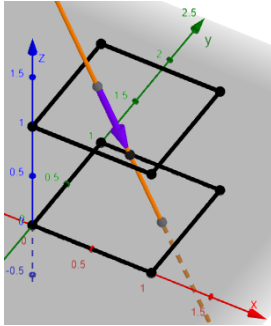


Muon Detector - Methods of Analysis of Experimental Data

Christos Melissaris

Setup



Υποθέστε απλοποιημένο μοντέλο ανιχνευτή μιονίων (muon detector). Τα σωματίδια έχουν κοσμική προέλευση, και θέλουμε να μελετήσουμε πόσα από αυτά που ανιχνεύονται στην πάνω θα ανιχνευθούν και στην κάτω πλάκα του ανιχνευτή. Η πάνω και κάτω πλάκα θεωρούνται πανομοιότυπες και είναι τετραγωνικά φύλλα μηδενικού πάχους, με πλευρά a . Η μεταξύ τους κατακόρυφη απόσταση είναι ίση με d . Οι θέσεις των σωματιδίων στην πάνω πλάκα (x_t, y_t) ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, a]$. Το διάνυσμα της ταχύτητας των σωματιδίων έχει κατεύθυνση που σε σφαιρικές συντεταγμένες περιγράφεται ως

$$\hat{n} = \cos \phi \sin \theta' \hat{x} + \sin \phi \sin \theta' \hat{y} + \cos \theta' \hat{z},$$

όπου ϕ είναι η γνωστή αζιμουθιακή γωνία και θ' είναι η επίσης γνωστή πολική γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του \hat{z} και του (μωβ) διανύσματος \hat{n} , δηλαδή $\cos \theta' = \hat{n} \cdot \hat{z}$. Επειδή τα σωματίδια έχουν κοσμική προέλευση, η γωνία $\theta' \in (\pi/2, \pi]$. Για ευκολία στις πράξεις δουλέψτε με την γωνία $\theta = \pi - \theta'$, η οποία είναι ουσιαστικά η γωνία πρόσπτωσης μεταξύ \hat{n} με το $-\hat{z}$, δηλαδή $\cos \theta = -\hat{n} \cdot \hat{z}$. Για την ϕ μια εύλογη υπόθεση είναι ότι ακολουθεί $U[0, 2\pi]$, ενώ για την γωνία $\theta \in [0, \pi/2)$ αναμένουμε να ακολουθεί κατανομή με pdf $A \cos^2(\theta)$, μιας και τα σωματίδια είναι πιο πιθανό να φτάσουν στον ανιχνευτή από κατακόρυφη διεύθυνση και η πιθανότητα εύρεσης σωματιδίων με γωνίες θ κοντά στο $\pi/2$ τείνει στο 0.

Ζητείται να γίνει προσομοίωση των σωματιδίων, να ερευνήστε το ποσοστό αυτών που καταλήγουν και στην κάτω πλάκα του ανιχνευτή, να κάνετε τα ιστογράμματα για την κατανομή των γωνιών θ, ϕ τόσο στην πάνω όσο και στην κάτω πλάκα. Δείτε πως αλλάζουν τα αποτελέσματα καθώς μεταβάλλεται η απόσταση μεταξύ των πλακών.

Analysis

Με αντικατάσταση $\theta' = \pi - \theta$ παίρνουμε

$$\hat{n} = \cos \phi \sin \theta \hat{x} + \sin \phi \sin \theta \hat{y} - \cos \theta \hat{z}. \quad (1)$$

Θεωρώ με βάση το σχήμα ότι η πάνω πλάκα βρίσκεται σε ύψος $z = d$ και η κάτω σε ύψος $z = 0$, και ότι η προβολή της πάνω πλάκας στο Oxy , είναι η κάτω πλάκα, και ότι οι κορυφές των πλευρών των πλακών λαμβάνουν τιμές $(x_k, y_k) \in \{(0, 0), (a, 0), (a, a), (0, a)\}$.

1. Κατανομές γωνιών και θέσης σωματιδίων άνω πλάκας

Το γεγονός ότι η $\theta \sim \cos^2 \theta$ κατανομή, σημαίνει ότι

$$f_\theta(\theta) = A \cos^2 \theta.$$

Για να είναι η f_θ pdf της τ.μ. θ πρέπει

$$\int_0^{\pi/2} f_\theta(\theta) d\theta = 1,$$

από όπου προκύπτει τελικά ότι

$$f_\theta(\theta) = \frac{4}{\pi} \cos^2 \theta, \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]. \quad (2)$$

Για την τ.μ. $\phi \sim U[0, 2\pi]$, έχουμε αντίστοιχα

$$f_\phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}, \forall \phi \in [0, 2\pi]. \quad (3)$$

Αντίστοιχα για τις ανεξάρτητες τ.μ. $x_t, y_t \sim U[0, a]$, οι οποίες εκφράζουν την τετμημένη και τεταγμένη, της θέσης ενός σωματιδίου στην άνω πλάκα (επίπεδο $z = d$), έχουμε

$$f_{x_t}(x_t) = \frac{1}{a}, \forall x_t \in [0, a], \quad (4)$$

$$f_{y_t}(y_t) = \frac{1}{a}, \forall y_t \in [0, a]. \quad (5)$$

Οι cdf των τ.μ. x_t, y_t με την βοήθεια της unit step function (Heaviside function)

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases}, \quad (6)$$

γράφονται ως εξής

$$F_{x_t}(x) = \frac{x}{a} [u(x) - u(x - a)] + u(x - a), \forall x \in [0, a] \quad (7)$$

$$F_{y_t}(y) = \frac{y}{a} [u(y) - u(y - a)] + u(y - a), \forall y \in [0, a]. \quad (8)$$

2. Εξισώσεις κίνησης σωματιδίων

Η κίνηση των σωματιδίων γίνεται σε ευθεία γραμμή με παραμετρική εξίσωση

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= (x_t, y_t, d) + t\hat{n} \\ (x(t), y(t), z(t)) &= (x_t, y_t, d) + t(\cos \phi, \sin \phi, \sin \phi \sin \theta, -\cos \theta). \end{aligned} \quad (9)$$

Ως αρχικό σημείο της τροχιάς $\mathbf{r}(0)$ επιλέξαμε σημείο στην πάνω πλάκα με συντεταγμένες (x_t, y_t, d) . Μας ενδιαφέρει η εύρεση του σημείου της τροχιάς με $z(t) = 0 = z_b$. Επιλύοντας την εξίσωση προκύπτει

$$\begin{aligned} d - t \cos \theta &= 0 \iff \\ t_b &= d / \cos \theta, \end{aligned}$$

όπου $\cos \theta \neq 0$ διότι $\theta \in [0, \pi/2)$. Συνεπώς

$$x_b = x(t_b) = x_t + \frac{d}{\cos \theta} \cos \phi \sin \theta,$$

$$y_b = y(t_b) = y_t + \frac{d}{\cos \theta} \sin \phi \sin \theta.$$

Ισοδύναμα

$$x_b = x_t + d \cos \phi \tan \theta, \quad (10)$$

$$y_b = y_t + d \sin \phi \tan \theta. \quad (11)$$

Για να δούμε αν το σωματίο διεγείρει και την δεύτερη πλάκα αρκεί να γίνει έλεγχος των συνθηκών:

$$(i) \quad 0 \leq x_b \leq a,$$

$$(ii) \quad 0 \leq y_b \leq a.$$

Μόνο αν οι (i) και (ii) ισχύουν ταυτόχρονα έχω ανίχνευση στην κάτω πλάκα.

3. Θεωρητικές παρατηρήσεις

Μερικές παρατηρήσεις που μπορούν να γίνουν με βάση τις Εξ. 10, 11 είναι οι εξής:

- Υψώνοντας τις εν λόγω εξισώσεις στο τετράγωνο και κατόπιν προσθέτοντας κατά μέλη και εκτελώντας τις πράξεις προκύπτει:

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{(x_b - x_t)^2 + (y_b - y_t)^2}}{d}. \quad (12)$$

- Η Εξ. 12 φανερώνει ότι για $d \rightarrow \infty$, και $x_b, x_t, y_b, y_t \in [0, a]$, τότε μόνο ένα μικρό κλάσμα γωνιών γύρω από την γωνία $\theta = 0$ καταλήγει εντός της κάτω πλάκας.
- Οι Εξ. 10, 11 για $d = 0$ δίνουν $x_b = x_t$ και $y_b = y_t$. Επιπλέον για $d \ll$, αναμένουμε οι μεταβλητές x_b, y_b να μην
- Αν $\theta \rightarrow \pi/2$ τότε $x_b, y_b \rightarrow \infty$, εφόσον πάντα ξεκινάμε από $x_t, y_t \in [0, a]$.

Αντικαθιστώντας τις Εξ. 10, 11 στις συνθήκες (i) και (ii) έχουμε

$$-d \cos \phi \tan \theta \leq x_t \leq a - d \cos \phi \tan \theta \quad (13)$$

$$-d \sin \phi \tan \theta \leq y_t \leq a - d \sin \phi \tan \theta \quad (14)$$

Για συντομία εισάγουμε τους συμβολισμούς

$$x_0(\phi, \theta) = d \cos \phi \tan \theta \quad (15)$$

$$y_0(\phi, \theta) = d \sin \phi \tan \theta \quad (16)$$

$$\mu = \frac{d \tan \theta}{a}. \quad (17)$$

Εφόσον $\theta \in [0, \pi/2)$, θα έχουμε $\mu \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $\theta = 0$.

4. Κατανομές γωνιών και θέσης σωματιδίων κάτω πλάκας

Για τα σωματίδια της κάτω πλάκας ισχύει $x_b, y_b \in [0, a]$. Άρα ψάχνουμε τις υπό συνθήκη pdf οι οποίες έχουν την μορφή

$$f_{x_b|B}(x)dx = P(x_b = x|x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a]) \quad (18)$$

$$f_{y_b|B}(y)dy = P(y_b = y|x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a]) \quad (19)$$

$$f_{\phi|B}(\phi)d\phi = P(\phi = \phi|x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a]) \quad (20)$$

$$f_{\theta|B}(\theta)d\theta = P(\theta = \theta|x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a]). \quad (21)$$

Κατανομή γωνίας θ

Αρχίζουμε από την τελευταία σχέση (Εξ. 21), και εφαρμόζουμε τον κανόνα του Bayes, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} f_{\theta|B}(\theta)d\theta &= \frac{P(x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a]|\theta = \theta)P(\theta = \theta)}{P(x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a])} \\ f_{\theta|B}(\theta)d\theta &= \frac{P(x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a]|\theta = \theta)}{P(x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a])} f_{\theta}(\theta)d\theta \\ f_{\theta|B}(\theta) &= \frac{P(x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a]|\theta = \theta)}{P(x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a])} f_{\theta}(\theta). \end{aligned} \quad (22)$$

Η $f_{\theta}(\theta) = 4/\pi \cos^2 \theta$ είναι γνωστή. Ο παρονομαστής της Εξ. 22 είναι μια σταθερά, η οποία μπορεί να βρεθεί και αριθμητικά απαιτώντας το ολοκλήρωμα της $f_{\theta|B}(\theta)$ να είναι ίσο με 1. Επομένως ο μόνος άγνωστος που θέλουμε να προσδιορίσουμε είναι ο αριθμητής A της 22. Έτσι έχουμε διαδοχικά $\forall \theta \in [0, \pi/2]$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} P(x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a]|\theta = \theta, \phi = \phi) f_{\phi}(\phi)d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x_t \in [-x_0(\phi, \theta), a - x_0(\phi, \theta)] \cap y_t \in [-y_0(\phi, \theta), a - y_0(\phi, \theta)])d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x_t \in [-x_0(\phi, \theta), a - x_0(\phi, \theta)])P(y_t \in [-y_0(\phi, \theta), a - y_0(\phi, \theta)])d\phi, \end{aligned}$$

όπου έγινε χρήση των Εξ. 13, 14 καθώς και της ανεξαρτησίας των τ.μ. x_t, y_t . Με χρήση των Εξ. 7, 8 λαμβάνουμε

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [F_{x_t}(a - x_0(\phi, \theta)) - F_{x_t}(-x_0(\phi, \theta))] \cdot [F_{y_t}(a - y_0(\phi, \theta)) - F_{y_t}(-y_0(\phi, \theta))]d\phi.$$

$$\begin{aligned} F_{x_t}(a - x_0) &= \frac{a - x_0}{a} [u(a - x_0) - u(-x_0)] + u(-x_0) \\ F_{x_t}(-x_0) &= -\frac{x_0}{a} [u(-x_0) - u(-x_0 - a)] + u(-x_0 - a) \end{aligned}$$

Επομένως με αφαίρεση κατά μέλη και μετά από εκτέλεση των πράξεων έχω:

$$\begin{aligned} F_{x_t}(a - x_0) - F_{x_t}(-x_0) &= -\frac{x_0}{a} [u(a - x_0) - 2u(-x_0) + u(-x_0 - a)] \\ &\quad + u(a - x_0) - u(-x_0 - a) \end{aligned}$$

- Αν $x_0 < 0 \implies -x_0 > 0 \implies [u(a - x_0) = 1] \wedge [u(-x_0) = 1]$. Άρα

$$F_{x_t}(a - x_0) - F_{x_t}(-x_0) = \left(1 + \frac{x_0}{a}\right) u(x_0 + a),$$

όπου το $u(x_0 + a) = 1 - u(-x_0 - a)$, $\forall x_0 < 0$, αφού $a > 0$.

- Αν $x_0 > 0 \implies -x_0 < 0 \implies [u(-x_0 - a) = 0] \wedge [u(-x_0) = 0]$. Άρα

$$F_{x_t}(a - x_0) - F_{x_t}(-x_0) = \left(1 - \frac{x_0}{a}\right) u(a - x_0).$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$F_{x_t}(a - x_0) - F_{x_t}(-x_0) = \left(1 - \frac{|x_0|}{a}\right) u(a - |x_0|) = \Lambda\left(\frac{x_0}{a}\right). \quad (23)$$

Και επειδή $F_{x_t} \equiv F_{y_t}$ έχουμε και

$$F_{y_t}(a - y_0) - F_{y_t}(-y_0) = \Lambda\left(\frac{y_0}{a}\right). \quad (24)$$

Οι Εξ. 23, 24 δίνουν

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Lambda\left(\frac{x_0}{a}\right) \Lambda\left(\frac{y_0}{a}\right) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Lambda(\mu \cos \phi) \Lambda(\mu \sin \phi) d\phi. \end{aligned} \quad (25)$$

Η υπο ολοκλήρωση ποσότητα είναι π-περιοδική συνάρτηση και άρτια. Συνεπώς η Εξ. 25 μετασχηματίζεται στην

$$A = \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \Lambda(\mu \cos \phi) \Lambda(\mu \sin \phi) d\phi. \quad (26)$$

Επειδή $1 \geq \cos \phi, \sin \phi \geq 0, \forall \phi \in [0, \pi/2]$, έχουμε

$$A = \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (1 - \mu \cos \phi) (1 - \mu \sin \phi) u(1 - \mu \cos \phi) u(1 - \mu \sin \phi) d\phi, \quad (27)$$

οπότε διακρίνω 2 περιπτώσεις.

1. Αν $0 \leq \mu \leq 1 \implies \forall \phi \in (0, \pi/2) : [1 - \mu \cos \phi > 0] \wedge [1 - \mu \sin \phi > 0]$. Επομένως

$$A = \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (1 - \mu \cos \phi) (1 - \mu \sin \phi) d\phi = 1 + \frac{1}{\pi} \mu(\mu - 4) = A_1 \quad (28)$$

2. Αν $\mu > 1$, τότε τα όρια ολοκλήρωσης στην Εξ. 27 αλλάζουν καθώς οι συναρτήσεις $u(1 - \mu \cos \phi), u(1 - \mu \sin \phi)$ μπορεί να μηδενίζονται σε τμήματα διαστήματος $[0, \pi/2]$ ή ενδεχομένως και σε όλο το διάστημα.

Διερευνούμε λοιπόν τα όρια ολοκλήρωσης της Εξ. 27 στην περίπτωση όπου $\mu > 1$.

1. Για $\phi = 0$ έχω $u(1 - \mu \cos \phi)|_{\phi=0} = u(1 - \mu) = 0$ διότι $\mu > 1$. Καθώς αυξάνεται η γωνία ϕ από την τιμή 0 μέχρι την τιμή $\pi/2$, αυξάνεται και το $1 - \mu \cos \phi$ για δεδομένο μ . Η παράσταση $u(1 - \mu \cos \phi)$ θα αλλάξει από 0 σε 1 όταν $1 - \mu \cos \phi = 0 \iff \phi = \phi_{\min} = \arccos(1/\mu)$. Ξέρουμε ότι υπάρχει τέτοια ϕ_{\min} στο διάστημα $[0, \pi/2]$ διότι $1 > 1/\mu > 0$.
2. Για $\phi = \pi/2$ έχω $u(1 - \mu \sin \phi)|_{\phi=\pi/2} = u(1 - \mu) = 0$. Καθώς μειώνω την τιμή του ϕ από το $\pi/2$ στο 0, η ποσότητα $1 - \mu \sin \phi$ αυξάνεται και μάλιστα η παράσταση $u(1 - \mu \sin \phi)$ θα αλλάξει από 0 σε 1 όταν $1 - \mu \sin \phi = 0$. Δηλαδή για $\phi = \phi_{\max} = \arcsin(1/\mu)$. Ξέρουμε ότι υπάρχει τέτοια ϕ_{\max} στο $[0, \pi/2]$ διότι $1 > 1/\mu > 0$.

Με τις παραπάνω παρατηρήσεις είναι εφικτός ο προσδιορισμός των ορίων ολοκλήρωσης της Εξ. 27. Συγκεκριμένα η ολοκληρωτέα ποσότητα μηδενίζεται πάντα αν $\phi_{\max} \leq \phi_{\min}$ ενώ αν $\phi_{\max} > \phi_{\min}$ τότε το κάτω όριο ολοκλήρωσης είναι το ϕ_{\min} και το άνω όριο ολοκλήρωσης είναι το ϕ_{\max} . Μαθηματικά αυτά εκφράζονται ως εξής

$$A = \frac{u(\phi_{\max} - \phi_{\min})}{\pi/2} \int_{\phi_{\min}}^{\phi_{\max}} (1 - \mu \cos \phi) (1 - \mu \sin \phi) d\phi. \quad (29)$$

Σε αυτό το σημείο έχει ενδιαφέρον να δούμε πότε ισχύει η συνθήκη $\phi_{\max} > \phi_{\min}$. Έχουμε διαδοχικά για κάθε $\mu > 1$

$$\begin{aligned} \arcsin\left(\frac{1}{\mu}\right) &> \arccos\left(\frac{1}{\mu}\right) \\ \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2}} &< \frac{1}{\mu} \\ \mu &< \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Άρα $1 < \mu < \sqrt{2}$. Η συνθήκη $\mu < \sqrt{2}$ ισοδυναμεί με την συνθήκη

$$\tan \theta < \tan \theta_{\max} = \frac{a\sqrt{2}}{d},$$

όπου θ_{\max} αντιστοιχεί στην γεωμετρική γωνία που σχηματίζει ο κατακόρυφος άξονας z με την ευθεία που ενώνει 1 κορυφή της πάνω πλάκας με την κορυφή της κάτω πλάκας που απέχει την μέγιστη απόσταση από την εν λόγω κορυφή. Ένα παράδειγμα τέτοιων κορυφών είναι η $(0, 0, d)$ και η $(a, a, 0)$.

Εκτελώντας τις πράξεις στην Εξ. 29, βάσει και των ως άνω παρατηρήσεων, προκύπτει τελικά ότι

$$A = \frac{u(\sqrt{2} - \mu)}{\pi/2} \left(\arcsin\left(\frac{1}{\mu}\right) - \arccos\left(\frac{1}{\mu}\right) + 2 \left(\sqrt{\mu^2 - 1} - 1 \right) + 1 - \frac{\mu^2}{2} \right) = A_2. \quad (30)$$

Η Εξ. 30 για $\mu = 1$ δίνει την ίδια τιμή με την Εξ. 28 για $\mu = 1$. Επομένως ο αριθμητής της Εξ. 22 ισούται με

$$A(\mu) = u(1 - \mu)A_1 + u(\mu - 1)A_2.$$

Η ποσότητα

$$\begin{aligned} P(x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a]) &= \int_0^{\pi/2} P(x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a] | \theta = \theta) f_\theta(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} A(\mu) \frac{4}{\pi} \cos^2 \theta d\theta, \end{aligned} \quad (31)$$

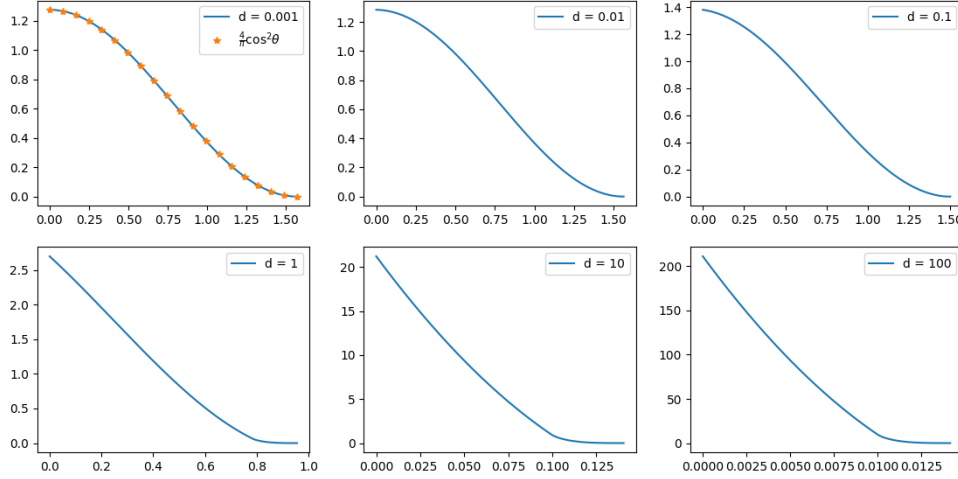


Figure 1: PDFs of Theta angle for the particles that trigger both sheets. Here $a = 1$ and $d \in \{0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100\}$.

είναι μια σταθερά όπως προλέχθηκε και υπολογίζεται με αριθμητική ολοκλήρωση για τις ανάγκες της προσομοίωσης. Αντικαθιστώντας τις πλέον γνωστές ποσότητες στην Εξ. 22, ξέρουμε πλήρως την κατανομή της γωνίας θ για τα σωματίδια που καταλήγουν στην κάτω πλάκα, δηλαδή την $f_{\theta|B}(\theta)$. Παρατηρούμε ότι για $d \ll 1$ έχουμε πρακτικά ταύτιση με την (πορτοκαλί) κατανομή των γωνιών θ των σωματιδίων που διαπερνούν την άνω πλάκα. Ενώ καθώς ο λόγος d/a αυξάνεται το σχήμα της $f_{\theta|B}(\theta)$, προσεγγίζει το δεξιό τμήμα τριγωνικής κατανομής με κέντρο το 0.

Κατανομή γωνίας ϕ

Κατά αναλογία με την Εξ. 22, η Εξ. 20 θα δώσει

$$f_{\phi|B}(\phi) = \frac{P(x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a] | \phi = \phi)}{P(x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a])} f_{\phi}(\phi), \quad (32)$$

όπου η μόνη άγνωστη ποσότητα είναι ο αριθμητής $N = P(x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a] | \phi = \phi)$. Έχουμε διαδοχικά για κάθε $\phi \in [0, 2\pi]$

$$N(\phi) = \int_0^{\pi/2} f_{\theta}(\theta) P(x_t \in [-x_0, a - x_0] \cap y_t \in [-y_0, a - y_0]) d\theta \quad (33)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{4}{\pi} \cos^2 \theta P(x_t \in [-x_0, a - x_0]) P(y_t \in [-y_0, a - y_0]) d\theta \quad (34)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{4}{\pi} \cos^2 \theta P(x_t \in [-x_0, a - x_0]) P(y_t \in [-y_0, a - y_0]) d\theta \quad (35)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{4}{\pi} \cos^2 \theta \Lambda \left(\frac{d \cos \phi}{a} \tan \theta \right) \Lambda \left(\frac{d \sin \phi}{a} \tan \theta \right) d\theta \quad (36)$$

Παρατηρούμε ότι $N(\phi + n\pi/2) = N(\phi), \forall \phi \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$. Άρα ο αριθμητής $N(\phi)$ είναι $\pi/2$ -περιοδική συνάρτηση. Μερικές ακόμα παρατηρήσεις:

- Αν $d = 0$, τότε η $f_{\phi|B} = f_{\phi}(\phi) = 1/(2\pi)$, $\forall \phi \in [0, 2\pi]$.
- Αν $d > 0$, τότε ορίζω 2 μεταβλητές:

$$\theta_1 = \begin{cases} \pi/2, & \text{if } \cos \phi = 0 \\ \arctan\left(\frac{a}{d \cos \phi}\right), & \text{if } \cos \phi \neq 0 \end{cases} \wedge \theta_2 = \begin{cases} \pi/2, & \text{if } \sin \phi = 0 \\ \arctan\left(\frac{a}{d \sin \phi}\right), & \text{if } \sin \phi \neq 0 \end{cases} \quad (37)$$

Επειδή για $\theta = 0$ έχω $\Lambda(\tan \theta d \cos \phi / a) = 1 = \Lambda(\tan \theta d \sin \phi / a)$, και για δεδομένο ϕ, d, a καθώς αυξάνω το θ από 0 σε $\pi/2$ έχω $\tan \theta \rightarrow \infty$, $\implies \Lambda(\pm \infty) = 0$ ο μηδενισμός του Λ θα συμβεί για κάποιο $\theta \in (0, \pi/2)$. Το Λ δίνει 1 ανεξάρτητα από το θ μόνο αν έχω $\cos \phi = 0$ ή $\sin \phi = 0$. Επειδή μας ενδιαφέρει το υποδιάστημα ολοκλήρωσης του $[0, \pi/2]$ όπου τα $\Lambda(\cdot)$ δίνουν μη μηδενική τιμή ορίζω την μεταβλητή $\theta_0 = \min(\theta_1, \theta_2)$. Εκτελώντας απλά βήματα καταλήγουμε εύκολα στην έκφραση για το $N(\phi)$

$$\begin{aligned} N(\phi) &= \int_0^{\theta_0} \frac{4}{\pi} \cos^2 \theta \left(1 - \tan \theta \frac{d}{a} (|\cos \phi| + |\sin \phi|) + \frac{d^2}{a^2} \tan^2 \theta |\cos \phi| |\sin \phi| \right) d\theta \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{d}{4a} (|\cos \phi| + |\sin \phi|) \cos 2\theta + \frac{d^2}{a^2} |\cos \phi| |\sin \phi| \left(\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \right]_0^{\theta_0}. \end{aligned}$$

Επομένως είναι πλήρως γνωστή η κατανομή της γωνίας ϕ για τα σωματίδια που καταλήγουν και στην κάτω πλάκα. Σημειώνουμε ότι η κατανομή αυτή δεν είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $[0, 2\pi]$, αλλά έχει μια συναρτησιακή σχέση ανάλογη του αριθμητή $N(\phi)$. Για $a = 1$, απεικονίζουμε για διάφορες τιμές του d την pdf της ϕ στην κάτω πλάκα.

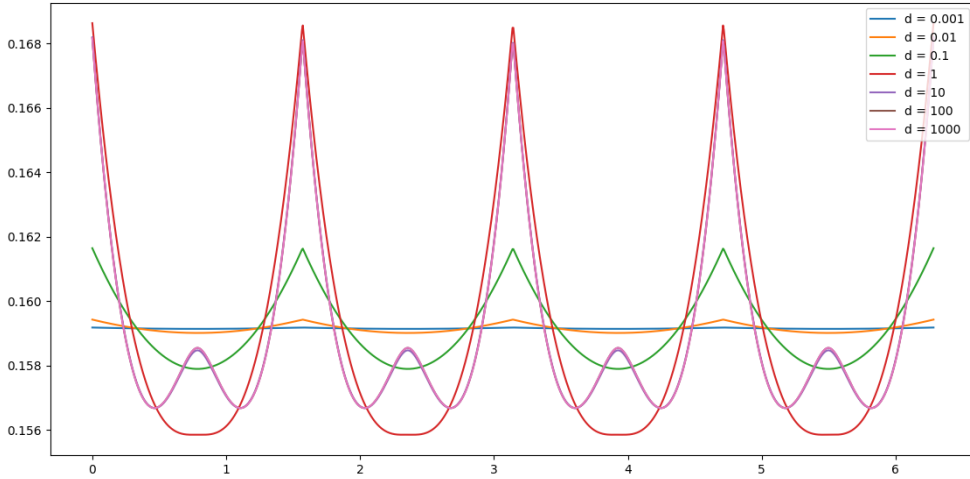


Figure 2: PDF functions for the phi angle of the particles that trigger both plates. Here $a = 1$ and $d \in \{0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100, 1000\}$.

Φαίνεται ότι για $d \rightarrow 0$, λαμβάνουμε στο όριο την ομοιόμορφη κατανομή.

Κατανομή τετμημένης x στην κάτω πλάκα

Η Εξ.18, με χρήση του ορισμού της υπό συνθήκη πιθανότητας, γράφεται ως

$$f_{x|B}(x)dx = \frac{P(x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a] \cap x_b = x)}{P(x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a])} \quad (38)$$

Ο παρονομαστής είναι γνωστός, άρα ασχολούμαστε με τον αριθμητή $\mathcal{A}dx = P(x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a] \cap x_b = x)$. Τα γεγονότα $x_b = x$ και $x_b \in [0, a]$ είναι ασυμβίβαστα αν $x \notin [0, a]$. Έτσι

$$\begin{aligned} \mathcal{A}dx &= [u(x) - u(x - a)]P(y_b \in [0, a] \cap x_b = x) \\ &= [u(x) - u(x - a)] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} P(y_b \in [0, a] \cap x_b = x | \phi = \phi, \theta = \theta) f_\phi(\phi) f_\theta(\theta) d\phi d\theta \\ &= [u(x) - u(x - a)] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} P(y_t \in [-y_0, a - y_0]) P(x_t = x - x_0) f_\phi(\phi) f_\theta(\theta) d\phi d\theta \\ &= [u(x) - u(x - a)] \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \Lambda \left(\frac{d \tan \theta}{a} \sin \phi \right) f_{x_t}(x - x_0) f_\phi(\phi) f_\theta(\theta) d\phi d\theta \right\} dx \end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$f_{x|B}(x) = \frac{\mathcal{A}(x)}{P(x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a])}, \quad (39)$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= [u(x) - u(x - a)] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \Lambda \left(\frac{d \tan \theta}{a} \sin \phi \right) f_{x_t}(x - x_0) f_\phi(\phi) f_\theta(\theta) d\phi d\theta \\ &= \frac{u(x) - u(x - a)}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^2 \theta}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Lambda \left(\frac{d \tan \theta}{a} \sin \phi \right) [u(x - x_0) - u(x - x_0 - a)] d\phi d\theta. \end{aligned} \quad (40)$$

Προχωρούμε σε περεταίρω απλοποίηση του $\mathcal{A}(x)$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ως προς ϕ , η συνάρτηση $\Lambda(d \sin \phi \tan \theta / a) [u(x - x_0) - u(x - x_0 - a)]$ είναι 2π-περιοδική και άρτια. Οπότε έχουμε τελικά

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{u(x) - u(x - a)}{a} \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \int_0^\pi \Lambda \left(\frac{d \tan \theta}{a} \sin \phi \right) [u(x - x_0) - u(x - x_0 - a)] d\phi d\theta \\ &= \frac{u(x) - u(x - a)}{a} \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta J_0(\theta) d\theta, \end{aligned} \quad (41)$$

με $J_0 = J_1 - J_2$, όπου

$$J_1 = \int_0^\pi \Lambda \left(\frac{y_0}{a} \right) u(x - x_0) d\phi, \quad (42)$$

$$J_2 = \int_0^\pi \Lambda \left(\frac{y_0}{a} \right) u(x - x_0 - a) d\phi. \quad (43)$$

Καταρχάς αν $\theta = 0$, $\implies x_0 = y_0 = 0$ και προκύπτει $J_0 = \pi[u(x) - u(x - a)]$. Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τα $J_0, J_1, J_2, \forall \theta \in (0, \pi/2)$

Αρχικά, για το J_1 , αν $\phi \in [\pi/2, \pi) \implies \cos \phi < 0 \implies x_0 = d \cos \phi \tan \theta \leq 0$. Άρα και $x \geq x_0, \forall x \in [0, a] \implies u(x - x_0) = 1$. Αν τώρα $\phi \in [0, \pi/2)$, θα έχουμε

$$x > d \cos \phi \tan \theta \iff \cos \phi < \frac{x}{d \tan \theta} \iff \phi > \phi_m,$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι η $\arccos(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$ και ορίσαμε $\phi_m = \arccos[\min(1, x/(d \tan \theta))]$. Άρα το αποδεκτό διάστημα είναι το $(\phi_m, \pi/2)$. Έτσι το J_1 μπορεί να γραφεί ως

$$J_1 = \int_{\phi_m}^{\pi/2} \Lambda\left(\frac{y_0}{a}\right) d\phi + \int_{\pi/2}^{\pi} \Lambda\left(\frac{y_0}{a}\right) d\phi. \quad (44)$$

Με παρόμοια ανάλυση λαμβάνουμε εύκολα ότι $x - a < x_0, \forall x \in [0, a]$ και $\phi \in [0, \pi/2) \implies u(x - x_0 - a) = 0, \forall \phi \in [0, \pi/2)$. Στο διάστημα $\phi \in [\pi/2, \pi]$ επειδή έχω $\cos(\phi) \in [-1, 0]$ και $\arccos(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0]$, αν ορίσω

$$\phi_M = \arccos[\max\{-1, (x - a)/(d \tan \theta)\}],$$

προκύπτει συνολικά ότι $u(x - x_0 - a) = 1$ μόνο στο (ϕ_M, π) .

$$J_2 = \int_{\phi_M}^{\pi} \Lambda\left(\frac{y_0}{a}\right) d\phi. \quad (45)$$

Συνεπώς με αφαίρεση του J_2 από το J_1 , λαμβάνουμε

$$J_0 = \int_{\phi_m}^{\phi_M} \Lambda\left(\frac{y_0}{a}\right) d\phi = \int_{\phi_m}^{\phi_M} \Lambda(\mu \sin \phi) d\phi. \quad (46)$$

Και εφόσον με ενδιαφέρει τι συμβαίνει με το J_0 για τιμές του $x \in [0, a]$ μπορώ να χρησιμοποιώ την Εξ. 46 και για $\theta = 0$, αν θέσω $\phi_M = \pi$ και $\phi_m = 0$. Για λόγους συντομίας παραλείπουμε την διαδικασία ολοκλήρωσης της Εξ. 46, και δίνουμε το τελικό αποτέλεσμα:

$$J_0 = \phi_M - \phi_m + \mu(\cos \phi_M - \cos \phi_m) + u(\mu - 1)[\max(\phi_m, \phi_1) - \min(\phi_M, \phi_2) + \mu(\cos \max(\phi_m, \phi_1) - \cos \min(\phi_M, \phi_2))], \quad (47)$$

έχοντας ορίσει για $\mu > 1$ τις γωνίες

$$\phi_1 = \arcsin\left(\frac{1}{\mu}\right) < \pi/2, \forall \mu > 1, \quad (48)$$

$$\phi_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\mu}\right) > \pi/2, \forall \mu > 1. \quad (49)$$

Επομένως μπορούμε με χρήση της Εξ. 47, να υπολογίσουμε το \mathcal{A} μέσω της Εξ. 41, και κατ'επέκταση την $f_{x|B}(x)$ για κάθε τιμή του x . Για $a = 1$ και για τιμές του $d \in \{0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100\}$ απεικονίζουμε την εν λόγω pdf.

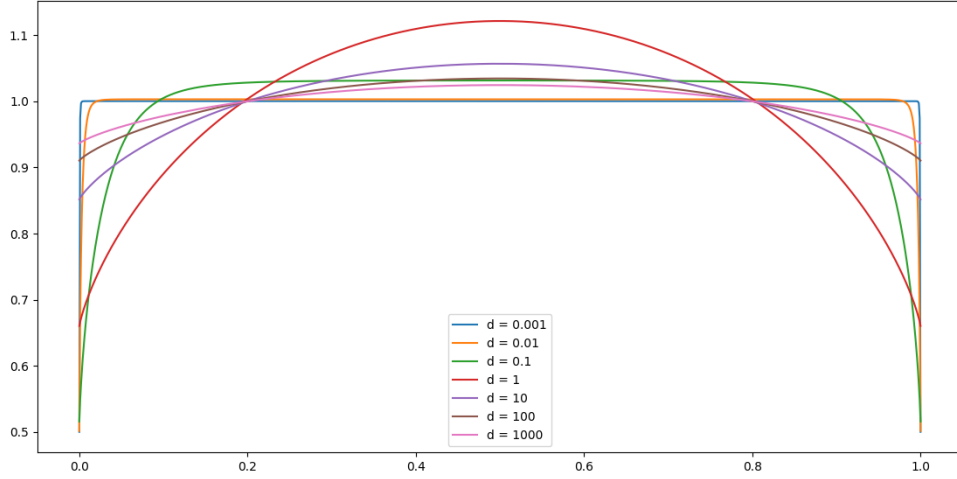


Figure 3: PDF functions for the x-coordinate of muons that trigger both plates. Here $a = 1$ and $d \in \{0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100, 1000\}$.

Για μικρές τιμές του λόγου d/a έχουμε περίπου ομοιόμορφη κατανομή, δηλαδή όπως και για την συντεταγμένη x των σωματιδίων στην άνω πλάκα. Υπάρχει συμμετρία ως προς το κέντρο του διαστήματος $[0, a]$. Επίσης φαίνεται ότι όταν ο λόγος d/a παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, η κατανομή πλησιάζει ξανά την ομοιόμορφη.

Κατανομή τεταγμένης y στην κάτω πλάκα

Με παρόμοιο τρόπο εργαζόμαστε για την εύρεση της $f_{y|B}(y)$. Από την Εξ. 19, έχω

$$f_{y|B}(y)dy = \frac{P(x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a] \cap y_b = y)}{P(x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a])} \quad (50)$$

Ο παρονομαστής είναι γνωστός, άρα ασχολούμαστε με τον αριθμητή $\mathcal{N}dy = P(x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a] \cap y_b = y)$. Τα γεγονότα $y_b = y$ και $y_b \in [0, a]$ είναι ασυμβίβαστα αν $y \notin [0, a]$. Έτσι

$$\begin{aligned} \mathcal{N}dy &= [u(y) - u(y - a)]P(x_b \in [0, a] \cap y_b = y) \\ &= [u(y) - u(y - a)] \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \Lambda \left(\frac{d \tan \theta}{a} \cos \phi \right) f_{y_t}(y - y_0) f_\phi(\phi) f_\theta(\theta) d\phi d\theta \right\} dy \end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$f_{y|B}(x) = \frac{\mathcal{N}(y)}{P(x_b \in [0, a] \cap y_b \in [0, a])}, \quad (51)$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(y) &= \\ &= \frac{u(y) - u(y - a)}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^2 \theta}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Lambda \left(\frac{d \tan \theta}{a} \cos \phi \right) [u(y - y_0) - u(y - y_0 - a)] d\phi d\theta. \end{aligned} \quad (52)$$

Λόγω του ότι η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι 2π -περιοδική αν θέσω $\phi' = \phi + \pi/2$, προκύπτει

$$\mathcal{N}(y) = \mathcal{A}(y), \forall y.$$

Επομένως

$$f_{x|B} \equiv f_{y|B},$$

το οποίο ήταν αναμενόμενο λόγω της συμμετρίας της διάταξης και της αντίστοιχης συμμετρίας των αρχικών pdf ως προς x και y .

5. Monte Carlo Simulations

Από τις περιοριστικές συνθήκες 13, 14 αλλά και από την θεωρητική ανάλυση της προηγούμενης ενότητας προκύπτει ότι τα αποτελέσματα εξαρτώνται από τον λόγο d/a . Σε όλα τα παρακάτω διαγράμματα θέτουμε την πλευρά των τετραγωνικών φύλλων ίση με $a = 1$, και μεταβάλλουμε τον λόγο d/a με μεταβολή της απόστασης d μεταξύ των 2 φύλλων.

Τα ιστογράμματα έχουν κανονικοποιηθεί ώστε το ύψος H_i κάθε μπάρας να δίνει προσεγγιστικά την τιμή της pdf για την εκάστοτε κεντρική τετμημένη της μπάρας. Μαθηματικά αυτό δικαιολογείται από την παρακάτω ισοδυναμία

$$f(x)\Delta x \approx \frac{\text{count}_i}{N_{\text{tot}}} \iff f(x) \approx \frac{\text{count}_i}{N_{\text{tot}}\Delta x} = H_i,$$

που παρέχει και τον τύπο του κανονικοποιημένου ύψους H_i .

Να σημειωθεί ότι όλα τα διαγράμματα που θα δείξουμε έχουν προκύψει από τυχαία δειγματοληψία με βάση τις αρχικές κατανομές της εκφώνησης. Η δειγματοληψία είναι κοινή, έγινε μια φορά στην αρχή, κι απλώς μεταβάλλουμε την απόσταση d στην οποία γίνεται ο έλεγχος του αριθμού των σωματιδίων που πέφτουν στην κάτω πλάκα. Θα δείξουμε αρχικά τα διαγράμματα που προκύπτουν για $d = 1$.

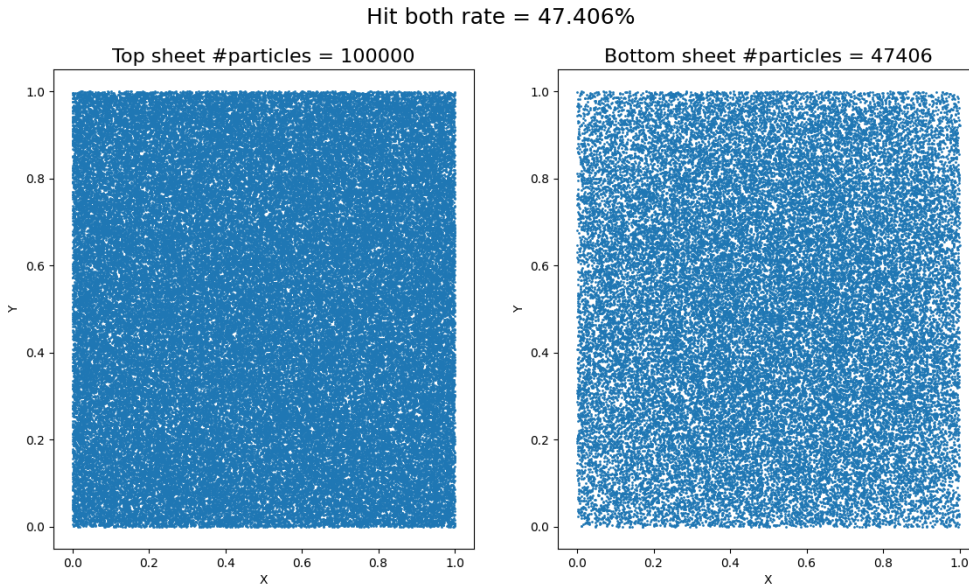


Figure 4: Particles on the top and bottom sheet of the detector. Here $d = 1$ and $a = 1$.

Στο Σχ. 4, εικονίζονται οι δυο πλάκες και αναγράφεται ο αριθμός σωματιδίων που περνούν από την εκάστοτε πλάκα. Παρατηρούμε ότι το hit (both sheets) rate είναι

$$h = \frac{N_b}{N_{\text{tot}}} = 47.406\%.$$

Στο Σχ. 5 απεικονίζονται $n = 100$ εκ των συνολικών $N_{\text{tot}} = 100000$ τροχιών των σωματιδίων που γεννώνται στην προσομοίωση.

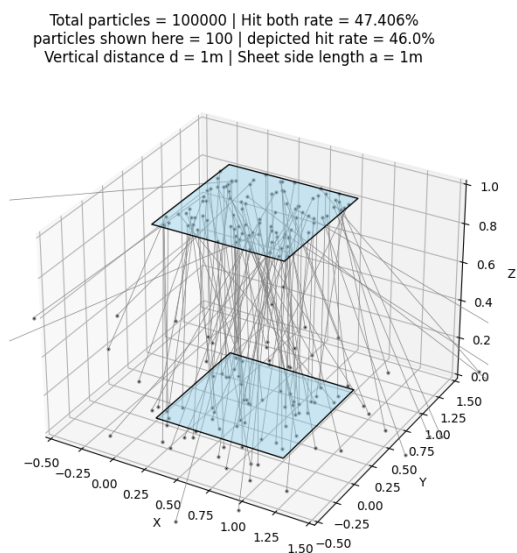
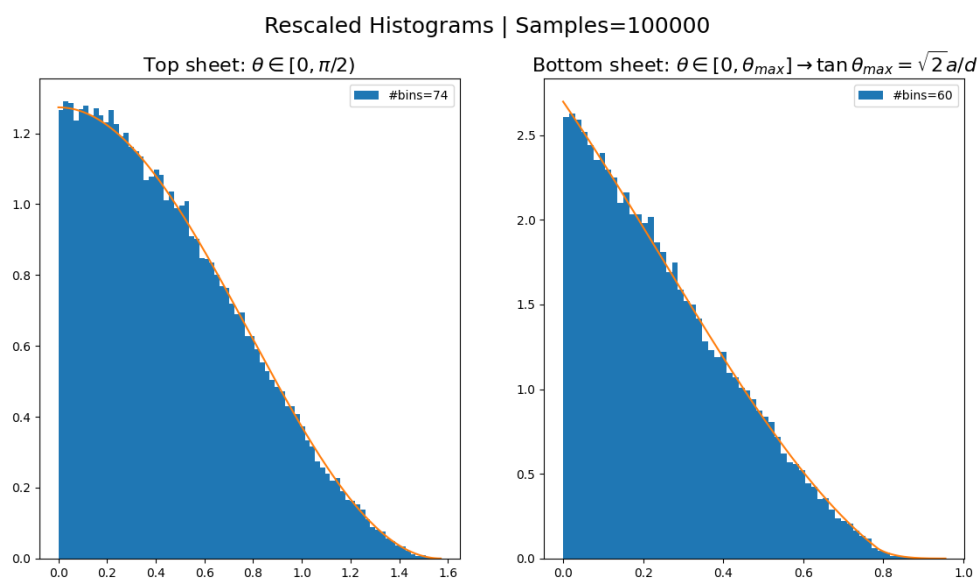
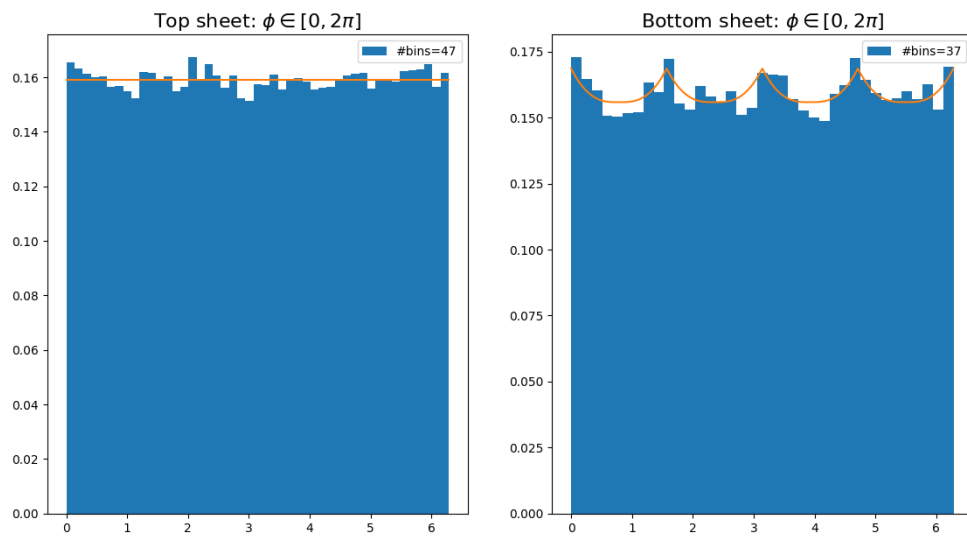


Figure 5: $n = 100$ trajectories of particles

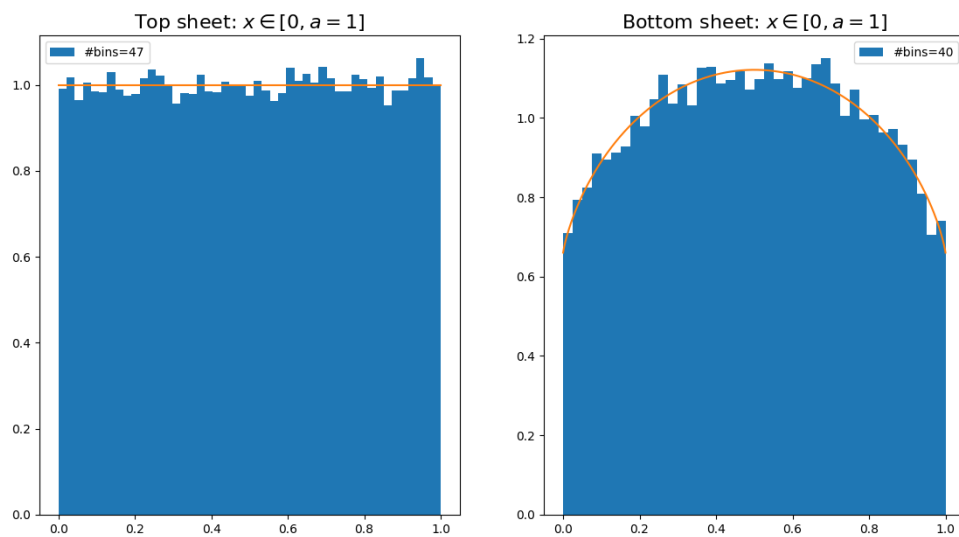
Τα ιστογράμματα που προκύπτουν για τις γωνίες θ, ϕ και τις συντεταγμένες x, y στην πάνω και κάτω πλάκα δίνονται παρακάτω:



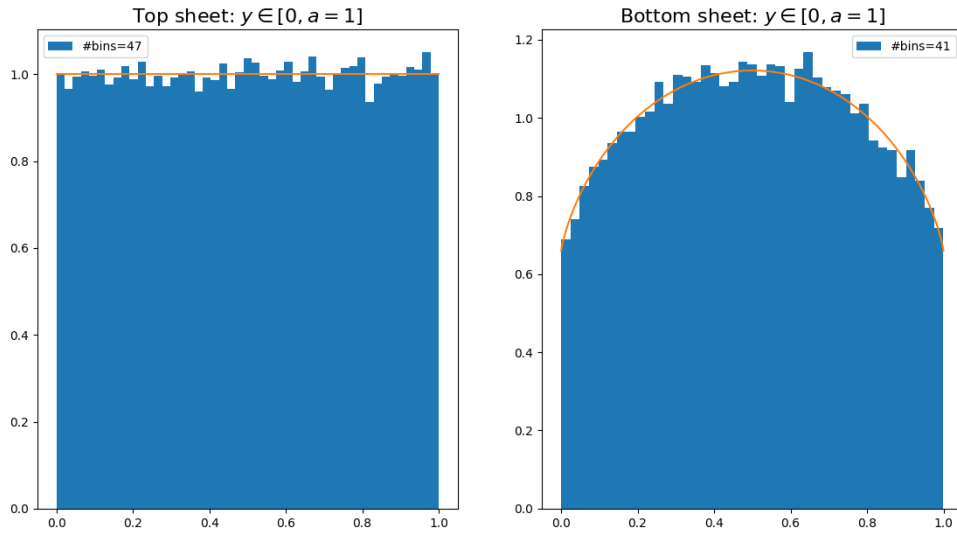
Rescaled Histograms | Samples=100000



Rescaled Histograms | Samples=100000



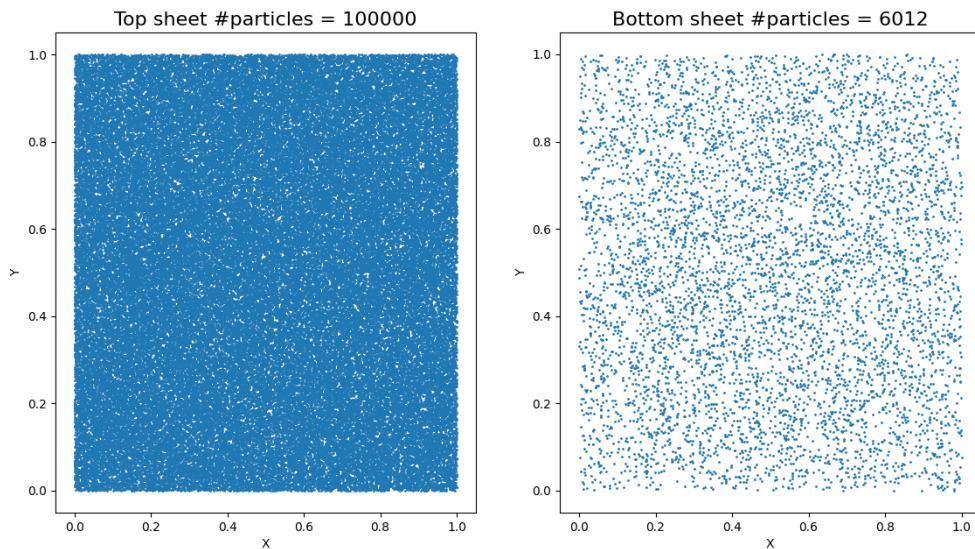
Rescaled Histograms | Samples=100000



Στα παραπάνω κανονικοποιημένα ιστογράμματα έχουμε υπερθέσει την κατανομή από την οποία προέρχονται. Και όπως φαίνεται υπάρχει καταπληκτική συμφωνία. Το γεγονός ότι έχουμε hit rate $h \approx 47\%$ μας επιτρέπει σε αυτήν την περίπτωση να έχουμε καλή στατιστική προσέγγιση των κατανομών που προβλέπουμε θεωρητικά. Όπως θα φανεί παρακάτω όσο μεγαλώνει το d και κατ'επέκταση ο λόγος d/a τόσο λιγότερα δείγματα έχουμε για την περίπτωση της κάτω πλάκας, μιας και μικραίνει το hit rate. Παραθέτουμε 2 τέτοια παραδείγματα.

Ακολουθούν πρώτα τα διάγραμμα για $d = 10$, όπως φαίνεται ο αριθμός των μιονίων στην κάτω πλάκα αν και πολύ μικρότερος του αρχικού αριθμού της άνω πλάκας είναι ικανοποιητικός ($N_{\text{bot}} = 6012$) και τα παρακάτω ιστογράμματα προσεγγίζουν σε ικανοποιητικό βαθμό τις κατανομές στις οποίες υπακούουν βάσει της θεωρητικής ανάλυσης που προηγήθηκε.

Hit both rate = 6.012%



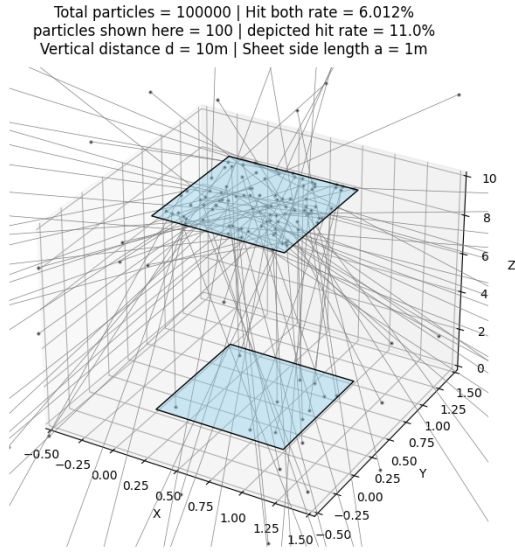
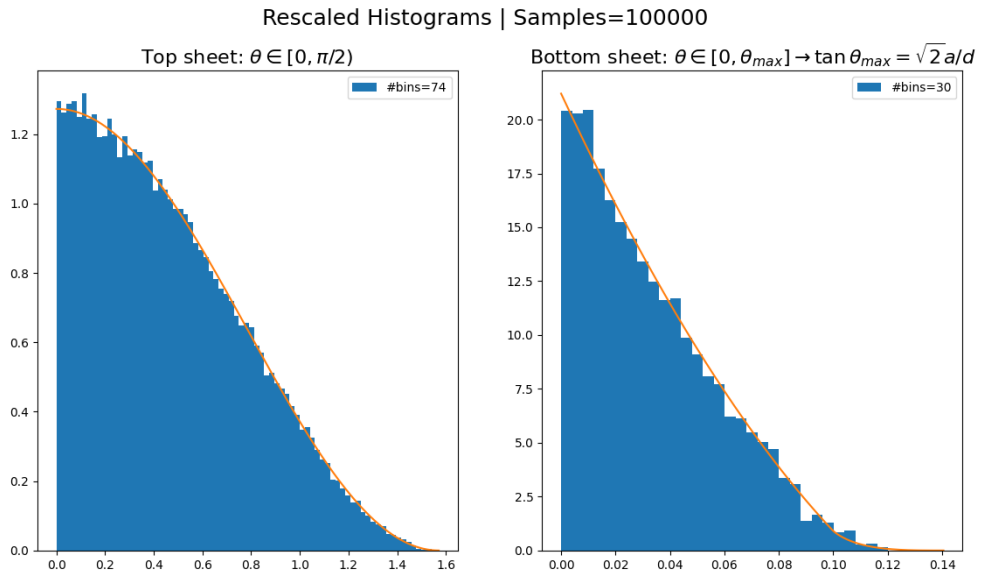
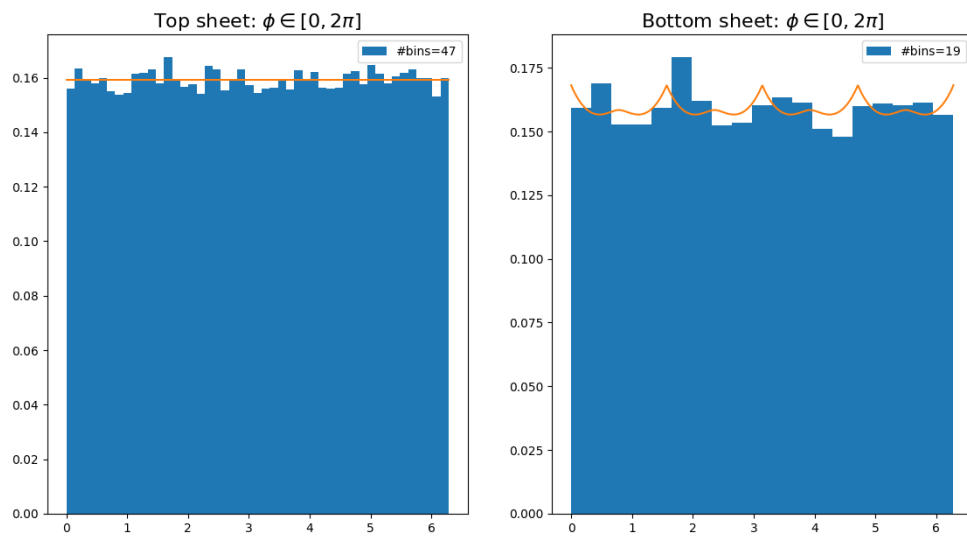


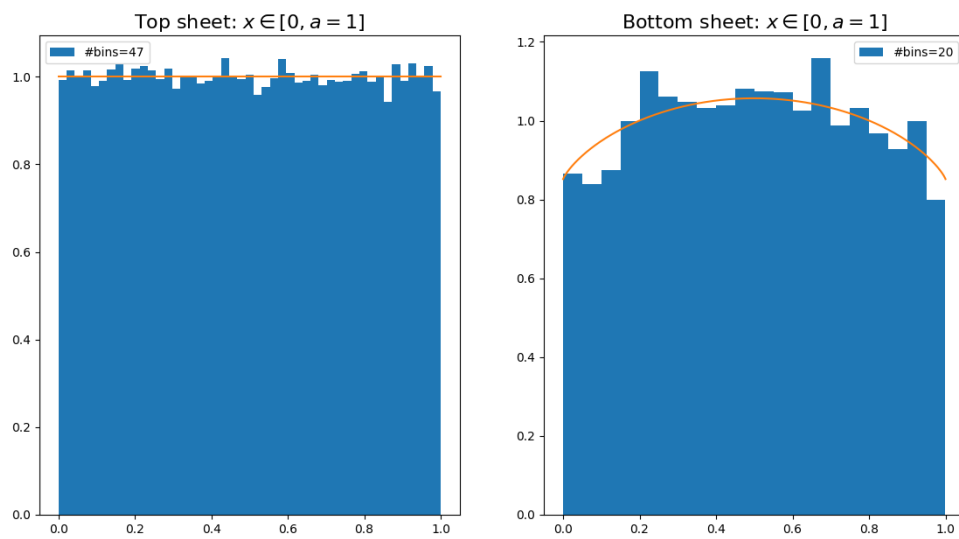
Figure 6: $n = 100$ trajectories of particles



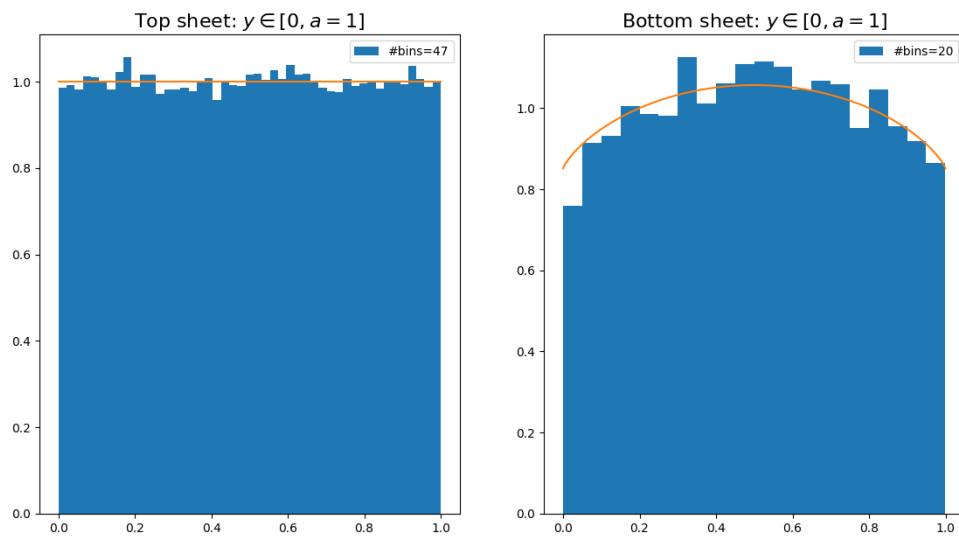
Rescaled Histograms | Samples=100000



Rescaled Histograms | Samples=100000

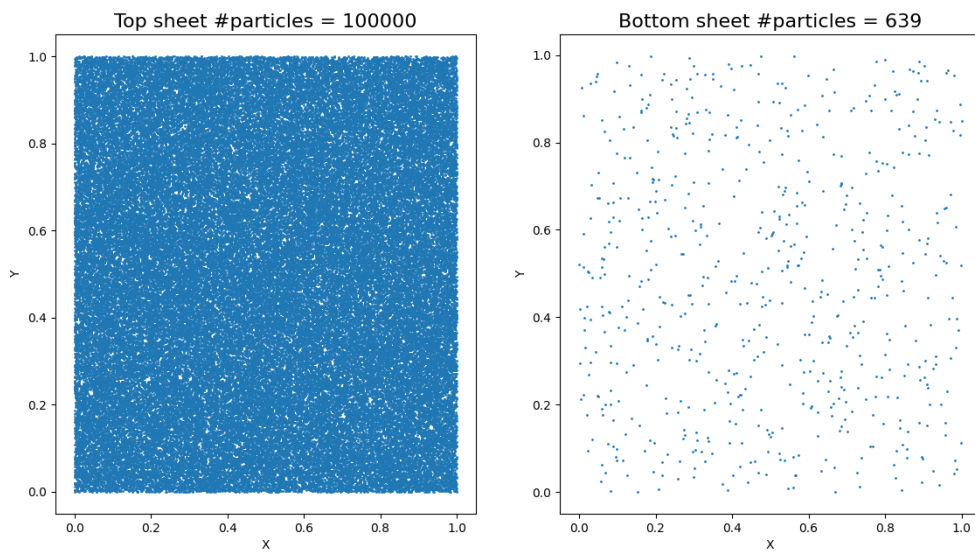


Rescaled Histograms | Samples=100000



Και για $d = 100$, έχουμε ακόμα μικρότερο hit rate άρα και πολύ χειρότερη προσέγγιση της pdf που ακολουθούν οι θέσεις x, y και οι γωνίες θ, ϕ .

Hit both rate = 0.639%



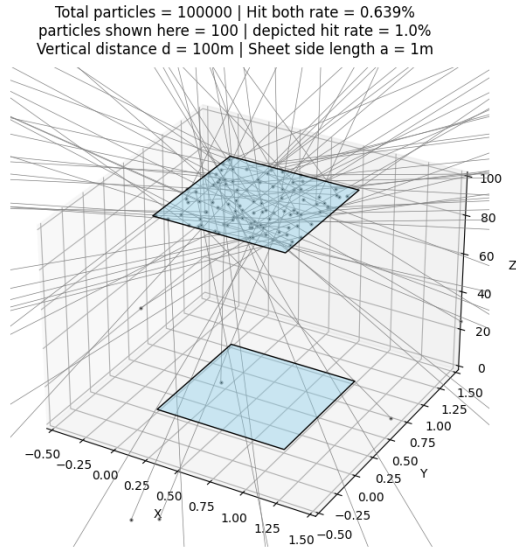
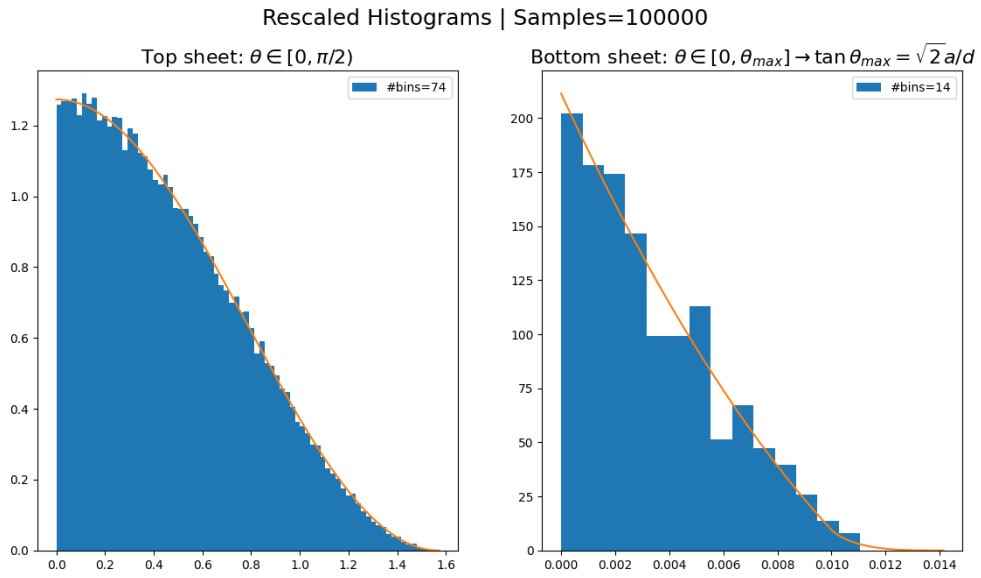
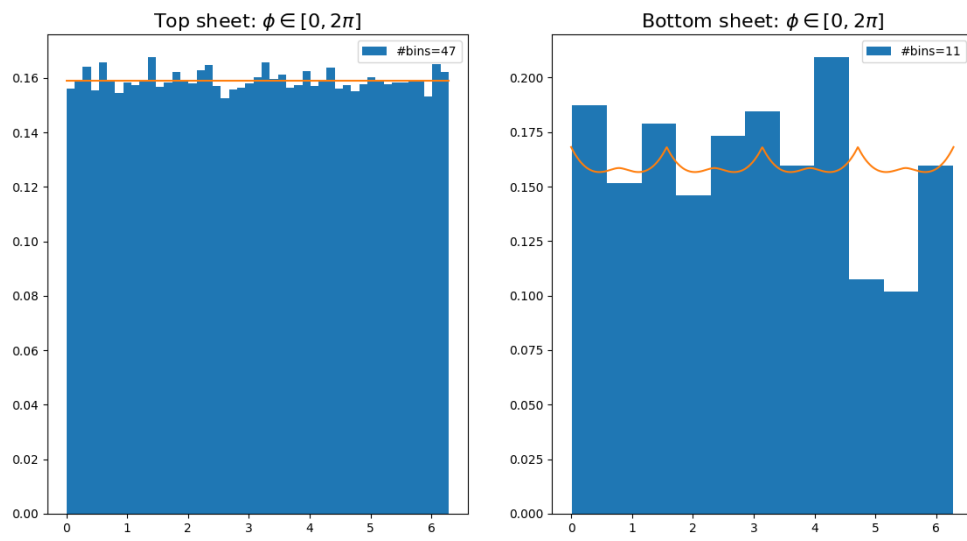


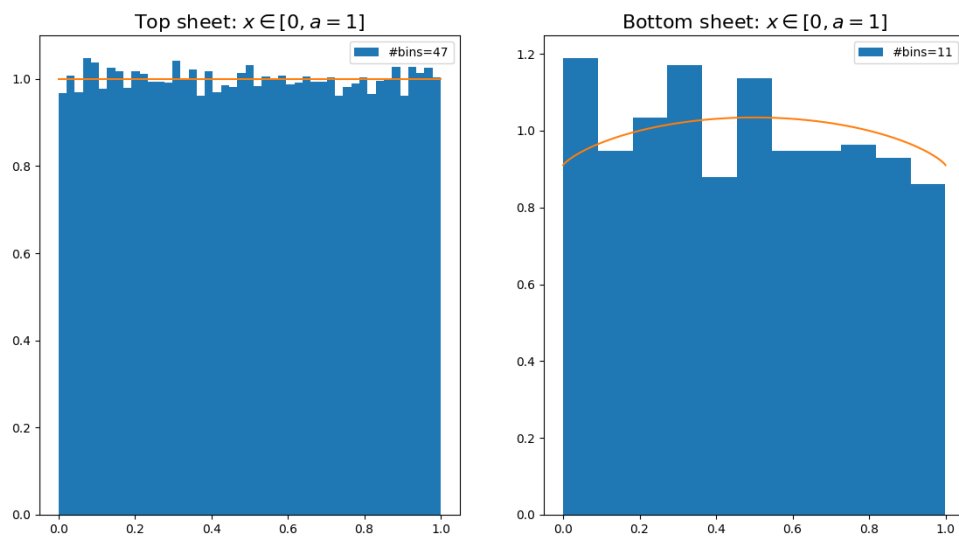
Figure 7: $n = 100$ trajectories of particles



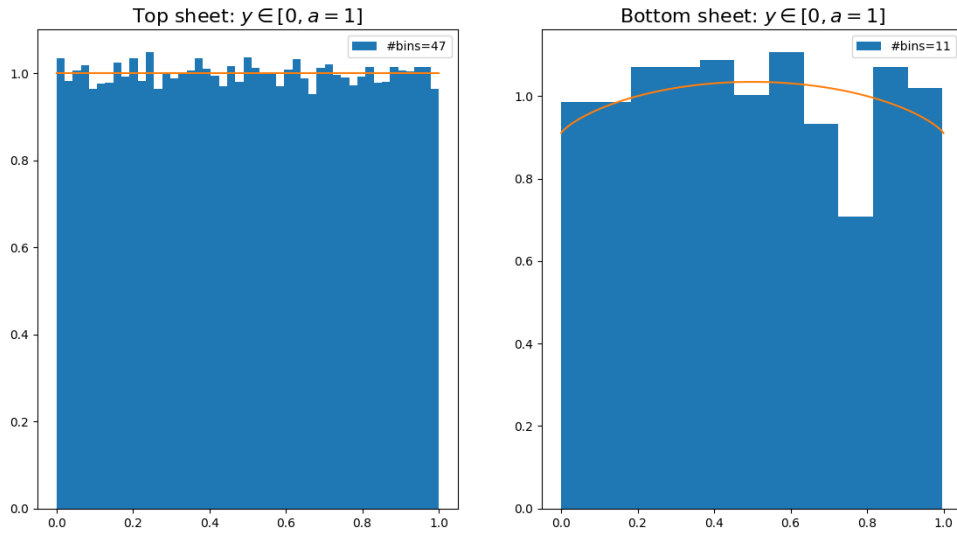
Rescaled Histograms | Samples=100000



Rescaled Histograms | Samples=100000



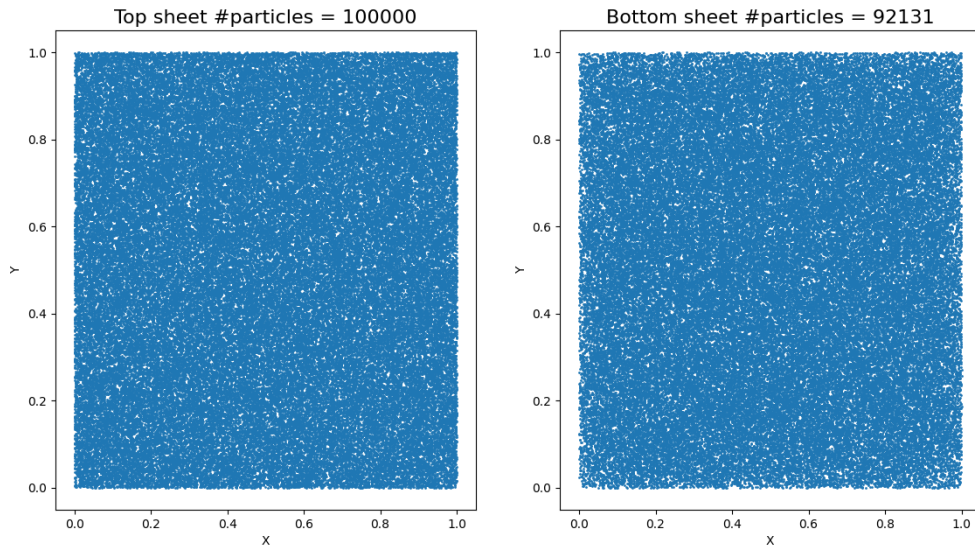
Rescaled Histograms | Samples=100000



Επειδή οι θέσεις x, y στην κάτω πλάκα έχουν ίδια κατανομή, από τα τελευταία σχήματα επιβεβαιώνεται η μεγάλη ευαισθησία του ιστογράμματος λόγω του μικρού διαθέσιμου αριθμού δειγμάτων/σωματιδίων στην κάτω πλάκα.

Τέλος, στον αντίποδα της τελευταίας δοκιμής, δείχνουμε και τι συμβαίνει όταν $d = 0.1$, δηλαδή για μικρή τιμή του λόγου d/a .

Hit both rate = 92.131%



Total particles = 100000 | Hit both rate = 92.131%
particles shown here = 100 | depicted hit rate = 94.0%
Vertical distance $d = 0.1\text{m}$ | Sheet side length $a = 1\text{m}$

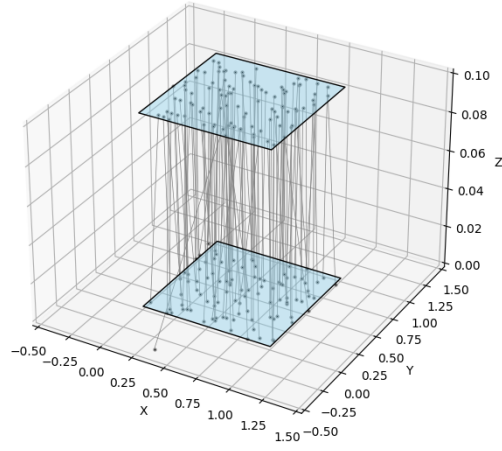
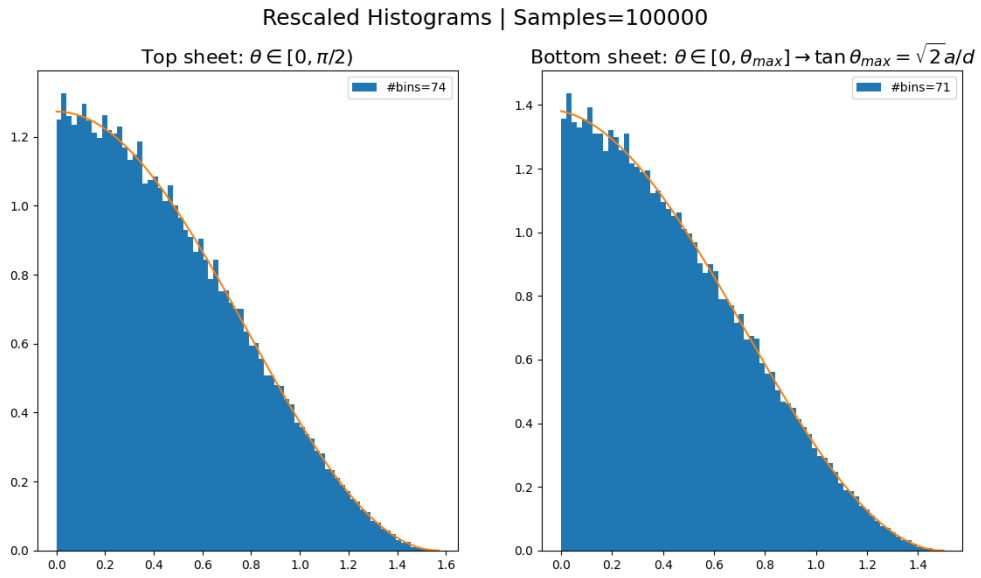
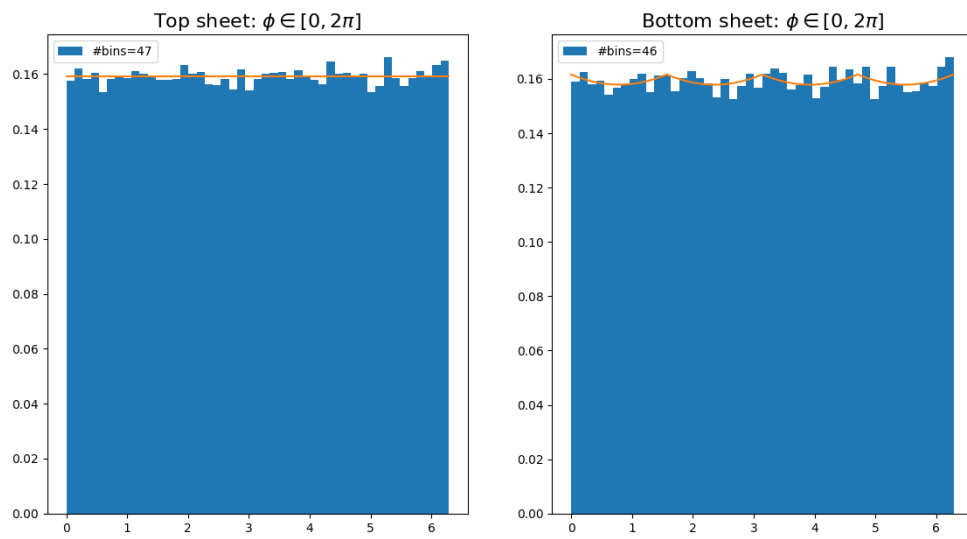


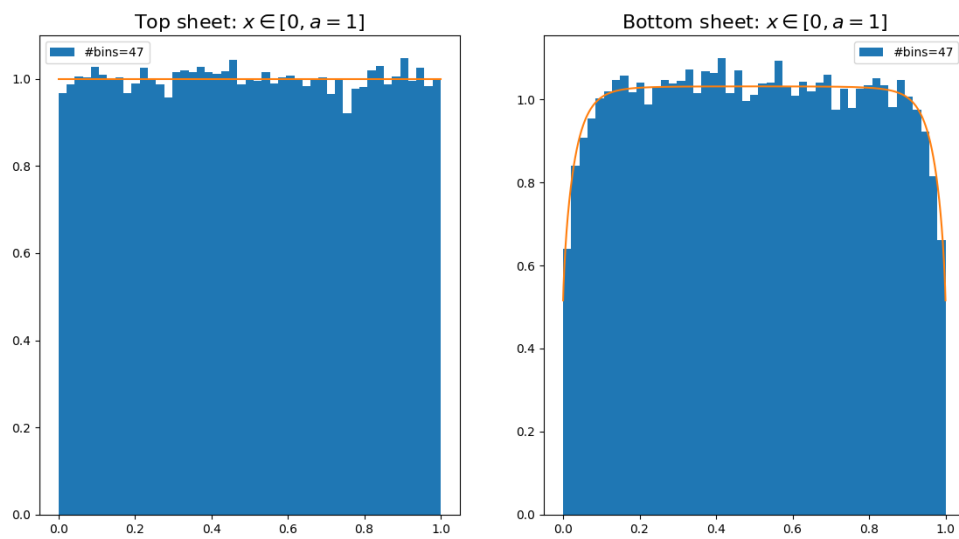
Figure 8: $n = 100$ trajectories of particles



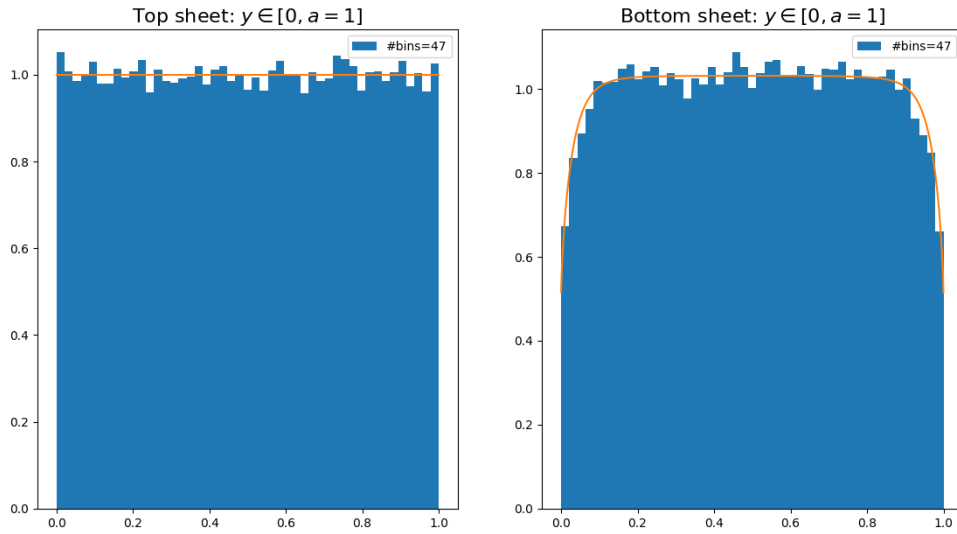
Rescaled Histograms | Samples=100000



Rescaled Histograms | Samples=100000



Rescaled Histograms | Samples=100000



Όπως φαίνεται από τα παραπάνω έχουμε πολύ υψηλό hit rate και μεγάλο διαθέσιμο αριθμό δειγμάτων τόσο στην πάνω όσο και στην κάτω πλάκα, με αποτέλεσμα να έχουμε πολύ καλή συμφωνία των ιστογραμμάτων με τις κατανομές pdf των εκάστοτε εμπλεκόμενων τυχαίων μεταβλητών θέσης ή γωνίας. Μάλιστα όσο μικραίνει ο λόγος d/a , τα ιστογράμματα που αντιστοιχούν στην κάτω πλάκα πλησιάζουν όλο και περισσότερο την μορφή που έχουν τα ιστογράμματα που αναφέρονται στα αρχικά μόνια της άνω πλάκας. Και για $d = 0$ ταυτίζονται πλήρως μιας και $x_b = x_t, y_b = y_t$.