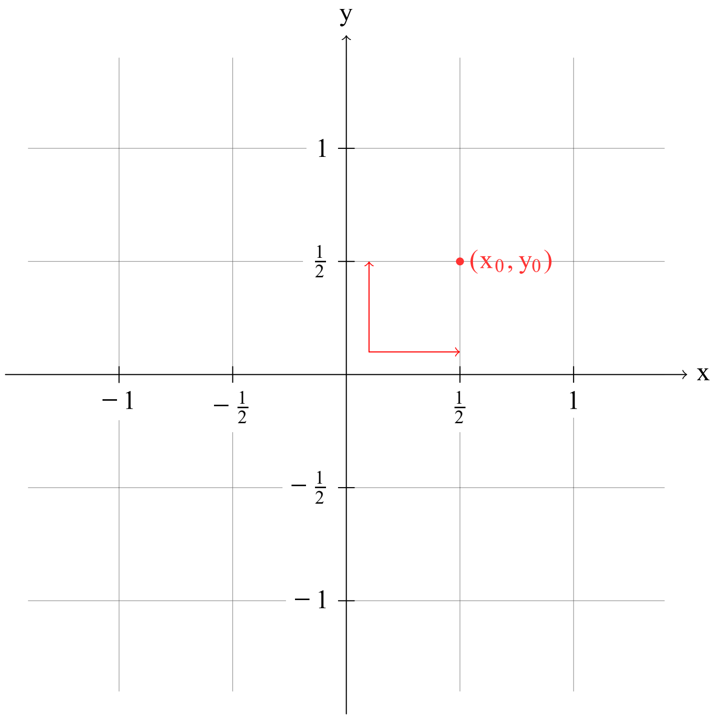
$n = 1$, $\mathbb{R}$ es la recta unidimensional



Nociones topológicas en $\mathbb{R}^n$ (cont.)

$n = 2$, $\mathbb{R}^2$ es el plano real

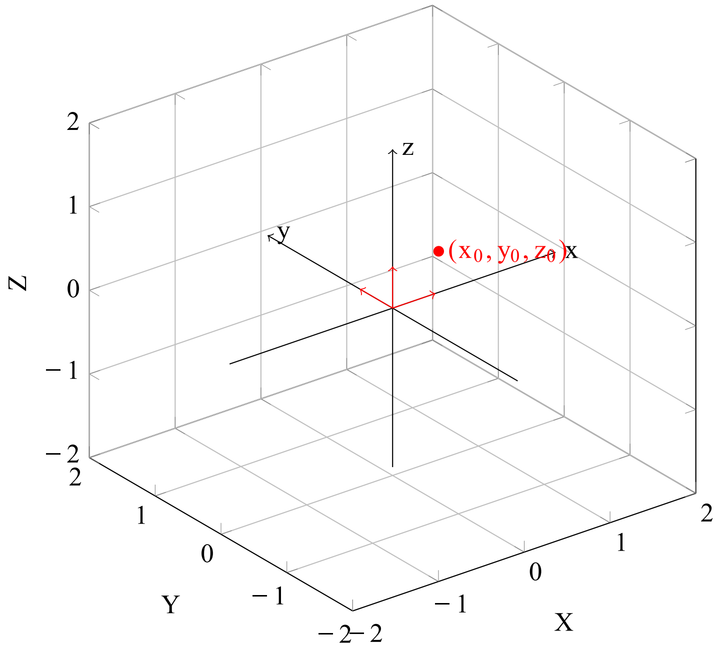
$$n = 2 \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2\}$$



Nociones topológicas en $\mathbb{R}^n$ (cont.)

$n = 3$, $\mathbb{R}^3$ es el espacio real tridimensional

$$n = 3 \to \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3\}$$



Nociones topológicas en $\mathbb{R}^n$ (cont.)

En general para $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ es un espacio n-dimensional

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

- Vector en $\mathbb{R}^n$

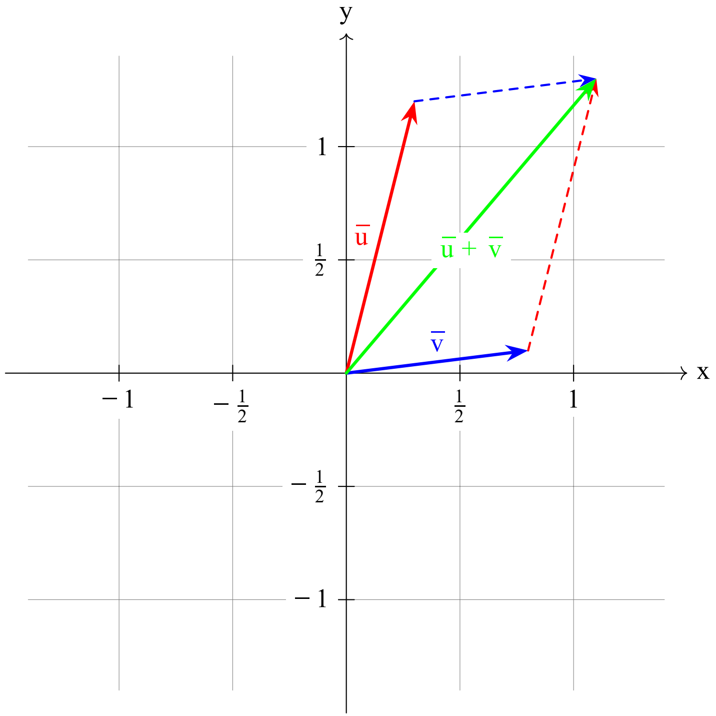
$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \to \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Operaciones con vectores

Suma de vectores

$$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$$

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

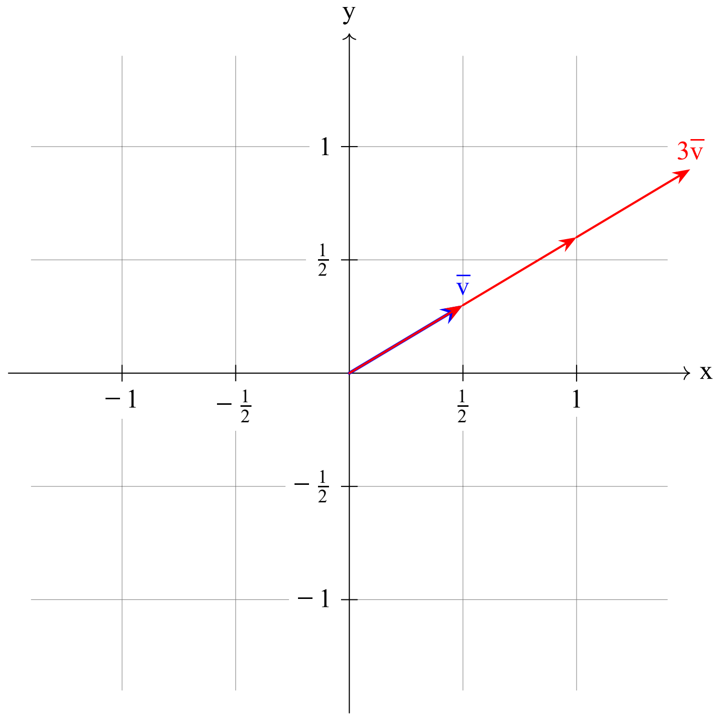


Operaciones con vectores (cont.)

Producto de un escalar por un vector

$$\lambda \in \mathbb{R},\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

$$\lambda\vec{x} = \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

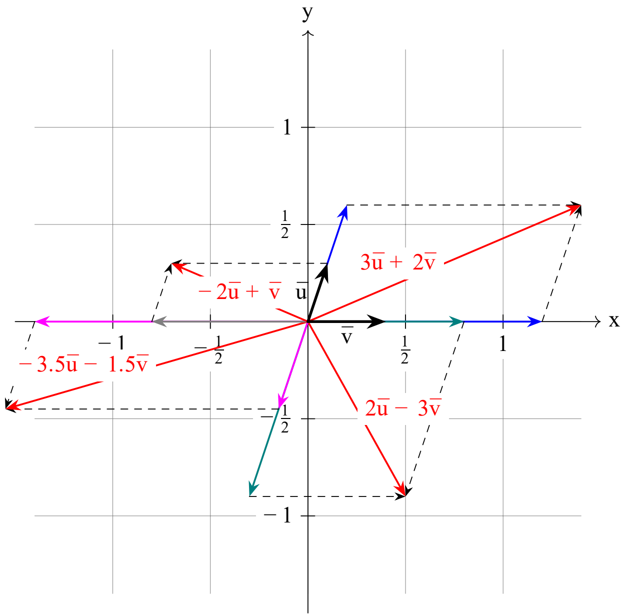


Operaciones con vectores (cont.)

Combinación lineal de vectores

$$\vec{z} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{z} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = \alpha(x_1, \dots, x_n) + \beta(y_1, \dots, y_n) =$$
$$(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) + (\beta y_1, \dots, \beta y_n) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_n + \beta y_n)$$



Operaciones con vectores (cont.)

Producto escalar de vectores

$$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$$

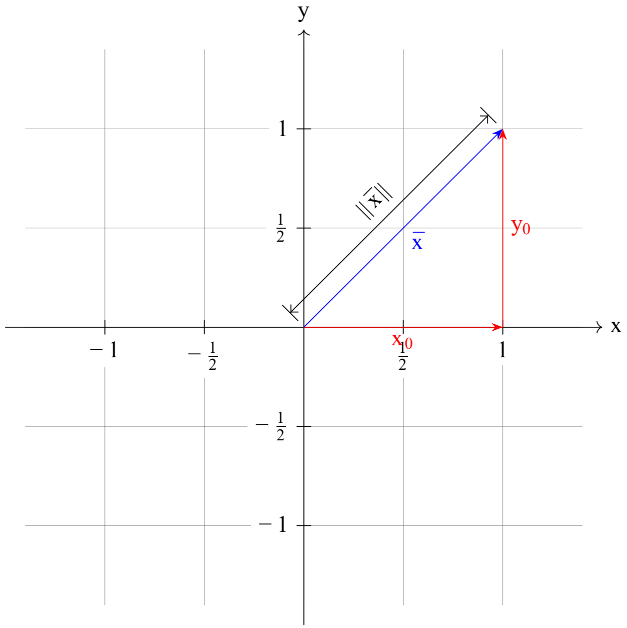
$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Operaciones con vectores (cont.)

Norma euclídea

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

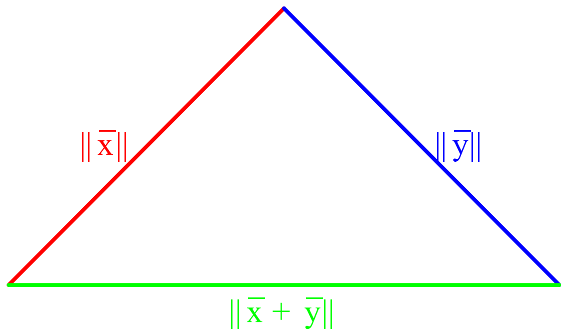


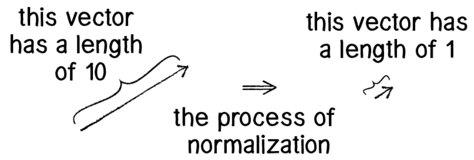
Operaciones con vectores (cont.)

Norma euclídea (cont.)

Propiedades

1. $\|\vec{x}\| \geq 0, \quad \|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$
2. $\|\lambda\vec{x}\| = \lambda\|\vec{x}\|$
3. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$
4. $\left\|\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right\| = 1, \ \forall\vec{x} \neq \vec{0}$



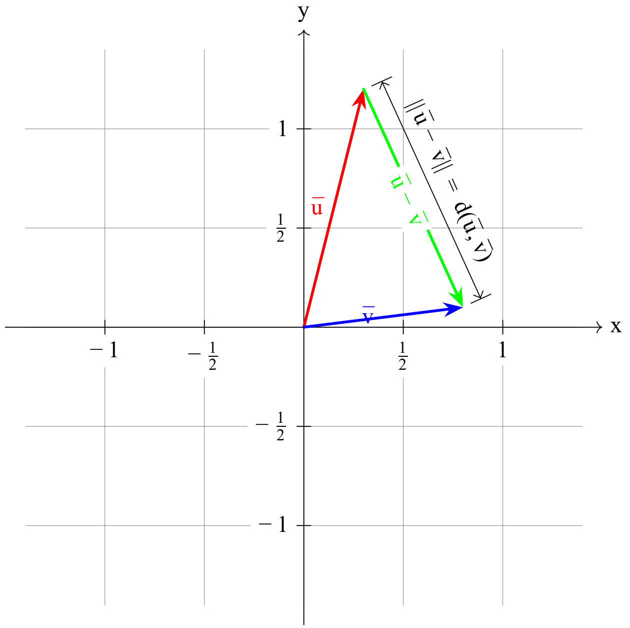


Operaciones con vectores (cont.)

Distancia euclídea (cont.)

$$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$$

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$



Operaciones con vectores (cont.)

Distancia euclídea (cont.)

Propiedades

1. $d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$
2. $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$
3. $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$
4. $d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$

Bolas en $\mathbb{R}^n$

- Bola abierta con centro en $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y radio $r \in \mathbb{R}$

$$B(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : d(\vec{x}, \vec{x}_0) < r\}$$

- Bola cerrada con centro en $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y radio $r \in \mathbb{R}$

$$\overline{B}(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : d(\vec{x}, \vec{x}_0) \leq r\}$$

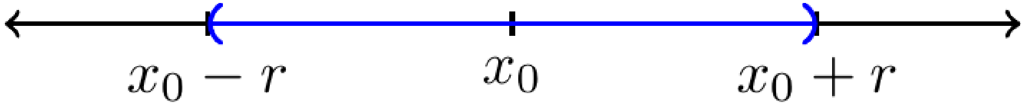
Bolas en $\mathbb{R}^n$ (cont.)

$n = 1$

- Bola abierta con centro en $x_0 \in \mathbb{R}$ y radio $r \in \mathbb{R}$

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < r\} = (x - x_0, x + x_0)$$

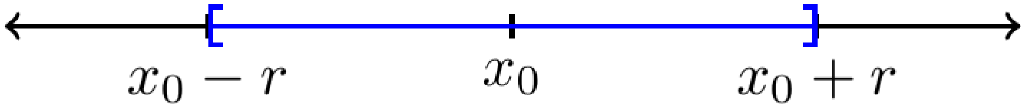
$B(x_0, r)$



- Bola cerrada con centro en $x_0 \in \mathbb{R}$ y radio $r \in \mathbb{R}$

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) \leq r\} = [x - x_0, x + x_0]$$

$\overline{B}(x_0, r)$

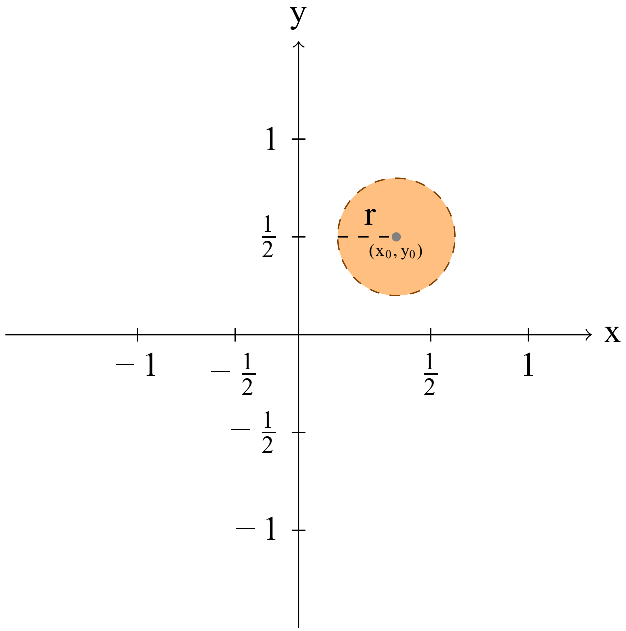


Bolas en $\mathbb{R}^n$ (cont.)

$n = 2$

- Bola abierta con centro en $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y radio $r \in \mathbb{R}$

$$B(\vec{x}_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(\vec{x}, \vec{x}_0) < r\} = \{\vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

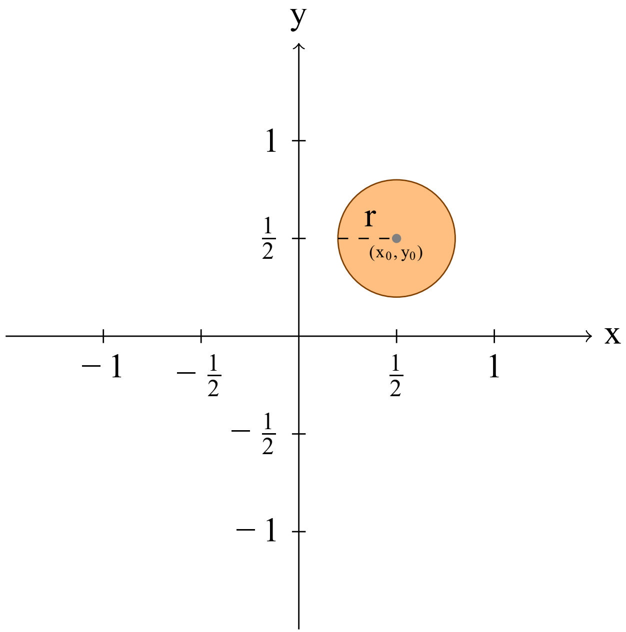


Bolas en $\mathbb{R}^n$ (cont.)

$n = 2$

- Bola cerrada con centro en $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y radio $r \in \mathbb{R}$

$$\overline{B}(\vec{x}_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(\vec{x}, \vec{x}_0) \leq r\} = \{\vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\}$$

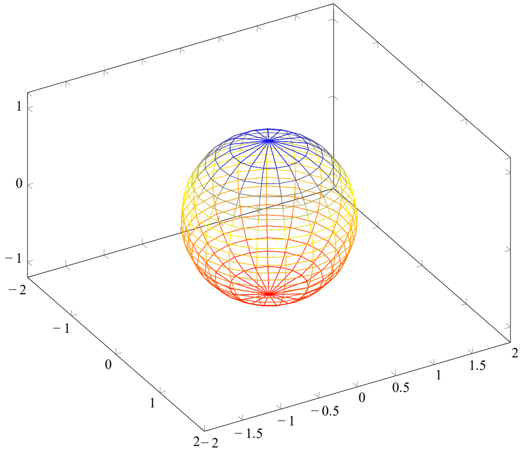


Bolas en $\mathbb{R}^n$ (cont.)

$n = 3$

- Bola abierta con centro en $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^3$ y radio $r \in \mathbb{R}$

$$B(\vec{x}_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^3 : d(\vec{x}, \vec{x}_0) < r\} = \{\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2\}$$

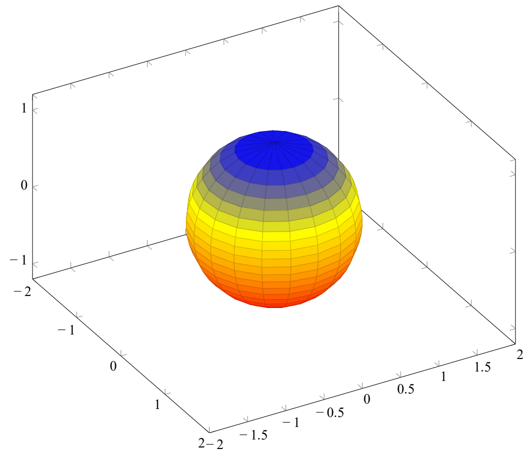


Bolas en $\mathbb{R}^n$ (cont.)

$n = 3$

- Bola cerrada con centro en $\overrightarrow{x_0} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^3$ y radio $r \in \mathbb{R}$

$$\overline{B}(\vec{x}_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^3 : d(\vec{x}, \vec{x}_0) \leq r\} = \{\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq r^2\}$$



Definiciones topológicas

Sea $A \in \mathbb{R}^n$

- Conjunto complementario

> $A^c = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} \notin A\} = \mathbb{R}^n - A$

- Punto interior

> $\vec{x}_0 \in Int(A) \iff \exists r > 0 : B(\vec{x}_0, r) \subseteq A$

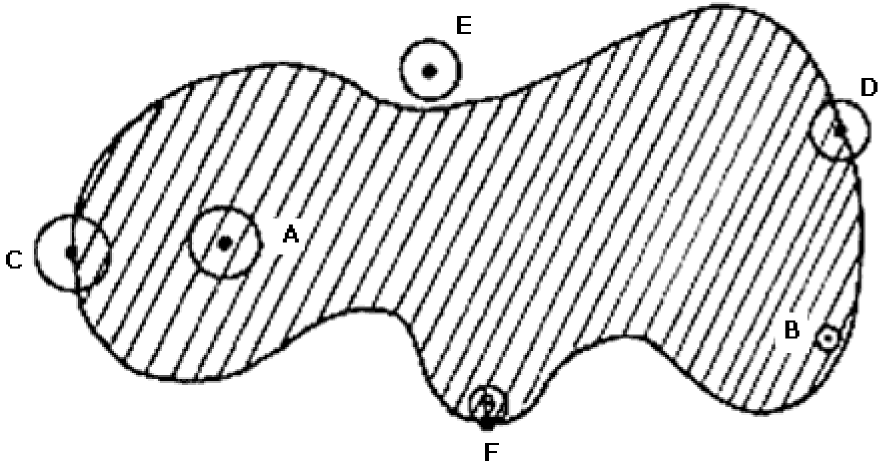
- Punto exterior

> $\vec{x}_0 \in Ext(A) \iff \exists r > 0 : B(\vec{x}_0, r) \cap A = \emptyset \iff \vec{x}_0 \in Int(A^c)$

- Punto frontera

> $\vec{x}_0 \in Fr(A) \iff \forall r > 0 : B(\vec{x}_0, r) \cap A \neq \emptyset \land B(\vec{x}_0, r) \cap A^c \neq \emptyset$

Definiciones topológicas (cont.)



Definiciones topológicas (cont.)

Sea $A \in \mathbb{R}^n$

- Conjunto abierto

> $A = Int(A)$

- Conjunto cerrado

> $A^c = Int(A^c) \iff A = Int(A) \cup Fr(A)$

- Conjunto acotado

> $\forall \vec{x} \in A \implies \exists r > 0 : \|\vec{x}_0\| \leq r \implies \exists r > 0 : A \subseteq B(\vec{x}, r)$

- Conjunto compacto

> Si es cerrado y acotado

Funciones reales de varias variables

Una función f real de varias variables es una operación que asigna a un vector n-dimensional $\vec{x}$ de cierto conjunto un valor real $f(\vec{x})$

$$
\begin{aligned}
&f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\
&\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \to f(\vec{x})
\end{aligned}
$$

Funciones reales de varias variables (cont.)

Sean $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow R$, $h : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow R$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- Combinación lineal de funciones

> $(\alpha f + \beta g)(\vec{x}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta g(\vec{x})$

- Producto de funciones

> $(f \cdot g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})$

- Cociente de funciones

> $\frac{f}{g}(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}$, $\forall \vec{x} \in D$ tal que $g(\vec{x}) \neq 0$

- Composición de funciones $(h \circ f)(\vec{x}) = f(h(\vec{x}))$, $\forall \vec{x} \in D$ tal que $f(\vec{x}) \in E$

2. Dominio y curvas de nivel

Dominio

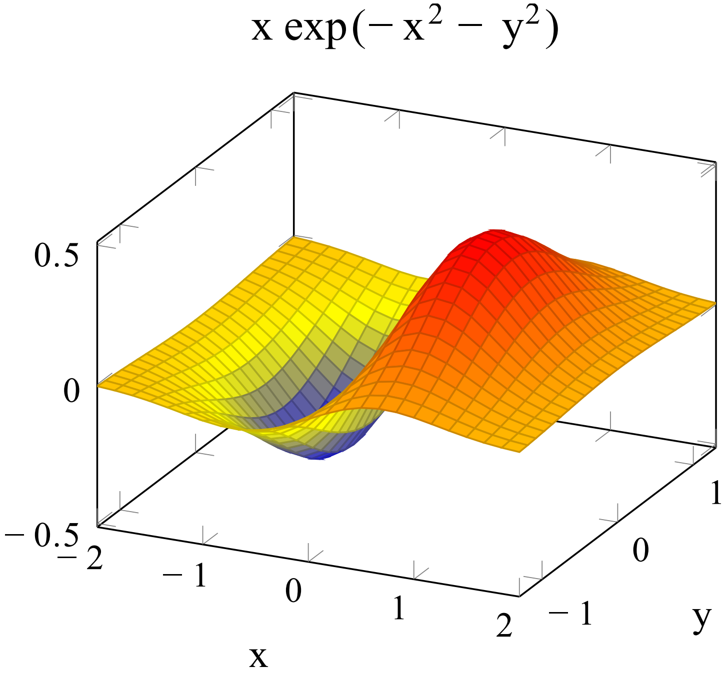
Es el conjunto de puntos $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ donde la función está definida. Es decir, el conjunto de puntos $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ para los que $f(\vec{x})$ es un valor real.

$$Dom(f) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \exists y \in \mathbb{R} \text{ tal que } y = f(\vec{x})\}$$

Gráfica

Es el conjunto de puntos $(x_1, \ldots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1}$ del espacio n+1 dimensional, tal que $z = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$

$$Graf(f) = \{(x_1, \ldots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z = f(x_1, \ldots, x_n)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

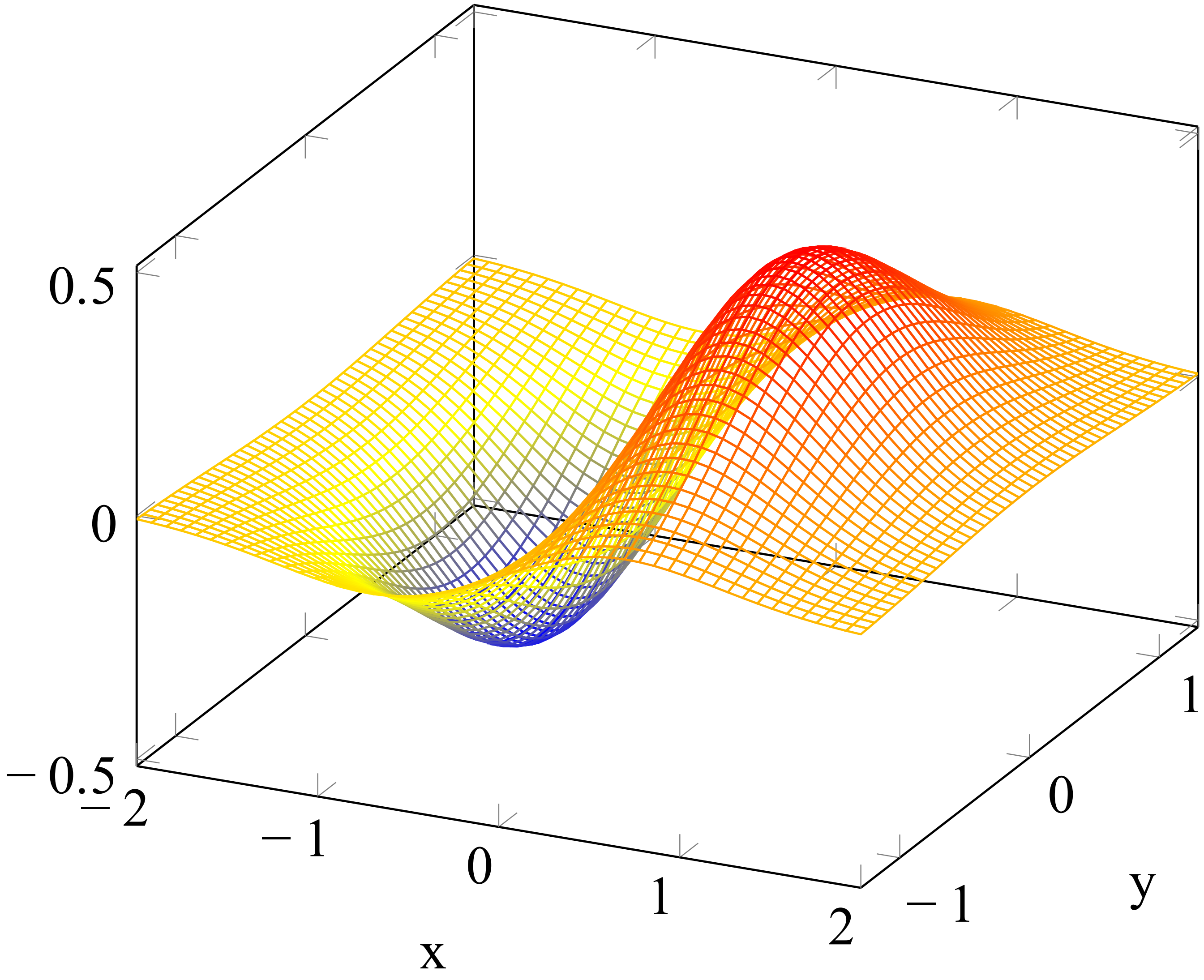


Curvas de nivel

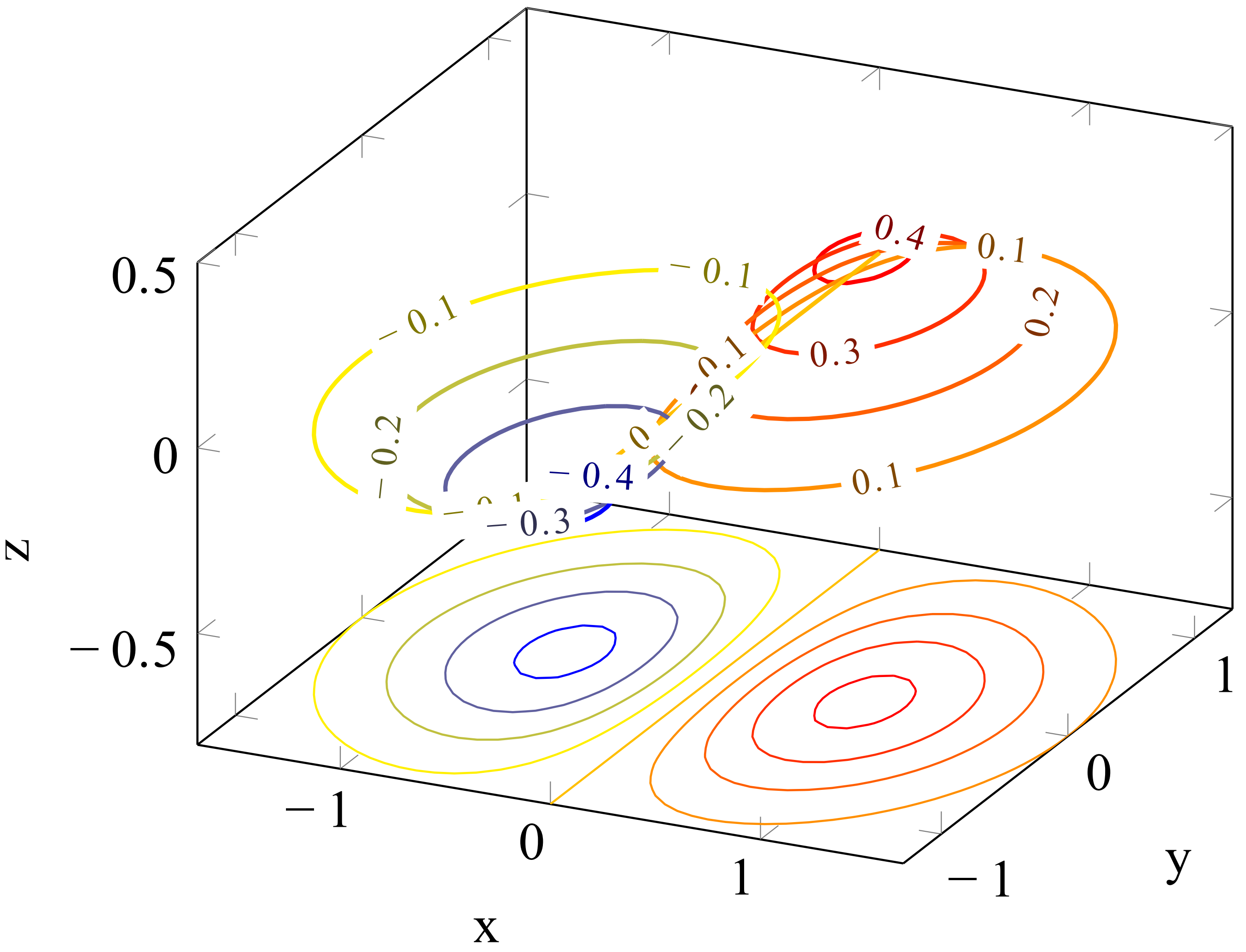
Se denomina conjunto de nivel f al conjunto de puntos del espacio n-dimensional $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$N_c(f) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \ldots, x_n) = c\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

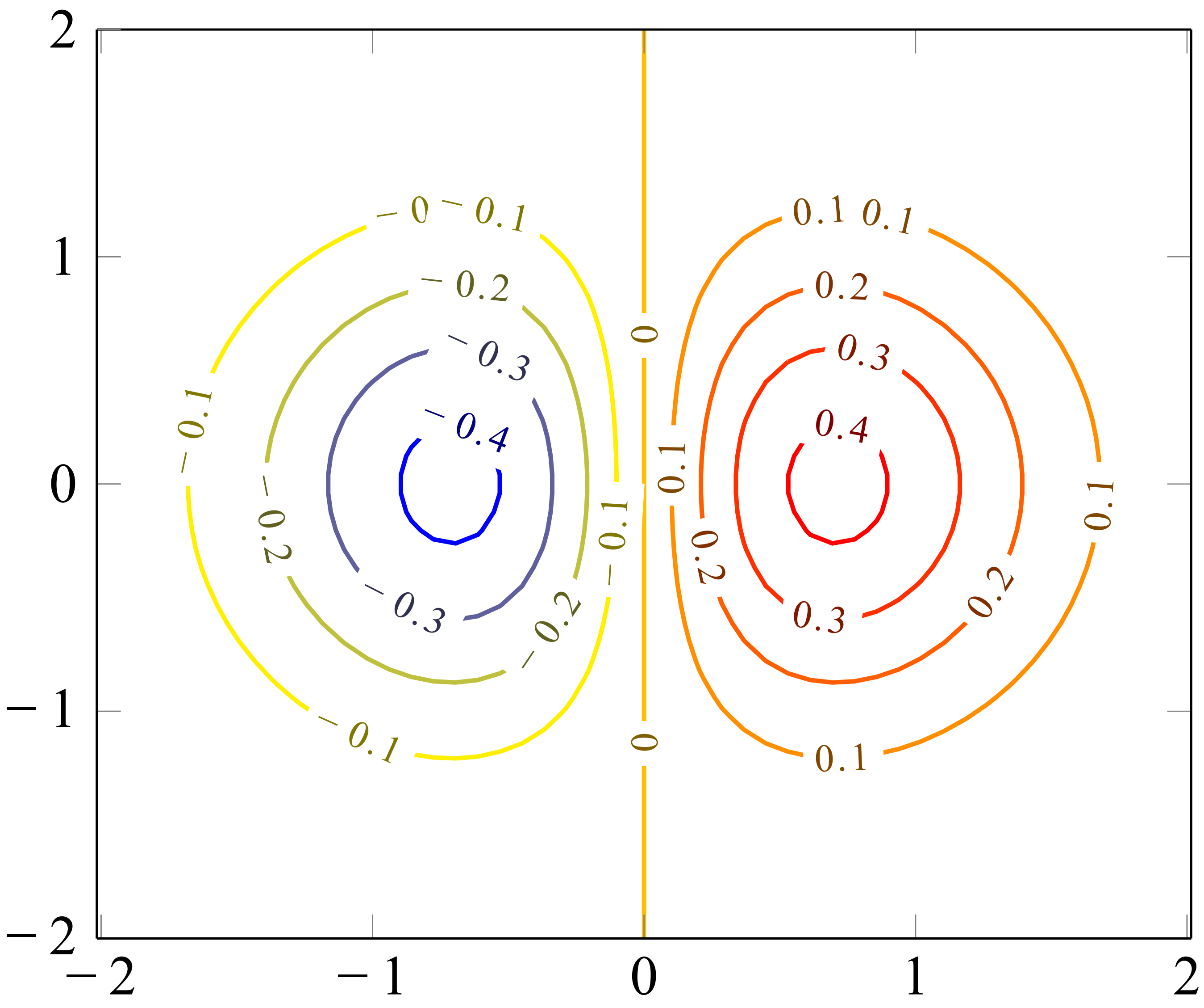
$x \exp(-x^2 - y^2)$



$x \exp(-x^2 - y^2)$



$x \exp(-x^2 - y^2)$



3. Límites y continuidad

Límites

- El límite de $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en el punto $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es el $L \in \mathbb{R}$ si y solamente si se cumple lo siguiente

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta) \cap D \implies |f(\vec{x} - L| < \epsilon$$

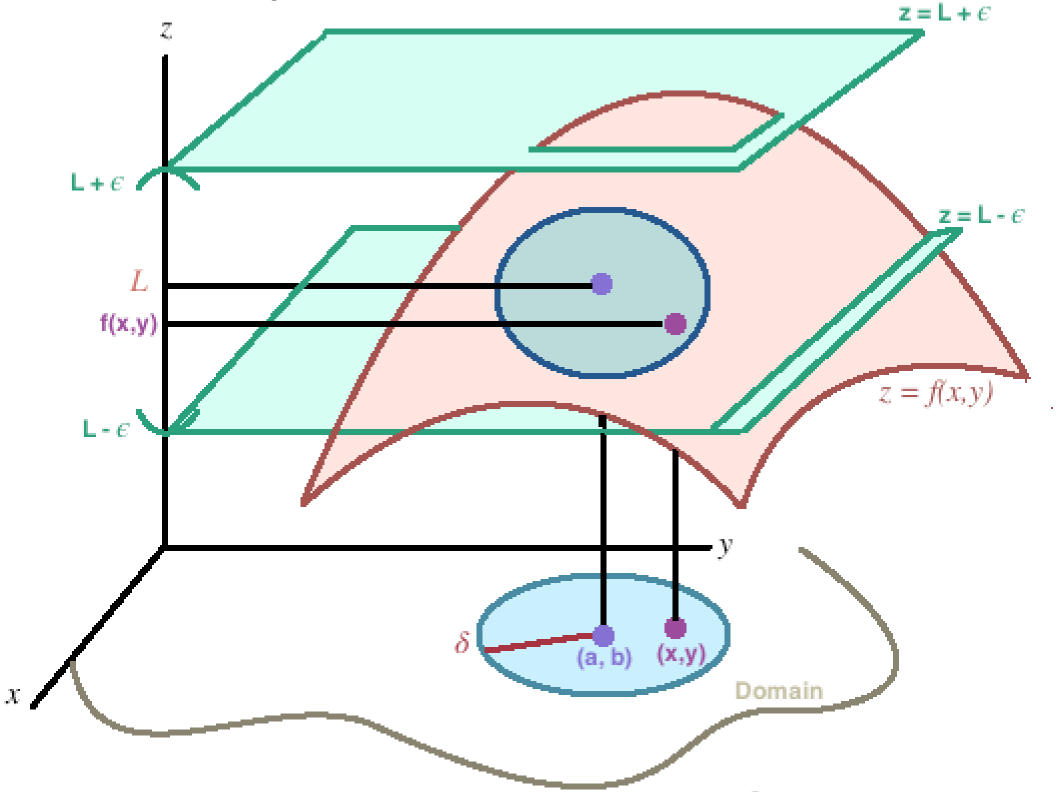
lo que equivale a decir que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \vec{x} \in D \quad d(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta \implies |f(\vec{x} - L| < \epsilon$$

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L$$

Límites (cont.)

Geometric Interpretation of a Limit of a Function of Two Variables



The limit as (x, y) approaches (a, b) is L If for all $\epsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that if (x,y) is in the domain of f and (x, y) is within $\delta > 0$ of (a,b), then the subset of points from the surface generated by the function f is contained between the two planes z = L + ϵ and z = L - ϵ.

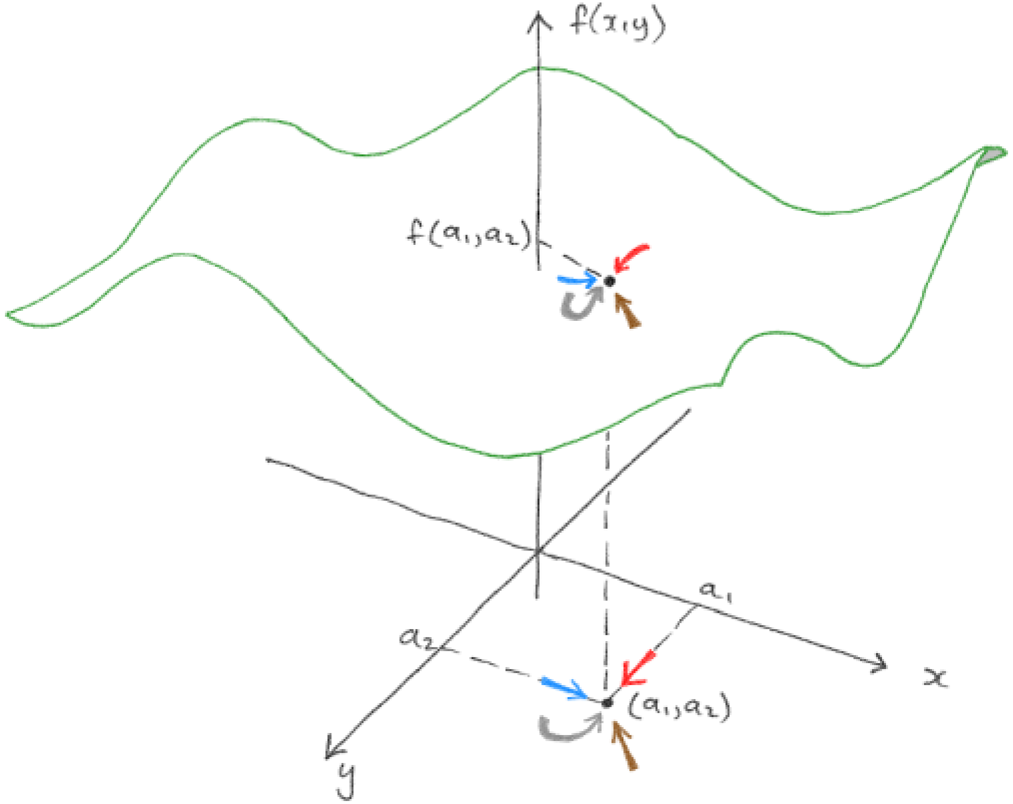
Límites (cont.)

Límite por trayectorias

- Si el límite de una función $f(\vec{x})$ cunado $\vec{x}$ tiende a $\vec{a}$ existe y vale l, entonces el límite de esa función cuando $\vec{x}$ tiende a $\vec{a}$ a lo largo de cualquier trayectoria también existe y vale l. Por lo tanto, si para trayectorias distintas se obtienen valores del límite diferentes, se deduce que el límite de la función en ese punto **NO EXISTE**.

Límites (cont.)

Límite por trayectorias (cont.)



Fuente:Limits of functions of two variables. Geoff Coates

Límites (cont.)

Propiedades de los límites finitos

Sean $f(\vec{x}),\ g(\vec{x})$, funciones definidas en $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y $h : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(D) \subseteq E$, tales que $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = l_1$, $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x}) = l_2$ y $h(l_1) = l$

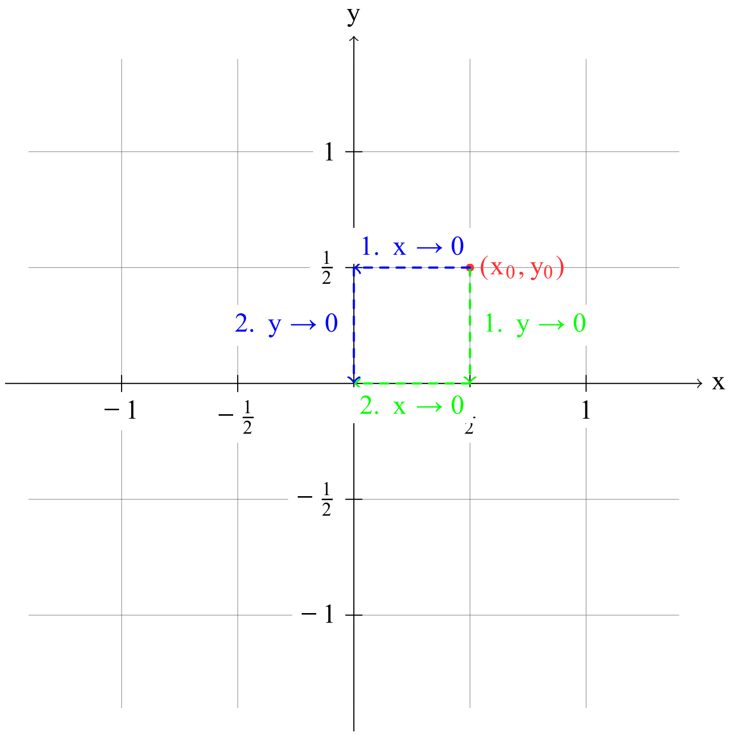
Entonces:

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \lim_{\vec{x}\to\vec{a}}(\alpha f + \beta g)(\vec{x}) = \alpha l_1 + \beta l_2$
- $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}(f \cdot g)(\vec{x}) = l_1 \cdot l_2$
- Si $l_2 \neq 0 \implies \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{f}{g}(\vec{x}) = \frac{l_1}{l_2}$
- $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}(h \circ f)(\vec{x}) = h(l_1) = l$

Límites (cont.)

Límites iterativos, sucesivos o reiterados

$$L_1 = \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) \qquad L_2 = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$$

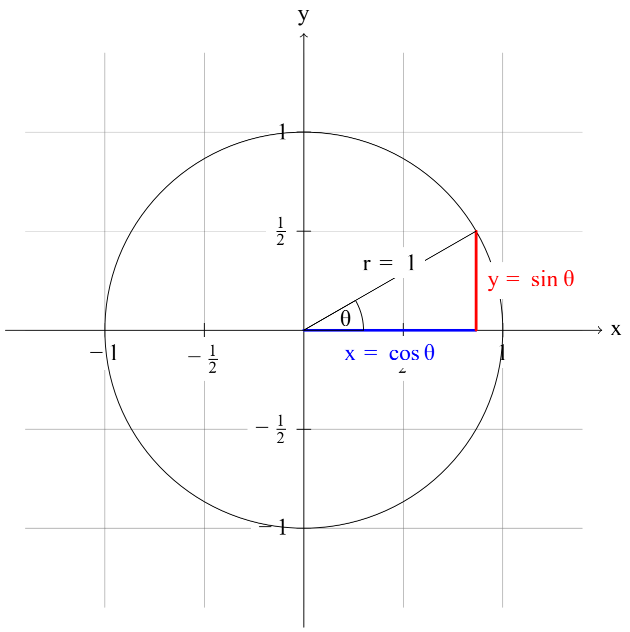


Límites (cont.)

Coordenadas polares

$$x = r \cdot \cos\alpha \qquad y = r \cdot \sin\alpha$$

$$\lim_{\substack{\forall\theta \\ r\to 0}} f(\theta, r)$$



Continuidad

Se dice que la función $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en $\vec{a}$ si se cumplen las siguientes condiciones:

> - La función está definida en $\vec{a}$. Es decir, $\vec{a} \in D$
> - $\exists \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x})$
> - $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = f(a)$

Tema 1:

Funciones reales de varias variables